

# Université Mohamed Boudiaf - M'sila

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE



Numéro de série : .....

Numéro d'inscription : DGE/02/20

## Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT SCIENCES**

**Spécialité : Génie Electrique**

**Option : Génie Electrique**

## THEME

**Contribution à la Conception de nouveaux schémas de techniques de commandes d'ordre fractionnaire pour l'amélioration des performances des systèmes industriels**

Présenté par

**DIB Riad**

Soutenue le : 16/10/2024

**Devant le jury composé de :**

Mr. BOUGUERRA Abderrahmen	Professeur	Université de M'sila	Président
Mr. KHETTAB Khatir	Professeur	Université de M'sila	Directeur de thèse
Mr. BENSAFIA Yassine	Professeur	Université de Bouira	Co-directeur de thèse
Mr. BOUKHALFA Abdelouahab	M.C.A	Université de M'sila	Examineur
Mr. CHELBI Salim	M.C.A	Université de Bouira	Examineur
Mr. BOUROUBA Bachir	M.C.A	Université de Sétif 1	Examineur
Mr. ZEMMIT Abderrahim	M.C.A	Université de M'sila	Invité

**Année universitaire : 2023/2024**

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail :*

*À ma chère femme **Sabrina**, qui a été ma source de soutien, d'inspiration et d'amour inconditionnel tout au long de ce parcours. Ta patience, ta compréhension et ton encouragement ont été mes plus grands atouts. Cette thèse est autant la tienne que la mienne, car tu as été ma lumière dans les moments sombres et ma force dans les moments de doute. Je te dédie ces pages avec tout mon amour.*

*À mes chers parents, dont le soutien indéfectible et les sacrifices ont rendu cette réalisation possible. Votre amour inconditionnel, vos encouragements constants et votre exemple de dévouement m'ont guidé à travers les hauts et les bas de ce voyage académique. Cette thèse est le fruit de vos efforts autant que des miens, et je vous en suis éternellement reconnaissant. Merci pour tout ce que vous avez fait, et je vous dédie ce travail avec tout mon cœur.*

# REMERCIEMENTS

*Je souhaite exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Mr **KHETTAB Khatir**, Professeur à l'université de M'sila, pour son soutien, son expertise et sa patience infinie. Votre guidance a été précieuse à chaque étape de ce parcours. Je tiens également à lui exprimer ma profonde gratitude pour la confiance qu'il m'a témoignée, ainsi que pour ses encouragements et ses conseils inestimables.*

*Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à mon co-directeur de thèse, Mr **BENSALIA Yassine**, Professeur à l'université de Bouira, pour ses conseils éclairés, ses idées brillantes et sa camaraderie. Ensemble, nous avons navigué à travers les méandres de la recherche et j'ai apprécié chaque moment d'apprentissage à vos côtés.*

*Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury pour avoir accepté de consacrer leur temps à lire et évaluer ce travail. Vos commentaires et suggestions ont grandement enrichi cette thèse. Je tiens à vous remercier pour le temps et l'effort que vous avez dédiés à cette tâche.*

*Je remercie affectueusement ma femme et mes chers parents qui ont cru en moi en me poussant toujours à accomplir ce que je souhaitais, ils ont été des piliers indispensables par leur présence et de leur affection.*

---

# SOMMAIRE

---

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Base et théorie du calcul fractionnaire</b>	
I.1. Introduction .....	5
I.2. Historique .....	6
I.3. Modèle d'ordre Fractionnaire.....	6
I.4. Commande d'ordre fractionnaire .....	7
I.5. Applications des systèmes fractionnaires.....	7
I.5.1. Electrotechnique.....	8
I.5.1. Electronique .....	8
I.5.3. Automatique .....	9
I.5.4. Diffusion et équation de la chaleur en thermique .....	9
I.5.5. Chimie .....	11
I.5.6. Mécanique .....	12
I.5.7. Acoustique.....	12
I.5.8. Traitement d'image .....	12
I.6. Calcul Fractionnaire .....	12
I.6.1. Définitions fondamentales .....	13
I.6.1.1. Intégration d'ordre fractionnaire .....	13
I.6.1.2. Dérivation d'ordre fractionnaire.....	14
I.6.1.2.1. Dérivée d'ordrefractionnaire defini par Caputo.....	14
I.6.1.2.2. Dérivée d'ordrefractionnaire defini par Riemann-Louville.....	14
I.6.1.2.3. Dérivée d'ordrefractionnaire defini par Grünwald-Letnikov .....	15
I.6.2. Interprétations géométrique et physique .....	16
I.7. Techniques opérationnelles fractionnaires .....	17
I.7.1. Fondements essentiels de la transformation de Laplace .....	17
I.7.2. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	18
I.7.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	18
I.7.3.1. Transformée de Laplace selon Caputo de la dérivée fractionnaire .....	19
I.7.3.2. Transformée de Laplace selon Riemann-Liouville de la dérivée fractionnaire .....	19

I.7.3.3. Transformée de Laplace selon Grünwald-Letnikov de la dérivée fractionnaire.....	19
I.8. Représentation des systèmes d'ordre non entier .....	19
I.8.1. Equation différentielle fractionnaire généralisée .....	20
I.8.2. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire .....	20
I.8.3. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire .....	21
I.9. Stabilité des systèmes fractionnaires.....	21
I.10. Commandabilité et observabilité des systèmes d'ordres fractionnaires .....	22
I.10.1. Commandabilité .....	22
I.10.2. Observabilité .....	23
I.11. Identification des systèmes d'ordre fractionnaires.....	23
I.12. Conclusion.....	24

## **Chapitre II : Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire**

II.1. Introduction .....	25
II.2. Opérateurs d'ordre fractionnaires .....	26
II.2.1. Opérateurs analogiques d'ordre fractionnaires .....	26
II.2.2. Opérateurs numériques d'ordre fractionnaires.....	26
II.3. Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire .....	26
II.3.1. Approximation analogique.....	27
II.3.1.1. Méthode d'approximation en utilisant l'expansion des fonctions continues.....	27
II.3.1.2. Méthode de Matsuda.....	27
II.3.1.3. Méthode de Carlson .....	27
II.3.1.4. Méthodes d'approximation par un modèle rationnel à temps continu.....	28
II.3.1.4.1. Méthode d'Oustaloup .....	28
II.3.1.4.1.1. Dérivateur généralisé .....	28
II.3.1.4.2. Méthode de Charef (Fonction de singularité) .....	30
II.3.1.4.2.1. Approximation des systèmes du premier ordre fractionnaire .....	31
II.3.1.4.2.2. Approximation des systèmes fractionnaires d'ordres multiples.....	34
II.3.1.4.2.3. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	35
II.3.1.4.2.4. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire.....	38

II.3.2. Approximation numérique .....	38
II.3.2.1. Approximation par calcul de l'expression analytique de la sortie.....	38
II.3.2.2. Approximation par un modèle rationnel à temps discret.....	39
II.3.2.2.1. Méthode d'Al Alaoui .....	39
II.3.2.2.2. Méthode de Simpson .....	39
II.3.2.2.3. Méthode de Tustin .....	39
II.3.2.2.4. Méthode d'Euler (Grünwald).....	40
II.4. Rendement des systèmes à ordre fractionnaire .....	40
II.5. Conclusion .....	42

**Chapitre III : " La fractionnalisation" : Une nouvelle approche de comparaison entre les méthodes d'approximation des systèmes fractionnaires**

III.1. Introduction .....	43
III.2. Systèmes fractionnalisés.....	44
III.2.1. Système du premier ordre fractionnalisé .....	44
III.2.2. Système du deuxième ordre fractionnalisé.....	44
III.3. Résultats et discussion .....	45
III.3.1. Système du premier ordre fractionnalisé (FFOS).....	46
III.3.1.1. Analyse fréquentielle.....	46
III.3.1.2. Analyse temporelle .....	50
III.3.2. Système du second ordre fractionnalisé (FSOS) .....	53
III.3.2.1. Analyse fréquentielle.....	53
III.3.2.2. Analyse temporelle .....	57
III.3. Conclusion .....	60

**Chapitre IV : Commande PID Fractionnalisée d'un moteur à courant continu**

IV.1. Introduction .....	61
IV.2. Description du moteur à courant continu(MCC).....	62
IV.2.1. Définition .....	62
IV.2.2. Principe de fonctionnement.....	62
IV.2.3. Modélisation du Moteur à courant continu .....	63
IV.2.3.1. Équation électrique.....	63
IV.2.3.2. Équation mécanique .....	64

IV.3. Commande PID .....	65
IV.3.1. Principe de la régulation.....	65
IV.3.2. Performances des contrôleurs PID .....	66
IV.4. Contrôleur PID classique .....	67
IV.4.1. Réglage de PID.....	69
IV.5. Contrôleur $PI^{\alpha}D^{\beta}$ d'ordre fractionnaire .....	70
IV.6. Contrôleur PID Fractionnalisé.....	73
IV.7. Résultats et discussions .....	74
IV.8. Conclusion.....	77
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>78</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>80</b>

---

# LISTE DES FIGURES

---

## Chapitre I

- Figure I.1.** Schémas équivalent du supercondensateur.....11
- Figure I.2.** Région de stabilité pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$ .....22

## Chapitre II

- Figure II.1.** Diagramme de Bode de  $1/\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m$  .....32
- Figure II.2.** Choix des singularités.....33
- Figure II.3.** Réponse indicielle du système d'ordre 1 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$ .....41
- Figure II.4.** Réponse indicielle du système d'ordre 2 fractionnaire pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$ .....42

## Chapitre III

- Figure III.1.** Système du premier ordre fractionnalisé proposé.....44
- Figure III.2.** Système du deuxième ordre fractionnalisé proposé.....45
- Figure III.3.** Stratégie de conception d'approximation proposée en utilisant l'approche de la « Fractionnalisation » .....45
- Figure III.4.** Architecture du superviseur.....46
- Figure III.5.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ).....47
- Figure III.6.** . Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).....48

**Figure III.7.** . Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).....**49**

**Figure III.8.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ) .....**50**

**Figure III.9.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ) .....**51**

**Figure III.10.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).....**52**

**Figure III.11.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ) .....**54**

**Figure III.12.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).....**55**

**Figure III.13.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).....**56**

**Figure III.14.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ) .....**57**

**Figure III.15.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).....**58**

**Figure III.16.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).....59

#### **Chapitre IV**

**Figure IV.1.** Schéma de principe d'un moteur à courant continu.....62

**Figure IV.2.** Schéma bloc du modèle de moteur électrique en vitesse.....64

**Figure IV.3.** Performances d'un système de commande.....66

**Figure IV.4.** Système de commande à retour unitaire classique.....67

**Figure IV.5.** Réponse par échelon unitaire d'une plante.....69

**Figure IV.6.** Courbe de réponse en forme de S.....70

**Figure IV.7.** Système de commande à retour unitaire (cas d'un PID fractionnaire) .....71

**Figure IV.8.** (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire.....72

**Figure IV.9.** Système de commande PID fractionnalisé à retour unitaire.....73

**Figure IV.10.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0.1$ ) .....74

**Figure IV.11.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0.3$ ) .....75

**Figure IV.12.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0.5$ ) .....76

---

# LISTES DES TABLEAUX

---

## Chapitre III

**Tableau III.1.** Critère d'erreur quadratique pour les réponses indicielles de système du premier ordre.....53

**Tableau III.2.** Critère d'erreur quadratique pour les réponses indicielles de système du deuxième ordre.....60

## Chapitre IV

**Tableau IV.1.** Règle de réglage de **Ziegler-Nichols** basée sur la réponse en échelon.....70

**Tableau IV.2.** Type du contrôleur selon les différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .....72

**Tableau IV.3.** Paramètres de stabilité de la réponse transitoire du système.....76

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

La commande des systèmes industriels est une discipline fondamentale dans le domaine de l'ingénierie, visant à réguler le comportement des systèmes dynamiques pour répondre à des objectifs spécifiques tels que la stabilité, la précision et la robustesse.

Dans de nombreux secteurs industriels, des processus dynamiques complexes sont présents, allant de la production manufacturière à la régulation des processus chimiques et biologiques. La capacité à contrôler efficacement ces systèmes est essentielle pour assurer leur bon fonctionnement, maximiser leur efficacité opérationnelle et garantir la qualité des produits.

- **Stabilité** : Un système est considéré comme stable lorsque ses sorties restent limitées et contrôlées en réponse à des perturbations. Donc la stabilité est un objectif fondamental de la commande des systèmes industriels pour éviter les comportements indésirables tels que l'instabilité et les oscillations.
- **Précision** : La précision du système se réfère à sa capacité à atteindre et à maintenir les valeurs désirées de ses sorties. Dans de nombreuses applications industrielles, une précision élevée est cruciale pour garantir la qualité des produits et minimiser les pertes de production.
- **Robustesse** : La robustesse d'un système fait référence à sa capacité à maintenir ses performances face à des variations de paramètres et à des perturbations externes. Les systèmes industriels sont souvent soumis à des conditions variables et à des perturbations imprévues, et la conception de contrôleurs robustes est donc essentielle pour assurer leur fonctionnement fiable.

Bien que des avancées aient été accomplies dans le secteur de la commande des systèmes industriels, plusieurs défis persistent dans l'application des différentes techniques de commande traditionnelles :

- **Complexité** : Les systèmes industriels modernes sont souvent complexes, non linéaires et multidimensionnels, ce qui rend difficile leur modélisation et leur commande avec des approches traditionnelles.

- Variabilité et Incertitude : Les paramètres des systèmes industriels peuvent varier dans le temps et être sujets à des incertitudes, ce qui complique la conception de contrôleurs robustes capables de maintenir les performances du système.
- Temps de Réponse et Dynamique Rapide : Certains processus industriels exigent des temps de réponse rapides et une dynamique précise, ce qui peut être difficile à atteindre avec des contrôleurs classiques.

### **Commande d'ordre « fractionnaire »**

Le calcul fractionnaire est actuellement une théorie très reconnue parmi les chercheurs, tant dans les sciences fondamentales que dans le domaine de l'ingénierie."

le calcul fractionnaire est devenu une théorie incontournable dans plusieurs domaines des sciences fondamentales et sciences d'ingénieurs. Son utilisation permet une modélisation plus précise de phénomènes dynamiques complexes, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles avancées dans la compréhension des systèmes naturels et artificiels.

Le calcul fractionnaire a apporté une nouvelle dimension à la commande automatique et à l'identification des systèmes dynamiques. En effet, l'utilisation de modèles d'ordre fractionnaire permet de mieux représenter certains phénomènes physiques complexes, tels que les matériaux viscoélastiques, les processus non linéaires et les systèmes à retard. Cette approche a ouvert de nouvelles perspectives dans la conception de contrôleurs plus efficaces pour ces types de systèmes. La commande d'ordre fractionnaire constitue une approche novatrice dans le domaine de la commande des systèmes dynamiques. En utilisant des équations différentielles et des transferts d'ordre non entier, cette méthode vise à accroître les performances et la robustesse des systèmes de commande traditionnels. En intégrant des opérateurs d'ordre non entier dans les algorithmes de commande, il est possible d'obtenir des réponses plus rapides, une meilleure suppression des perturbations et une plus grande précision de suivi de trajectoire [1-4].

Le travail pionnier d'Oustaloup dans le domaine des correcteurs d'ordre fractionnaire a ouvert la voie à de nombreuses avancées significatives. Son développement du correcteur de commande robuste d'ordre non entier (CRONE) a suscité un vif intérêt parmi les chercheurs et a stimulé des recherches approfondies dans ce domaine. En effet, depuis cette avancée, de nombreux travaux ont été menés pour explorer les applications potentielles et les avantages des correcteurs d'ordre fractionnaire dans divers domaines de l'ingénierie et des systèmes de

contrôle. L'introduction du régulateur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  par Podlubny en 1991 a également marqué une étape importante dans le développement des correcteurs d'ordre fractionnaire. Ce régulateur, avec ses actions intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire, a ouvert de nouvelles perspectives pour la conception de systèmes de contrôle avancés[1-5].

Les modèles d'ordre non entier sont important pour représenter de nombreux phénomènes physiques complexes. Cependant, la complexité de ces modèles pose des défis en termes de simulation et d'implémentation pratique. Les outils techniques traditionnels basés sur des modèles d'ordre entier ne sont souvent pas adaptés à la représentation précise de ces phénomènes. La recherche dans le domaine des modèles d'ordre non entier a donc été axée sur le développement des méthodes d'approximation afin de rendre ces modèles plus accessibles. Ces méthodes comprennent à la fois des approches analogiques et numériques.

## **Objectifs et contributions de la thèse**

La thématique de cette thèse est pertinente dans ce contexte car elle explore un domaine dont les fondements théoriques remontent à une époque ancienne, Cependant, son développement et ses applications sont encore très récents. Intitulé « *Contribution à la Conception de nouveaux schémas de techniques de commandes d'ordre fractionnaire pour l'amélioration des performances des systèmes industriels* ». Son objectif est d'accroître la robustesse des systèmes de commande classique. Nous visons à présenter une nouvelle approche pour évaluer et comparer les diverses méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire en introduisant des filtres d'ordre non entier, nous pensons qu'il fournira un nouvel outil important pour les ingénieurs de conception travaillant avec des installations dans des environnements industriels.

## **Organisation et présentation de la thèse**

L'organisation de notre thèse repose sur quatre chapitres majeurs :

- Le **premier chapitre** plonge le lecteur dans l'univers des systèmes d'ordre non entier, en commençant par un bref rappel historique et en définissant les concepts préliminaires essentiels.
- Le **deuxième chapitre** présente les trois méthodes d'approximation les plus répandues pour les systèmes d'ordre fractionnaire : Matsuda, Oustaloup et Charef.

- Le **troisième chapitre** abordera une nouvelle approche proposée dans cette thèse, appelée "La Fractionnalisation", son objectif est de comparer les méthodes d'approximation Matsuda, Oustaloup et Charef.
- Dans le **quatrième chapitre**, nous proposons un nouveau de schéma de commande et de l'appliqué sur un moteur à courant continu afin d'améliorer les performances de la commande classique. une comparaison entre les différentes commandes sera présenté.
- Enfin, on termine notre travail par une conclusion qui exposera les apports et les résultats obtenus lors de cette thèse, puis quelques pistes de travail à venir.

---

# CHAPITRE I

## « BASE ET THÉORIE DU CALCUL FRACTIONNAIRE »

---

### I.1. Introduction

Les systèmes d'ordre non entier se caractérisent par des équations différentielles comportant des ordres non entiers pour leur description et leur modélisation. Leur représentation dans le domaine fréquentiel, fait appel à des fonctions de transfert comportant des termes irrationnels. Cette particularité a limité l'ampleur des études consacrées aux systèmes d'ordre fractionnaire. En raison d'absence de solutions analytiques exactes, on a largement recours à des méthodes d'approximation pour résoudre, analyser et mettre en œuvre ces systèmes.

Récemment, des progrès significatifs dans le domaine du contrôle avancé ont entraîné une transition vers l'emploi des systèmes non entiers dans le but d'améliorer le rendement des systèmes de régulation. Cette évolution a engendré une diversité de contrôleurs non entiers, chacun démontrant sa propre robustesse. Les systèmes d'ordre fractionnaire se révèlent particulièrement bénéfiques pour l'analyse des comportements inhabituels observés dans des systèmes dynamiques, que ce soit en physique, en électrochimie, en biologie ou d'autres domaines.

Dans ce premier chapitre, nous débuterons par une revue historique du calcul fractionnaire. Ensuite, nous aborderons les définitions fondamentales ainsi que les principales caractéristiques des opérateurs fractionnaires. Nous explorerons également la transformée de Laplace appliquée aux dérivées et intégrales d'ordre non entier. Nous clôturons ce chapitre en présentant les différentes manières de représentation des systèmes fractionnaires.

## I.2. Historique

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui se consacre à l'étude et à l'application des intégrales et des dérivées d'ordre non entier. C'est un concept ancien, remontant à l'histoire du calcul fractionnaire qui a débuté en 1695 lorsque Leibniz, dans une lettre à l'Hôpital, s'est interrogé sur la possibilité d'avoir un exposant non entier  $n$  dans une fraction  $Q$ , se demandant si  $n$  pouvait être égal à «  $\frac{1}{2}$  » [6,7].

