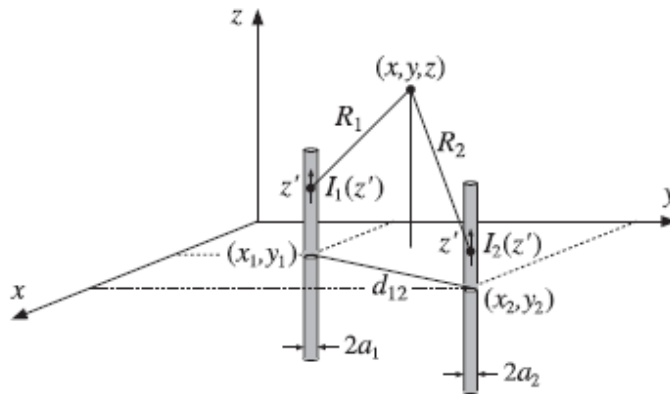


## II.1 Couplage d'un réseau de deux antennes

Considérons le cas d'un réseau linéaire parallèle arbitraire d'antennes. La Figure II.1 montre deux dipôles parallèles dirigés selon  $z$  avec leurs centres situés en  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ .

Nous assumons que les dipôles sont alimentés en leur centre par les tensions de générateur  $V_1, V_2$ . Soit  $I_1(z), I_2(z)$  les courants induits sur les dipôles par les générateurs et par leur interaction mutuelle et  $h_1, h_2$  sont les demi-longueurs des antennes, et  $a_1, a_2$  leurs rayons respectifs. Alors, en assumant le modèle de l'antenne filaire mince, la densité de courant totale aura seulement a composant  $z$  donné par [5] :

$$J_z(x', y', z') = I_1(z')\delta(x' - x_1)\delta(y' - y_1) + I_2(z')\delta(x' - x_2)\delta(y' - y_2) \quad (\text{II-1})$$



**Figure II.1** Rangée de deux antennes linéaires.

Alors Le potentiel vecteur magnétique sera :

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{e^{-jkR}}{R} J_z(x', y', z') dx' dy' dz', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Substituons (II-1) et intégrant sur  $x'$  et  $y'$  on aura :

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h_1}^{h_1} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} I_1(z') dz' + \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h_2}^{h_2} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} I_2(z') dz' \quad (\text{II-2})$$

Avec :

$$R_1 = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

La composante  $z$  du champ électrique induit sera donc :

$$j\omega\epsilon\mu E_z = (\partial_z^2 + k^2)A_z$$

En effectuant un changement du potentiel vecteur  $V(x, y, z) = 2jcA_z(x, y, z)$ , on aura donc :

$$V(x, y, z) = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h_1}^{h_1} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} I_1(z') dz' + \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h_2}^{h_2} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} I_2(z') dz' \quad (II-3)$$

$$(\partial_z^2 + k^2)V(x, y, z) = -2k E_z(x, y, z) \quad (II-4)$$

On note par  $V_1(z)$  et  $V_2(z)$  les valeurs de  $V(x, y, z)$  sur les surface de l'antenne #1 et #2 respectivement, nous obtenons à partir de (II-3) :

$$\begin{aligned} V_1(z) &= V_{11}(z) + V_{12}(z) \\ V_2(z) &= V_{21}(z) + V_{22}(z) \end{aligned} \quad (II-5)$$

Les composantes  $z$  du champ électrique induit sur les surfaces de l'antenne #1 et #2 sont obtenues par l'application de (II-4) à chaque terme de (II-5) :

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_{11}(z) + E_{12}(z) \\ E_2(z) &= E_{21}(z) + E_{22}(z) \end{aligned} \quad (II-6)$$

