UNIVERSITÉ DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrète

Par: Maafi Henia

Sujet:

Etude de l'équation dite "porous media dual"

Dirigé par : Pr. Benhamidouche Nouredine

Promotion: 2012/2013

Remerciements

C*e mémoire est toujours une version provisoire. Malgré tout le soin apporté à sa rédaction, il est possible que quelques erreurs soient toujours présentes dans le mémoire.*

E*n tout premier lieu, Je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

M*a plus grande gratitude va à mon encadrant Pr.N.BENHAMIDOUCHE pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée. Je vais profiter pendant long temps du savoir et savoir-faire dont j'ai pu bénéficier au cours de nombreuses discussions.*

A*vec remerciements les plus profonds à nos enseignants qui nous guident durant toutes nos années de formation.*

M*es remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste mémoire.*

Résumé

Ce mémoire concerne l'étude de l'équation de porous media duale, nous utilisons la méthode auto similaire classique pour étudier cette équation.

Dans le premier chapitre nous avons étudié l'auto similarité de l'équation de porous media duale et détermine le profil φ et transformer à une autre équation qui est l'équation de porous media classique.

Après dans le deuxième chapitre notre étude est basée sur l'équation de porous media classique, on va chercher les solutions auto similaires pour le premier et la deuxième valeur propre.

Finalement nous étudions les différentes valeurs de la troisième valeur propres selon les différentes valeurs de m

Mots clés :

Auto-similarité, équation porous media, porous media duale, valeurs propres

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles ont beaucoup d'intérêt, en mathématique, en physique et dans d'autres domaines.

Les équations liées à la mécanique des fluides sont étudiées par plusieurs mathématiciens, parmi ces équations on peut citer l'équation des milieux poreux et son duale.

Le problème des milieux poreux a été étudié par plusieurs auteurs on peut citer: Aronson, Vazquez, Hulshof etc...

Dans ce mémoire on va étudier le problème d'existence des solutions auto similaires de l'équation de porous media conjuguée.

On va détailler le travail réalisée par Vazquez, Hulshof et Francisco [*A very singular solution for the dual porous medium equation and the asymptotic behaviour of general solutions*] qui va consister la base de notre travail.

Le principe consiste à transformer cette équation à un problème de porous media classique, l'étude se fera selon les différentes valeurs propres notées k et l'ordre m de l'équation.

Il claire que pour $m = 1$ on a l'équation de la chaleur.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres

Dans le premier chapitre nous donnons la définition de cette équation, le type de solution auto similaire recherchée, nous donnons également la condition de similarité liée a cette équation. Ce problème est difficile à résoudre ce qui nous oblige à le transformer au problème classique « *Porous media equation* » par une transformation simple. L'inverse est possible ensuite après l'obtention des résultats.

Dans le deuxième chapitre on étudie le problème transformé.

On l'écrit sous la forme d'un problème à valeurs propres k, on retrouve les différentes solutions de l'équation porous media pour différentes valeurs propres, on trouve aussi la solution de Barenblatt dans le cas de valeur propre d'ordre 1, le cas de valeur propre d'ordre 2, on donne explicitement la solution dipôle.

Dans le troisième chapitre, le travail traite essentiellement le cas de valeur propre d'ordre 3. Le travail élaboré par Vazquez, Hulshof et Francisco [*A very singular solution for the dual porous medium equation and the asymptotic behaviour of general solutions*] qui va consister la base de notre travail. a été détaillé dans l'essentiel en prouvant l'existence de la solution pour certaines valeurs propres supérieur à 2.

Chapitre 1

L'équation de porous media duale

Dans ce chapitre on va présenter tout d'abord l'équation de porous media duale qui est liée à des applications en mécanique des fluides.

Soit l'équation de porous média duale de forme suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^m \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{E}$$

Cette équation est présentée comme le duale de l'équation connue sous le nom de "*porous media equation*" .

Notre objectif est de chercher des solutions "auto similaires" qui peuvent décrire le comportement asymptotique des autres solutions du problème.

Pour admettre ce type de solutions l'équation doit vérifier certaines conditions de similarité.

1.1 Solution auto similaire

Définition 1.1.1 *Une solution auto similaire de l'équation* (E) *est définie comme suit:*

$$v(x,t) = t^{-\alpha}\varphi\left(xt^{-\beta}\right)$$

où α *et* β *sont des exposants de similarité et* φ *le profil de la solution (à déterminer).*

cette solution doit être à support compact.

La condition de similarité

Définition 1.1.2 *Soit $P(x,t,u,u_x,......) = 0$ une équation aux dérivées partielles alors P admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante (d'échelle) sous l'action de dilatation c-à-d si l'on remplace u par $a^\lambda u$ et x par $a^s x$ et t par $a^\gamma t$ on a aussi :$P(a^s x, a^\gamma t, a^\lambda u, ...) = 0$ si $u(x,t)$ est solution de P.*

On va vérifier que l'équation (E) admet une solution auto-similaire.
Soit $v(x,t) \longrightarrow a^\lambda v(a^s x, a^\gamma t)$ alors:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.1}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

on remplace (1.1) et (1.2) dans l'équation (E)

$$a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} = \left(a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^m$$

$$a^{\lambda-\gamma} = a^{m\lambda-2ms}$$

$$\lambda - \gamma = m\lambda - 2ms$$

alors la condition de similarité est:

$$\gamma = \lambda(1-m) + 2ms$$

donc l'équation (E) admet une solution auto-similaire.

1.2 Détermination du profil de la solution

Pour chercher la solution sous la forme $v(x,t) = t^{-\alpha}\varphi\left(xt^{-\beta}\right)$, on doit trouver le profil φ,en remplaçant cette forme de solution dans l'équation (E) ,on obtient ce qui suit :

on pose $\xi = xt^{-\beta}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = t^{-\alpha-1}\left(-\alpha\varphi\left(\xi\right) - \beta\xi\varphi'\left(\xi\right)\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = t^{-\alpha-2\beta}\varphi''\left(\xi\right)$$

alors

$$\left(-\alpha\varphi\left(\xi\right) - \beta\xi\varphi'\left(\xi\right)\right) = t^{-\alpha(m-1)-2m\beta+1}(\varphi''\left(\xi\right))^m \tag{1.3}$$

on dérive formellement par rapport à t

$$0 = \left[\alpha\left(m-1\right) - 2\beta m + 1\right] t^{-\alpha(m-1)-2\beta m}\left(\varphi''\right)^m \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \alpha(m-1) - 2\beta m = 0 \tag{1.5}$$

remplacer (1.5) dans (1.3), on obtien l'équation différentielle suivante:

$$\left(\varphi''\right)^m + \alpha\varphi + \beta\xi\varphi' = 0 \tag{1.6}$$

donc le profil $\varphi = \varphi\left(\xi\right)$ est une solution de l'équation différentielle (1.6).

Il claire qu'il est trés difficile de résoudre cette équation.

Pour cela il est judicieux de transformer l'équation(E) à une équation dite de " porous media equation" qu' on va étudier dans le chapitre 2 .

1.3 Exemple d'auto similarité

Pour $m = 1$ l'équation (E) devient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

on va chercher la condition de similarité

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

cela implique que

$$a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial v}{\partial t}=a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

alors

$$a^{\lambda-\gamma}=a^{\lambda-2s}$$

donc

$$\lambda-\gamma=\lambda-2s$$

implique le résultate suivant est la condition de similarité:

$$\gamma=2s$$

Soit $v(x,t)=t^{-\alpha}\varphi\left(xt^{-\beta}\right)$ la solution auto similaire de l'équation de la chaleur alors:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=t^{-\alpha-1}\left(-\alpha\varphi\left(\xi\right)-\beta\xi\varphi'\left(\xi\right)\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=t^{-\alpha-2\beta}\varphi''\left(\xi\right)$$

donc

$$\left(-\alpha\varphi\left(\xi\right)-\beta\xi\varphi'\left(\xi\right)\right)=t^{-2\beta+1}\varphi''\left(\xi\right) \tag{1.7}$$

on dérive formellement par rapport à t

$$0=\left[-2\beta+1\right]t^{-2\beta}\left(\varphi''\right)^m$$

implique que

$$1-2\beta=0$$

alors

$$\beta=\frac{1}{2}$$

si on remplace le résultat ci dessus dans l'équation (1.7) on obtient:

$$\varphi''+\alpha\varphi+\frac{1}{2}\xi\varphi'=0$$

si $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ alors l'équation différentielle devient :