Néanmoins, le calcul d'ordre fractionnaire peut être envisagé comme un domaine d'étude relativement récent, car il n'a suscité un intérêt marqué que depuis un peu plus d'une vingtaine d'années. La première fois qu'un livre entièrement consacré au calcul d'ordre fractionnaire a été publié était en 1974 par K.B. Oldham et Spanier. En terme mathématique, il convient de mentionner la publication russe de Samko, Kilbas et Marichev éditée en 1993, qui compile une série de définitions et de théories cruciales relatives au calcul d'ordre fractionnaire [6,7].

Au fil des dernières années, un intérêt important s'est développé autour du calcul fractionnaire En raison de son utilisation dans différents champs de la physique et de l'ingénierie. Ce phénomène a été marqué par des avancées significatives dans les travaux théoriques, qui peuvent servir de base à de nombreuses applications dans ces domaines. Par conséquent, d'importants efforts ont été déployés pour appliquer les résultats déjà établis, et des recherches intensives sont toujours en cours dans de nombreux domaines de l'ingénierie en vue d'appliquer ces notions d'ordre non entier [6,7].

## I.3. Modélisation d'ordre Fractionnaire

Les systèmes fractionnaires sont représentés mathématiquement dans le domaine fréquentiel, ce qui conduit à des fonctions irrationnelles, ce qui se traduit par des équations différentielles complexes à manipuler dans le domaine temporel. En raison du manque de techniques mathématiques appropriées.

La représentation mathématique de systèmes à ordre non entier vise à décrire les phénomènes physiques associés à des systèmes dont le comportement est gouverné par des équations aux dérivées partielles [6, 7].

De nos jours, le calcul fractionnaire est largement utilisée pour la modélisation de dispositifs électriques [8-12], l'évaluation des conséquences des catastrophes naturelles [13], ainsi que pour la synthèse de commandes [14-16]. La modélisation d'ordre fractionnaire est également utilisée dans divers domaines comme la biologie, notamment pour la modélisation de parties du corps humain [17], et aussi dans les sciences humaines et sociales[18].

#### **I.4. Commande d'ordre fractionnaire**

La commande d'ordre fractionnaire constitue une extension de la théorie de la commande à ordre entier classique. Son avantage réside dans l'optimisation des performances des systèmes de commande grâce à l'utilisation d'opérateurs et de systèmes d'ordre non entier [19, 20]. De nombreux chercheurs se sont intéressés aux systèmes dynamiques et aux contrôleurs d'ordre fractionnaire qui reposent sur le calcul fractionnaire. Parmi plusieurs architectures de commande à ordre fractionnaire les plus fréquemment observées, on peut mentionner :

- ❖ Commande robuste d'ordre non entier(CRONE) a été développée par Oustaloup [21].
- ❖ La commande PI et PID d'ordre non entier [22].
- ❖ Commande adaptative floue et commande par mode glissant (Commandes intelligentes en cas d'ordre non entier) [23].

La commande adaptative d'ordre non entier a fait son première apparition. dans la littérature au tournant du millénaire(2000), notamment grâce aux recherches menées par Ladaci et Charef [24], ainsi que ceux de Vinagre et al [25]. Depuis lors, de nombreuses publications portant sur les méthodes de commande adaptative à ordre fractionnaire voient le jour chaque année [26].

#### **I.5. Applications des systèmes fractionnaires**

Les domaines d'application du concept du calcul fractionnaire sont très diverses, que ce soit dans les sciences fondamentales ou en ingénierie, comme indiqué dans la documentation [27-32].

### I.5.1. Electrotechnique

On trouve des machines dans tous les systèmes et réseaux énergétiques, de la production aux applications industrielles et aux transports. La précision et la précision de la modélisation des machines sont cruciales pour la conception et la simulation de systèmes et de réseaux futurs. La sophistication des modèles de moteurs (synchrones et asynchrones) est importante pour étudier la stabilité, la sécurité et la fiabilité du réseau. Ces modèles doivent tenir compte des effets des harmoniques générées par l'électronique de puissance intégrée pour les gérer plus efficacement. L'effet de la peau sur certains conducteurs est essentiel pour concevoir un modèle fiable sur une large gamme de fréquences [29,30, 33-41].

### I.5.2. Électronique

Selon les références [42, 43], l'équation de la fonction diélectrique est donnée par la formule suivante:

$$\varepsilon = \varepsilon' \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - j) = \varepsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } j = \sqrt{-1} \quad (\text{I.1})$$

Ainsi l'impédance peut être écrite comme suit :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon'} \quad (\text{I.2})$$

Avec :  $C_e$  est une constante.

En remplaçant la relation (I-1) dans (I-2), nous obtenons :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.3})$$

que l'on peut éventuellement exprimer comme :

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \text{ Où } K = \frac{1}{\sqrt{2} C_e \varepsilon'} \quad (\text{I.4})$$

ou encore, en termes de la variable de Laplace  $s$  :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.5})$$

La définitions de la impédance fractionnaire de capacité est établie par l'équation (I.5), qui utilise la constante K de la "Fractor" (capacité fractionnaire) et se concentre sur des cellules Resistance-Capacité.

### I.5.3. Automatique

Peu d'auteurs ont inclus des lois de contrôle fractionnel dans l'automatisation. Des chercheurs ont prouvé l'utilisation de contrôleurs fractionnels pour un contrôle fractionnel efficace [44-48].

La méthode CRONE permet des contrôles de retour de sortie dynamiques robustes pour les systèmes linéaires stationnaires dans diverses plages de fréquence, assurant une approche minimale pessimiste et des paramètres d'ajustement efficaces [47, 49, 50].

La méthode CRONE permet de synthétiser des commandes dynamiques robustes pour les systèmes linéaires incertains (LTI) [47, 49, 50].

La proposition de Podlubny a conduit au succès de la théorie du contrôle des ordres fractionnels ( $PI^\lambda D^\mu$ ), avec de nombreuses études démontrant son efficacité et sa supériorité par rapport au contrôle traditionnel du PID [51-55].

Les chercheurs en automatique se concentrent de plus en plus sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire, avec de nombreux schémas proposés régulièrement [56, 57, 58], ainsi que diverses applications telles que la robotique [59], les machines électriques [60], la régulation de chaudières [61], ou encore les panneaux solaires, etc.. [62].

### I.5.4. Diffusion et équation de la chaleur en thermique

L'équation de la chaleur unidimensionnelle est un exemple concret de système fractionnaire, avec des conditions aux limites particulières. En choisissant avec soin la variable de sortie, on peut obtenir un dérivateur de demi-ordre. Ce dernier a d'abord fait l'objet d'une discussion dans la référence [63] et a été approfondi dans les références [42, 64-66].

L'équation de la chaleur est représentée par une méthode différentielle partielle :

$$\frac{\partial v(t,y)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y^2}, t > 0, -\infty < y < 0 \quad (\text{I.6})$$

Il est possible de résoudre le problème en passant au domaine opérationnel en utilisant la transformée de Laplace ,on obtient :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(S,y)}{\partial y^2} = \frac{S}{c} \hat{v}(S,y), \text{ pour } y > 0 \quad (\text{I.7})$$

$$\hat{v}(S, 0) = \hat{u}(s)$$

La solution formelle de l'équation (I-7) est :

$$\hat{v}(S, x) = C_1(S) \exp\left(-x\sqrt{\frac{S}{c}}\right) + C_2(S) \exp\left(x\sqrt{\frac{S}{c}}\right) \quad (\text{I.8})$$

En prenant en considération la condition aux limites  $\hat{v}(S,0)=\hat{v}(S)$ , nous obtenons :

$$\hat{v}(S, x) = \hat{u}(S) \exp\left(x\sqrt{\frac{S}{c}}\right) \quad (\text{I.9})$$

$$\text{Pour } y>0 : \exp\left(y\sqrt{\frac{S}{c}}\right) = \mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi c}} t^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right)\right\}$$

Soit :

$$v(t, y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right) u(t - \tau) d\tau \quad (\text{I.10})$$

D'une part, on peut dire l'équation (I.9) est une solution pour l'équation (I.6), et en partant de (I.7), on déduit que :

$$\frac{\partial \hat{v}(S,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{c}} S^{\frac{1}{2}} \hat{v}(S,y) \quad (\text{I.11})$$

Et spécifiquement,

$$\frac{\partial v(S,0)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{c}} S^{\frac{1}{2}} \hat{u}(S) \quad (\text{I.12})$$

Si la variable de sortie est définie comme :

$$y(t) \triangleq \sqrt{c} \frac{\partial v(t,0)}{\partial y} \quad (\text{I.13})$$

Le transfert est obtenu comme suit :

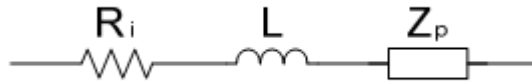
$$\hat{y}(S) = S^{\frac{1}{2}} \hat{u}(S) \quad (\text{I.14})$$

Cela conduit à la conclusion que u et la sortie y agit comme un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2.

### I.5.5. Chimie

Les dispositifs de stockage jouent un rôle crucial dans les systèmes énergétiques, améliorant la gestion de l'énergie sous différents angles. Les batteries électroniques telles que le plomb, le Ni-Cd, le lithium-ion et les supercondensateurs ont un potentiel important pour la diversification énergétique et l'intégration intermittente. Cependant, leur fonctionnement dynamique doit être soigneusement contrôlé pour optimiser leur taille et leurs stratégies de gestion. Les supercondensateurs ont une capacité plus élevée en raison du double couchage, ce qui leur permet d'avoir des densités de puissance plus élevées que les batteries traditionnelles. [1, 67].

La figure I.1 présente le modèle classique du supercondensateur.



**Figure I.1.** Schémas équivalent du supercondensateur.

L'impédance complexe  $Z_p$  qui symbolise la porosité des électrodes du supercondensateur est donnée comme suit [68].

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega\tau})}{C_0 \cdot \sqrt{j\omega\tau}} \quad (\text{I.15})$$

Traditionnellement, l'impédance  $Z_p$  peut être approximée en utilisant un nombre limité de cellules R-C parallèles, mais cette approche peut être moins pratique dans une approche systémique. Une nouvelle méthode, utilisant un système d'ordre 1/2, offre une cohérence remarquable avec le modèle analytique [69].

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}{C_0 \cdot j\omega} \quad (\text{I.16})$$

Grâce à une modélisation d'ordre non entier, le nombre de paramètres du modèle a été considérablement réduit tout en améliorant sa précision en termes de représentation fréquentielle. Il convient de souligner que le modèle proposé dans [69, 70] est linéaire.

### I.5.6. Mécanique

La déformation des milieux continus, solides ou liquides, est généralement décrite par deux tenseurs :  $\varepsilon_{ij}$ , tenseur des déformations, et  $\sigma_{ij}$ , tenseur des contraintes. Le lien suivant entre ces deux tenseurs peut servir à représenter de tels systèmes.

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}(t) + \eta D^m \varepsilon_{ij}(t) \quad 0 < m < 1 \quad (\text{I.17})$$

La justification de cette loi par Bagley et Torvik dans [71, 72] (pour  $m=1/2$ ) est expliquée. Selon la référence [73], Dans le cas des polymères, l'utilisation de dérivées fractionnaires est motivée par le fait que les déformations appliquées nécessitent du temps pour être transmises en raison de la longueur des fibres, qui est bien plus grande que la distance géométrique.

La dérivation fractionnaire est utilisée pour expliquer la viscoélasticité dans la référence [74].

### I.5.7. Acoustique

Selon Hélie et Matignon en 2006, il est possible de modéliser efficacement les pertes viscothermiques de certains instruments de musique à vent en utilisant des dérivées fractionnaires temporelles [75, 76].

### I.5.8. Traitement d'image

Le traitement d'images en utilisant des dérivées d'ordre fractionnaire a été étudié dans une recherche menée par Matieu et d'autres en 2003 [77], ainsi que par Cooper et ses collègues en 2003 [78] dans le domaine de la géophysique, et par García-Fiñana et son équipe en 2000 [79] dans le domaine de la biomédecine. Ce dernier domaine a été appliqué à diverses applications, y compris celles de Ferdi et d'autres sur l'ECG [80-82].

## I.6. Calcul fractionnaire

Le calcul d'ordre non entier, incluant l'intégration et la différentiation d'ordre non entière, remonte aux travaux des mathématiciens tels que Cauchy, Riemann, Liouville et Letnikov au 19ème siècle. Son utilisation s'est étendue à des domaines tels que la mécanique à partir des années 1930 et l'électrochimie à partir des années 1960.

Les systèmes fractionnaires représentés mathématiquement dans le domaine fréquentiel donnent lieu à des fonctions irrationnelles qui se traduisent par des équations différentielles complexes dans le domaine temporel. En raison du manque de méthodes mathématiques adaptées, l'étude des systèmes dynamiques d'ordre non entier était jusqu'à présent limitée, que ce soit du côté théorique ou pratique. Afin de faciliter l'analyse, la synthèse et la simulation de ces systèmes, l'approximation à l'aide de fonctions rationnelles revêt une grande importance [6, 7]. Par conséquent, l'analyse et la conception de systèmes de commande d'ordre fractionnaire nécessitent l'utilisation de fonctions rationnelles pour les approximer.

La définition de l'opérateur intégrro-différentiel  ${}_{t_0}D_t^n$  est donnée comme suit ,

$${}_{t_0}D_t^n = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} & \Re(n) > 0 \\ 1 & \Re(n) = 0 \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-n} & \Re(n) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

où «  $t_0$  » et «  $t$  » sont les bornes de l'opération.

Avec : l'opération est de l'ordre de  $n$ ,  $n \in \mathbb{R}$  et  $\Re(n)$  est la partie réelle de  $n$ .

### I.6.1. Définitions fondamentales

Différentes définitions mathématiques sont disponibles pour la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire.

#### I.6.1.1. Intégration d'ordre fractionnaire

La formule de Cauchy permet d'exprimer toute fonction  $f(t)$  continue et intégrable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  en utilisant l'intégrale kème notée  $I^k f(t)$  telle que décrite dans la référence [2, 66].

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t) dt_1 = I^k f(t) \quad (\text{I.19})$$

$$I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.20})$$

L'équation (I.20) peut être exprimée de la manière suivante :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.21})$$

Avec :  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$

On désigne cette intégrale sous le nom d'intégrale de Riemann-Liouville, notée  ${}^{\text{RL}}I_t^\alpha$

### I.6.1.2. Dérivation d'ordre fractionnaire

Il y en a de nombreuses définitions pour l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire., cependant, elles ne sont pas toutes équivalentes. Dans cette section, nous ne présenterons que les plus couramment utilisées [83, 84].

#### I.6.1.2.1. Dérivée d'ordre fractionnaire définie par Caputo

La définition de la dérivée de Caputo repose aussi sur le calcul de l'intégrale k-ième d'une fonction, en imposant que la fonction  $f(t)$  et ses  $n$  dérivées successives soient égales à zéro pour  $t \leq 0$  [85].

La dérivée d'ordre  $\alpha$  de Caputo notée  ${}^{\text{C}}D_t^\alpha$  est obtenue en deux étapes :

- **Étape 1** : Afin de dériver la fonction  $f(t)$  à un ordre entier, on obtient :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (\text{I.22})$$

- **Étape 2** : Intégrer la fonction obtenue à partir de l'étape 1 à l'ordre non entier  $n-\alpha$ , cela permet d'obtenir l'équation (I.23)

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (\text{I.23})$$

Où  $n$  est un nombre entier tel que :  $n-1 < \alpha < n$

#### I.6.1.2.2. Dérivée d'ordre fractionnaire définie par Riemann-Liouville

On utilise fréquemment la méthode de Riemann-Liouville pour la dérivation fractionnaire, qui repose sur le calcul de l'intégrale kème d'une fonction. On obtient la dérivée en deux étapes :

- **Étape 1 :** Effectuer une intégration d'ordre  $(n-\alpha)$  non entier, comme suit :

$${}^{RL}I_{t_0}^{n-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.24)$$

- **Étape 2 :** Effectuer la dérivation entière de la formule obtenue à partir de l'étape 1 à l'ordre  $n$ , afin d'obtenir La dérivation selon le concept de Riemann Liouville d'ordre  $\alpha$  est symbolisée par  ${}^{RL}D_t^\alpha$ , est définie comme suit :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.25)$$

Où  $n$  est un nombre entier tel que :  $n - 1 < \alpha < n$

**Modèle :**

Calculez la dérivée d'ordre  $\alpha=0.6$  d'une fonction constante  $f(t)=C$  dans le cadre la définition de Riemann-Liouville en suivant les étapes ci-dessous : Déterminer l'entier  $n$  à partir de la condition  $n-1 < \alpha < n$ , on donne :  $n=1$ .

- i. L'intégration de la fonction  $f(t)=C$  à l'ordre non entier  $n-\alpha=0.4$ , donne :

$${}^{RL}I_{t_0}^{0.4}f(t) = \frac{C}{\Gamma(0.4)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-0.6} f(\tau) d\tau \quad (I.26)$$

- ii. Effectuer la dérivation entière de l'expression obtenue dans (I.26) à l'ordre entier  $n=1$ , donne la dérivée d'ordre  $\alpha=0.6$ , comme suit :

$${}^{RL}D_t^{0.6}f(t) = \frac{C}{\Gamma(0.4)} (t-t_0)^{-0.6} \quad (I.27)$$

**I.6.1.2.3. Dérivée d'ordre fractionnaire définie par Grünwald-Letnikov**

La dérivée de Grünwald Letnikov, à la distinction des deux premières définitions évoquées, repose sur la définition classique de dérivation entière [3, 84].

$$D^1f(t) = \frac{d}{dt} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \quad (I.28)$$

En effectuant le calcul des dérivées successives de la fonction  $f(t)$ , on parvient à généraliser la formule (I.28) à un ordre  $n$  quelconque appartenant à l'ensemble des nombres naturels.

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} f(t - jh) \quad (I.29)$$

Une autre écriture de (I.28) est :

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (I.30)$$

Où :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (I.31)$$

montre la manière dont  $j$  éléments peuvent être choisis parmi un ensemble de  $n$  éléments.

L'expression (I.30) désigne la dérivée d'un ordre entier  $n$ , et pour des ordres non entiers, il est possible d'écrire:

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(j-n-1)}{j!} \quad (I.32)$$

Pour un nombre  $\alpha$  non entier, on peut écrire :

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} \quad (I.33)$$

En substituant (I.33) dans (I.30), La dérivée de Grünwald-Letnikov est définie comme suit :

$$D_{GL}^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - jh) \quad (I.34)$$

### I.6.3. Interprétations géométrique et physique

L'intégration et la différenciation d'ordre non entier n'ont pas été expliquées physiquement et géométriquement pendant plus de 300 ans. Elles constituent une prolongation des notions de distinction et d'intégration d'ordre entier. Ces opérateurs d'ordre

non entier doivent donc être expliqués physiquement et géométriquement, afin de les relier aux explications classiques.

Cette absence de ces interprétations a suscité de nombreux débats lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire en 1974. Cette problématique a été reconnue comme un défi ouvert et n'a pas été résolue, même lors des différentes conférences internationales suivantes.

Dernièrement, Étant donné la nécessité d'apporter des significations physiques et géométriques de l'intégration et de la différenciation d'ordre non entière, plusieurs recherches ont été réalisées dans ce domaine. En conséquence, diverses approches ont été élaborées par différents chercheurs, en particulier en ce qui concerne l'interprétation physique [26] et l'interprétation géométrique [86-89].

## I.7. Techniques opérationnelles fractionnaires

### I.7.1. Fondements essentiels de la transformée de Laplace

Considérons  $H(S)$  comme fonction d'une variable complexe  $S$ , laquelle est la transformée de Laplace de  $f(t)$ , décrite de la manière suivante :

$$H(S) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-St}dt \quad (\text{I.35})$$

On peut retrouver la fonction originale  $h(t)$  en effectuant la transformée de Laplace inverse:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(S)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(S)e^{St}dS \quad \text{avec } c = \Re(S) > c_0 \quad (\text{I.36})$$

où  $c_0$  réside dans le demi-plan droit de convergence absolue de l'intégrale de Laplace (I.35).

Il est souvent difficile d'appliquer directement la transformée de Laplace inverse à l'aide de la formule (I.36), mais elle peut fournir des informations précieuses sur le comportement de la fonction originale inconnue  $h(t)$  que l'on cherche à déterminer.

La transformée de Laplace. du produit de convolution des fonctions  $u$  et  $v$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$\mathcal{L}\{u(t) * v(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(t-\tau) * v(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t v(t-\tau) * u(\tau) d\tau\right\} = U(S) \times V(S) \quad (\text{I.37})$$

En considérant que  $u(t)$  et  $v(t)$  sont deux fonctions nulles pour  $t < 0$ , et que  $U(S)$  et  $V(S)$  représentent leurs transformées respectives.