Où nous définissons, pour  $p, q = 1, 2$  :

$$V_{pq}(z) = \int_{-h_q}^{h_q} Z_{pq}(z - z') I_q(z') dz' \quad (II-7)$$

$$(\partial_z^2 + k^2)V_{pq}(z) = -2k E_{pq}(z) \quad (II-8)$$

et le noyau d'impédance donné par :

$$Z_{pq}(z-z') = \frac{j\eta}{2\pi} G_{pq}(z-z') = \frac{j\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkR_{pq}}}{R_{pq}}, \quad R_{pq} = \sqrt{(z-z')^2 + d_{pq}^2} \quad (\text{II-9})$$

Si  $p \neq q$ , alors  $d_{pq}$  est la distance  $xy$  entre les antennes et si  $p = q$  alors  $d_{pq}$  sera le rayon de l'antenne correspondante c'est-à-dire :

$$d_{12} = d_{21} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad d_{11} = a_1, \quad d_{22} = a_2 \quad (\text{II-10})$$

Ainsi,  $E_{pq}(z)$  est la composant du champ électrique induite sur l'antenne  $p$  par le courant  $I_q(z)$  sur l'antenne  $q$ .

Maintenant, pour vérifier la condition du champ électrique tangentiel nul sur la surface de la première antenne, le champ électrique  $E_z$  doit annuler l'effet du champ engendré par le champ du générateur de tension (delta-gap generator), soit,  $E_1(z) = -E_{1,\text{in}}(z) = -V_1\delta(z)$ . Similairement, sur la surface de la deuxième antenne, nous devons avoir  $E_2(z) = -E_{2,\text{in}}(z) = -V_2\delta(z)$ , donc l'équation (II-6) devient :

$$\begin{aligned} E_{11}(z) + E_{12}(z) &= -V_1\delta(z) \\ E_{21}(z) + E_{22}(z) &= -V_2\delta(z) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

On combine l'équation (II-11) avec l'équation (II-7) on obtient la version couplée des équations Hallén – Pocklington :

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 + k^2)[V_{11}(z) + V_{12}(z)] &= 2kV_1\delta(z) \\ (\partial_z^2 + k^2)[V_{21}(z) + V_{22}(z)] &= 2kV_2\delta(z) \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

On peut définir l'impédance mutuelle entre l'antenne  $p$  et l'antenne  $q$  comme suit, pour  $p, q = 1, 2$  :

$$Z_{pq} = -\frac{1}{I_p I_q} \int_{-h_p}^{h_p} E_{pq}(z) I_p(z) dz \quad (\text{II-13})$$

où plus explicitement

$$Z_{11} = -\frac{1}{I_1 I_1} \int_{-h_1}^{h_1} E_{11}(z) I_1(z) dz, \quad Z_{12} = -\frac{1}{I_1 I_2} \int_{-h_1}^{h_1} E_{12}(z) I_1(z) dz$$

$$Z_{21} = -\frac{1}{I_2 I_1} \int_{-h_2}^{h_2} E_{21}(z) I_2(z) dz, \quad Z_{22} = -\frac{1}{I_2 I_2} \int_{-h_2}^{h_2} E_{22}(z) I_2(z) dz$$

En utilisant les définitions et l'équation (II-11), on trouve :

$$Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = -\frac{1}{I_1} \int_{-h_1}^{h_1} [E_{11}(z) + E_{12}(z)] I_1(z) dz$$

$$= -\frac{1}{I_1} \int_{-h_1}^{h_1} [-V_1 \delta(z)] I_1(z) dz = \frac{1}{I_1} V_1 I_1(0) = V_1$$

Où par définition  $I_1(0) = I_1$ .