$$-\varphi''=\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\xi\varphi'$$

donc

$$\frac{1}{2}(\xi\varphi)' = -\varphi''$$

on intègre les deux côtés par rapport à ξ obtient

$$\frac{1}{2}\xi\varphi = -\varphi'$$

donc

$$\frac{1}{2}\xi = -\frac{\varphi'}{\varphi}$$

implique que

$$-\frac{1}{4}\xi^2 + c = \ln\varphi$$

alors

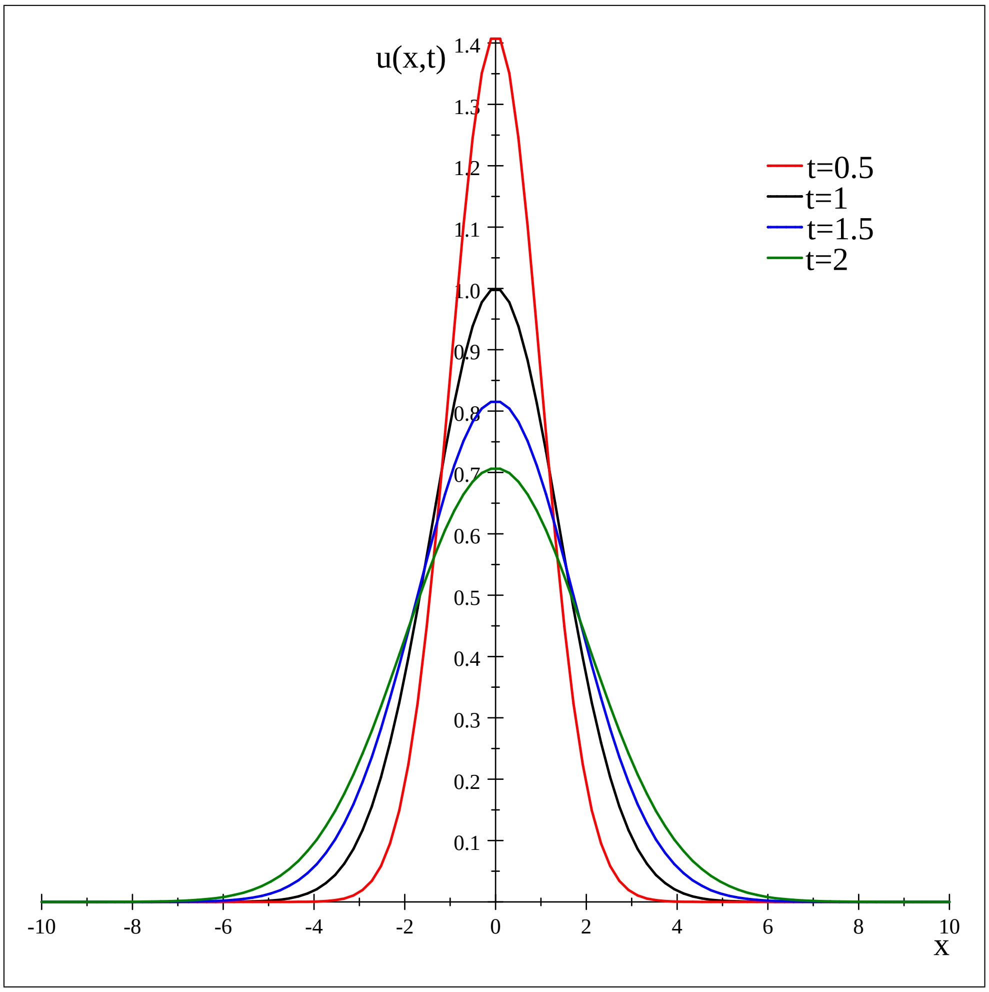
$$\varphi(\xi) = Ke^{\frac{-1}{4}\xi^2}$$

donc la solution $v(x,t)$ s'écrit comme suit

$$v(x,t) = Kt^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

où K est une constant arbitraire.

Si $K = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, la solution $v(x,t)$ est dite solution fondamental de l'équation de la chaleur



La solution fondamentale de l'équation de la chaleur

1.4 Transformation du problème "Porous media duale":

Pour traiter le problème (E), on doit le transformer à un autre problème de porous media classique de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{E'}$$

alors on pose

$$v(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\int\limits_{-\infty}^{s}u(r,t)dr\right]ds$$

telle que

$$\int\limits_{-\infty}^{x}u(s,t)ds=u(x,t)$$

et

$$\int\limits_{-\infty}^{s}u(r,t)dr=u(s,t)$$

on a

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}dr\right]ds=\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{\partial^2 u^m\left(r,t\right)}{\partial r^2}dr\right]ds$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\int\limits_{-\infty}^{s}u(r,t)dr\right]ds)=u^m(x,t)$$

on obtient enfin le problème duale

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^m$$

alors pour résoudre l'équation (E) il suffit de résoudre le problème (E').

Chapitre 2

L'étude du problème des valeurs propres pour l'équation " porous media"

Dans ce chapitre on va étudier l'équation de "porous media " et la transformer à un problème des valeurs propres et aprés on cherche les solutions de ce problème pour la première et la deuxième valeurs propre qui sont réciproquement $k = k_1 = 1$ et $k = k_2 = 2$.

2.1 La solution auto similaire de l'équation "porous media "

On cherche les solutions de l'équation (E') sous forme auto similaire suivante:

$$u(x,t) = t^{-\alpha} U\left(xt^{-\beta}\right) \tag{2.1}$$

où α et β sont des exposants à déterminer,ainssi que le profil U

2.1.1 La condition de similarité

Soit $u(x,t) \longrightarrow a^{\lambda} u(a^s x, a^{\gamma} t)$ alors:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} = a^{m\lambda-2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

on remplace (2.2) et (2.3) dans l'équation (E') on obtient

$$a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial u}{\partial t} = a^{m\lambda-2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alors

$$a^{\lambda-\gamma} = a^{m\lambda-2s}$$

donc

$$\lambda - \gamma = m\lambda - 2s$$

alors la condition de similarité est:

$$\gamma = \lambda(1-m) + 2s$$

2.1.2 Détermination du profil U

Le principe consiste à remplacer la forme (2.1) de solution dans $(E\prime)$:

on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{-\alpha-1}\left(-\alpha U(\xi) - \beta\xi U'(\xi)\right) \tag{2.4}$$

et

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} = t^{-\alpha m-\beta} m\left[t^{-\beta}U''U^{m-1} + (m-1)t^{-\beta}U^{m-2}U'\right] \tag{2.5}$$

si on remplace (2.4) et (2.5) dans (E') on obtient

$$-\alpha U(\xi) - \beta\xi U'(\xi) = mt^{-\alpha(m-1)-2\beta+1}\left[U''U^{(m-1)} + (m-1)U^{(m-2)}\left(U'\right)^2\right] \tag{2.6}$$

on dérive (2.6) formellement par rapport à t, ce qui donne

$$0 = m(-\alpha(m-1) - 2\beta + 1)t^{-\alpha(m-1)-2\beta}\left[U''U^{m-1} + (m-1)U^{m-2}(U')^2\right]$$

cela imlique

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1 \tag{2.7}$$

pour transformer notre problème à celui des valeurs propres, on introduit un paramètre $k = \alpha/\beta$,

alors si on divise (2.7) par β on obtient

$$\beta = \frac{1}{k(m-1)+2} \tag{2.8}$$

et si on divise (2.7) par α on obtient

$$\alpha = \frac{k}{k(m-1)+2} \tag{2.9}$$

remplacer (2.7), (2.8) et (2.9) dans (2.6) nous donne l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{\boldsymbol{kU + \xi U' + (U^m)'' = 0}} \tag{2.10}$$

où $k = 1, 2, ..., n, ...$sont les valeurs propres du problème .

2.1.3 Discution

Si $m = 1$ le problème (E') devient le problème de la chaleur avec une ODE de la forme:

$$kU + \xi U' + U'' = 0 \tag{2.11}$$

pour tout k on obtient une solution particulière U_n de (2.11) qui est à décroissance exponentiel si $|\xi| \longrightarrow \infty$, de plus la solution s'écrit comme

$$u_n(x,t) = t^{\frac{-n}{2}} U_n\left(xt^{\frac{-1}{2}}\right)$$

et avec une condition initiale

$$u_n(x,t) \longrightarrow C_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta(x) \quad \text{si} \quad t \longrightarrow 0$$

ou δ est la mass de Dirac et C_n une constante arbitraire positive et la limite est donneé au sens de distribution .

Si $m > 1$ Hulshof [7] démontre qu'il existe une suite croissante infinie $\{k_n\}$, $n \geq 1$ telle que $k_n \longrightarrow \infty$, et pour chaque n il existe une famille des solutions non triviales de l'équation (2.10) dépendant d'un seul paramètre $k = k_n$ et à support compact.

2.2 Problème des valeurs propres

Les valeurs propres jouent un role important dans la théorie mathématique du problème de cauchy (E).

On va étudier notre problème pour différentes valeurs propres k.

2.2.1 Valeur propre de premier ordre

Si $k = 1$ la relation d'échelle s'écrit comme

$$\alpha = \beta = \frac{1}{m+1}.$$

et

$$u(x,t) = t^{-\alpha}(xt^{-\alpha}) \tag{2.12}$$

l'équation différentielle s'écrit dans ce cas comme

$$U + \xi U' + (U^m)'' = 0 \tag{2.13}$$

<u>Cas $\mathbf{m = 1}$:</u>

Si $m = 1$ l'équation (E') devient l'équation de la chaleur avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1/2$. Dans ce cas l'équation (2.13) telle que U doit être à support compact s'écrit :

$$U + \xi U' + U'' = 0$$

qui s'écrit comme

$$(\xi U)' = -U''$$

on intègre par rapport à ξ, on obtient

$$\xi U = -U'$$

d'où

$$\xi = \frac{-U'}{U}$$

on obtient

$$U(\xi) = ce^{-\frac{1}{2}\xi^2} \tag{2.14}$$

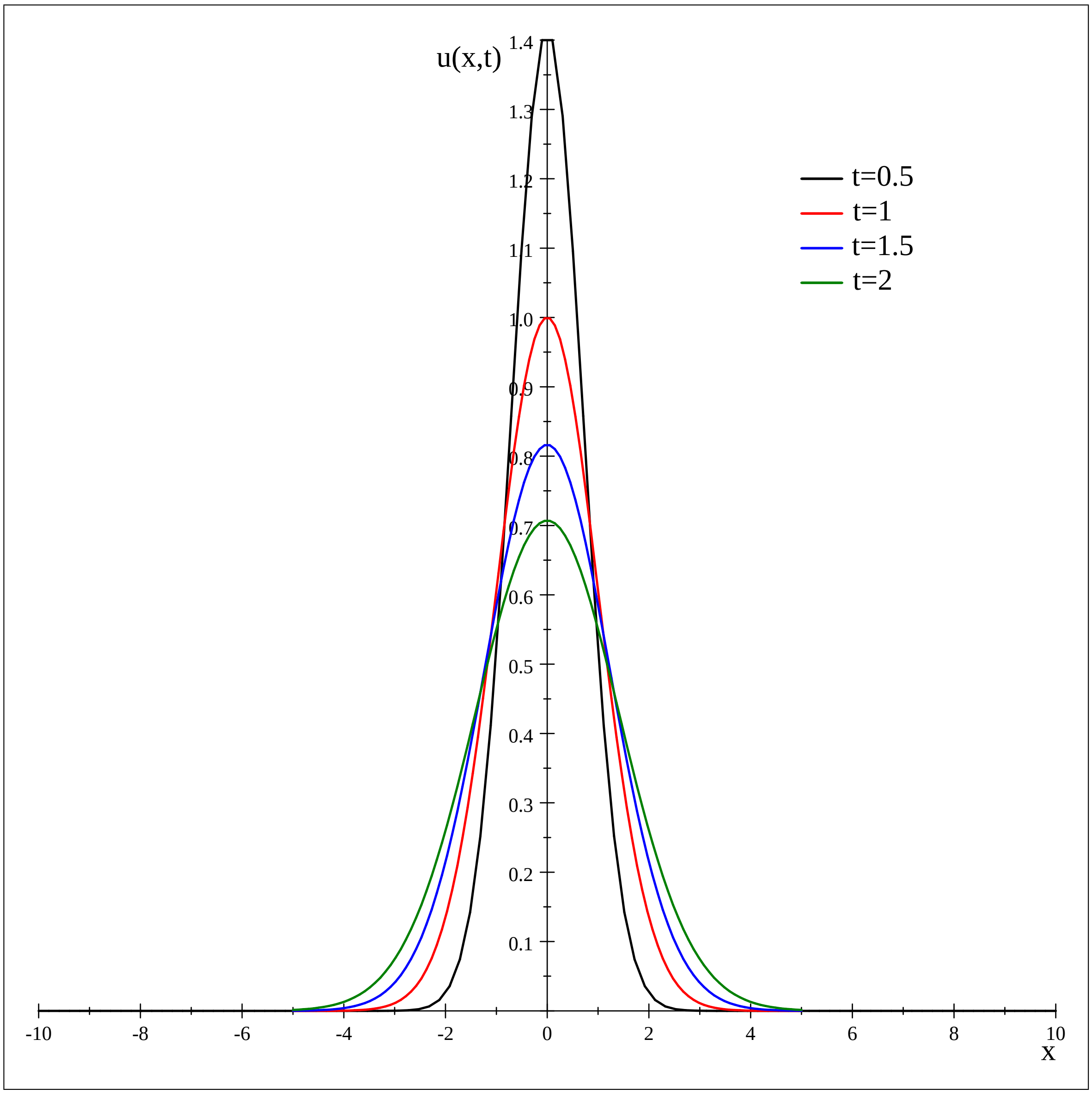
alors la solution $u(x,t)$ s'écrit comme