Il est possible de reformuler l'équation (I.35) de la manière suivante :

$$\mathcal{L}\{h^n(t)\} = S^n H(S) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k f^{n-k-1}(0) \quad (\text{I.38})$$

### I.7. 2. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Cette transformée peut être représentée comme le résultat de la convolution des deux fonctions.  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$  [9, 90, 91] :

$$I^\alpha = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \quad (\text{I.39})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est définie par :

$$G(S) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) S^{-\alpha} \quad (\text{I.40})$$

La relation entre la transformée de Riemann-Liouville et celle de Grünwald-Leitnikov est exprimée comme suit :

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = \frac{F(S)}{S^\alpha} \quad (\text{I.41})$$

### I.7. 3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

En raison des différentes interprétations de la dérivée non entière, il n'existe pas une seule expression unique pour sa transformée de Laplace. Les approches peuvent varier à propos de la prise en considération des conditions initiales [92, 93].

Les différentes expressions de la transformée de Laplace pour la dérivation fractionnaire généralisent la transformée de Laplace pour la dérivée entière d'ordre  $n$ , dont l'expression est :

$$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = S^n F(S) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k D^{n-k-1} f^{(k)}(t) \quad (\text{I.42})$$

Dans les paragraphes suivants, nous mentionnons les transformées de Laplace des diverses définitions de la dérivée d'ordre non entier.

### I.7.3. 1. Transformée de Laplace selon Caputo de la dérivée fractionnaire

De manière similaire, l'équation (I.42) montre que la transformée de Laplace de la dérivation non entière selon la définition de « Caputo » est exprimée par :

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.43})$$

Avec  $(n - 1) < \alpha < n$

### I.7.3.2. Transformée de Laplace selon Riemann-Liouville de la dérivée fractionnaire

On peut appliquer la formulation (I.42) au cas d'un ordre non entier  $\alpha$  selon la définition des Riemann-Liouville de la façon suivante :

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k D^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad n - 1 < \alpha < n \quad (\text{I.44})$$

La transformée de Laplace de la dérivée selon la définition de Riemann-Liouville est bien établie [53].

### I.7.3.3. Transformée de Laplace selon Grünwald-Letnikov de la dérivée fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov est exprimée comme suit:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) \quad (\text{I.45})$$

La solution des équations différentielles fractionnaires en utilisant la transformée de Laplace suit la même procédure que pour les équations différentielles entières. Toutefois, les outils informatiques ne disposent que d'intégrateurs et de dérivateurs d'ordre entier. Par conséquent, il est nécessaire d'approximer les opérateurs d'ordre non entier afin de les manipuler dans les systèmes programmables actuels.

## I.8. Représentation

Les modèles d'ordre non entier, sont couramment utilisés pour représenter un système d'ordre non entier. Par conséquent, la dynamique réelle de ce système est généralement

caractérisée par l'un des trois modèles, de manière similaire à la représentation des systèmes entiers. On peut le décrire soit par une équation différentielle fractionnaire généralisée, soit par une fonction de transfert non entière, ou encore par une représentation d'état non entière.

### I.8.1. Equation différentielle fractionnaire généralisée

On peut exprimer un système d'ordre non entier en utilisant une équation différentielle généralisée comme suit :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\lambda_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\mu_j} u(t) \quad (\text{I.46})$$

Où :

- $D^{\lambda_i}$  et  $D^{\mu_j}$  : symbolisent les opérateurs de dérivées d'ordres  $\lambda$  et  $\mu$ , respectivement,
- $u(t)$  et  $y(t)$  : désignent, dans l'ordre, l'entrée et la sortie du système,
- Les coefficients de l'équation différentielle sont représentés par  $a_i$  et  $b_j$ , où  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  appartiennent à l'ensemble des réels.

Lorsque les ordres de dérivées  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont des multiples du même nombre réel  $\alpha$ , le système obtenu est qualifié de système fractionnaire commensurable. Donc, la formule (I.48) peut être exprimée de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (\text{I.47})$$

### I.8.2. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire

On peut dire que la fonction de transfert d'ordre non entier est exprimée comme suit :

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j S^{\beta_j}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i S^{\alpha_i}} \quad (\text{I.48})$$

Où :  $Y(S)$  et  $U(S)$  représentent les transformées de Laplace respectivement de  $y(t)$  et  $u(t)$ .

Pour un système de commensurabilité d'ordre  $\alpha_i$ , la fonction de transfert de l'équation (I.50) peut être écrite comme suit :

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j S^{j\alpha}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i S^{i\alpha}} \quad (\text{I.49})$$

### I.8.3. Représentation d'état

La représentations d'état est de manière similaire au cas des systèmes entiers. La distinction réside simplement dans le remplacement de la dérivée d'ordre entier par la dérivée d'ordre non entier.

La description d'état d'un système non entier varie en fonction de sa nature (linéaire ou non linéaire). En ce qui concerne un système linéaire, la représentation d'état est formulée comme suit :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}x(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Où :

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\alpha_1}x_1, D^{\alpha_2}x_2 \dots \dots D^{\alpha_n}x_n]^T \quad (\text{I.51})$$

Avec les spécifications suivantes :  $u$  représente le vecteur des entrées de dimension  $l \times 1$ ,  $x$  est le vecteur d'état non entier de dimension  $n \times 1$ ,  $y$  est le vecteur des sorties de dimension  $q \times 1$ ,  $\alpha$  est l'ordre de dérivation non entière, et les matrices  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $d$  sont toutes constituées d'éléments constants.

Le modèle d'état fractionnaire (I.50) pour les systèmes commensurables se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Où :

$$D^\alpha(x) = D^\alpha[x_1, x_2 \dots \dots x_n]^T \quad (\text{I.53})$$

### I.9. Stabilité des systèmes fractionnaires

La stabilité dans le sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output), aussi connue sous le nom de stabilité externe, est définie par les critères suivants [94]:

- ✓ Un système est considéré comme stable BIBO (Bounded Input, Bounded Output) lorsque toute entrée bornée produit une sortie également bornée.

- ✓ En ce qui concerne les systèmes entiers, la stabilité est caractérisée par l'absence de racines de l'équation caractéristique avec une partie réelle positive. En revanche, pour les systèmes d'ordre non entier, ils peuvent être stables même si des racines se situent dans la partie droite du plan complexe.

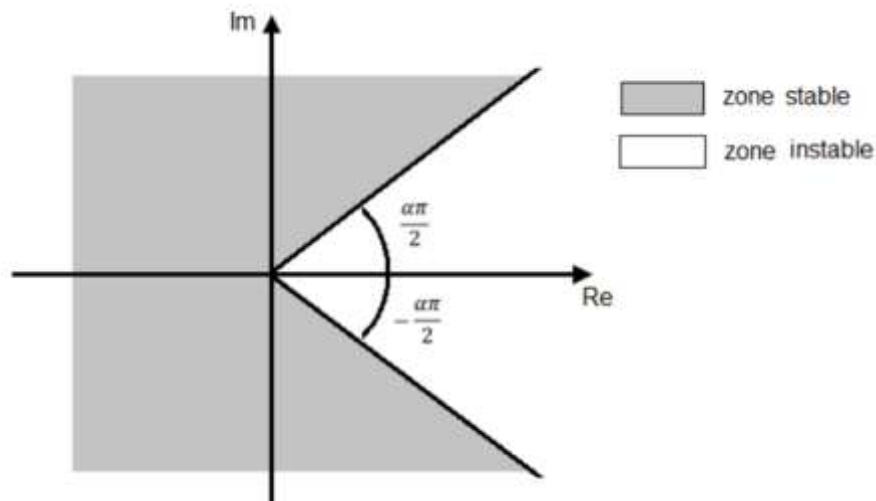
Un système d'ordre commensurable, caractérisé par le polynôme caractéristique  $\Delta(S)$ , où :

$$\Delta(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S^1 + a_0 \quad (\text{I.54})$$

est stable si et seulement si :

$$|\text{Arg}(S_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \forall i \quad (\text{I.55})$$

Supposons que  $S_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  racine de  $\Delta(S)$ . Cela permet de déterminer la région de stabilité d'un système d'ordre non entier dans le plan complexe  $S$ , comme illustré ci-dessous :



**Figure I.2.** Région de stabilité pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$ .

## I.10. Commandabilité et observabilité des systèmes d'ordres fractionnaires

### I.10.1. Commandabilité

Le concept de commandabilité pour les systèmes non entier est identique à celui des systèmes entiers.

Le système fractionnaire (I.50) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, telle que définie par (I.58) est de rang complet [95]:

$$C = [B \quad AB \quad \dots \dots \dots \quad A^{N-1}B] \quad (\text{I.56})$$

Sachant que : N est le nombre des états.

### I.10.2. Observabilité

De façon similaire, la condition d'observabilité pour les systèmes de commensurabilité d'ordre non entier est établie en se référant à la définition d'observabilité des systèmes entiers.

Le système fractionnaire (I.50) est considéré comme observable si et seulement si la matrice d'observabilité définie par (I.59) est une matrice de rang plein [95]:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.57})$$

Sachant que : N est le nombre des états.

## I.11. Identification des systèmes d'ordre fractionnaires

Dès le début des années quatre-vingt-dix, la recherche sur l'identification des systèmes dynamiques à l'aide de modèles non entiers est très active. Cette identification vise à tirer un modèle mathématique d'un système physique à partir de données expérimentales et de connaissances préalables. Plusieurs systèmes physiques ont été identifiés comme ayant une dynamique d'ordre non entier, c'est-à-dire que leur comportement temporel est défini par des équations différentielles d'ordre non entier. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser un modèle complet pour identifier ce genre de système [96,97].

Plusieurs communautés scientifiques se sont intéressées à l'identification des systèmes d'ordre non entier. Malgré la complexité de ce genre de modèle, il est nécessaire de résoudre un défi d'identification plus complexe en estimant non seulement les paramètres de notre modèle, mais aussi en déterminant ses ordres fractionnaires.

La littérature propose différentes approches, à la fois temporelles et fréquentielles, pour l'identification des systèmes d'ordre non entier [98-102].

## **I.12. Conclusion**

Dans ce chapitre, Nous avons étudié en détail les diverses définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, en mettant en évidence leurs caractéristiques et leurs transformées de Laplace respectives. Nous avons aussi examiné les significations géométriques et physiques de la dérivation d'ordre non entier. Pour conclure , nous avons examiné les différents techniques de représentation des systèmes fractionnaires, en mettant en évidence leurs caractéristiques comme la stabilité, commandabilité et l'observabilité.

---

# CHAPITRE II

## « METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRES FRACTIONNAIRES »

---

### II.1. Introduction

Les opérateurs d'ordre fractionnaire, représentés par des fonctions irrationnelles, ont longtemps été négligés dans la recherche sur les systèmes. Ces dernières années des recherches approfondies ont permis d'appliquer pratiquement ces opérateurs dans les domaines du génie électrique [103].

On utilise souvent des logiciels pour étudier et simuler des systèmes d'ordre entier, mais ces outils ne sont pas destinés à simuler des systèmes d'ordre non entier. Ainsi, lors de la simulation ou de la mise en œuvre de correcteurs pour des systèmes d'ordre fractionnaire, il est essentiel de procéder à une approximation [3, 103]. On peut trouver différents schémas d'approximation, principalement des méthodes discrètes (numériques) et continues (analogiques). De nombreuses recherches ont été menées sur ces différentes méthodes d'approximation [2, 6, 104-106].

Parmi les nombreuses méthodes d'approximation, les approches de Matsuda, d'Oustaloup et de Charef sont les plus répandues, et elles seront détaillées dans ce chapitre avec une brève mention des approches discrètes.

## II.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire

On peut classer les opérateurs d'ordre fractionnaires en deux catégories :

### II.2.1. Opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire

Les intégrateurs et dérivateurs analogiques à ordre non entier sont exprimés comme suit respectivement[104, 107, 108]:

$$H_I(s) = \frac{1}{s^n} \quad (\text{II.1})$$

$$H_D(s) = s^n \quad (\text{II.2})$$

Avec :  $0 < n < 1$

Où :  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et «  $n$  » un nombre fractionnaire positif.

### II.2.2. Opérateurs numériques d'ordre fractionnaires

Les intégrateurs et dérivateurs numériques à ordre non entier sont exprimés comme suit respectivement[104, 107, 108]:

$$H_R(z) = z^{-n} \quad (\text{II.3})$$

$$H_A(z) = z^n \quad (\text{II.4})$$

Avec :  $0 < n < 1$

Sachant que :  $H_R$  et  $H_A$  désigne l'opérateur de retard et d'avance respectivement.

## II.3. Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

On distingue deux catégories principales : approximations analogiques (fréquentielles) et approximations numériques(temporelles).

### II.3.1. Approximation analogique

Dans l'objectif de mettre en œuvre des contrôleurs, d'effectuer des simulations de systèmes d'ordre fractionnaire, les fonctions de transfert nécessitent une transformation en modèles entiers présentant une attitude similaire à celle des fonctions fractionnaires. Plusieurs méthodes d'approximation sont disponibles, adoptant différentes approches, telles que l'expansion de fonctions continues (CFE - Continuous Function Expansion, une méthode favorisée pour l'évaluation de fonctions en raison de sa convergence rapide) et des méthodes d'ajustement de courbes [105].

#### II.3.1.1. Méthode de l'approximation par expansion des fonctions continues

L'approximation générale de l'équation (II.1) en employant la méthode EFC (Expansion de Fonctions Continues), est représentée par les fonctions suivantes :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+Ts)^m} \quad (\text{II.5})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m \quad (\text{II.6})$$

#### II.3.1.2. Méthode de Matsuda

Dans [47], la méthode suggérée d'utiliser la technique de l'Expansion de Fonctions Continues (EFC) et à ajuster la fonction initiale sur un ensemble de points espacés de manière logarithmique. L'approximation est de la forme suivante :

$$H(s) = a_0 + \frac{s-s_0}{a_1+s} + \frac{s-s_1}{a_2+s} + \frac{s-s_2}{a_3+s} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

$$a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s) \quad \text{et} \quad v_{i+1}(s) = \frac{s-s_i}{v_i(s)-a_i}$$

#### II.3.1.3. Méthode de Carlson

La technique est basée sur la relation suivante [109] :

$$(H(s))^{1/\alpha} - G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad H(s) = (G(s))^\alpha \quad (\text{II.8})$$

Dans chaque itération, en posant  $\alpha = \frac{1}{q}$  et  $m = \frac{q}{2}$ , partant de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , on obtient l'approximation par la formule suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{II.9})$$

### II.3.1.4. Méthodes d'approximation par un modèle rationnel à temps continu

Ces méthodes sont également désignées sous le nom d'approximations analogiques ou d'approximations du domaine fréquentiel. Plusieurs techniques d'approximation ont été développées dans la littérature, parmi lesquelles on peut citer les travaux tels que [110, 111, 112, 113]. Cette classe de méthodes de simulation offre un compromis satisfaisant entre le comportement fractionnaire souhaité sur l'intervalle de fréquences donné et la complexité du calcul.

Les meilleures méthodes reconnues et couramment utilisées sont celles d'Oustaloup [110] et de Charef [22]. Cette dernière, connue sous le nom de méthode de la fonction de singularité et à laquelle nous avons accordé un intérêt particulier, se distingue par sa sophistication et sa praticité accrue pour les approximations réalisées.

#### II.3.1.4.1. Méthode d'Oustaloup

Cette méthode permet d'approximer l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$  dans une bande de fréquences donnée  $[\omega_l, \omega_h]$ , en utilisant une fonction rationnelle qui résulte d'une distribution récursive de zéros et de pôles d'ordre entier [110]:

##### II.3.1.4.1.1. Dérivateur généralisé

La fonction de transfert qui caractérise le dérivateur généralisé est exprimée comme suit :

$$D(s) = \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{II.10})$$

Lorsque « m » appartient à l'ensemble des réels ( $m \in \mathbb{R}$ ) et que  $\omega_c$  est définie comme la fréquence transitionnelle, l'équation (II.10) caractérise un dérivateur fractionnaire pour des

valeurs d'ordre strictement positives, et un intégrateur fractionnaire pour des valeurs d'ordre strictement négatives [114].

Ainsi, nous introduisons le dérivateur à ordre fractionnaire limité en fréquence, comme suggéré par Oustaloup.

$$D_{bf}(s) = \left( C_0 \frac{1 + \frac{s}{w_l}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^m, \quad -1 < m < 1 \quad (\text{II.11})$$

Où :

$$C_0 = \frac{w_l}{w_c} = \frac{w_c}{w_h} \Rightarrow w_c = \sqrt{w_h w_l} \quad (\text{II.12})$$

Ceci afin de garantir un gain unitaire à la fréquence  $\omega_c$ .

Dans une étape ultérieure, la technique adoptée consiste à approximer le dérivateur borné en fréquence (II.11) en utilisant une distribution récursive de pôles et de zéros réels. Cette approximation conduit à un transfert d'ordre entier.

$$D_{bf}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (\text{II.13})$$

Où :

$$D_N(s) = \left( \frac{w_c}{w_h} \right)^m \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (\text{II.14})$$

$z_i$  et  $p_i$  correspondent aux zéros et aux pôles de rang  $i$ . On détermine ces  $N+1$  paires de zéro-pôle comme suit :

$$\frac{p_i}{z_i} = \alpha > 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{z_{i+1}}{p_i} > \eta > 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \alpha \eta > 1 \quad (\text{II.17})$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  sont dénommés facteurs récursifs. Habituellement, la valeur de  $N$  est fixée de manière à obtenir une approximation où  $\alpha \eta$  est approximativement égal à 5.

La relation entre  $m$  et  $(\alpha, \eta)$  peut être déduite par le calcul de leur rapport :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} \quad (\text{II.18})$$

On peut également déduire les expressions suivantes :

$$\frac{w_h}{w_l} = (\alpha\eta)^{2N+1} \Rightarrow (\alpha\eta) = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{1/2(N+1)} \quad (\text{II.19})$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (\text{II.20})$$

Il est également possible d'exprimer les pôles et zéros de rang  $i$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} z_i = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2-m/2)}{2N+1}} w_l \\ p_i = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2+m/2)}{2N+1}} w_l \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Lorsque l'ordre  $m$  est supérieur à 1 ou inférieur à -1, une approximation par un modèle d'ordre entier est réalisée pour la partie non entière [115, 116].

#### II.3.1.4.2. Méthode de Charef (Fonction de singularité)

Cette méthode a été développée dans le but d'approximer les opérateurs fractionnaires (intégrateur et dérivateur) à l'aide de fonctions rationnelles. Le but de cette méthode est de rendre plus facile son implémentation dans les correcteurs proportionnels-intégrateurs-dérivateurs ( $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ).

Selon cette méthode, l'opérateur est approximé pour une plage de fréquences spécifique en utilisant une fonction PPF : Pôle à Puissance Fractionnaire.

Dans la section suivante nous allons présenter cette méthode selon les travaux de Charef [22, 117].

### II.3.1.4.2.1. Approximation des systèmes fractionnaire du premier ordre

On modélise un système du premier ordre d'ordre fractionnaire (système fractal unique) de la manière suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \quad (\text{II.22})$$

Où  $\frac{1}{P_T}$  représente la constante de temps, et  $0 < m < 1$  est l'ordre non entier.