L'impédance mutuelle définie en (II-13) satisfait la condition de symétrie du théorème de réciprocité,  $Z_{pq} = Z_{qp}$ . Pour monter cette condition explicitement, on remplace  $E_{pq}(z)$  par les équations (II-8) et (II-7), et obtenir la forme symétrique alternative suivante :

$$Z_{pq} = \frac{1}{2k} \int_{-h_p}^{h_p} \int_{-h_q}^{h_q} \frac{I_p(z) I_q(z')}{I_p I_q} (\partial_z^2 + k^2) Z_{pq}(z - z') dz dz' \quad (\text{II-14})$$

Dans ce qui suit, on va assumer que les courants sont sinusoïdaux, soit pour  $p = 1, 2$  :

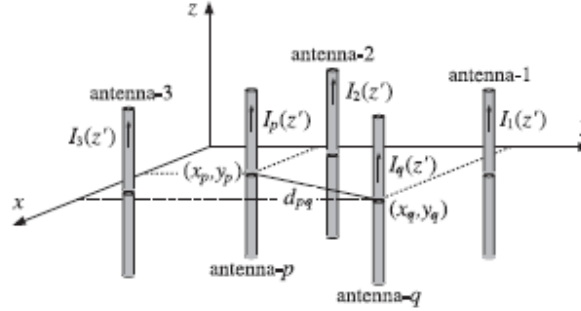
$$I_p(z) = I_p \frac{\sin(k(h_p - |z|))}{\sin kh_p}$$

## II.2 Réseaux planaires de dipôles parallèles

Essayons maintenant de généraliser l'étude précédente valable, pour deux antennes, au cas de plusieurs antennes. La Figure II.2 montre le cas de  $K$  dipôles parallèles (arrangement

côte à côte), avec la position des centres  $(x_p, y_p)$  et les tensions d'entrée, longueurs, demi-longueurs, et rayons  $V_p, l_p, h_p, a_p$  où  $p = 1, 2, \dots, K$

On peut généraliser les équations de Hallén- Pocklington (II-14) pour K Antennes comme suit :



**Figure II.2** Rangée bidimensionnelle de dipôles parallèles.

$$\left(\partial_z^2 + k^2\right) \sum_{q=1}^K V_{pq}(z) = -2k \sum_{q=1}^K E_{pq}(z) = 2kV_p \delta(z), \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-15})$$

Où  $V_{pq}(z)$  est défini par les équations (II-13) et (II-14), Les distances mutuelles sont données par :

$$\begin{cases} \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}, & \text{si } p \neq q \\ a_p, & \text{si } p = q \end{cases} \quad (\text{II-16})$$

En multipliant l'équation (II-15) par  $I_p(z)$ , intégrant sur la longueur de l'antenne  $p$  et utilisant les définitions de l'impédance mutuelle (II-13), on obtient les équations suivantes pour les K antennes :

$$V_p = \sum_{q=1}^K Z_{pq} I_q, \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-17})$$

Où  $I_q$  est le courant d'entrée au centre de l'antenne  $q$ . On peut réécrire l'équation (II-17) sous une forme matricielle compacte comme suit :

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{I} \quad (\text{II-18})$$

Où  $\bar{\mathbf{Z}}$  est la matrice d'impédance. Par exemple, pour  $K = 4$ , nous avons

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{I}$$

On note que  $\bar{\mathbf{Z}}$  est une matrice symétrique,  $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^T$ , conséquence de la relation de réciprocité  $Z_{pq} = Z_{qp}$ .

Donc, soit donnée les tensions d'entrée  $V_p$ , l'équation (II-18) peut être résolue en obtenant les courants d'entrée  $I_p$ , ce qui rend le courant  $I_p(z)$  complètement défini. A partir de la connaissance du courant  $I_p(z)$ , on peut obtenir le diagramme de rayonnement du réseau. En effet, Les expressions du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{H}$  sont données par [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\theta} E_\theta = \hat{\theta} jk\eta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} F_z(\theta, \phi) \sin \theta \\ \mathbf{H} &= \hat{\phi} H_\phi = \hat{\phi} jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} F_z(\theta, \phi) \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

Où le vecteur de rayonnement  $\vec{F} = F_z \hat{z}$  a seulement la composant  $z$  et est donné par :

$$F_z(\theta, \phi) = \int_V J_z(\mathbf{r}') e^{jkr'} d\mathbf{r}' \quad (\text{II-20})$$