$$u(x,t) = ct^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2t}x^2} \tag{2.15}$$

la condition initiale dans ce cas est la fonction de Dirac, c-à-d

$$u\,(x,t) \longrightarrow c\delta(x) \qquad si \qquad t \longrightarrow 0$$

où c une constante arbitrairie positive.



Solution de la chaleur pour $k = 1, m = 1$ *et* $c = 1$

Cas $\mathbf{m > 1}$:

Si $m > 1$ on a $\alpha_1 = \beta_1 = \dfrac{1}{m+1}$ et

$$-\left(U^m\right)'' = U + \xi U'$$

cela implique que

$$-\left(U^m\right)'' = \left(\xi U\right)'$$

on intègre par rapport à ξ

$$-\left(U^m\right)' = \xi U$$

cela implique

$$-mU^{m-1}U' = \xi U$$

d'où

$$\left(U^{m-1}\right)' = -\frac{m-1}{m}\xi$$

En intègrant par rapport à ξ on obtient

$$U^{m-1} = c - \frac{m-1}{2m}\xi^2$$

donc

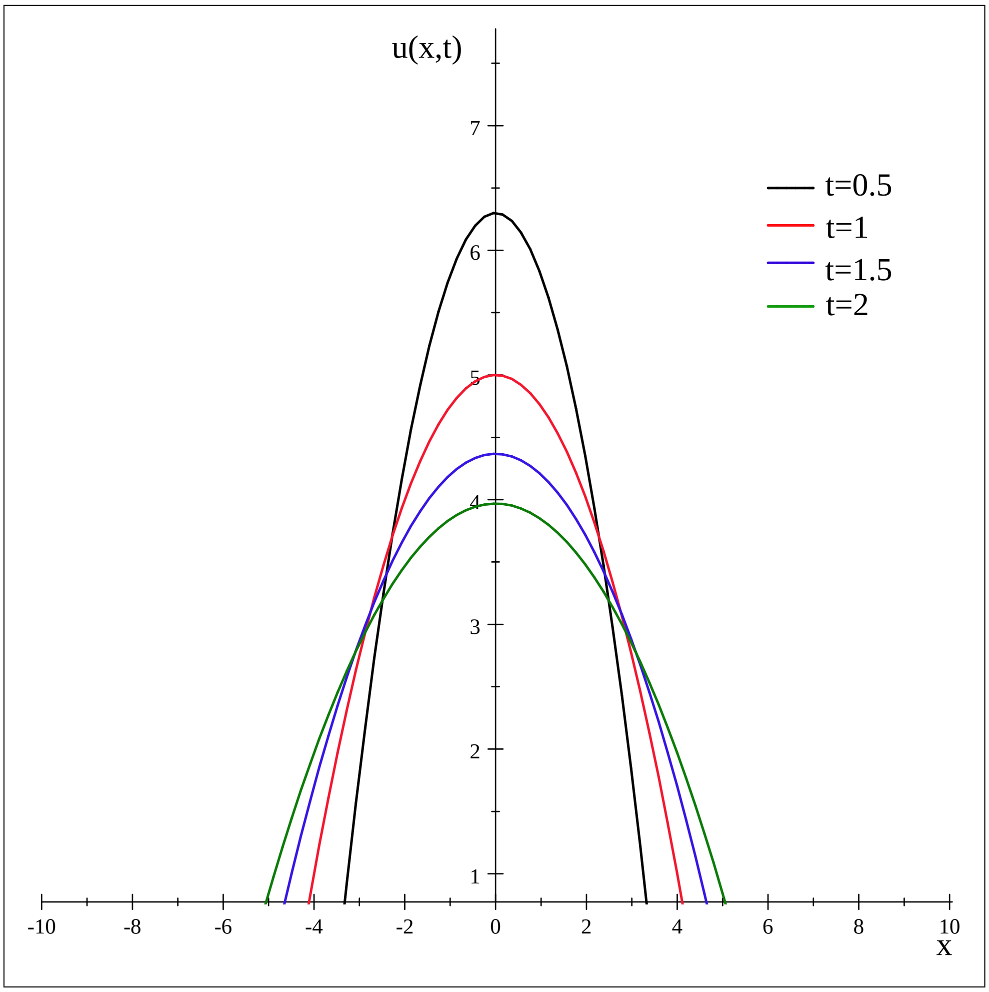
$$U\left(\xi\right) = \left[c - \frac{m-1}{2m}\xi^2\right]^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.16}$$

alors la solution $u(x,t)$ s'écrit comme

$$u(x,t) = t^{\frac{-1}{m+1}}\left[c - \frac{m-1}{2m}x^2 t^{\frac{-2}{m+1}}\right]^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.17}$$

avec $u(x,0) = M\delta(x)$ où δ est la mass de Dirac et M une fonction de c.

Cette solution est dite solution **source type** ou **solution de Barenblatt**.



Solution Barenblatt pour $m = 2$ et $c = 5$

<u>Cas $\mathbf{0 < m < 1}$:</u>

Pour $0 < m < 1$ l'équation (E) devient l'équation de diffusion rapide avec $\alpha = \beta = \dfrac{1}{m+1} < 0$

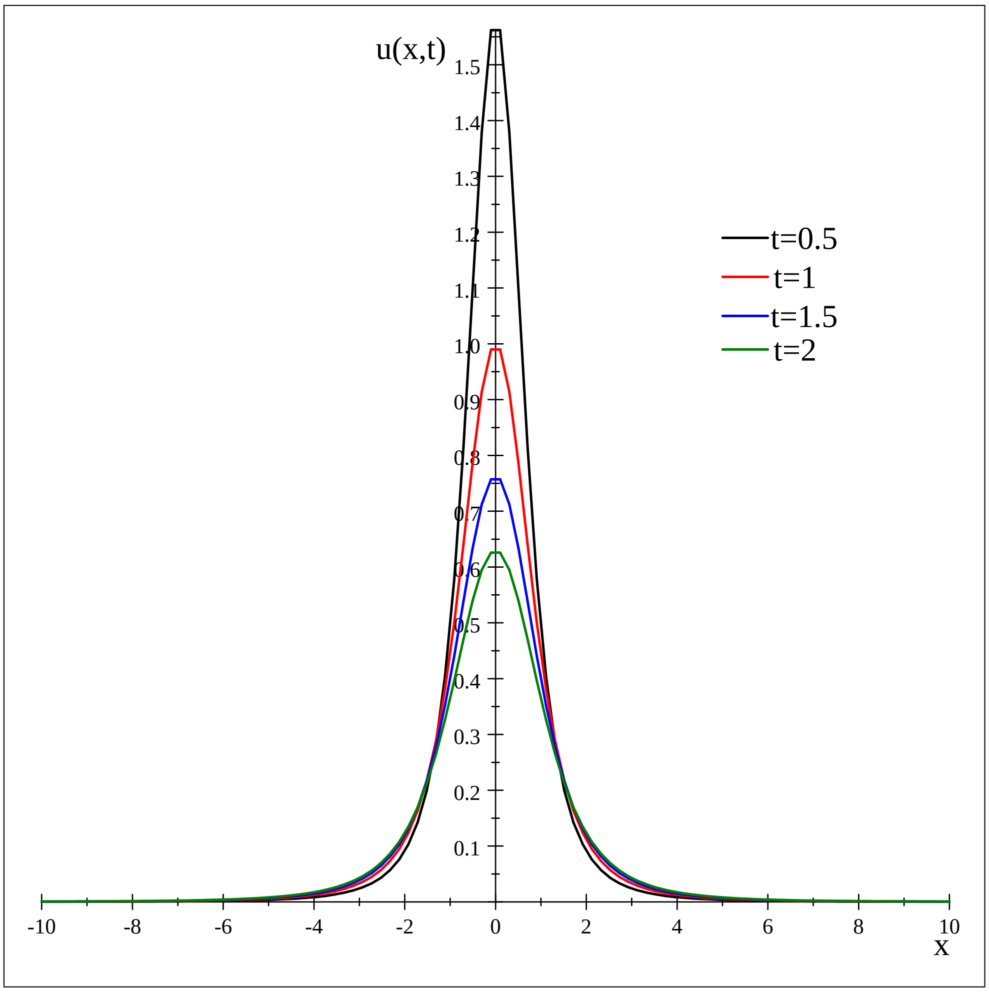
alors d'aprés [11] pour $0 < m < 1$ les formules $(2.12), (2.16)$ restent les mêmes mais avec $m-1$ et $\dfrac{m-1}{2m}$ qui sont des nomberes négatifs.