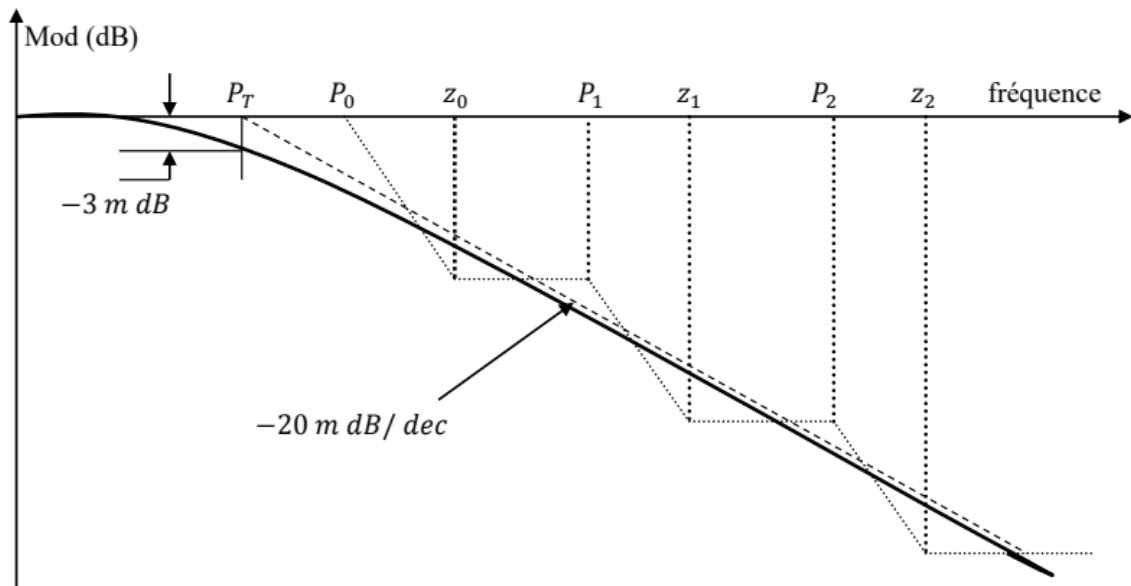
La formule (II.22) peut être reformulée de la manière suivante [6, 117]:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{II.23})$$

Ici,  $N+1$  représente le nombre total de singularités, lequel est déterminé par la bande de fréquences du système.

L'équation (II.23) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , transformant ainsi l'approximation en :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{II.24})$$



**Figure II.1.** Diagramme de Bode du modèle :  $1/\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m$ .

On peut déterminer les pôles et les zéros de la fonction de singularités de la façon suivante :

- Le premier pôle :  $P_0 = P_T 10^{\left(\frac{y}{20m}\right)}$
- Le premier zéro :  $z_0 = P_0 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$
- Le deuxième pôle :  $P_1 = z_0 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$
- Le deuxième zéro :  $z_1 = P_1 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$
- Le  $N$ ème zéro :  $z_{N-1} = P_{N-1} 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$
- Le  $(N + 1)$ ème pôle :  $P_N = z_{N-1} 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$

Avec :  $P_T$  représente est la fréquence à  $-3m$  dB,  $P_0$  et  $P_N$  est la première et dernière singularité déterminée par  $y$ (dB) et par  $N$  respectivement.

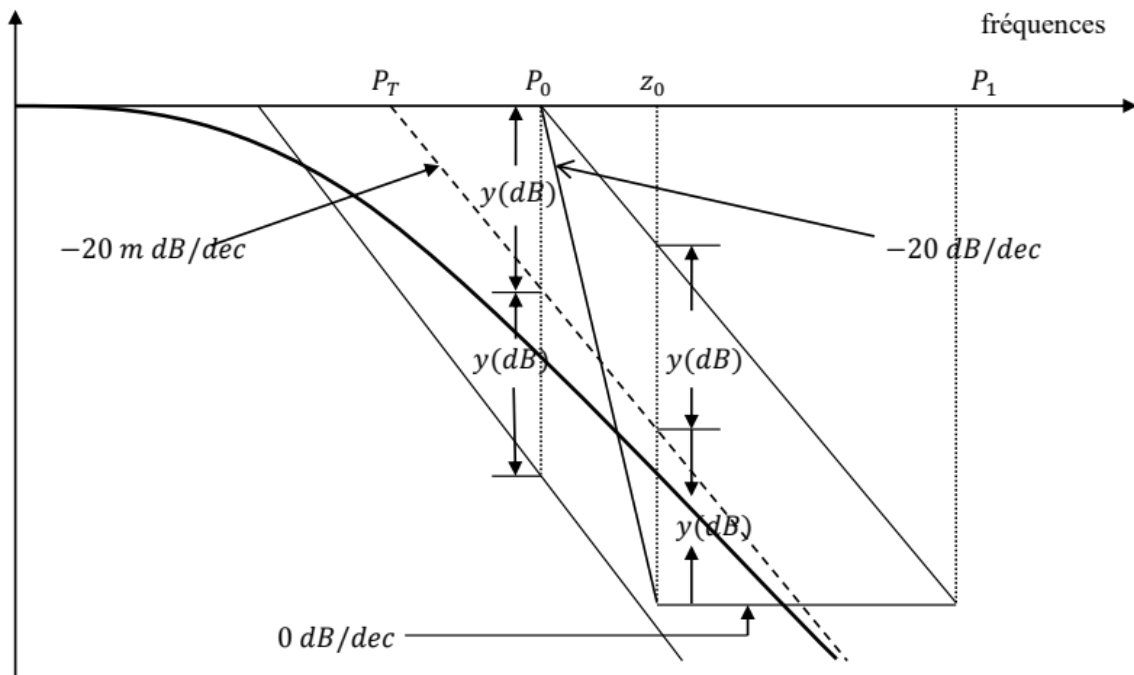


Figure II.2. Choix des singularités pour l'approximation.

Considérons :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} \tag{II.25}$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]} \tag{II.26}$$

Les termes a et b sont désignés comme les rapports de position.

Alors :

$$ab = 10^{\left[\frac{y}{10m(1-m)}\right]} \tag{II.27}$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \tag{II.28}$$

Ainsi, les valeurs de  $P_i$  et  $z_i$  peuvent être déduites de la manière suivante :

$$P_i = (ab)^i P_0 \tag{II.29}$$

$$z_i = (ab)^i a P_0 \tag{II.30}$$

Par conséquent, la fonction (II.24) peut être exprimée de la manière suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (\text{II.31})$$

Avec [CHA92] :

$$N = \text{Partie entière} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{P_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.32})$$

Dans cette expression (II.32),  $\omega_{\max}$  représente la fréquence maximale de la plage de fréquences de travail spécifiée, sachant que :  $P_{N-1} < \omega_{\max} < P_N$ .

### II.3.1.4.2.2. Approximation des systèmes fractionnaires d'ordres multiples

Ce type de système peut être, formulée de la manière suivante [22]:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{s}{P_{T_i}}\right)^{m_i}} \quad (\text{II.33})$$

Où :  $P_{T_i} < P_{T_{i+1}}$ ,  $0 < m_i < 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$  sont des fréquences de coupure.

Il est possible d'approximer la fonction décrite par (II.33) de la façon suivante [22] :

$$H(s) = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i_1}}\right)}{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{P_{i_1}}\right)} \frac{\prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i_2}}\right)}{\prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{P_{i_2}}\right)} \dots \dots \frac{\prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{z_{i_p}}\right)}{\prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{P_{i_p}}\right)} \quad (\text{II.34})$$

On sélectionne les singularités de manière à alterner les pôles et les zéros afin de garantir que les résidus soient réels et positifs. Tout d'abord, on sélectionne les pôles pour chaque section.

$$P_n = (ab)^n P_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (\text{II.35})$$

Avec :  $M = N_1 + N_2 + \dots + N_p + (p - 1)$

Les zéros sont choisis de la manière suivante:

- 1<sup>ère</sup> section :  $z_{i_1} = (ab)^{i_1} a_1 P_0$ ,  $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1$
- 2<sup>ème</sup> section :  $z_{i_2} = (ab)^{[N_1+1+i_2]} a_2 P_0$ ,  $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2$
- p<sup>ème</sup> section :  $z_{i_p} = (ab)^{[N_1+N_2+\dots+N_{p-1}+(p+1)+i_p]} a_p P_0$ ,  $i_p = 0, 1, 2, \dots, N_p$

La détermination de  $N_1, N_2, \dots, N_p$  se fait de la même manière que pour le système du ordre 1 fractionnaire, c'est-à-dire en définissant la bande de fréquences et l'écart  $\gamma$  (dB) souhaité. Et avec «  $ab$  » invariable pour l'ensemble du système. L'approximation du système sera donc comme suit :

$$H(s) \approx \sum_{n=0}^M \frac{k_n}{1 + \frac{s}{(ab)^n P_0}} \tag{II.36}$$

Avec :

$$k_n = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left[ 1 - \frac{(ab)^{n-i_1}}{a_1} \right] \prod_{i_2=0}^{N_2} \left[ 1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+1+i_2)}}{a_2} \right] \dots \prod_{i_p=0}^{N_{p+1}} \left[ 1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)}}{a_p} \right]}{\prod_{i=0}^M [1 - (ab)^{n-1}]}$$

### II.3.1.4.2.3. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

Ce concept, visant à approximer un intégrateur non entier par une fonction rationnelle, se distingue par son efficacité et sa facilité d'utilisation. Dans un premier temps, l'opérateur est modélisé dans une bande de fréquences d'utilisation pratique. Par la suite, la bande de fréquences est approximée par une fonction rationnelle à l'aide du concept de Charef exposé précédemment. Ainsi, cette approche permet d'obtenir la précision souhaitée sur toute plage de fréquences [117].

la formule (II.1), peut être modélisé à l'aide de la PPF suivante [117] :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \tag{II.37}$$

En supposant que  $\omega$  appartient à  $[\omega_l, \omega_h]$ , et que  $\omega$  est nettement plus grand que  $\omega_c$  ( $\omega \gg \omega_c$ ), alors :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{k_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (\text{II.38})$$

Avec  $k_I = \frac{1}{\omega_c^m}$  et  $\omega_c$  c'est la fréquence de coupure qui est donnée par  $\omega_c = \omega_l \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$ , où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire(II.1) est sa fonction PPF(II.37) dans une bande de fréquence donnée.

Pour une séquence des pôles et de zéros Nous obtenons l'approximation ci-dessus :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{II.39})$$

En choisissant  $y$  et  $\omega_{\max}$ , cette dernière pouvant être fixée à  $100\omega_h$ , et avec  $P_0 = \omega_c 10^{[y/20m]}$  et  $z_0 = a P_0$ , où  $a, b$  et  $N$  restent identiques à ceux des équations (II.25), (II.26) et (II.32) respectivement.

En utilisant les deux équations (II.29) et (II.30), l'équation (II.39) peut être écrite comme suit :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.40})$$

Afin de comprendre l'apport de chaque pôle, on divise la fonction (II.35) en une somme de fractions simples (ou résidus). Nous obtenons :

$$G(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.41})$$

Avec :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left[1 - (ab)^{i-j}\right]} \quad (\text{II.42})$$

#### II.3.1.4.2.4. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire

Pour une plage de fréquences d'utilisation pratique bien spécifiée, on peut utiliser la fonction ZPF (Zéro à Puissance Fractionnaire) pour représenter le dérivateur d'ordre fractionnaire présenté dans (II.2) [117]:

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \quad (\text{II.43})$$

En faisant la supposition que  $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$ , on a  $\omega \gg \omega_c$ , alors :

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m = \frac{K_D s^m}{\omega_c^m} = s^m = G_D(s) \quad (\text{II.44})$$

Afin de modéliser la fonction (II.43) par un modèle temps-invariant, nous allons l'approximer en utilisant la méthode des singularités mentionnée précédemment. Dans ce cas, elle consiste à approximer la pente à 20m dB/dec du diagramme de Bode de la ZPF en alternant entre des pentes de 20 dB/dec et 0 dB/dec. Cela correspond à une séquence d'alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négatif du plan complexe S comme suit :

$$z_0 < P_0 < z_1 < P_1 < \dots < z_N < P_N$$

Nous obtenons la relation ci-dessus :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{II.45})$$

En indiquant les valeurs de  $y$  et  $\omega_{\max}$ , qui peuvent être définies à  $100 \omega_h$ , nous trouvons les paramètres suivants :

$$z_0 = \omega_c 10^{[y/20m]} \text{ et } P_0 = a z_0$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$ , et  $N$  conservent leurs valeurs telles qu'indiquées dans les équations (II.25), (II.26), et (II.32) respectivement.

L'approximation suivante est obtenue en remplaçant les expressions de  $P_i$  et  $z_i$  par leurs formules décrites dans (II.29) et (II.30) :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.46})$$

En calculant les résidus de la fonction (II.46), on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.47})$$

Avec :  $G_0 = K_D$

$$K_i = -\frac{K_D}{P_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N [1 - a(ab)^{i-j}]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N [1 - (ab)^{i-j}]} \quad (\text{II.48})$$

### II.3.2. Approximation numérique

La méthode d'approximation numérique consiste à approximer un modèle d'ordre fractionnaire à l'aide d'un modèle discret rationnel. Cela s'accomplit en remplaçant l'opérateur de Laplace  $s$  dans le modèle fractionnaire par son équivalent dans le domaine temporel discret.

Lorsqu'on utilise des systèmes fonctionnant de manière discrète pour commander ou simuler des modèles continus, la discrétisation devient une étape cruciale.

Dans cette section, nous abordons trois types de méthodes d'approximation numérique [5, 6, 105, 109, 117].

#### II.3.2.1. Approximation par calcul de l'expression analytique de la sortie

Décrite en détail dans [5, 109, 117], La sortie d'un système d'ordre fractionnaire est calculée est calculé comme suit:

$$H(s) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^{n-\lambda_l}} \quad (\text{II.49})$$

Avec  $l=1,2,\dots,L$ , représentant la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_l$ , la sortie peut être exprimée comme suit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^{n-\lambda_l}} \right\} * u(t) = h_l(t) * u(t) \quad (\text{II.50})$$

Il est difficile d'exprimer analytiquement la sortie, car elle implique le calcul d'une intégrale complexe.

### II.3.2.2. Approximation par un modèle rationnel à temps discret

Cela s'applique à un système d'ordre fractionnaire décrit par :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0} \quad (\text{II.51})$$

L'opération d'approximation selon cette approche conduit à la fonction de transfert discrète suivante :

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0} \quad (\text{II.52})$$

L'expression  $w(z^{-1})$  peut être calculée à l'aide de plusieurs méthodes, parmi lesquelles on peut citer les approches basées sur les approximations d'Euler, de Tustin, de Simpson et d'Al Alaoui (voir [118, 119, 120, 121]).

#### II.3.2.2.1. Méthode d'Al Alaoui

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^\alpha &= \left[ \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{(1+z^{-1})} \right]^\alpha \\ &= \left( \frac{8}{7T} \right)^\alpha \left[ 1 - \frac{8}{7} \alpha z^{-1} + \left( -\frac{24}{49} \alpha + \frac{32}{49} \alpha^2 \right) z^{-2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

#### II.3.2.2.2. Méthode de Simpson

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^\alpha &= \left[ \frac{3}{T} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})^\alpha}{1+4z^{-1}+z^{-2}} \right]^\alpha \\ &= \left( \frac{3}{T} \right)^\alpha [1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots] \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

#### II.3.2.2.3. Méthode de Tustin

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left[ \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} \right]^\alpha = \left( \frac{2}{T} \right)^\alpha [1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots] \quad (\text{II.55})$$

#### II.3.2.2.4. Méthode d'Euler (Grünwald)

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left[ \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right]^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left[ 1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right] \quad (\text{II.56})$$

Dans le domaine en  $s$  (Laplace), comme on peut le constater à partir de ces approximations, un système d'ordre fractionnaire est caractérisé par une fonction de transfert irrationnelle. D'autre part, dans le domaine discret, une transmission de dimension infinie est obtenue. Cela confirme que la mémoire des systèmes d'ordre fractionnaire est illimitée, alors que celle des systèmes d'ordre entier est limitée. Le principal désavantage de cette catégorie de méthodes est qu'elle a un ordre d'approximation très élevé, ce qui rend difficile l'obtention d'une simulation en temps réel.

### II.4. Rendement des systèmes à ordre fractionnaire

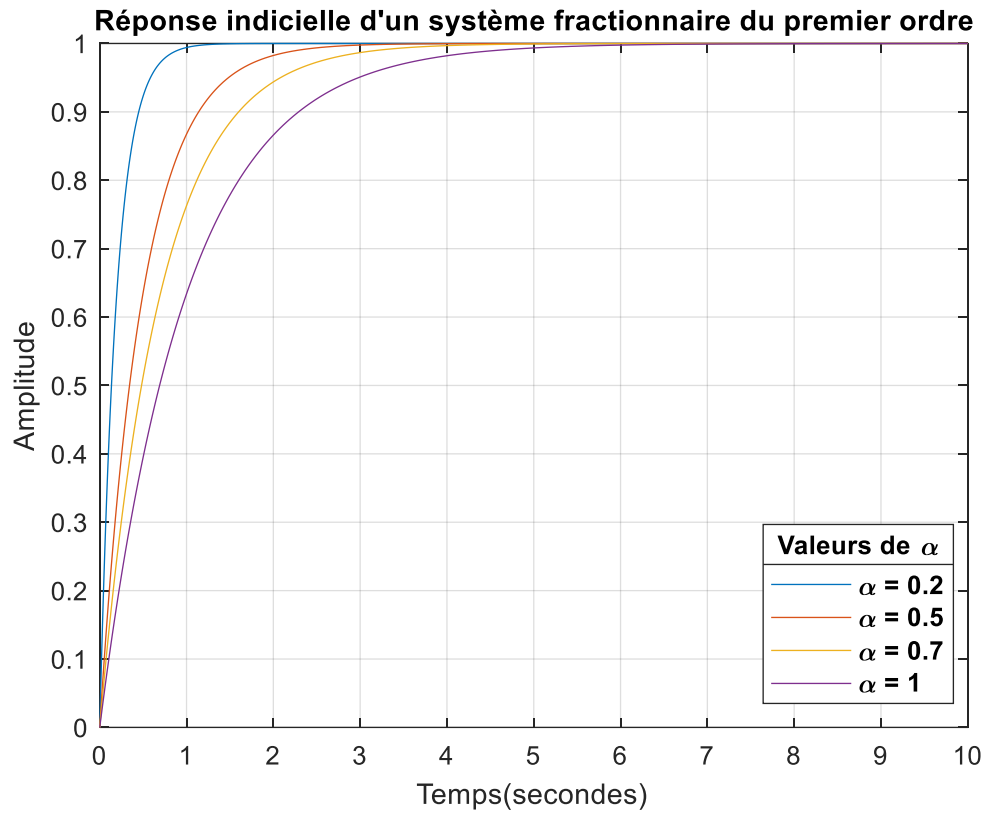
De nombreuses études antérieures ont souligné les avantages des modèles d'ordre fractionnaire par rapport à ceux d'ordre entier standard. Dans [122-127], il est noté que les modèles d'ordre fractionnaire sont préférés comme références pour les applications de commande. Ces systèmes présentent en effet des performances supérieures en termes de stabilité de la dynamique transitoire de temps de réponse, et de robustesse face aux perturbations et au bruit [128].

Pour illustrer cela, examinons deux exemples de modèles d'ordre fractionnaire :

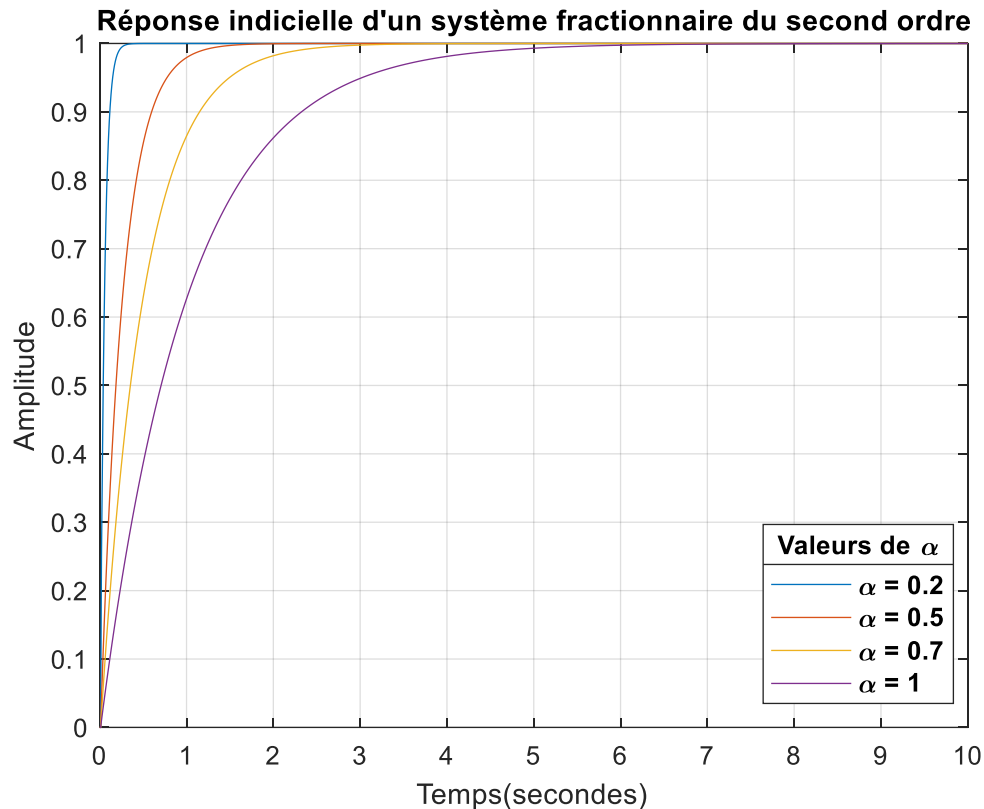
$$H_1(s) = \frac{1}{(1+s)^\alpha} \quad (\text{II.57})$$

$$H_2(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)^\alpha} \quad (\text{II.58})$$

Les réponses indicielles des systèmes  $H_1(s)$  et  $H_2(s)$  pour le cas entier ( $\alpha=1$ ) ainsi que pour différentes valeurs d'ordre fractionnaire  $\alpha$  sont illustrées respectivement sur les figures II.3 et II.4. Elles mettent en évidence les gains en temps de montée dans les deux situations.