Mais dans l'approximation des antennes filaires minces, la densité de courant total du réseau est :

$$J_z(\mathbf{r}') = \sum_{p=1}^K I_p(z') \delta(x' - x_p) \delta(y' - y_p)$$

Insérons l'expression de  $J_z(\mathbf{r}')$  dans (II-20) et performons l'intégration sur  $x', y'$  on obtient alors :

$$F_z(\theta, \phi) = \sum_{p=1}^K e^{jk_x x_p + jk_y y_p} \int_{-h_p}^{h_p} I_p(z') e^{jk_z z'} dz' \quad (\text{II-21})$$

Utilisant  $I_p(z') = I_p \frac{\sin(k(h_p - |z'|))}{\sin kh_p}$  et  $k_z = k \cos \theta$ , on obtient :

$$F_z(\theta, \phi) = \sum_{p=1}^K e^{jk_x x_p + jk_y y_p} \frac{2I_p}{k \sin kh_p} \frac{\cos(kh_p \cos \theta) - \cos kh_p}{\sin^2 \theta} \quad (\text{II-22})$$

L'intensité de rayonnement est donnée par [5] :

$$U(\theta, \phi) = \frac{\eta k^2}{32\pi^2} |\sin \theta F_z(\theta, \phi)|^2$$

En remplaçant  $k_x$  par  $k \sin \theta \cos \phi$  et  $k_y$  par  $k \sin \theta \sin \phi$  on obtient :

$$U(\theta, \phi) = \frac{\eta}{8\pi^2} \left| \sum_{p=1}^K I_p \frac{\cos(kh_p \cos \theta) - \cos kh_p}{\sin kh_p \sin \theta} e^{jk \sin \theta (x_p \cos \phi + y_p \sin \phi)} \right|^2 \quad (\text{II-23})$$

Ainsi, le gain normalisé du réseau sera :

$$g(\theta, \phi) = \left| \sum_{p=1}^K I_p \frac{\cos(kh_p \cos \theta) - \cos kh_p}{\sin kh_p \sin \theta} e^{jk \sin \theta (x_p \cos \phi + y_p \sin \phi)} \right|^2 \quad (\text{II-24})$$

Les équations (II-18) et (II-24) fournissent une solution complète au problème de couplage dans les réseaux d'antennes, basée sur l'approximation sinusoïdale des courants. Pour le cas particulier d'antennes identiques, on peut écrire l'équation (II-24) sous forme de multiplication de deux termes ; facteur de réseau et facteur d'élément seul :

$$g(\theta, \phi) = \left| \sum_{p=1}^K I_p e^{jk \sin \theta (x_p \cos \phi + y_p \sin \phi)} \right|^2 \left| \frac{\cos(kh_p \cos \theta) - \cos kh_p}{\sin kh_p \sin \theta} \right|^2 \quad (\text{II-25})$$

### II.3 Equation de Hallén pour les antennes couplées

Dans cette section nous procédons à la résolution numérique de l'équation de Hallén (II-7)-(II-9). Pour l'antenne  $p$ , on a [5]:

$$(\partial_z^2 + k^2)V_p(z) = 2kV_p\delta(z), \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-26})$$

On  $V_p(z)$  est défini comme la somme des vecteurs potentiels dus aux courants sur toutes les antennes :

$$V_p(z) = \sum_{q=0}^K V_{pq}(z) = \sum_{q=0}^K \int_{-h_q}^{h_q} \mathbf{Z}_{pq}(z - z') I_q(z') dz' \quad (\text{II-27})$$