Dans ce cas la solution s'écrit

$$U(\xi) = (c + \frac{1-m}{2m}\xi^2)^{\frac{-1}{1-m}} \qquad \text{avec } c = \text{constant}$$

alors

$$u(x,t) = t^{\frac{-1}{m+1}}(c + \frac{1-m}{2m}x^2 t^{\frac{-1}{m+1}})^{\frac{-1}{1-m}}$$



Solution barenblatt pour $m = \frac{1}{2}$ *et* $c = 1$

2.2.2 Valeur propre d'ordre 2

Dans ce cas on a $\alpha_2 = \dfrac{1}{m}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{2m}$

l'équation différentielle (2.10) s'écrit comme

$$-\left(U^m\right)'' = 2U + \xi U' \tag{2.18}$$

<u>Cas $\mathbf{m = 1}$:</u>

Pour $m = 1$ cela implique $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$,

d'où on a

$$U'' + 2U + \xi U' = 0$$

d'aprés [1] la solution s'écrit comme

$$U = \frac{d}{d\xi}\{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}[c_1 + c_2 \int e^{\frac{1}{2}\xi^2} d\xi]\}$$

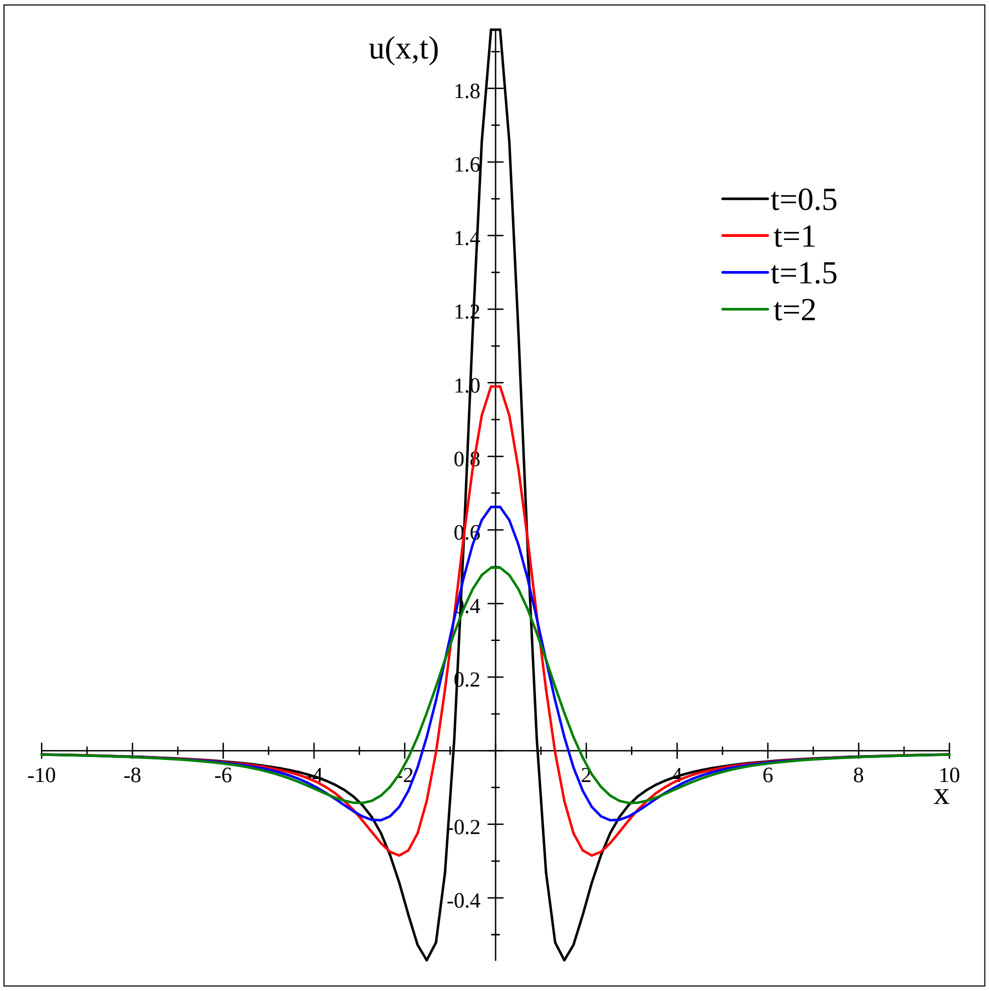
avec c_1,c_2 sont des constantes

ou encore

$$U = \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}\xi^2}} \left(2c_2 e^{\frac{1}{2}\xi^2} - 2\xi c_1 + i\sqrt{2\pi}\xi c_2 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} i\sqrt{2}\xi\right)\right)$$

alors la solution $u(x,t)$ s'écrit comme

$$u(x,t) = \frac{1}{2te^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2}} \left(2c_2 e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2} - 2\frac{x}{\sqrt{t}} c_1 + i\sqrt{\frac{2\pi}{t}} x c_2 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} i\sqrt{\frac{2}{t}} x\right)\right)$$



Solution de la chaleurs pour $k = 2$, $m = 1$ *et* $c_1 = 0$ *et* $c_2 = 1$

<u>Cas $\mathbf{m > 1}$:</u>

Pour $m > 1$ et avec un état inital $u(x, 0)$ telle que

$$u(x,t) \longrightarrow C\delta'(x) \quad si \quad t \longrightarrow 0$$

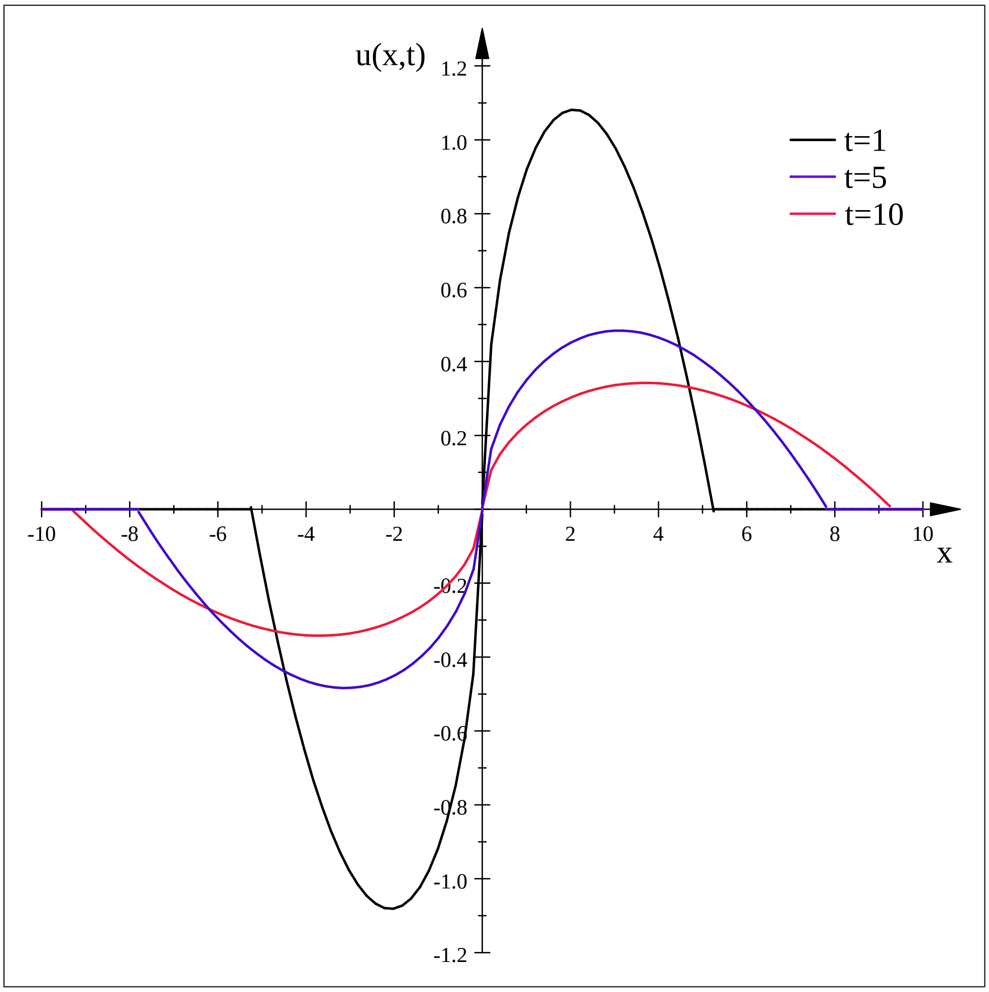
on a d'aprés [9] la solution de (2.15) s'écrit comme

$$U(\xi) = \xi^{\frac{1}{m}} \left(c - \frac{m-1}{m+1} \xi^{\frac{m+1}{m}} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

donc

$$u(x,t) = t^{\frac{-1}{m-1}} \left|x\right|^{\frac{1}{m}} sign(x) \left(ct^{\frac{m+1}{2m^2}} - \frac{m-1}{2m(m+1)} \left|x\right|^{\frac{m+1}{m}} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

cette solution est dite **"solution dipôle"**.