**Figure II.3.** Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire du premier ordre pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$



**Figure II.4.** Réponse indicielle du système fractionnaire du second ordre pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire  $\alpha$

## II.5. Conclusion

L'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire est nécessaire pour la synthèse systèmes d'ordre fractionnaire. L'exposition théorique des différentes techniques d'approximation mentionnées dans la littérature a été présentée dans ce chapitre.

Dans un premier temps, On a rappelé les différentes méthodes d'approximation largement utilisées pour la simulation et l'implémentation des systèmes d'ordre non entier. Nous nous sommes penchés sur les méthodes analogiques, en particulier les approches de Charef et d'Oustaloup, auxquelles nous avons accordé une attention particulière et que nous avons examinées en détail.

Enfin, nous avons mis en évidence les performances supérieures des modèles d'ordre fractionnaire par rapport à ceux d'ordre entier, ce qui les rend avantageux dans les applications de commande.

---

# CHAPITRE III

## « LA FRACTIONNALISATION » :

### UNE NOUVELLE APPROCHE

### DE COMPARAISON ENTRE

## LES METHODES D'APPROXIMATIONS

## DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES

---

### III.1. Introduction

Récemment, de nombreux travaux de recherche se sont concentrés sur les systèmes d'ordre fractionnaire et leurs méthodes d'approximation. Il a été démontré que cela constitue un outil utile pour améliorer la dynamique des systèmes en termes de performances temporelles et fréquentielles[2, 7, 23].

Le but de ce présent chapitre est de proposer une nouvelle stratégie pour comparer les différentes méthodes d'approximation des systèmes fractionnaires en introduisant des filtres à ordre fractionnaire dans la conception classique du système initial sans modifier la fonction de transfert équivalente généralement.

Par la suite, nous utiliserons l'approche « Fractionnalisation ». Des systèmes fractionnalisés proposés (opérateur intégrateur, système du premier ordre fractionnalisé et système du deuxième ordre fractionnalisé) sont introduits. A la fin, les résultats de simulation sont donnés pour la comparaison des trois méthodes d'approximation (Oustaloup, Matsuda et Charef) en utilisant les systèmes entiers d'origine et systèmes fractionnalisés.

### III.2. Systèmes fractionnalisés

En considérant une fonction de transfert de l'élément intégrateur  $G(s)=(1/s)$  du système entier initial, le but est de le "Fractionnaliser" comme suit[129]:

$$G(s) = G_{\alpha}(s) \cdot G_{1-\alpha}(s) = \left(\frac{1}{s^{\alpha}}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^{1-\alpha}}\right) \quad (\text{III.1})$$

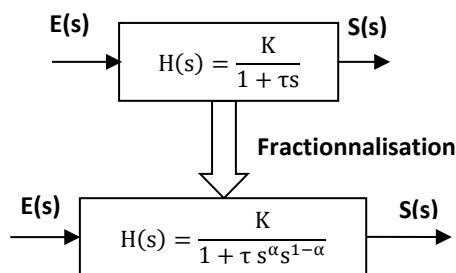
Avec  $\alpha$  : nombre réel ( $0 < \alpha < 1$ )

#### III.2.1. Système du premier ordre fractionnalisé

Le système du premier ordre est converti en un système du premier ordre fractionnalisé comme suit[129]:

$$H(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{K}{1+\tau s^{\alpha} s^{1-\alpha}} \quad (\text{III.2})$$

La figure ci-dessous montre le système du premier ordre fractionnalisé :



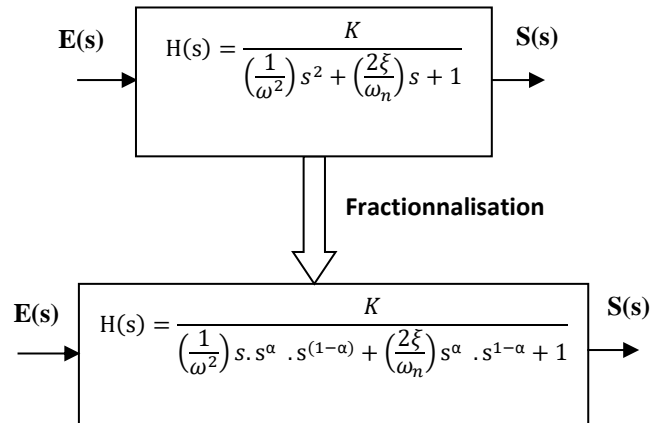
**Figure III.1.** Système du premier ordre fractionnalisé proposé.

#### III.2.2. Système du deuxième ordre fractionnalisé

Le système du deuxième ordre est converti en un système du deuxième ordre fractionnalisé comme suit[129]:

$$H(s) = \frac{K}{1 + \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)s + \left(\frac{1}{\omega^2}\right)s^2} = \frac{K}{1 + \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)s^{\alpha} \cdot s^{1-\alpha} + \left(\frac{1}{\omega^2}\right)s^{\alpha} \cdot s^{1-\alpha}} \quad (\text{III.3})$$

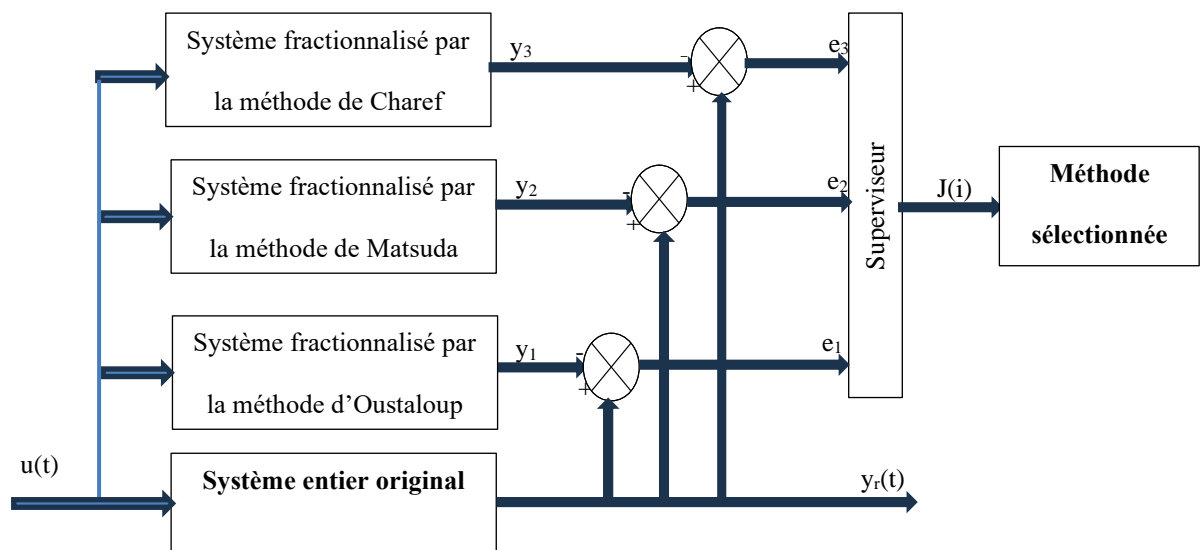
La figure ci-dessous montre le système du deuxième ordre fractionnalisé :



**Figure III.2.** Système du deuxième ordre fractionnalisé proposé.

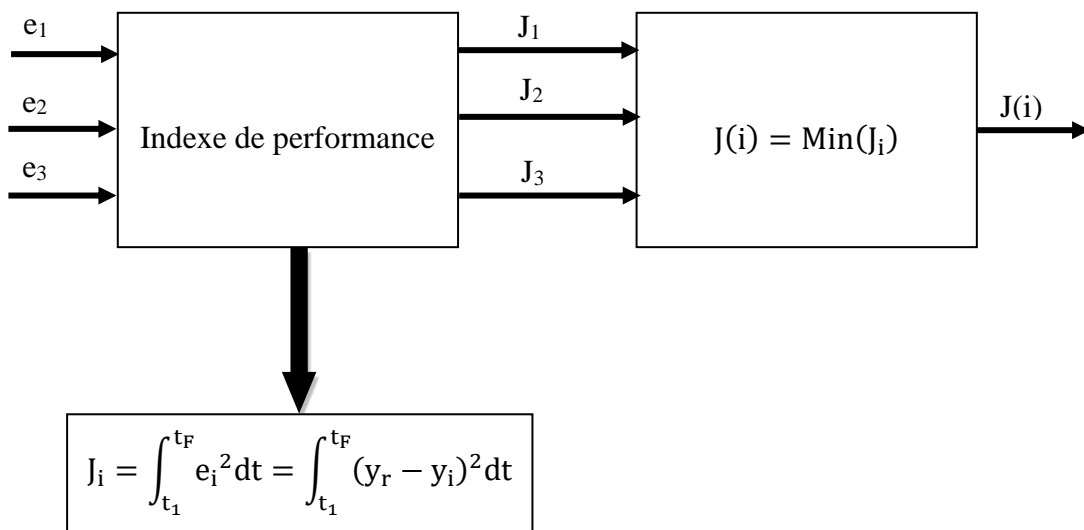
### III.3. Résultats et discussion

La conception de la stratégie d'approximation proposée en utilisant l'approche de la "Fractionnalisation" est donnée par la figure suivante[129]:



**Figure III.3.** Stratégie de conception d'approximation proposée en utilisant l'approche de la « Fractionnalisation ».

L'architecture du superviseur, telle que donnée dans [129], est illustrée par la figure IV.4 :



**Figure III.4.** Architecture du superviseur.

### III.3.1. Système du premier ordre fractionnalisé (FFOS)

Dans notre application, Le système du premier d'ordre entier original est donné comme suit :

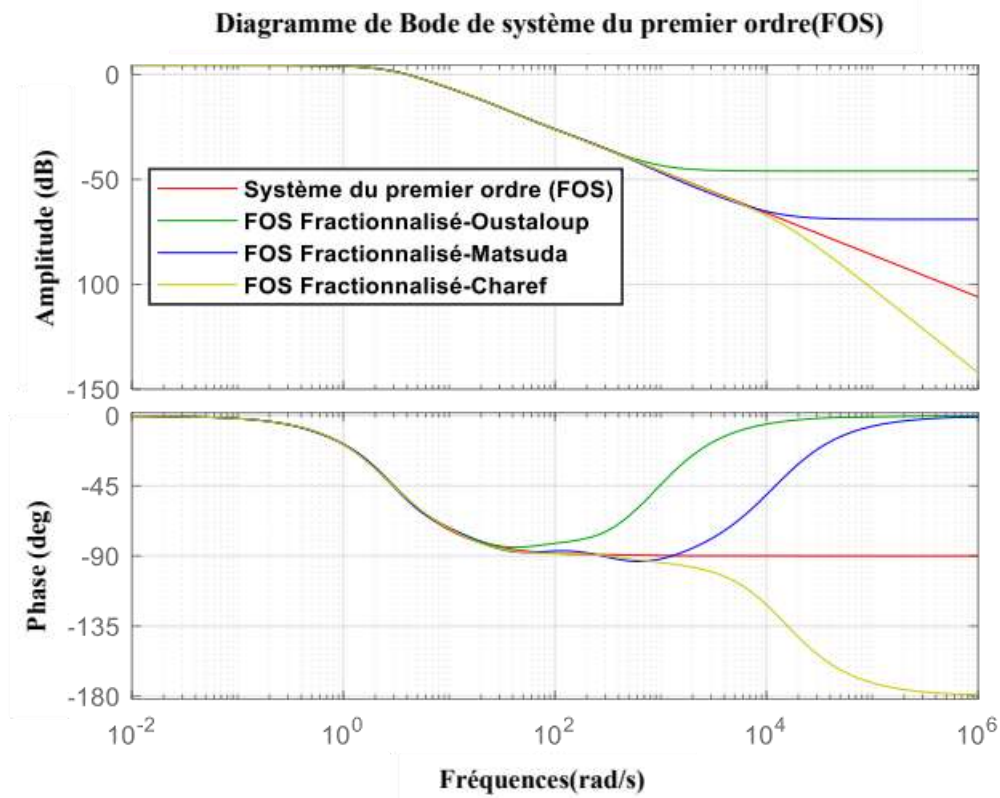
$$H(s) = \frac{5}{s+3} \quad (\text{III.4})$$

#### III.3.1.1. Analyse fréquentielle

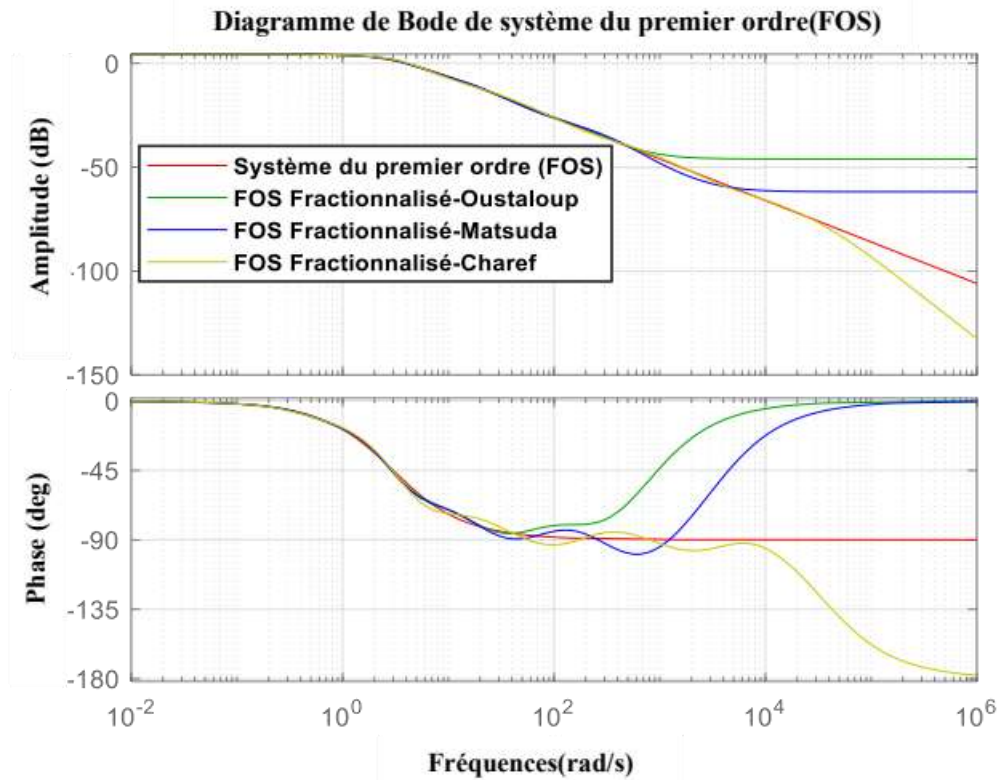
Dans notre cas on s'intéresse en particulier au diagramme de Bode( amplitude et phase), afin d'étudier le comportement de notre système(la réponse en fréquence).

« Les figures III.5,III.6 et III.7 » montrent la comparaison des tracés de Bode entre le système original d'ordre 1(FOS) et le système d'ordre 1 fractionnalisé(FFOS) approximé avec les méthodes d'approximation d'Oustaloup, de Matsuda et de Charef pour  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  et  $\alpha=0.5$  respectivement.

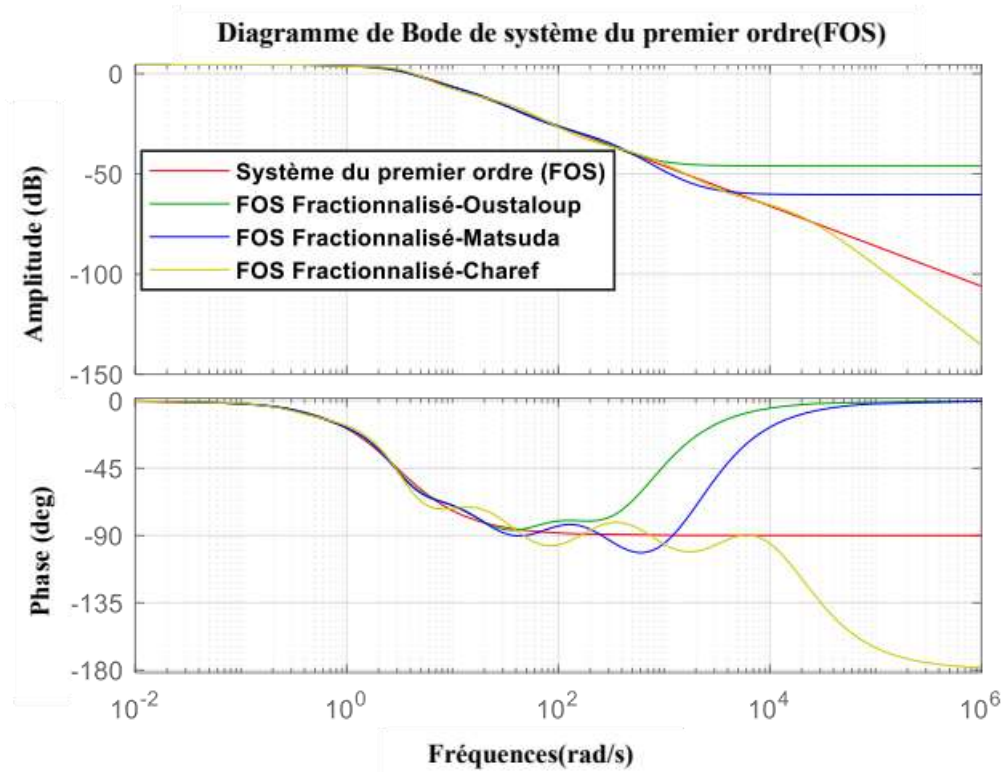
Les résultats de simulation sont représentés sur la plage de fréquences  $[w_l, w_h] = [0.01, 1000000]$



**Figure III.5.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ).



**Figure III.6.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).



**Figure III.7.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).

D'après les résultats obtenus, nous pouvons constater en premier lieu que les tracés de Bode, du gain et de la phase, se superposent et sont confondus dans la bande de fréquences  $[w_l, w_h] = [0.01, 1000]$ , pour  $\alpha = 0.1$  et avec moins de précisions que dans les deux cas  $\alpha = 0.3$  et  $\alpha = 0.5$ .