Avec :

$$\mathbf{Z}_{pq}(z - z') = \frac{j\eta}{2\pi} G_{pq}(z - z') = \frac{j\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad R = \sqrt{(z - z')^2 + d_{pq}^2} \quad (\text{II-28})$$



et  $d_{pq}$  sont les distances mutuelles ou les rayons, comme défini dans l'équation (II-16) En suivant la discussion dans [5, chap20], la solution de l'équation (II-26) est de la forme :

$$V_p(z) = C_p \cos kz + V_p \sin k|z|, \quad -h_p \leq z \leq h_p \quad (\text{II-29})$$

où on assume que toutes les antennes sont alimentées par le milieu, et par conséquent,  $V_p(z)$  est paire en  $z$ . En combinant (II-29) avec (II-27), on obtient le système couplé des équations de Hallén, pour  $p=1,2,\dots,K$  :

$$\sum_{q=0}^K \int_{-h_q}^{h_q} Z_{pq}(z-z') I_q(z') dz' = C_p \cos kz + V_p \sin k|z| \quad (\text{II-30})$$

Les  $k$  constantes  $C_1, C_2, \dots, C_K$  sont déterminés en imposant les conditions aux limites  $I_p(h_p) = 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, K$ . Pour résoudre ce système, on applique le développement en série de fonctions impulsion [5, chap20-eq8.2]. Pour un souci de simplicité on prend  $N = 2M+1$  échantillons sur chaque antenne. L'espacement entre les points échantillons est différent entre les différentes antennes, car les longueurs de ces dernières sont différentes. Pour le type -1 d'échantillonnage, on a sur l'antenne  $q$ , pour  $q = 1, 2, \dots, K$  :

$$z_m = m\Delta z_q, \quad \Delta z_q = \frac{h_q}{M+0.5} = \frac{l_q}{N}, \quad -M \leq m \leq M \quad (\text{II-31})$$

Par conséquent, le développement en série en fonction impulsion pour le  $q^{\text{ieme}}$  courant doit utiliser une impulsion carrée de largeur  $\Delta z_q$ . On note cette impulsion par  $\Delta_q(z)$  et on l'a définie comme dans l'équation [5, chap20-eq8.1] avec  $\Delta z = \Delta z_q$ . Alors, on donne le courant par :

$$I_q(z') = \sum_{m=-M}^M I_q(z_m) \Delta_q(z' - z_m), \quad q = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-32})$$

Si on utilise (II-32) et l'équation (II-30) le long de l'antenne p, i.e .aux point  $z = z_n = n\Delta z_p$ , pour  $-M \leq n \leq M$ , on obtient le système discrétisé :

$$\sum_{q=0}^K \int_{-h_q}^{h_q} \sum_{m=-M}^M I_q(z_m) Z_{pq}(z_n - z') \Delta_q(z' - z_m) dz' = C_p \cos kz_n + V_p \sin k|z_n|$$

On définit la matrice impédance  $(N \times N)$   $Z_{pq}$  avec le nm<sup>ième</sup> élément :

$$Z_{pq}(n, m) = \int_{-h_q}^{h_q} Z_{pq}(z_n - z') \Delta_q(z' - z_m) dz', \quad -M \leq n, m \leq M$$

ou encore sous la forme :

$$Z_{pq}(n, m) = \Delta z_q \int_{-1/2}^{1/2} Z_{pq}(z_n - z_m - x\Delta z_q) dx = \frac{j\eta\Delta z_q}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{-jkR}}{R} dx \quad (\text{II-33})$$

avec :

$$R = \sqrt{d_{pq}^2 + (n\Delta z_p - m\Delta z_q - x\Delta z_q)^2} \quad (\text{II-34})$$