La solution dipôle si $m = 2$, $k = 2$ *et* $c = 1$

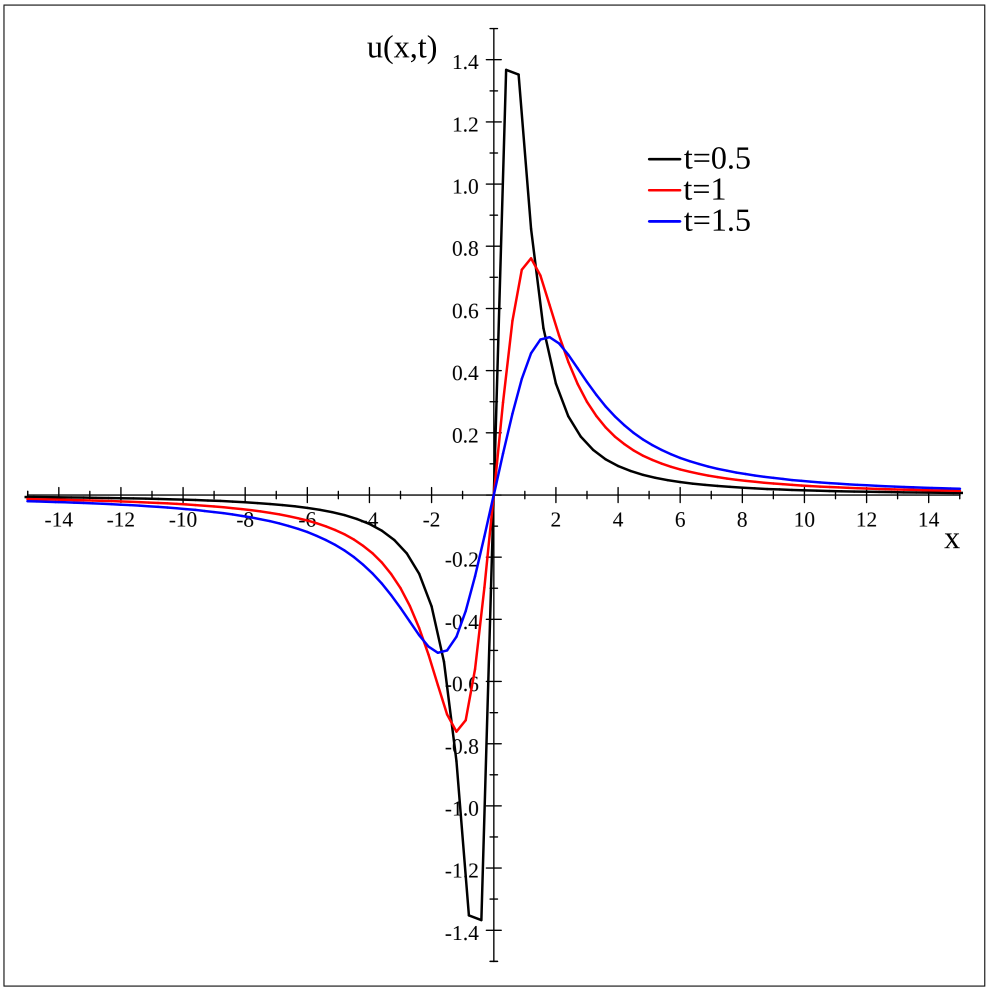
<u>Cas **0 < m < 1:**</u>

Pour $0 < m < 1$ et d'aprés [11] on a

$$u(x,t) = \frac{t\,|x|^{\frac{1-m}{m}}\,sign(x)}{ct^{\frac{m+1}{2m^2}} + \frac{1-m}{2m(m+1)}\,|x|^{\frac{m+1}{m}}}$$

on peut remarquer que si $x \to \infty$ on a

$$u(x,t) \sim \frac{ct}{x^2}$$



La solution dipôle pour $m = \frac{1}{2}$*et* $c = 1$

Chapitre 3

Étude du problème des valeurs propres pour $k = k_3$

Dans ce chapitre on va chercher la solution pour la valeur de $k = k_3$, pour differentes valeurs de m.

3.1 La valeur de k_3 pour $m > 1$

Théorème 3.1.1 [9]:*Pour $m > 1$ on a $k_3 > 3$, qui est une fonction continue de $m \in [1, \infty[$ et qui tend vers 4 si $m \longrightarrow \infty$.*

Soit $m > 1$ et k_3 la troisième valeur propre et U_3 la fonction correspondante telle que

$$-(U^m)'' = \xi U' + k_3 U \tag{3.1}$$

avec

$$U(0) = 1 \;\text{ et }\; U'(0) = 0 \tag{3.2}$$

Dans le lemme suivant nous allons résumer quelques propriétés de U_3 qu'ils sont déja démontrés dans [7]

Lemme 3.1.1 [9] :

1. $k_3 > 2$

2. *Le support de U est un intervalle borné de la forme $[-A, A]$ avec $A > 0$*

3. *U a une racine positive et unique $\xi = a$ avec $(0 < a < A)$*

4. $(U^m)' < 0$ *si* $\xi = a$

on introduit les fonctions suivantes :

$$V_3 = (U_3)^m \tag{3.3}$$

$$Z_3(\xi) = \int_x^A (t - \xi) U_3(t) dt \tag{3.4}$$

$$W_3 = Z_3'(\xi) = -\int_\xi^A U_3(t) dt \tag{3.5}$$

ainsi $Z_3''(\xi) = U_3$

on intègre(3.1) deux fois de ξ à A

$$-\int_\xi^A V_3'' dt = \int_\xi^A t U_3'(t) dt + \int_\xi^A k_3 U(t) dt$$

alors

$$-V_3' = \xi U_3 + (k_3 - 1) W_3 = \xi Z_3'' + (k_3 - 1) Z_3' \tag{3.6}$$

donc

$$-\int_\xi^A V_3' dt = \int_\xi^A t Z_3'' dt + \int_\xi^A (k_3 - 1) Z_3' dt$$

cela implique que

$$-V_3 = \xi Z_3' + (k_3 - 2) Z_3 \tag{3.7}$$

Lemme 3.1.2 [9] :

1. $W_3(0) = 0$

2. $W_3 > 0 \quad$ *si* $x \in]0, A[$

3. $Z_3 < 0 \quad$ *si* $x \in [0, A[$

4. $W_3(\xi) = Z_3(\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \geq A$

Lemme 3.1.3 [9] *:On a*

$$-\int_0^A V_3(\xi)d\xi = (k_3-3)\int_0^A Z_3(\xi)d\xi \tag{3.8}$$

Preuve. on intègre (3.7) de 0 à A

$$-\int_0^A V_3 d\xi = \int_0^A \xi Z_3'(\xi)d\xi + \int_0^A (k_3-2)Z_3(\xi)d\xi$$

alors

$$-\int_0^A V_3 d\xi = [\xi Z(\xi)]_0^A - \int_0^A Z_3(\xi)d\xi + \int_0^A (k_3-2)Z_3(\xi)d\xi$$

donc

$$-\int_0^A V_3 d\xi = (k_3-3)\int_0^A Z_3(\xi)d\xi$$

■

Lemme 3.1.4 [9] *:Si* $m > 1$ *alors*

$$\int_0^A V_3(\xi)d\xi > 0 \tag{3.9}$$

Preuve. on a d'après le lemme 3.1.2 la fonction W est croissante sur l'intervalle$]0,a[$ et décroissante sur l'interevalle $]a,A[$

on définit la fonction V par une fonction de W comme suit:

$$\begin{cases} V = V_1(W\ ) & \xi \in]0,a[\\ \\ V = V_2(W) & \xi \in]a,A[\end{cases}$$

les deux fonctions sont définies sur $0 < W < W(A) = \sigma$ telle que $V_1(\sigma\ ) = V_2(\sigma) = V_1(\sigma\ ) = 0$ et $V_2(0\ ) = 1$

on a

$$\frac{dW}{d\xi} = U = |V|^{\frac{1}{m}}\, sign(V) \tag{3.10}$$

cela implique que

$$d\xi = dW * |V|^{\frac{-1}{m}} \, sign(V)$$

on obtient

$$\int_0^A V(\xi)d\xi = \int_0^a V_1(\xi)d\xi + \int_a^A V_2(\xi)d\xi \tag{3.11}$$

donc

$$\int_0^A V(x)dx = \int_0^\sigma |V_1(W)|^{1-\frac{1}{m}} dW - \int_0^\sigma |V_2(W)|^{1-\frac{1}{m}} dW$$

on a $V_1 > 0$

cela exige que

$$V_1(W) > V_2(W) \tag{3.12}$$

on suppose que (3.12) est faux alors:

$V_1 + V_2$ a un minimum en le point W_* tel que $W_* \in]0, \sigma[$

dans ce point si $V_1 + V_2$ a un minimum donc

$$V_1'(W_*) + V_2'(W_*) = 0$$

de $(3, 6)$ et (3.10)

$$-V_3' = \xi U_3 + (k_3 - 1)W_3$$

alors

$$-\frac{dV_3}{d\xi} = \xi \, |V|^{\frac{1}{m}} + (k_3 - 1)W_*$$

donc

$$-\frac{dV_3}{dW * |V|^{\frac{-1}{m}}} = \xi \, |V|^{\frac{1}{m}} + (k_3 - 1)W_*$$

alors

$$-\frac{dV_1}{dW} = \xi_1 + (k_3 - 1)W_* \, |V_1|^{\frac{-1}{m}}$$

et

$$-\frac{dV_2}{dW} = \xi_2 + (k_3 - 1)W_* \, |V_2|^{\frac{-1}{m}} \, sign(V_2)$$

cela implique que

$$-\frac{d(V_1 + V_2)}{dW} = \xi_1 + \xi_2 + (k_3 - 1)W_*(|V_1|^{\frac{-1}{m}} - |V_2|^{\frac{-1}{m}})$$

cette quantité est positive de fait que ξ_1, ξ_2, W_* les sont aussi alors

$$V_1'(W_*) < V_2'(W_*) \qquad \text{contradiction}$$

donc

$$V_1(W) > V_2(W)$$

alors

$$\int_0^A V_3(\xi)d\xi > 0$$

■

on a

$$-\int_0^A V_3(\xi)d\xi = (k_3 - 3)\int_0^A Z_3(\xi)dx$$

et

$$Z_3(\xi) < 0 \Longrightarrow \int_0^A Z_3(\xi) < 0$$

d'où

$$\int_0^A V_3(\xi)d\xi > 0 \Longrightarrow -\int_0^A V_3(\xi)d\xi < 0$$

alors

$$(k_3 - 3) > 0 \Longrightarrow k_3 > 3$$

Lemme 3.1.5 [9] *: V_3' a une solution unique pour $b \in \,]0, A[$ et $b > a$*

3.2 Problème limite $m \to \infty$

Maintenant on va voir le cas où $m \to \infty$.

En intègrant deux fois l'équation (3.1) on obtient

$$-V = \xi Z' + (k-2)Z \quad , \quad V = U^m \tag{4.1}$$

$$\text{avec} \qquad Z'' = U, \; Z'(0) = 0 \quad \text{et} \quad Z(0) = \frac{-1}{k-2} \tag{4.2}$$

On peut voir le problème (4.1)-(4.2) comme une ODE pour la variable Z avec un état initial dans $\xi = 0$, tant que le problème pair donc on peut l'étudier seulement sur la partie positive $\xi \geq 0$.