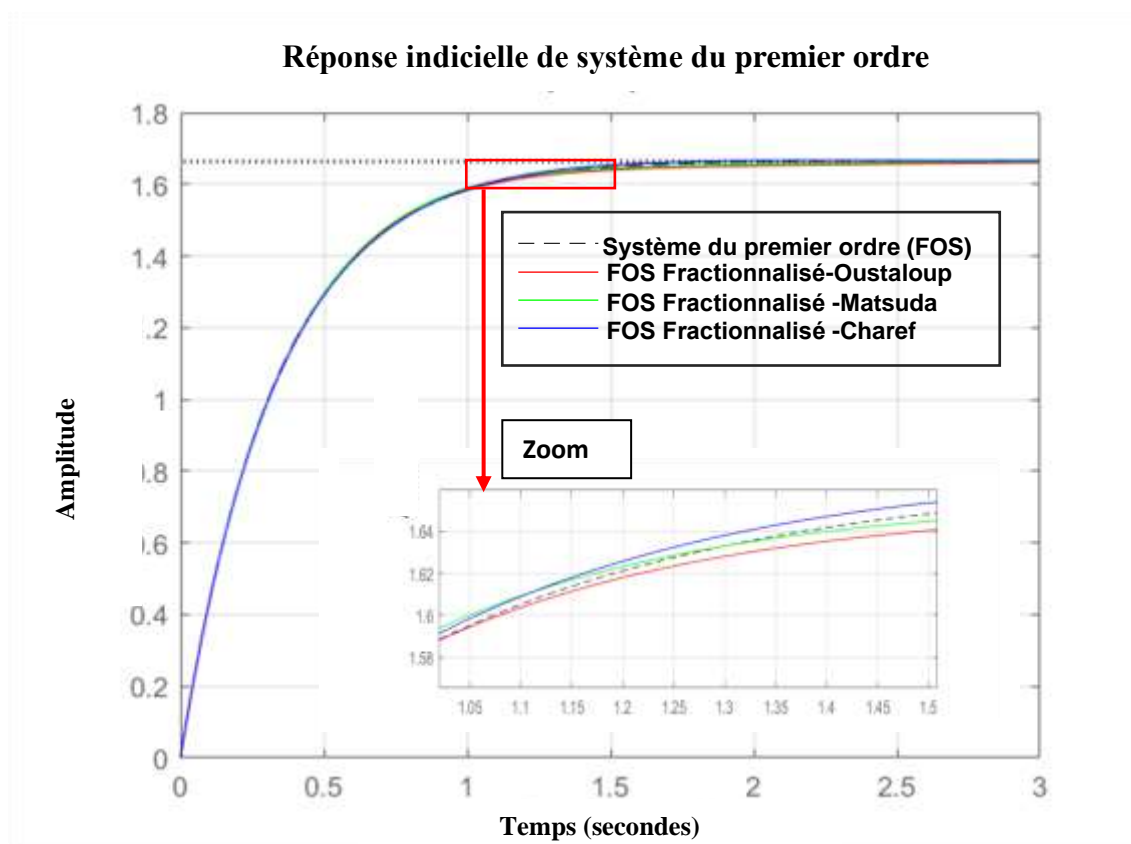
En deuxième lieu nous remarquons que pour les différentes valeurs de «  $\alpha$  » et dans le cas de la méthode d'approximation de Charef, et pour des fréquences supérieures à 1000, notre système du premier ordre se comporte comme un système du second ordre (la phase tend vers -180 degré), du aux erreurs d'approximation.

Donc on conclure que il est nécessaire lors de l'application d'une méthode d'approximation de faire des choix judicieux de bande de fréquence.

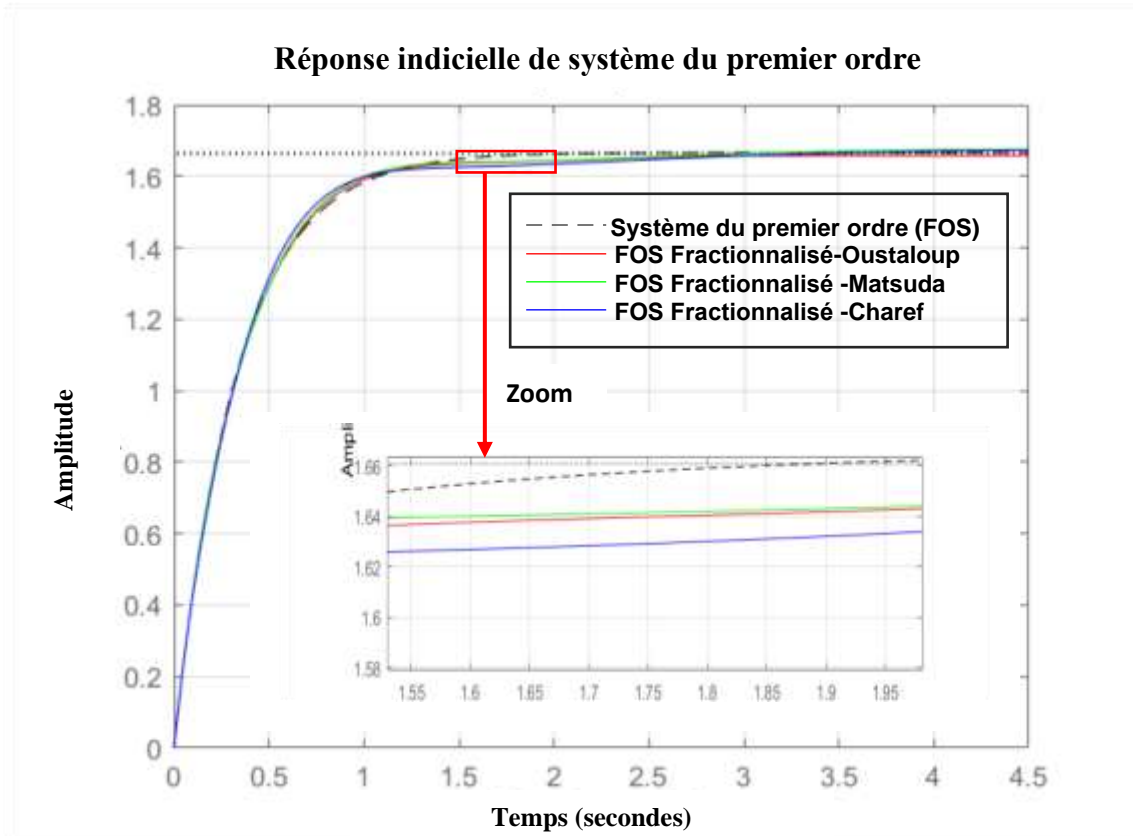
### III.3.1.2. Analyse temporelle

Dans notre travail on s'intéresse en particulier à la réponse indicielle ce qui nous permet souvent d'identifier ou d'estimer certains paramètres clés du système. Par exemple, le temps de réponse, le dépassement, le temps de montée peuvent être extraits directement de la réponse indicielle.

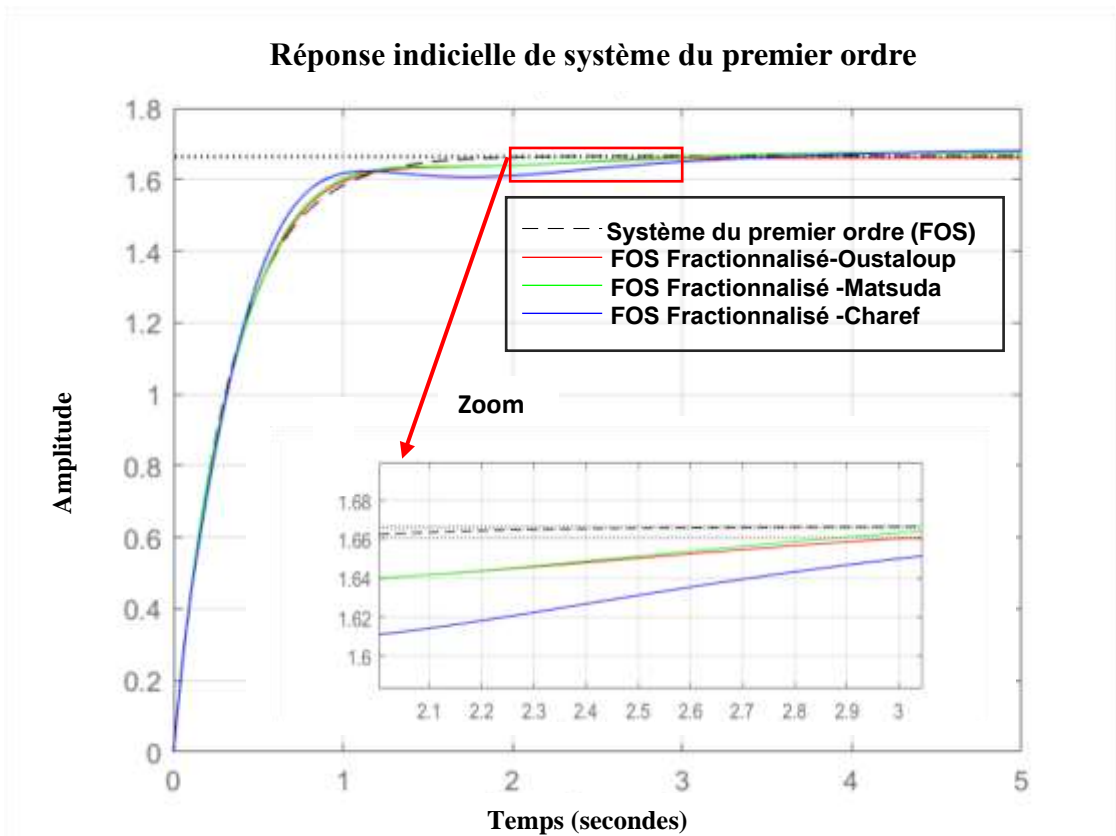
« Les figures III.8, III.9 et III.10 » montrent la comparaison des réponses indicielles entre le système du premier ordre original et le système du premier ordre fractionnalisé approximé avec les méthodes d'approximation d'Oustaloup, de Matsuda et de Charef pour  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  et  $\alpha=0.5$  respectivement.



**Figure III.8.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ).



**Figure III.9.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).



**Figure III.10.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du premier ordre original et le système fractionnalisé du premier ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).

L'indice de performance utilisé par le superviseur est défini pour évaluer la performance des différentes méthodes d'approximation, est donné par l'équation suivante :

$$J_i = \int_{t_1}^{t_F} e_i^2 dt = \int_{t_1}^{t_F} (y_r - y_i)^2 dt \quad (III.5)$$

où  $i = 1, 2, 3$  pour les trois méthodes d'approximation d'erreur (Oustaloup, Matsuda et Charef respectivement) :

$$\begin{cases} e_1 = y_r - y_1 \\ e_2 = y_r - y_2 \\ e_3 = y_r - y_3 \end{cases} \quad (III.6)$$

Le critère d'erreur quadratique lorsque nous utilisons les réponses indicielles du système du premier ordre défini par l'équation (III.4) est donné par le tableau suivant :

$(\alpha, 1-\alpha)$	(0.1, 0.9)	(0.2, 0.8)	(0.3, 0.7)	(0.4, 0.6)	(0.5, 0.5)
<b>J<sub>1</sub></b>	0.1300	0.25	0.7044	0.0031	0.0043
<b>J<sub>2</sub></b>	<b>0.0041</b>	<b>0.0051</b>	<b>0.0040</b>	<b>0.0022</b>	<b>0.00031</b>
<b>J<sub>3</sub></b>	0.0109	0.043	0.062	0.011	0.0016
<b>Min(J<sub>i</sub>)</b>	Matsuda	Matsuda	Matsuda	Matsuda	Matsuda

**Tableau III.1.** Critère d'erreur quadratique pour les réponses indicielles de système du premier ordre.

Dans le tableau III.1, nous remarquons que lorsque nous utilisons le système du premier ordre :

- L'ajustement de la réponse en fréquence par Oustaloup, Matsuda et le filtre de Charef est également bon, comme cela peut être observé.
- bons résultats de toutes les méthodes d'approximation sont dus au fait que  $J_i$  est minimal ( $i=1,2,3$ ).
- La méthode sélectionnée est l'approximation de Matsuda pour les différentes valeurs de  $\alpha$  (0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et  $\alpha = 0.5$ ).

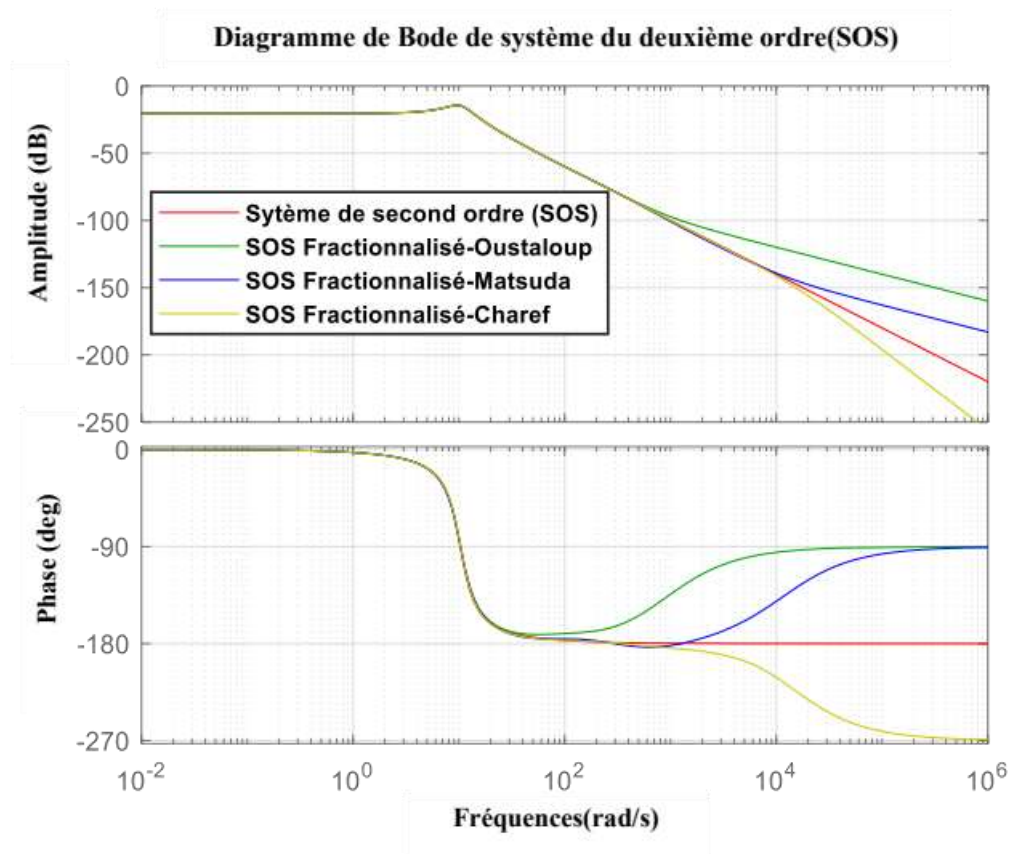
### III.3.2. Système du second ordre fractionnalisé (FSOS)

Dans notre application, le système du deuxième d'ordre entier original est donné comme suit :

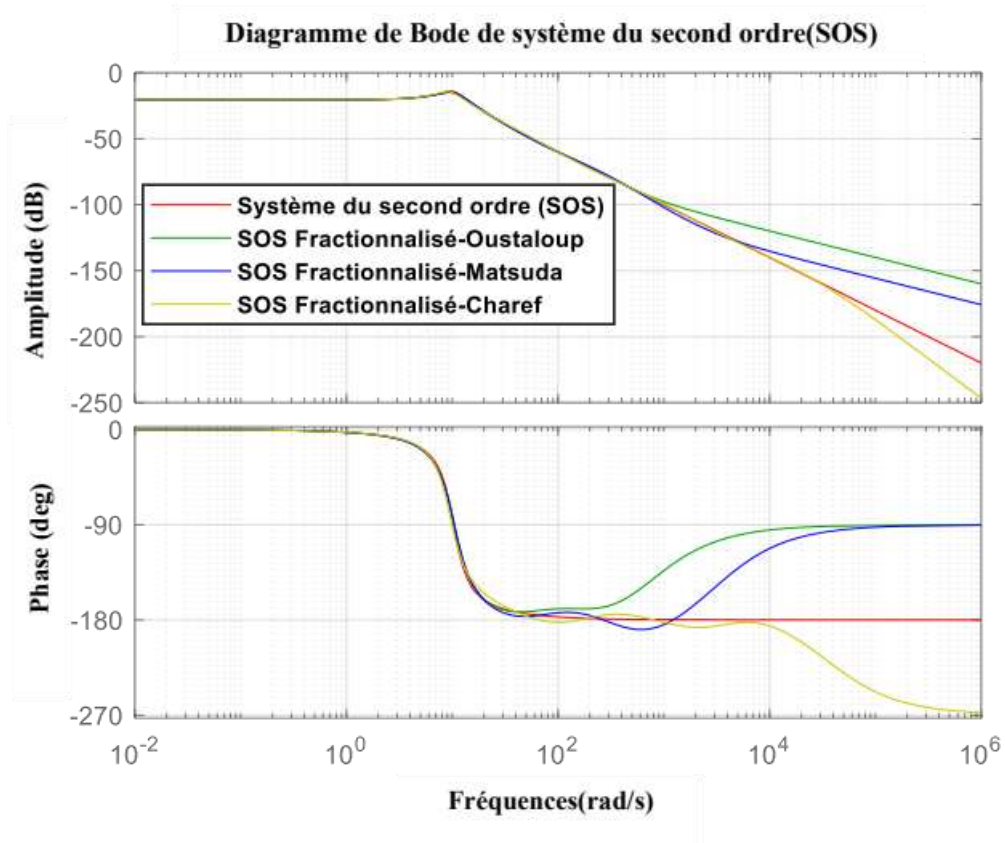
$$H(s) = \frac{10}{s^2+5s+106} \quad (\text{III.7})$$

#### III.3.2.1. Analyse fréquentielle

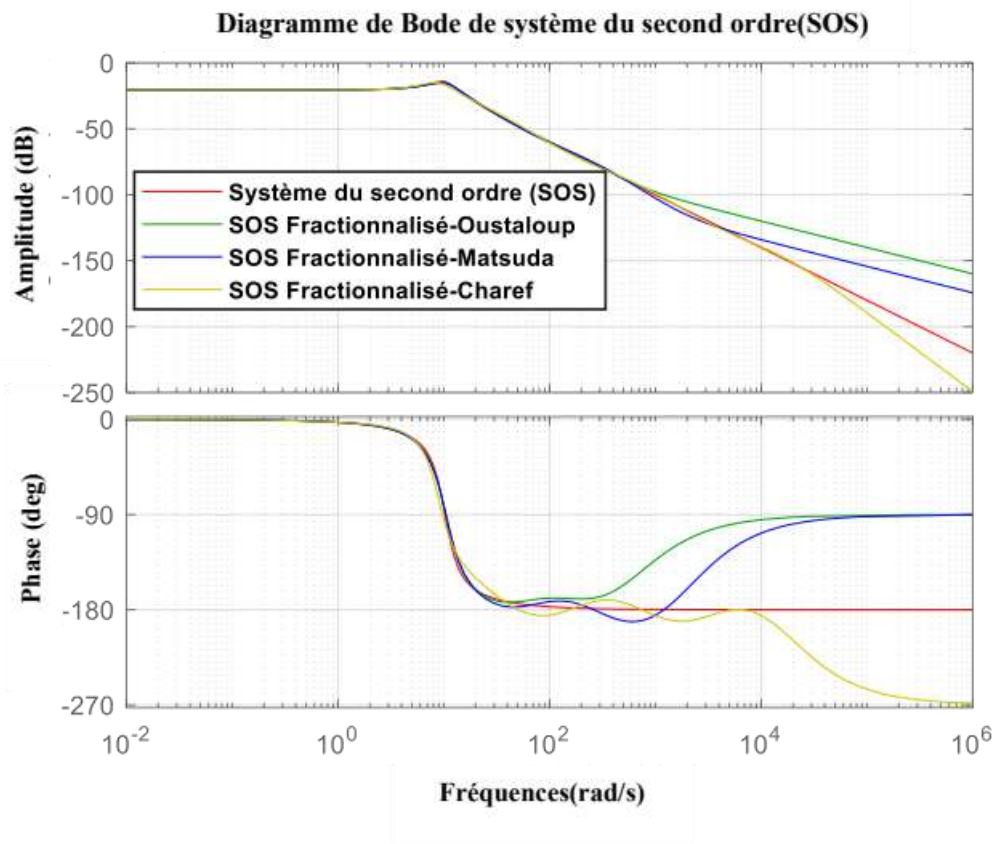
Les figures III.11, III.12 et III.13 » montrent la comparaison des tracés de Bode entre le système du deuxième ordre original et le système du deuxième ordre fractionnalisé approximé avec les méthodes d'approximation d'Oustaloup, de Matsuda et de Charef pour  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  et  $\alpha=0.5$  respectivement.



**Figure III.11.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ).



**Figure III.12.** Comparaison des tracés de Bode entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).



**Figure III.13.** Comparaison des tracés de Bode entre le système du original deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).