En posant  $I_q(m) = I_q(z_m)$ , le système de Hallén devient :

$$\sum_{q=0}^K \sum_{m=-M}^M Z_{pq}(n, m) I_q(m) = C_p \cos kz_n + V_p \sin k|z_n| \quad (\text{II-35})$$

où  $p = 1, 2, \dots, K$ . et, dans une forme compacte :

$$\sum_{q=0}^K Z_{pq} \mathbf{I}_q = C_p \mathbf{c}_p + V_p \mathbf{s}_p \quad (\text{II-36})$$

où on définit les vecteurs de dimension N :

$$\mathbf{I}_q = \begin{bmatrix} I_q(M) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_q(1) \\ I_q(0) \\ I_q(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_q(M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} \cos kz_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos kz_1 \\ \cos kz_0 \\ \cos kz_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos kz_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_p = \begin{bmatrix} \sin kz_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin kz_1 \\ \sin kz_0 \\ \sin kz_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin kz_M \end{bmatrix} \quad (\text{II-37})$$

et on a utilisé la symétrie, en z. Les vecteurs  $\mathbf{c}_p$  et  $\mathbf{s}_p$  dépend de p à travers l'espacement entre les échantillons dans z.  $z_n = n\Delta z_p$ ,  $-M \leq n \leq M$ , où  $\Delta z_p = h / (M + 0.5)$ . Le système (II.36) fournit K équations matricielles couplées par les quelles on détermine les K vecteurs de courant:  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_K$  sur chaque antenne. Les matrices  $Z_{pq}$  d'ordre  $N \times N$  ne sont pas Toeplitz, même si les antennes sont identiques, dans ce cas  $\Delta z_p = \Delta z_q$  et la quantité R dans l'équation (II-34) dépend seulement de la différence (n-m). Bien sur, pour  $p = q$ ,  $Z_{pq}$  est Toeplitz et symétrique. Cependant, la matrice  $Z_{pq}$  est renversement invariant à cause de la propriété  $Z_{pq}(n, m) = Z_{pq}(-n, -m)$  qui découle de l'équation (II-33). Par conséquent, le système matriciel (II-36) peut être tronqué par la moitié, en utilisant la procédure du [5, 20.7].

Ici, chaque matrice  $Z_{pq}$  ( $N \times N$ ) est réduite à  $(M + 1) \times (M + 1)$  par le même processus. Le système résultant est identique à (II-36), sauf que les constantes du membre droit sont essentiellement la moitié de (II-37).

$$\mathbf{I}_q = \begin{bmatrix} I_q(0) \\ I_q(1) \\ \vdots \\ I_q(M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} \cos kz_0 \\ \cos kz_1 \\ \vdots \\ \cos kz_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_p = \begin{bmatrix} \sin kz_0 \\ \sin kz_1 \\ \vdots \\ \sin kz_M \end{bmatrix} \quad (\text{II-38})$$

En particulier, si les antennes sont identiques, le processus de réduction est encore plus efficace en utilisant les propriétés de Toeplitz-Hankel des matrices, comme il est discuté dans [5, exp20.81]. Dans tous les cas on assume que le système (II-36) est tronqué par la moitié. Si les constantes  $C_p$  sont connues en l'écrivant sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{c} + \mathbf{V}\mathbf{s} \quad (\text{II-39})$$

où  $\mathbf{Z}$  représente le block matriciel de dimension  $K \times K$  dont les éléments sont des matrices  $pq$  qui représente la matrice de dimension  $(M+1) \times (M+1)$ , et  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}$  sont les vecteurs concaténés de  $\mathbf{I}_p$ ,  $\mathbf{c}_p$ ,  $\mathbf{s}_p$ .

Par exemple, dans le cas  $K=3$ , le système (II-36) donne :

$$\begin{aligned} Z_{11}\mathbf{I}_1 + Z_{12}\mathbf{I}_2 + Z_{13}\mathbf{I}_3 &= C_1\mathbf{c}_1 + V_1\mathbf{s}_1 \\ Z_{21}\mathbf{I}_1 + Z_{22}\mathbf{I}_2 + Z_{23}\mathbf{I}_3 &= C_2\mathbf{c}_2 + V_2\mathbf{s}_2 \\ Z_{31}\mathbf{I}_1 + Z_{32}\mathbf{I}_2 + Z_{33}\mathbf{I}_3 &= C_3\mathbf{c}_3 + V_3\mathbf{s}_3 \end{aligned}$$

qui peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & C_2\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & C_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & V_2\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & V_3\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix}$$

Avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité d'ordre  $(M+1) \times (M+1)$ .