Après on prend une limite formelle $m \longrightarrow \infty$. Dans ce problème on arrive au problème suivant :

Trouver une fonction $Z \in c^1(\mathbb{R}_+)$ tel que sa dérivée seconde est une fonction à variation bornée $Z'' \in BV((\mathbb{R}_+)$,

avec V une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que:

$$-V = \xi Z' + (k-2)Z \tag{4.3}$$

$$Z''(\xi) \in sign(V(\xi)) \quad \text{pour tout} \quad \xi > 0 \tag{4.5}$$

$$Z'(0) = 0 \ , \quad Z(0) = \frac{-1}{k-2} \tag{4.6}$$

$$\text{la quantité } \ k\,|V| + \frac{1}{2}V'^2 \quad \text{n'est pas croissante sur } \mathbb{R} \tag{4.7}$$

on arrive au probleme limite (P_∞) :

$$-V' = \xi U + (k-2)Z'$$

$$-V'' = \xi U' + kU \tag{4.8}$$

$$V(0) = 1, V'(0) = 0$$

3.3 Solution du problème limite $m \to \infty$

Théorème 3.3.1 [9] *: Pour tout $k > 2$ il existe une solution unique du problème (P_∞).*

On observe que dans un intervalle où $V \neq 0$ on a d'aprés (4.4) $U = sign(V) \in \{-1, 1\}$ or $U' = 0$.

de (4.8) on a

$$-V'' = 0 + kU$$

cela implique

$$V'' = -k\ sign(V)$$

Donc les deux Z et V sont donnés par un polynôme de degré 2 .

alors de l'étude de l'existence et de l'unicite se réduit au point telle que $V = 0$

Lemme 3.3.1 [9] *: Soit Z un solution de problème (P_∞) défini dans $[0, c[$ avec $c > 0$, on suppose que $V(c) = 0$ et $V > 0$ dans l'intervalle $]c - \delta, c[$ alors V et Z existent et sont déterminés uniquement dans l'intervalle $]c, c + \delta[$; de plus:*

1. $V'(c-) < 0$ *et* $V'(c+) \leq 0$
2. *Si* $|V'(c-)| \leq 2c$ *alors* $V'(c+) = 0$ et $V(\xi) = 0$ *pour tout* $\xi > 0$
3. *Si* $|V'(c-)| > 2c$ *alors* $V'(c+) = 2c + V\prime(c-) < 0$ *et* $V < 0$ *dans* $]c, c + \delta[$

La preuve de ce lemme est donnée dans[9]

Théorème 3.3.2 [9]*: Soit $k > 2$, le problème (P_∞) admet une solution négative à support compact si et seulement si $k = 4$.la solution est une fonction de degré 2.*

Preuve. 1^{ere} *étape* :

Il est claire que la solution de (P_∞) est une fonction de degré 2 (car Z et V les deux sont des fonctions de degré 2). On peut voir qu'au voisinage de 0 et $V > 0$, on a $U = 1$ et V est donné par un arc

$$-V' = \xi + (k-1)Z'$$

et

$$-V'' = 1 + (k-1)Z''$$

comme $Z'' = U$ donc pour $\xi \geq 0$ on a $Z'' = 1$ alors

$$-V" = 1 + (k-1)$$

alors

$$-V' = \xi + (k-1)\xi$$

donc

$$V = \frac{-1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(k-1)\xi^2 + C$$

si $c = 1$ on a

$$V = -\frac{k}{2}\xi^2 + 1$$

V a un solution dans le point $\xi = a$ telle que

$$-\frac{k}{2}a^2 + 1 = 0$$

cela implique que

$$a = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{k}} \text{ si } a < 0 \\ \\ \sqrt{\frac{2}{k}} \text{ si } a > 0 \end{cases}$$

comme $a > 0$ donc

$$a = \sqrt{\frac{2}{k}}$$

de plus, tant que $V'(a-) = -ka$ et $-ka + 2a < 0$ d'après le lemme (3.3.1) on a

$$V'(a+) = -(k+2)a$$

et comme $V(A) = 0$ et $V < 0$ dans $]0, a[$ et utilise la symétrie de l'arc parabolique on obtient que :

$$V(A-) = -V'(a+) = (k+2)a \tag{4.10}$$

de (4.8) et comme $V < 0$ dans $]0, a[$ on a

$$V'' = \xi U' + kU$$

cela implique que

$$V'' = k$$

alors on a dans cette intervalle

$$V'(\xi) = k\xi - 2(k-1)a \tag{4.11}$$

(4.10) et (4.11) implique que

$$V'(a-) = (k+2)a = kA - 2(k-1)a$$

donc

$$(k+2)a + 2(k-1)a = kA$$

alors

$$A = \frac{3k-4}{k}a \tag{4.12}$$

2^{ieme} *étape* :

On détermine Z telle que $Z'' = 1$ si $0 < \xi < a$, $Z'' = -1$ si $a < \xi < A$, $Z(0) = \dfrac{-1}{k-2}$ et voisinag à infinie on a $V = 0$ donc

$$\xi Z' + (k-2)Z = 0 \tag{4.13}$$

d'après (4.7) et (4.11) on a

$$-kA + 2(k-1)a = AU\,(A) + (k-1)Z'(A)$$

donc

$$(1-k)A + 2(k-1)a = (k-1)Z'(A)$$

alors

$$-A + 2a = Z'(A)$$

cela implique que

$$Z'(A) = -\frac{k-4}{k}a \tag{4.14}$$

et d'après (4.13) on a

$$\xi Z' + (k-2)Z = 0$$

donc

$$-AZ'(A) = (k-2)Z(A)$$

alors

$$Z(A) = \frac{-AZ'(A)}{(k-2)}$$

alors

$$Z(A) = aA\frac{k-4}{k(k-2)} \tag{4.15}$$

Pour $k > 4$ on a $Z(A) > 0$ contradiction car d'après le lemme 3.1.2 on a $Z(A) = 0$.

pour $2 < k < 4$ on a d'après le lemme 3.3.1

$$V'(A-) - 2A = a\frac{k^2 - 8k + 8}{k} \tag{4.16}$$

on va chercher où $V'(A-) - 2A < 0$. comme $a > 0$ et $k > 0$ alors

$$k^2 - 8k + 8 = 0$$

cela implique que

$$k = \sqrt{2} \text{ ou } k = -\sqrt{2}$$

donc $V'(A-) - 2A < 0$ si $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ et $V(\xi) = 0$ dans $]A, \infty[$ et d'après (4.16) la valeur de $Z(A) < 0$.

d'après l'équation (4.13) et pour $V = 0$ on a $Z(\xi) < 0$ pour tout $\xi \geq A$ alors $Z(\xi)$ n'est pas une fonction à support compact, donc $k \notin]2, 4[$.

3^{ieme}étape :

Pour $k = 4$ on a $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A = 2a$, $Z(A) = 0$ et les deux fonctions V et Z dans $(A+)$ sont prolongement de la fonction nulle.on a d'après le lemme 3.1.2 $Z(\xi) < 0$ pour $\xi \in]0, A[$ et V a une solution exact dans cette intervalle. ■

3.4 La convergence de la solution si $m \to \infty$

Théorème 3.4.1 [9] *:Soit $k_3 = k_3(m)$ la troisième valeur propre de l'équation* (3.1) *alors $k_3(m) \to 4$ si $m \to \infty$*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de l'étude du problème $(3.1) - (3.2)$ dans le cas où $m \to \infty$

Lemme 3.4.1 [9] *:Soit Z une solution du problème* (4.1)-(4.2). *alors les fonctions suivantes sont décroissantes dans $\mathbb{R}_+$:*

$$\Phi_1 = \frac{km}{m+1} |V|^{\frac{m+1}{m}} + \frac{1}{2} V'^2$$

$$\Phi_2 = \frac{m}{m+1} |V|^{\frac{m+1}{m}} + \frac{k-1}{2} Z'^2$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} Z'^2 + (k-2)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} |Z|^{\frac{m+1}{m}}$$

Preuve. on pose $g(s) = |s|^{\frac{1}{m}} \, sign\,(s)$

1.

$$\Phi_1' = k\,|V|^{\frac{1}{m}}\,V' sign(V) + V'V''$$

cela implique que

$$\Phi_1' = V'(k\ g(V) + V'')$$

on a d'après (4.8)

$$V'' = -\xi U' - kU$$

alors

$$\Phi_1' = V'(k\ g(V) - \xi U' - kU)$$

donc

$$\Phi_1' = V'\left[kg(V) - \xi U' - k\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V)\right]$$

cela implique que

$$\Phi_1' = -V'\,[\xi U']$$

donc

$$\Phi_1' = -m\xi\,(U')^2\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V)$$

alors

$$\Phi_1' = -m\xi\,(U')^2\,g\,(V)$$

comme $m\xi\,(U')^2 > 0$ et la fonction g croissante donc Φ_1 est décroissante.

2.

$$\Phi_2' = V'\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V) + (k-1)\,Z'Z''$$

cela implique que

$$\Phi_2' = V'\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V) + (k-1)\,Z'\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V)$$

donc

$$\Phi_2' = (V' + (k-1)\,Z')\,|V|^{\frac{1}{m}}\,sign(V)$$

d'après (4.7)

$$V' = -\xi U - (k-1)Z'$$

alors

$$\Phi_2' = g(V)(-\xi U)$$

donc Φ_2 est décroissante.