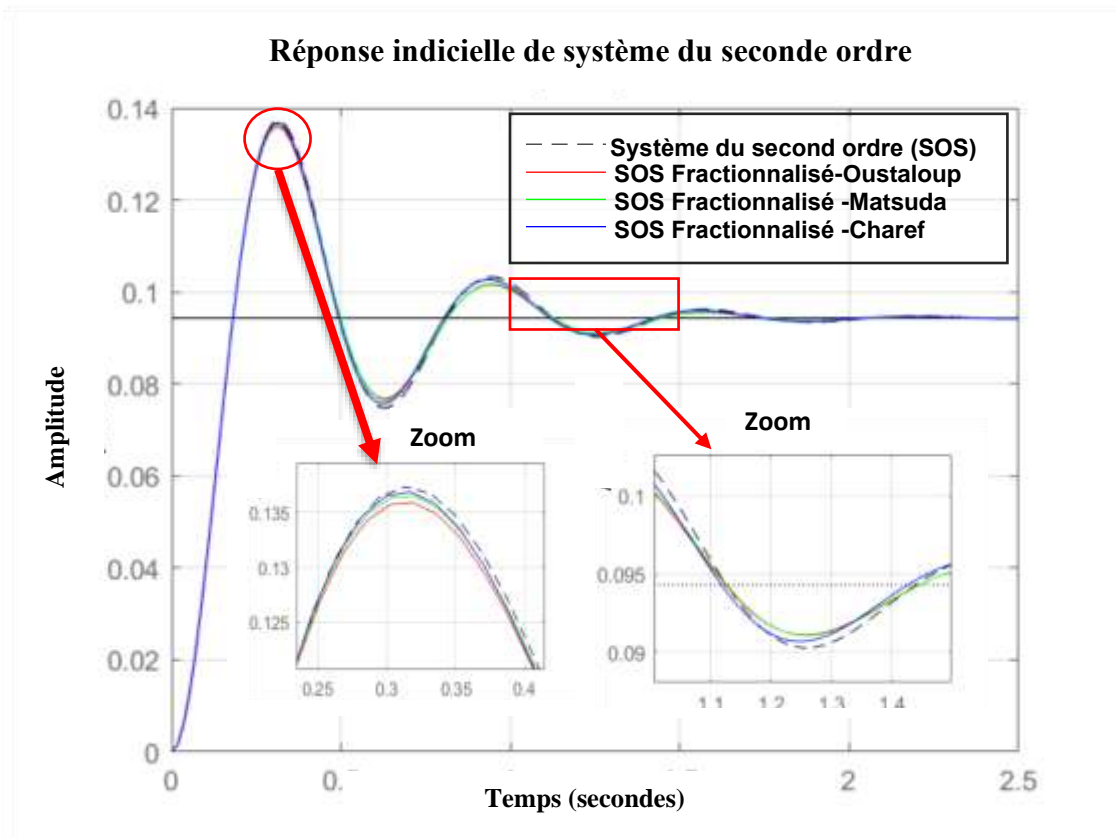
D'après les résultats obtenus, nous pouvons constaté en premier lieu que les tracés de Bode, du gain et de la phase, se superposent et sont confondus dans la bande de fréquences  $[w_l, w_h] = [0.01, 1000]$ , pour  $\alpha = 0.1$  et avec moins de précisions que dans les deux cas  $\alpha = 0.3$  et  $\alpha = 0.5$ .

En deuxième lieu nous remarquons que pour les différentes valeurs de «  $\alpha$  » et dans le cas de la méthode d'approximation de Charef, et pour des fréquences supérieurs à 1000, notre système du deuxième ordre se comporte comme un système du troisième ordre (la phase tend vers -270 degré), du aux erreurs d'approximation.

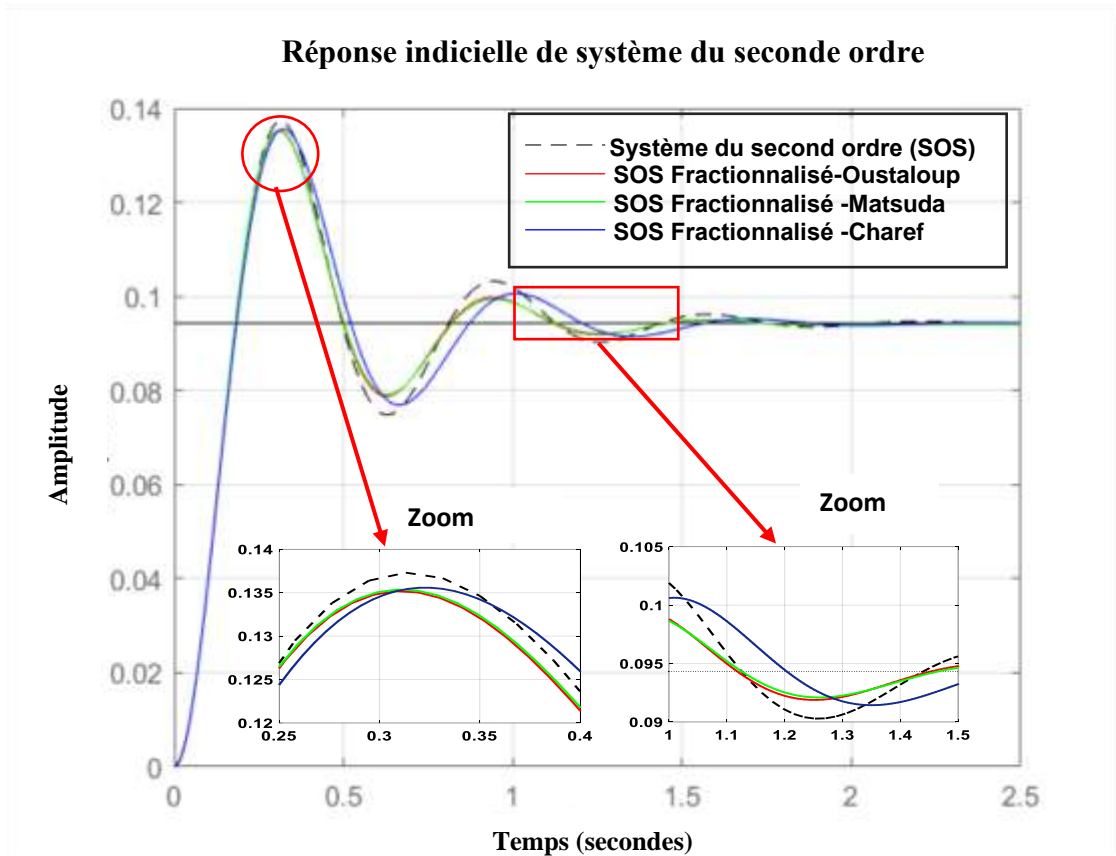
Donc on peut dire que il est nécessaire lors de l'application d'une méthode d'approximation de faire des choix judicieux de bande de fréquence.

### III.3.2.2. Analyse temporelle

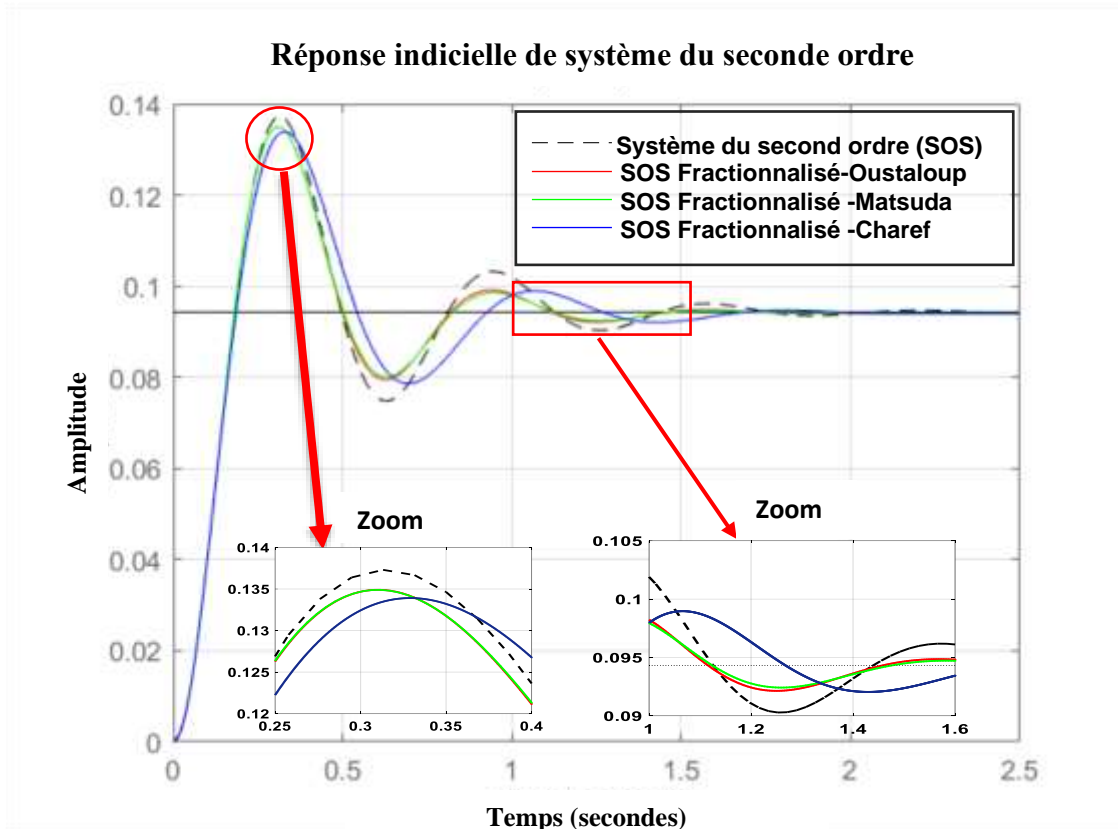
« Les figures III.14, III.15 et III.16 » montrent la comparaison des réponses indicielles entre le système du deuxième ordre original et le système du deuxième ordre fractionnalisé approximé avec les méthodes d'approximation d'Oustaloup, de Matsuda et de Charef pour  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  et  $\alpha=0.5$  respectivement.



**Figure III.14.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.1$ ).



**Figure III.15.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.3$ ).



**Figure III.16.** Comparaison des réponses indicielles entre le système original du deuxième ordre et le système fractionnalisé du deuxième ordre approximé par les méthodes d'approximation d'Oustaloup, Matsuda et Charef ( $\alpha = 0.5$ ).

L'indice de performance utilisé par le superviseur est défini précédemment par l'équation (III.5) pour évaluer la performance des différentes méthodes d'approximation.

Le critère d'erreur quadratique utilisé pour comparer les différentes méthodes d'approximations défini par l'équation (III.6), lorsque nous utilisons les réponses indicielles du système du deuxième ordre défini par l'équation (III.7) est donné par le tableau suivant :

$(\alpha, 1-\alpha)$	(0.1, 0.9)	(0.2, 0.8)	(0.3, 0.7)	(0.4, 0.6)	(0.5, 0.5)
<b>J<sub>1</sub></b>	0.0087	0.007	<b>0.00549</b>	0.003	0.002
<b>J<sub>2</sub></b>	0.0061	0.005	0.00693	<b>0.002</b>	<b>0.001</b>
<b>J<sub>3</sub></b>	<b>0.0035</b>	<b>0.002</b>	0.0092	0.011	0.1027
<b>Min(J<sub>i</sub>)</b>	Charef	Charef	Oustaloup	Matsuda	Matsuda

**Tableau III.2.** Critère d'erreur quadratique pour les réponses indicielles de système du deuxième ordre.

D'après le tableau III.2, nous constatons que lorsque nous utilisons le système du deuxième ordre :

- L'ajustement de la réponse en fréquence par Oustaloup, Matsuda et le filtre de Charef est également bon, comme cela peut être observé.
- La méthode d'approximation de Charef est la meilleure dans les deux cas :  $\alpha = 0.1$  et  $\alpha = 0.2$ .
- La méthode d'approximation de Matsuda est la meilleure dans les deux cas :  $\alpha = 0.4$  et  $\alpha = 0.5$ .
- Pour  $\alpha = 0.3$ , la méthode sélectionnée est l'approximation d'Oustaloup.

### III.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une nouvelle technique pour comparer les différentes méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire qui est la « Fractionnalisation ». l'idée est simple, en introduisant des filtres d'ordre fractionnaire dans la conception classique du système initial sans modifier la fonction de transfert d'origine.

En premier lieu, les résultats de simulations ont confirmé que nos systèmes d'ordre fractionnalisés (premier ordre ou deuxième ordre) dans une bande de fréquences limitée, ont la même dynamique que les systèmes d'ordre entier original.

En deuxième lieu, nous avons constaté que notre approche de « Fractionnalisation », a démontré son efficacité pour comparer les différentes méthodes d'approximation (Oustaloup, Matsuda, et Charef), ce qui nous permet de choisir la meilleure méthode (méthode sélectionnée).

---

# CHAPITRE IV

## « COMMANDE PID

### FRACTIONNALISÉE D'UN MOTEUR À

### COURANT CONTINU »

---

#### IV.1. Introduction

Dans la plupart des processus industriels, surtout dans le cas des moteurs électriques, il est crucial de contrôler certains paramètres physiques tels que la vitesse, la position, l'angle, etc. C'est pourquoi l'utilisation d'un système de commande est souvent indispensable.

Les correcteurs PID étaient les plus populaires au siècle dernier, et ils continueront à dominer en raison de leur efficacité remarquable, de leur facilité de mise en œuvre et de leur large applicabilité.

Ce chapitre se concentre principalement sur la contribution au développement d'une technique de commande classique. La méthode de conception des correcteurs d'ordre fractionnaire proposée repose sur une nouvelle technique appelée "Fractionnalisation" des correcteurs PID classiques, visant à améliorer les performances des systèmes asservis. Pour valider efficacement cette méthode, nous la mettons en application sur le contrôle de la vitesse d'un moteur à courant continu.

## IV.2. Description du moteur à courant continu(MCC)

### IV.2.1. Définition

Un moteur à courant continu est une machine électrique qui permet la conversion bidirectionnelle d'énergie entre une installation électrique alimentée en courant continu et un dispositif mécanique. Ainsi, l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique.

Il est composé d'un induit bobiné (le rotor) et d'un inducteur bobiné ou à aimant permanent (stator). Le rotor en rotation possède une inertie propre ( $J$ ) et sa présence sur des paliers entraîne des frottements mécaniques ( $fr$ ).

Le schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu est présenté dans la figure (IV.1) :

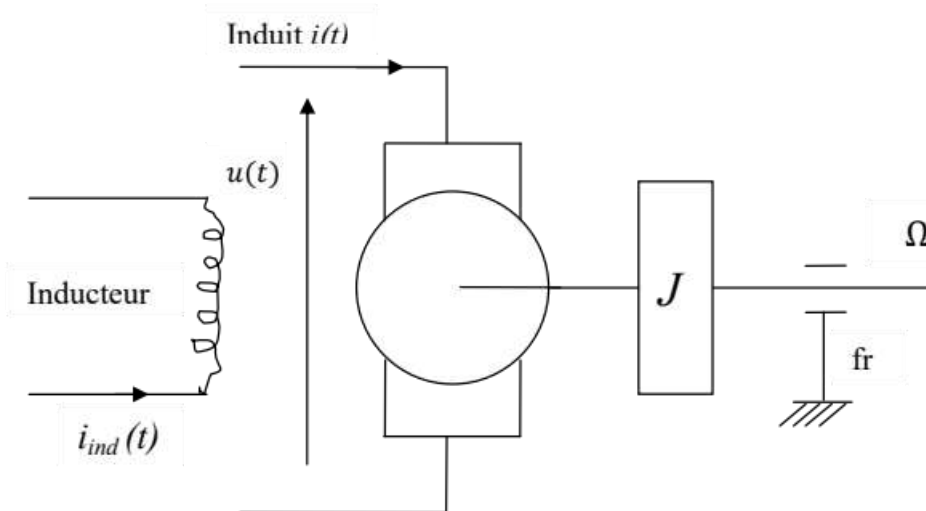


Figure IV.1. Schéma de principe d'un moteur à courant continu.

### IV.2.2. Principe de fonctionnement

La première machine électrique inventée est la machine à courant continu. Elle utilise une source d'énergie continue. Son fonctionnement repose sur un phénomène simple : la force de Laplace.

Un conducteur, tel qu'une barre, de longueur «  $L$  » placé dans un champ magnétique «  $\vec{B}$  » et parcouru par un courant «  $\vec{I}$  », est soumis à une force électromagnétique de Laplace

« $\vec{F}$  ». Cette force « $\vec{F}$  », est toujours perpendiculaire au courant électrique « $\vec{I}$  », et au vecteur d'induction magnétique.

$$\vec{F} = \vec{I} \wedge \vec{B}. L \quad (\text{IV.1})$$

La loi de Laplace est le principe de fonctionnement fondamental du moteur à courant continu. Cette force génère un couple qui permet de faire tourner le moteur.

### IV.2.3. Modélisation du Moteur à courant continu

#### IV.2.3.1. Équation électrique

L'équation qui lie la tension  $u(t)$  de l'induit (rotor) et le courant d'induit  $i(t)$  est la suivante :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E \quad (\text{IV.2})$$

$$E = k_e \Omega = k_e \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{IV.3})$$

Où :  $R$  et  $L$  est la résistance et l'inductance du rotor respectivement ;  $E$  est la force électromotrice et  $k_e$  est la constance de vitesse.

En appliquant la transformée de Laplace sur l'équation (IV.2) et (IV.3) , on aura :

$$U(s) = R. I(s) + L. s. I(s) + E \quad (\text{VI.4})$$

$$E = k_e \Omega(s) \quad (\text{IV.5})$$

Alors :

$$U(s) - k_e \Omega(s) = (R + Ls)I(s) \quad (\text{IV.6})$$

Donc on peut écrire :

$$\frac{I(s)}{U(s) - k_e \Omega(s)} = \frac{1}{(R + Ls)} \quad (\text{IV.7})$$

IV.2.3.2. Équation mécanique

$$c_m - c_r - f\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \tag{IV.8}$$

$$c_m = k_c I \tag{IV.9}$$

Avec :  $c_m$  est le couple moteur ,  $c_r$  est le couple résistant ,  $J$  est le Moment d'inertie rapporté au rotor,  $k_c$  est la Constante de couple et  $f$  est le Coefficient de frottement visqueux.

L'équation (IV.9) peut être réécrire comme suit :

$$c_m - c_r = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \tag{IV.10}$$

En appliquant la transformé de Laplace en vitesse, on obtient :

$$c_m - c_r = J\Omega \cdot s + f\Omega \tag{IV.11}$$

$$c_m - c_r = (Js + f)\Omega \tag{IV.12}$$

Donc, on peut dire que :

$$\frac{\Omega}{c_m - c_r} = \frac{1}{(Js + f)} \tag{IV.13}$$

Le schéma bloc fonctionnel du modèle de moteur électrique en vitesse est représenté par la figure suivante :

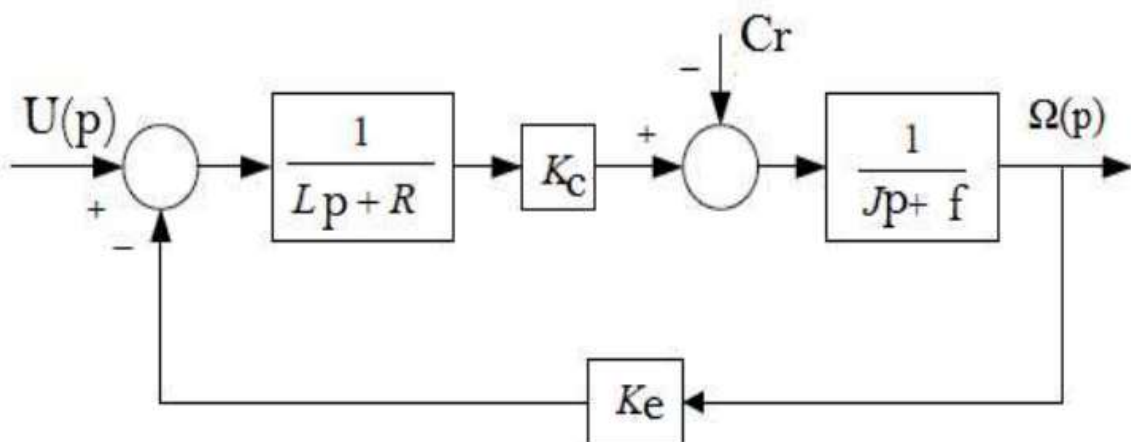


Figure IV.2. Schéma bloc du modèle de moteur électrique en vitesse.

La fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{k_c}{(R+Ls)(f+Js)+k_c k_e} \quad (\text{IV.14})$$

On remarque que cette relation correspond à un système du deuxième ordre.

### IV.3. Commande PID

Une commande PID est un type de régulation utilisé dans les systèmes de contrôle automatique. Les lettres "PID" signifient Proportionnelle, Intégrale, et Dérivée, qui sont les trois termes principaux de cette méthode de contrôle.