Ensuite, on discute la détermination des constants  $\mathbf{c}_p$ . La condition  $I_p(M) = 0$  peut être écrite vectoriellement sous la forme  $\mathbf{u}^T \mathbf{I}_p = 0$ , avec  $\mathbf{u} = [0, \dots, 0, 1]^T$ , séparons maintenant le  $p^{\text{ième}}$  terme de la  $p^{\text{ième}}$  équation dans (II-36), on aura :

$$Z_{pp} \mathbf{I}_p + \sum_{p \neq q} Z_{pq} \mathbf{I}_q = C_p \mathbf{c}_p + V_p \mathbf{s}_p \quad (\text{II-40})$$

En solvant pour  $\mathbf{I}_p$  et multiplions par  $\mathbf{u}^T$ , on obtient la condition :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{I}_p = C_p \mathbf{u}^T Z_{pp}^{-1} \mathbf{c}_p + V_p \mathbf{u}^T Z_{pp}^{-1} \mathbf{s}_p - \sum_{q \neq p} \mathbf{u}^T Z_{pp}^{-1} Z_{pq} \mathbf{I}_q = 0$$

Définissons la quantité  $\mathbf{u}_p = Z_{pp}^{-1} \mathbf{u}$ , en tire alors  $C_p$  :

$$C_p = \frac{1}{\mathbf{u}_p^T \mathbf{c}_p} \left( \sum_{q \neq p} \mathbf{u}_p^T Z_{pq} \mathbf{I}_q - V_p \mathbf{u}_p^T \mathbf{s}_p \right)$$

Portons cette équation de  $C_p$  dans (II-40), et réorganisons les termes, on aura :

$$Z_{pp} \mathbf{I}_p + \sum_{q \neq p} \left( I - \frac{\mathbf{c}_p \mathbf{u}_p^T}{\mathbf{c}_p^T \mathbf{u}_p} \right) Z_{pq} \mathbf{I}_q = V_p \left( I - \frac{\mathbf{c}_p \mathbf{u}_p^T}{\mathbf{c}_p^T \mathbf{u}_p} \right) \mathbf{s}_p \quad (\text{II-41})$$

Pour simplifier cette équation, on définit les matrices de projection d'ordre  $(M+1) \times (M+1)$  :

$$P_p = I - \frac{\mathbf{c}_p \mathbf{u}_p^T}{\mathbf{c}_p^T \mathbf{u}_p}, \quad p = 1, 2, \dots, K, \quad (\text{II-42})$$

Alors, (II-41) se réécrit dans la forme suivante :

$$Z_{pp} \mathbf{I}_p + \sum_{q \neq p} p_p Z_{pq} \mathbf{I}_q = V_p p_p s_p \quad (\text{II-43})$$

En éliminant  $C_p$  par l'utilisation de la condition à la limite, remplaçant les matrices impédance  $Z_{pq}$  par leur projections

$$\bar{Z}_{pq} = \begin{cases} Z_{pp}, & \text{pour } q = p \\ p_p Z_{pq}, & \text{pour } q \neq p \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

et le terme  $s_p$  par son projection,  $\bar{s}_p = p_p s_p$ , alors, l'équation (II-43) pour être écrite sous la forme :

$$\sum_{q=0}^K \bar{Z}_{pq} \mathbf{I}_q = V_p \bar{s}_p, \quad p = 1, 2, \dots, K \quad (\text{II-45})$$

où sous une forme plus compacte :

$$\bar{\mathbf{Z}} \mathbf{I} = V \bar{\mathbf{s}} \quad (\text{II-46})$$

avec la solution :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{I}_K \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} V \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \bar{s}_1 \\ V_2 \bar{s}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_K \bar{s}_K \end{bmatrix} \quad (\text{II-47})$$