3.

$$\Phi_3' = Z'(Z'' + (k-2)^{\frac{1}{m}} |Z|^{\frac{1}{m}} sign(Z)$$

on a d'après (4.1)

$$V = -\xi Z' - (k-2)Z$$

sa implique que

$$-Z'' = \xi Z' + (k-2)Z$$

alors

$$-Z'' = |\xi Z' + (k-2)Z|^{\frac{1}{m}} sign(\xi Z' + (k-2)Z)$$

donc

$$-Z'' = g(\xi Z' + (k-2)Z)$$

d'où

$$\Phi_3' = -Z'(g(\xi Z' + (k-2)Z) - (k-2)^{\frac{1}{m}} |Z|^{\frac{1}{m}} sign(Z))$$

ce qui implique

$$\Phi_3' = -Z'[g(\xi Z' + (k-2)Z) - g((k-2)Z)]$$

et comme la fonction g est croissante et Z' croissante (d'après le lemme 3.1.2) donc Φ_3 est décroissant. ■

Lemme 3.4.2 [9]*: Soit $k > 2$ et soit Z la solution de problème*(4.1) − (4.2)*, alors les inégalités suivantes sont valable dans $\mathbb{R}_+$:*

1. $|V| \leq 1.$
2. $Z'' \equiv U \leq 1.$
3. $|Z| \leq \dfrac{1}{k-2}$
4. $V'^2 \leq \dfrac{2km}{m+1}.$

5. $Z'^2 \leq \dfrac{2m}{(m-1)(k-1)}$.

La preuve de ce lemme est dans [9]

Lemme 3.4.3 [9] *: $k_3(m)$ reste borné si $m \to \infty$.*

Preuve. On suppose que $k_3 \to \infty$ si $m \to \infty$.

Soit $m_j \to \infty$ une suite telle que $k_j = k_3(m_j) \to \infty$ et soit Z_j solution du problème $(4.1)-(4.2)$. on introduit un transformation :

$$Z_j(\xi) = \frac{1}{k_j}\hat{Z}_j(\sqrt{k_j\xi})$$

et

$$V_j(\xi) = \hat{V}_j(\sqrt{k_j\xi})$$

si on pose $t = \sqrt{k_j\xi}$ l'équation déffirentielle devient:

$$-\hat{V}_j(t) = \frac{t}{k_j}\hat{Z}_j(t) + \left(1 - \frac{2}{k_j}\right)\hat{Z}_j(t)$$

d'après le lemme 3.4.2 on a

$$\left|\hat{Z}_j\right| \leq \frac{k}{k-2}$$

$$\hat{Z}_j^2 \leq \frac{2mk}{(m+1)(k-1)}$$

$$\left|\hat{Z}_j''\right| \leq 1$$

des relations ci dessus on a $\hat{Z}_j$ tend en $C^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ vers certaine fonction Z et $Z(0) = 1$, $Z'(0) = 0$ et $Z \leq 0$ depuit $Z_J \leq 0$ pour tout j.

on a $\hat{Z}_j'' = \hat{U}_j$ et

$$\lim_{m_j \to \infty}\left(-\hat{V}_J\right) = \lim_{m_j \to \infty}\left[\frac{t}{k_j}\hat{Z}_j + \left(1 - \frac{2}{k_j}\right)\hat{Z}_j\right]$$

cela implique que

$$\lim_{m_j \to \infty}\left(-\hat{V}_J\right) = \lim_{m_j \to \infty}\hat{Z}_j$$

donc

$$\lim_{m_j \to \infty} \left(-\hat{Z}_J''\right)^m = \lim_{m_j \to \infty} \hat{Z}_j$$

alors

$$\lim_{m_j \to \infty} -\hat{Z}_J'' = \lim_{m_j \to \infty} \left|\hat{Z}_j\right|^{\frac{1}{m_j}} sign(\hat{Z}_j)$$

cela implique que

$$-Z'' = sign(Z)$$

donc Z a plusieurs signes changés donc contradiction.

Par conséquant, pour toute suite $m_j \to \infty$ il existe un sous suite m_{j_n} telle que $\lim\limits_{m_{jn} \to \infty} k_j \to \bar{k}$. Il existe autre sous-suite telle que

d'après le lemme 3.4.2 on a

$$Z_j \to \bar{Z}, \quad Z' \to \bar{Z}', \quad V_j \to \bar{V} \qquad \text{Uniformément dans les ensembles bornés} \tag{4.19}$$

on a

Lemme 3.4.4 [9] *: $\bar{Z}$ est une solution negative du problème (P_∞) .*

de (4.19), $U_J = |V_j|^{\frac{1}{m_j}} sign\,(V_j)$ et $|U_J| \leq 1$ alors $\bar{Z}$ et $\bar{V}$ satisfaie (4.3)-(4.5).

tant que U_j a deux extrême non triviale et comme $|U_J| \leq 1$ alors :

$$U_j' \text{ est borné dans } L^1(\mathbb{R}_+)$$

alors $\bar{U}'$ est une mesure et $\bar{U} \in BV(\mathbb{R})$ on obtient que

$$U_j \to \bar{U} \quad \text{dans } L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) \;\; 1 \leq p < \infty$$

et

$$U_j \to \bar{U} \;\; \text{dans } \mathbb{R}_+$$

(4.7) et (4.19) implique que $\bar{V}$ satisfaie la condition (4.6) . ■

Lemme 3.4.5 [9] *: Les deux $\bar{V}$ et $\bar{Z}$ à support compact.*

Preuve. on a

$$-V\prime = \xi U + (k-1)\, Z'$$

d'après le lemme 3.4.2

$$|V| \leq 1 \text{ et } \; Z \leq \frac{1}{k-2}$$

comme $|V|$ et $|Z|$ sont borné alors $|V'|$ et $|Z'|$ sont borné.

donc $|\xi U_j|$ est uniformément borné indépendant de j et ξ alors il existe une constante c telle que

$$|\xi U_j| \leq c$$

cela implique que

$$|U_j| \leq \frac{c}{\xi}$$

donc

$$|V_j| \leq \left(\frac{c}{\xi}\right)^m \tag{4.20}$$

alors si $m_j \to \infty$ on obtient $\bar{V}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \geq c$.

donc V à support compact.

On peut écrit l'équation (4.1) comme suite

$$-\xi^{k-3} = \left(\xi^{k-2} Z\right)'$$

tant que Z_j à support borné on a:

$$\xi^{k_j-2} Z_j(\xi) = \int_\xi^\infty t^{k_j-3} V_j(t) dt$$

d'aprés (4.19) et (4.20) on a:

$$\xi^{\bar{k}-2} \bar{Z}(\xi) = \int_\xi^\infty t^{\bar{k}-3} \bar{V}(t) dt \;\; \text{pour tout } \xi \geq 0$$

et comme $\bar{V}$ à support compact on conclut que $\bar{Z}$ à support compact.

Donc d'après les lemmes 3.4.4 et 3.4.5 la solution de (P_∞) est une solution non positive à support compact et le théorème 3.3.2 implique que $\bar{k} = 4$ donc $k_3(m) = 4$ si $m \to \infty$ ■

3.5 La continuité de $k_3(m)$

Dans cette section on démontre que $k_3(m)$ est continue pour tout $1 \leq m < \infty$.

Théorème 3.5.1 [9] *: La fonction $k_3(m)$ est continue pour $1 \leq m < \infty$.*

On introduit une paramètre λ et les condition suivantes

$$m > 0,\ \ k > 0,\ \ \ 2 + k(m-1)k > 0 \tag{5.1}$$

$\lambda > k,\ \ 2 + \lambda(m-1) \geq 0$

Lemme 3.5.1 [9] *: (5.1) et (5.2) implique que*

$$2 + \lambda m - k > 0 \tag{5.3}$$

Lemme 3.5.2 [9] *: On suppose que (5.1) et (5.2) valable. Soit $0 \leq \bar{a} < a < \infty$ et soit U solution de (3.1) telle que dans l'intervalle $]\bar{a}, a[$, U est borné et $U \neq 0$ et*

$$\bar{a}^k U(\bar{a}) = U(a) = 0$$

alors

$$M = \sup_{\bar{a}<x<a} \xi^{\lambda} |U(x)| \leq F(m,k,\lambda) \, |U|_{\infty}^{\frac{2+\lambda(m-1)}{2}} \tag{5.4}$$

où $|U|_{\infty}$ est $\sup |U|$ dans $]\bar{a}, a[$ et F est une fonction continue définie dans l'espace (m,k,λ) qu'est détermié par (5.1) et (5.2) .de plus F est indépendant de U,a et $\bar{a}$.

on remarque que quand $m \geq 1$ alors on peut choisir λ et k arbitrairement. au contraire si $0 < m < 1$ alors (5.1) et (5.2) implique que $k < \frac{2}{1-m}$ et $\lambda \leq \frac{2}{1-m}$.

En autre cas si $\lambda = k$ on a

Corollaire 3.5.1 [9] *: On suppose que (5.1) valable et soit $0 \leq \bar{a} < a < \infty$ et soit U solution de (3.1) telle que U est borné en $]\bar{a}, a[$ et $U \neq 0$ alors :*

$$\sup_{\bar{a}<x<a} \xi^{k} |U(x)| \leq G(m,k) \, |U|_{\infty}^{\frac{2+k(m-1)}{2}} \tag{5.5}$$

où G est une fonction continue dans l'espace (m,k) qu'est déterminé par (5.1) et independant de U, $\bar{a}$ et a .

Preuve. (du lemme 3.5.1)

On suppose que $U > 0$ en $]\bar{a}, a[$, le cas $U < 0$ est une extension analogue, il existe $\rho \in]\bar{a}, a[$ telle que $M = \rho^k U(\rho)$ et

$$\left(\rho^\lambda U(\rho)\right)' = \rho^{\lambda-1}\left(\rho U'(\rho) + \lambda U(\rho)\right) = 0$$

et comme $V = U^m$ alors

$$\frac{\rho}{m} V' V^{\frac{1-m}{m}} + \lambda V^{\frac{1}{m}}(\rho) = 0$$

implique que

$$\frac{\rho}{m} V' + \lambda V(\rho) = 0$$

donc

$$\rho\left|V'\right| = \lambda m V(\rho) \tag{5.6}$$

et comme $M = \sup\limits_{\bar{a}<\xi<a} \xi^\lambda |U(\xi)|$ alors

$$U(\xi) \leq \frac{M}{\xi^\lambda}$$

implique que

$$V(\xi) \leq \left(\frac{M}{\xi^\lambda}\right)^m = \frac{M^m}{\xi^{\lambda m}} \qquad \text{pour tout } \ \xi \in]\bar{a}, a[\tag{5.7}$$

On peut écrit l'équation (3.1) de la forme suivante:

$$-\xi^{k-1} V'' = \left(\xi^k U\right)'$$

on intègre avec $V'(a) \leq 0$ et $U(a) = 0$

$$\int_\rho^a \left(\xi^k U\right)' d\xi = -\int_\rho^a \xi^{k-1} V'' d\xi$$

cela implique que

$$\rho^k U(\rho) = \int_\rho^a \xi^{k-1} V'' d\xi \tag{5.8}$$

on intègre par partie (5.8)

$$\rho^k U(\rho) = V'(a) a^{k-1} - V'(\rho)\rho^{k-1} - \int_\rho^a (k-1)\,\xi^{k-2} V'(\xi)\, d\xi$$

alors

$$\rho^k U(\rho) \leq -V'(\rho)\rho^{k-1} - (k-1)\rho^{k-2} V(\rho) + (k-1)(k-2)\int_\rho^a x^{k-3} V'(\xi)\, d\xi$$

par $(5.6), (5.7)$ et (5.3) on obtient

$$\rho^k U(\rho) \leq F_1 M^m \rho^{k-2-\lambda m}$$

avec

$$F_1 = \lambda m + (k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2+\lambda m - k}$$

on a

$$M \leq \rho^{\lambda} |U|_{\infty} \quad \text{et} \quad \rho^{-\lambda} \leq \frac{|U|_{\infty}}{M}$$

et comme $2 + \lambda (m-1) \geq 0$ alors on conclut que le lemme est valable pour $F = F_1^{\frac{\lambda}{2}}$.

Preuve. (du théorème 3.5.1): ■

D'après le section précédant on a m_j est une suite qui converge à valeurs $m \in [1, \infty[$ et $k_j = k_3(m)$ et U_j solution de $(3.1) - (3.2)$.

soit $k_j \to \bar{k} \in [3, \infty]$ et on a

$$U_j \to \bar{U}, \quad V_j \to \bar{V} \quad \text{et} \quad V_j' \to \bar{V}'$$

uniformément dans un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $\bar{k} < \infty$,or $\bar{V} = \bar{U}^m$ et U est une solution de (3.1)-(3.2) avec $k = \bar{k}$ et $\bar{W} \geq 0$ dans $]0, \infty[$. Maintenant on peut pas possèder un minimum local dans le point ou $\bar{W} < 0$,en plus $\bar{W}(\xi_0) = \bar{W}'(\xi_0) = 0$ implique $W(\xi) = 0$ pour tout $\xi \geq \xi_0$.

On a $\bar{W} = \bar{U}$ donc $\bar{W}'$ a une racine unique dans $]0.\infty[$.

2^{ieme} étape:

U est absolument continue car $U = V^{\frac{1}{m}}$ et V est de class C^1, la fonction $g(s) = |s|^{\frac{1}{m}}$ *sign* s est absolument continue et $\bar{V}$ a un seul arc par (3.1)

3^{ieme} étape:

il reste de démontre que U à un support borné pour $\bar{m} > 1$ et à décroissance exponentiel pour $\bar{m} = 1$, tant que $m_j > 1$ on peut appliquer le lemme 3.5.1 sur U avec λ quelconque or

$$|U_j(\xi)| \leq c(\lambda)\xi^{-\lambda} \quad \text{pour tout} \quad \xi > 0$$

où $c(\lambda)$ est indépendant de j .on a $|U_j| \leq 1$ dans $\mathbb{R}$,on conclut que U à decroissance in ∞ plus rapide que de tous puissance de ξ^{-1}.maintenant si $\bar{m} > 1$, Hulshof démontre dans [7] qui tout solution à décroissance plus rapide que ξ^{-k} si $\xi \to \infty$ il faut à support compact et . or U a support compact et $\bar{k} = k_3(\bar{m})$ car l'unicité de les valeurs propres (la démonstration dans [7]) .

Dans le cas où $\bar{m} = 1$ les solutions de $-U'' = \xi U' + kU$ sont a décroissance plus rapide que $|\xi|^{-k}$ si $\xi \to \infty$, actuellement a décroissance exponentielle . ainssi $\bar{k} = k_3(1) = 3$ ■

3.6 La valeur de k_3 pour $0 < m < 1$

Dans cette section on va étudier l'existence de les valeurs propres et les fonctions propres de l'EDO (2.10) .

On remplace k par l'exposant α et β alors l'équation (2.10) devient

$$V''(\xi) + \beta\xi U'(\xi) + \alpha U(\xi) = 0 \tag{6.1}$$

où α est une paramètre libre et $2\beta = \alpha(1-m) + 1$ et $0 < k < \dfrac{2}{1-m}$.

Théorème 3.6.1 [9] *:Soit $0 < m < 1$, alors il existe un nombre unique $k_3 \in \left]2, \dfrac{2}{1-m}\right[$ telle que l'équation (6.1) a une fonction propre avec deux racines, de plus telles solutions sont nécessairement symétrique .*

La démonstration est très longue et donnée dans [9]

Théorème 3.6.2 [9] *:Il existe une suite strictement croissante:*

$$0 < k_1 = 1 < k_2 = 2 < k_3 < k_4 < \dots\dots\dots\dots < \frac{2}{1-m}$$

telle que la symétrie de la solution de (6.1) a décroissance optimale si et seulment si $k = k_n$ avec n impair (pair) .

Corollaire 3.6.1 [9] *: Pour $0 < m < 1$ on a $k_3 < 3$*

Preuve. La démonstration est analogue à celle du théorème 3.1.1 avec la même définition de V ,W et Z , excepté que ces fonctions ne sont pas à support compact et par conséquance A est remplacé par ∞, la formule (3.8) reste valable et $Z_3(\xi)$ continue négative mais

$$\int_0^\infty V_3(\xi)d\xi < 0$$

par conséquence d'application de l'inegalité (3.12) de la formule (3.11) et prenant $1 - \frac{1}{m}$ est négative alors $k_3 < 3$. ■

Théorème 3.6.3 [9] : *Pour $0 < m < 1$ la fonction $k_3(m)$ est continue.*

La démonstration dans[9] .

3.7 Etude du cas $m = 1$

Pour $m = 1$ et d'aprés [9] on a $k_3 = 3$ alors
$\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$ et

$$-U'' = xU' + 3U$$

alors d'apres [1] on a

$$U(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2}\left(e^{-\xi^2}\left[c_1 + c_2\int e^{\xi^2}d\xi\right]\right)$$

alors

$$U(\xi) = (4\xi^2 - 2)c_1e^{-\xi^2} + (1 - 2\xi^2)c_2 i\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,(i\xi)\,e^{-\xi^2} - 2\xi c_2$$

donc

$$u(x,t) = t^{\frac{-3}{2}}\left(2c_1e^{\frac{-x^2}{t}}\left(2\frac{x^2}{t} - 1\right) + i\sqrt{\pi}c_2\,\mathrm{erf}\left(ixt^{\frac{-1}{2}}\right)e^{\frac{-x^2}{t}}\left(1 - 2\frac{x^2}{t}\right) - 2xt^{\frac{-1}{2}}c_2\right)$$

Conclusion

L'objectif de ce travail est chercher les solutions auto similaires du problème de porous media duale.

On a démontre que le problème de porous media duale admet des solutions auto similaires à support compact pour tout $0 < m < \infty$, mais pour obtenir ces solution il faut transformer à problème de porous media classique.

Le problème de porous media classique traité sous forme d'un problème à valeurs propres, on trouve les différentes solutions de ce problème selon les différents ordres de ces valeurs propres.

Plusieurs solutions explicites ont été données.

Bibliographie

[1] Andrie-D.Polyanin, Valentin F, Zaitsev, *Exact Solution For ordinary Differential Equations 'Second Edition'*, A CRC Press Company,Boca London New York Washington ,D.C 2002, 766-767.

[2] B.H.GILDING, L.A.PELETIER, *continuity of the porous media equation*, Annali delle scuola normale superiore di pisa, class di scienze 4^e serie ,tome 8 (1981), 659-675.

[3] D.D.Joseph &T.S.L.undgren, *Quasilinear Dirichelet problemes driven dy positive sources*, Mech. Rat. Mech. Anal. 49 (1973), 241-269.

[4] D.G.Aronson, *The porous medium equation,* in Some Problemes in Nonlinear Diffusion, A.Fasano & M.Primicerio eds., Lecture Note in Math. 1224, Springer-Verlage, Berlin, 1986.

[5] Francisco Bernis, J.Hulshof, J.L.Vazquez, *A very singular solution for the dual porous medium equation and the asymptotic behaviour of general solutions* (1993), 2-27.

[6] G.I.Barenblatt & B.Zel'dovich, *On dipole solution in problemes of nonstationarey filtration of gas under polytropic regime,*Prikl.Mat.Mekh.21 (1957), 718-720

[7] H. Berezis, L. A. Peletier and T erman, *A very singular solution of the heat équation with sign cabsorption*, Archive Rat, Kech, Anal. 95 (1986), 185-209.

[8] J.Hulshof, *Similarity solution of the porous media equation whith sign change* ,J.Math Analysis app ,157 (1991)

[9] J.Hulshof & J.L.Vazquez , *The dipole solution for the porous media equation in several space dimentsion,* annali SNS Pisa (1993)

[10] J.L.Vazquez, *Barenblatt solution and asymptotic behaviour for non linear fractional heat equation of porous medium type* Math.Ap,13 sep 2012

[11] J.L.Vazquez , *The porous medium équation mathimatical theory*, Clarendon press, Oxford,2007

[12] M.A.Herrero and M.Pierre, *the cauchy problem for* $u_t = \Delta u^m$ *when* $0 < m < 1$,trans.Amer. Math.Soc. 291 (1985), 145-158

[13] Moritz Egert*, Bachelor-Arbeit, Barenblatt's solution to the porous medium equation*, 25 October 2010, 16-20.

[14] S.Kamin & J.L.Vazquez, *Asymptptic behavieur of solution of the porous medium equation with changing sign,*Siam Jour. Math.anal.22 (1991).

[15] S.Kamin and J.L.Vazquez, *Fundamental solution and asymptotic behavieur for the p-laplacian equation*, Rev. MAt Iberoamericana 4 (1988), 339-354.

[16] S.Kamin, L.A.Peletier &J.L.Vazquez, *Classification of singular solution of nonlinear heat equation ,* Duke J. Math. J. 40 (1991), 1333-1362.