- **Proportionnelle (P)** : La sortie de la commande est proportionnelle à l'erreur actuelle, c'est-à-dire la différence entre la valeur désirée et la valeur mesurée.
- **Intégrale (I)** : La sortie de la commande est proportionnelle à l'intégrale dans le temps de l'erreur. Cela permet de corriger les erreurs persistantes au fil du temps.
- **Dérivée (D)** : La sortie de la commande est proportionnelle à la dérivée dans le temps de l'erreur. Cela anticipe les changements futurs et aide à stabiliser le système.

En ajustant les coefficients de ces trois termes, on peut régler le comportement de la commande PID pour répondre aux exigences spécifiques du système contrôlé.

#### IV.3.1. Principe de la régulation

La plupart des équipements et des systèmes industriels et domestiques nécessitent le maintien de grandeurs physiques à des valeurs spécifiques, même en présence de variations externes ou internes. Par exemple, le niveau d'eau dans un réservoir, la température dans un four ou encore la vitesse et la position des moteurs, qui sont intrinsèquement variables, doivent être ajustés grâce à des actions appropriées sur le processus en question.

Si les perturbations qui affectent la grandeur à contrôler sont lentes ou négligeables, un simple réglage en boucle ouverte permet d'atteindre et de maintenir la valeur souhaitée (par exemple : action sur un robinet d'eau). Cependant, dans la plupart des cas, ce type de réglage n'est pas suffisant car il ne fournit pas d'information sur la sortie. Il est alors nécessaire de comparer en permanence la valeur mesurée de la grandeur contrôlée à la valeur désirée, et

d'agir en conséquence sur la grandeur d'action, également appelée grandeur réglant. Dans ce cas, on établit une boucle de régulation, et plus généralement une boucle d'asservissement.

### IV.3.2. Performances des contrôleurs PID

Les performances des contrôleurs PID selon les spécifications un cahier des charges sont représentées par la figure (IV.3).

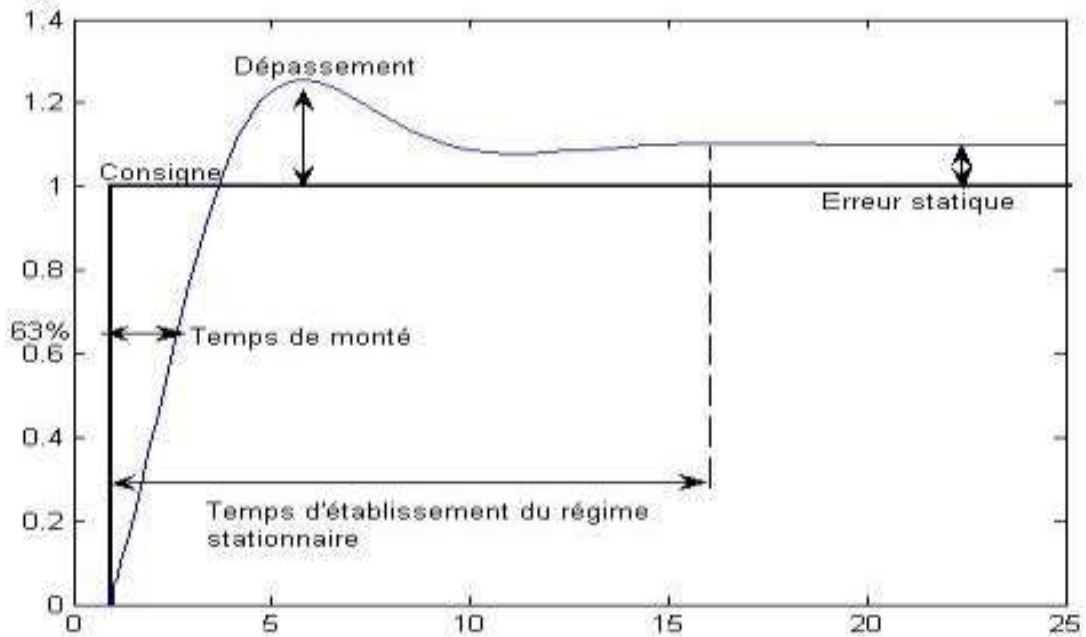


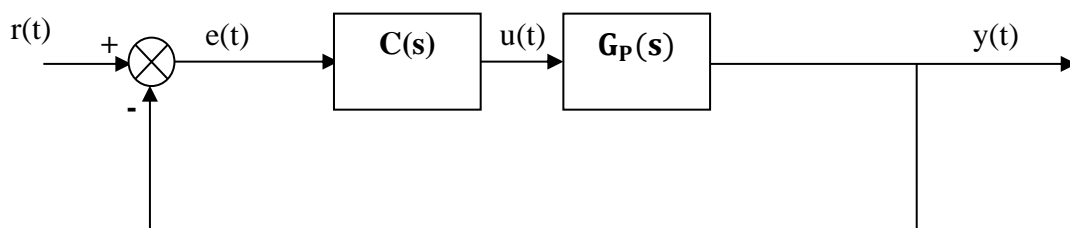
Figure IV.3. Performances d'un système de commande.

- **Temps de réponse** : Il mesure le temps nécessaire pour que le système atteigne une certaine valeur après un changement de référence. Un bon contrôle PID doit assurer un temps de réponse rapide tout en évitant les oscillations excessives.
- **Précision de suivi de référence** : Cette performance indique dans quelle mesure le système suit la référence désirée. Une bonne performance signifie que le système suit de près la référence sans erreurs significatives.
- **Rejet des perturbations** : Cela mesure la capacité du contrôle PID à maintenir le système proche de la référence malgré les perturbations externes. Un bon contrôle PID doit réduire l'impact des perturbations sur la sortie du système.
- **Stabilité du système** : La stabilité est cruciale pour éviter les oscillations indésirables ou le comportement instable. Un contrôle PID bien réglé maintient le système stable dans différentes conditions de fonctionnement.

- **Robustesse** : Les paramètres du système peuvent varier en raison de changements de température, d'usure des composants, etc. Un bon contrôle PID doit être robuste face à ces variations pour maintenir de bonnes performances dans diverses conditions.

#### IV.4. Contrôleur PID classique

Actuellement, le contrôleur PID est la méthode de commande la plus couramment utilisée dans les systèmes de rétroaction. Plus de 90% des systèmes de contrôle utilisent des contrôleurs PID. En général, le contrôleur PID classique est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (IV.4).



**Figure IV.4.** Système de commande à retour unitaire classique.

Sachant que :

- $u(t)$ : le signal de commande.
- $e(t)$ : l'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$  et la sortie  $y(t)$ .
- $y(t)$ : la grandeur à commander.
- $C(s)$ : la fonction de transfert du correcteur.
- $G_p(s)$ : est la fonction de transfert de système.

La loi de commande qui décrit le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est la suivante :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{IV.15})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (IV.15) avec des conditions initiales nulles, on trouvera :

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{k_i}{s} E(s) + k_d s E(s) \quad (\text{IV.16})$$

Donc, on pe

$$U(s) = K_p = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) E(s) \quad (\text{IV.17})$$

La fonction de transfert du correcteur PID peut s'exprimer ainsi

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \quad (\text{IV.18})$$

Avec :  $T_i = \frac{K_p}{K_i}$  et  $T_d = \frac{K_p}{K_d}$

Les paramètres du correcteur comprennent le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_i$  et la constante de dérivation  $T_d$ . Chacun de ces termes, proportionnel, intégral et dérivé, présente des caractéristiques distinctes et agit de manière complémentaire .

La composante proportionnelle représente la forme la plus basique de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à contrôler, multiplié par le gain  $K_p$ . Intuitivement, augmenter ce gain fait en sorte que le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système, réduisant ainsi plus rapidement l'écart. Par conséquent, lorsque  $K_p$  augmente, le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.

En revanche, un correcteur agissant trop fortement peut entraîner des comportements oscillatoires, indiquant une diminution voire une perte de stabilité. La génération d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, dépend de l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à contrôler. L'utilisation du terme intégral assure la suppression de cet écart. Ce terme génère, à partir d'un signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour effet de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Cependant, il engendre un effet déstabilisant. En revanche, l'objectif principal de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition[7,126].

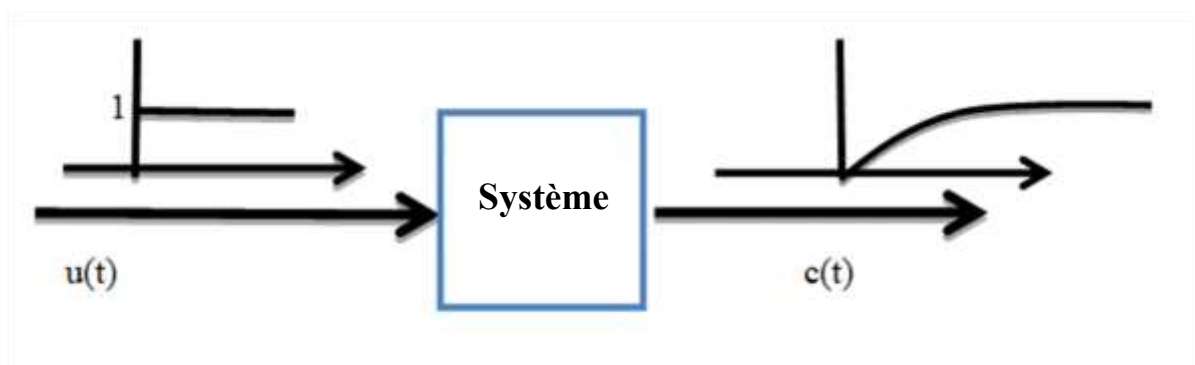
### IV.4.1. Réglage de PID

La conception de la commande permet souvent de modifier plusieurs paramètres pour améliorer les performances du système. Il existe plusieurs méthodes de réglage du PID, notamment :

- La méthode de réglage Ziegler-Nichols,
- La méthode de réglage Cohen-Coon,
- Les méthodes de réglage PID assistées par logiciel.

Pour notre travail on s'intéresse à la méthode de réglage **Ziegler-Nichols**. Dans cette méthode, nous obtenons expérimentalement la réponse du système à une entrée à échelon unitaire, comme illustré dans la figure (IV.5). Si le système ne comporte ni intégrateur(s) ni pôles complexes conjugués dominants, la courbe de réponse à l'échelon unitaire peut prendre la forme d'un S, comme illustré à la figure (IV.6). Cette méthode s'applique lorsque la réponse à une entrée échelon présente une courbe en forme de S. De telles courbes de réponse à un échelon peuvent être générées expérimentalement ou à partir d'une simulation dynamique du système.

La courbe en forme de S peut être caractérisée par deux constantes : le temps de retard  $L$  et la constante de temps  $T$ . Le temps de retard et la constante de temps sont déterminés en traçant une ligne tangente au point d'inflexion de la courbe en S, puis en déterminant les intersections de cette ligne tangente avec l'axe du temps et la courbe en S, comme illustré dans la Figure (IV.6).



**Figure IV.5.** Réponse par échelon unitaire d'un système.

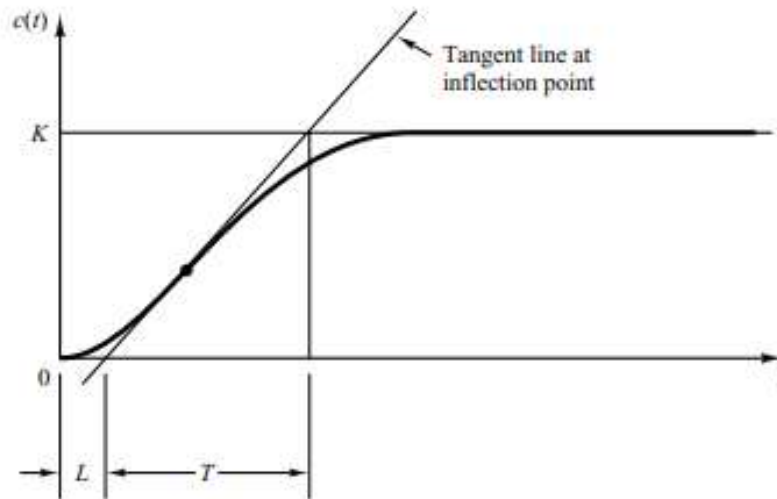


Figure IV.6. Courbe de réponse en forme de S.

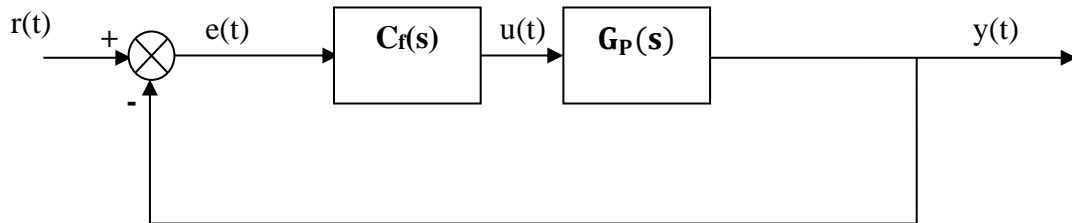
Types de contrôleurs	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$T/L$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.9 \times (T/L)$	$L/0.3$	0
<b>PID</b>	$0.9 \times (T/L)$	$2 \times L$	$0.5 \times L$

Tableau IV.1. Règle de réglage de Ziegler-Nichols basée sur la réponse en échelon.

### IV.5. Contrôleur $PI^\alpha D^\beta$ d'ordre fractionnaire

Le contrôleur PID est largement utilisé dans l'industrie, cependant, ces performances peuvent devenir insuffisantes en raison de retards significatifs dans le modèle du processus ou lorsque les paramètres du processus varient. Dans de tels cas, d'autres algorithmes de réglage sont utilisés, tels que le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage par régime glissant, etc.

Mais récemment, Podlubny a proposé une amélioration du comportement du correcteur PID en introduisant le contrôleur  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire, comprenant un intégrateur d'ordre  $\alpha$  et un différentiateur d'ordre  $\beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à l'ensemble des nombres réels. , le contrôleur PID fractionnaire est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (IV.7).



**Figure IV.7.** Système de commande à retour unitaire (cas d'un PID fractionnaire).

Sachant que :

- $u(t)$ : le signal de commande.
- $e(t)$ : l'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$  et la sortie  $y(t)$ .
- $y(t)$ : la grandeur à commander.
- $C_f(s)$ : la fonction de transfert du correcteur fractionnaire.
- $G_p(s)$ : est la fonction de transfert de système.

L'équation de sortie du correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\alpha}(e(t)) + T_d D^\beta(e(t)) \right] \quad (\text{IV.19})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (IV.19) avec des conditions initiales nulles, on peut exprimer la fonction de transfert de ce correcteur de manière suivante :

$$C_f(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta \quad (\text{IV.20})$$

Les termes d'intégration  $K_i$  et de dérivation  $K_d$  sont reliés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (\text{IV.21})$$

$$K_d = K_p T_d \quad (\text{IV.22})$$

La fonction de transfert  $C_f(s)$  d'un correcteur est donné comme suit :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} + T_d s^\beta \right) \quad (\text{IV.23})$$

En plus des paramètres classiques  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$ , le correcteur  $PI^\alpha D^\beta$  dispose de deux autres paramètres de réglage,  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette caractéristique le rend plus adaptable, offrant ainsi une meilleure possibilité d'ajustement des propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Inspirés par cette idée, de nombreux travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés[7,130].

Comparés aux correcteurs classiques, les correcteurs d'ordre fractionnaire possèdent deux paramètres supplémentaires, notés  $\alpha$  et  $\beta$ , qui représentent respectivement l'ordre d'intégration et de dérivation. En variant ces deux paramètres, on peut distinguer différentes possibilités des correcteurs d'ordre fractionnaire.

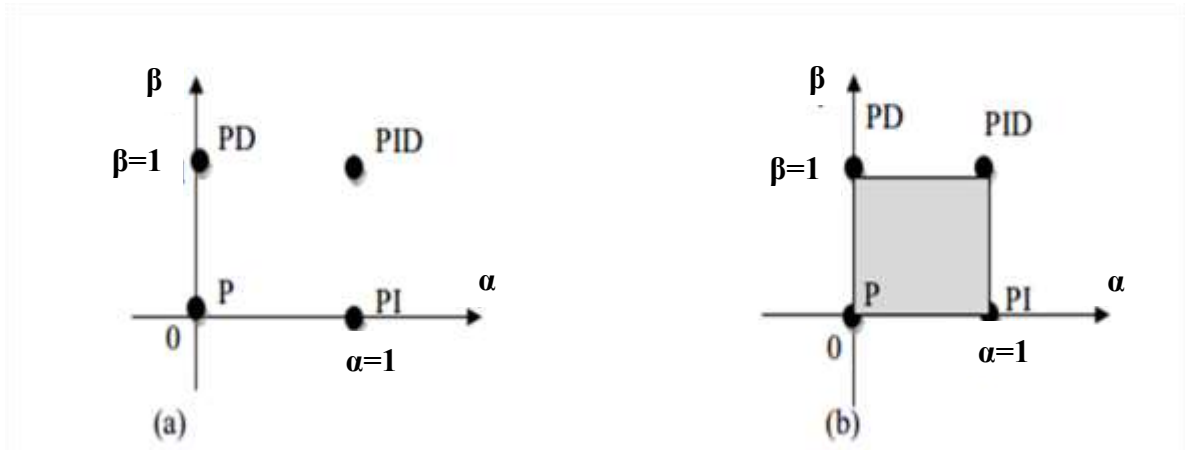


Figure IV.8. (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire.

Selon la figure (IV.8), Les cas suivants peuvent être identifiés dans le tableaux ci-dessous :

Paramètres	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$0 < \alpha < 1$
$\beta = 0$	Contrôleur « P » classique	Contrôleur « PI » classique	
$\beta = 1$	Contrôleur « PD » classique	Contrôleur « PID » classique	Contrôleur « PI » fractionnaire
$0 < \beta < 1$		Contrôleur « PD » fractionnaire	Contrôleur « PID » fractionnaire

Tableau IV.2. La nature du correcteur selon les différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

À partir de ces résultats, on observe que les correcteurs classiques peuvent être considérés comme des cas particuliers des correcteurs d'ordre fractionnaire.

## IV.6. Contrôleur PID Fractionnalisé

le contrôleur PID fractionnalisé d'un système d'ordre entier (système d'origine) est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (IV.9)[129].

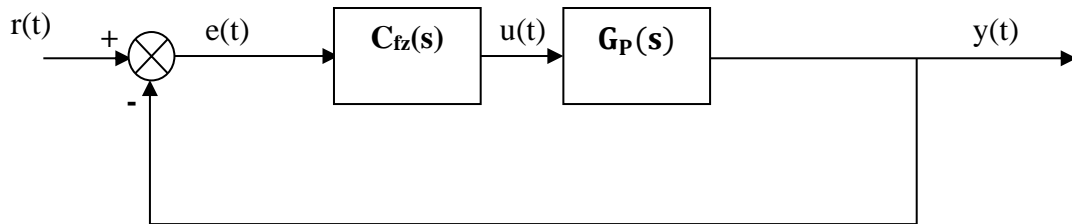


Figure IV.9. Système de commande PID fractionnalisé à retour unitaire.

Sachant que :

- $u(t)$ : le signal de commande.
- $e(t)$  : l'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$  et la sortie  $y(t)$  : .
- $y(t)$ : la grandeur à commander.
- $C_{fz}(s)$  : la fonction de transfert du contrôleur fractionnalisé.
- $G_p(s)$  : est la fonction de transfert de système.

Le contrôleur PID d'ordre entier fractionnalisé à concevoir pour notre système de commande est sous la forme suivante :

$$C_{fz}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (\text{IV.24})$$

L'équation (IV.23) peut être écrite de la manière suivante :

$$C_{fz}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{K_p T_i T_d s^2 + K_p T_i s + K_p}{T_i} \right] \quad (\text{IV.25})$$

Après Fractionnalisation de l'intégrateur «  $\frac{1}{s}$  », Le contrôleur PID fractionnalisé est défini par la fonction suivante :

$$C_{fz}(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{1-\alpha}} \left[ \frac{K_p T_i T_d s^2 + K_p T_i s + K_p}{T_i} \right] \quad (\text{IV.26})$$

Avec  $0 < \alpha < 1$ .

## IV.7. Résultats et discussions

Notre exemple montre la comparaison de trois techniques de commande d'un moteur à courant continu (PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé) pour le suivi des commandes de consigne et la réduction de la sensibilité aux perturbations de charge.

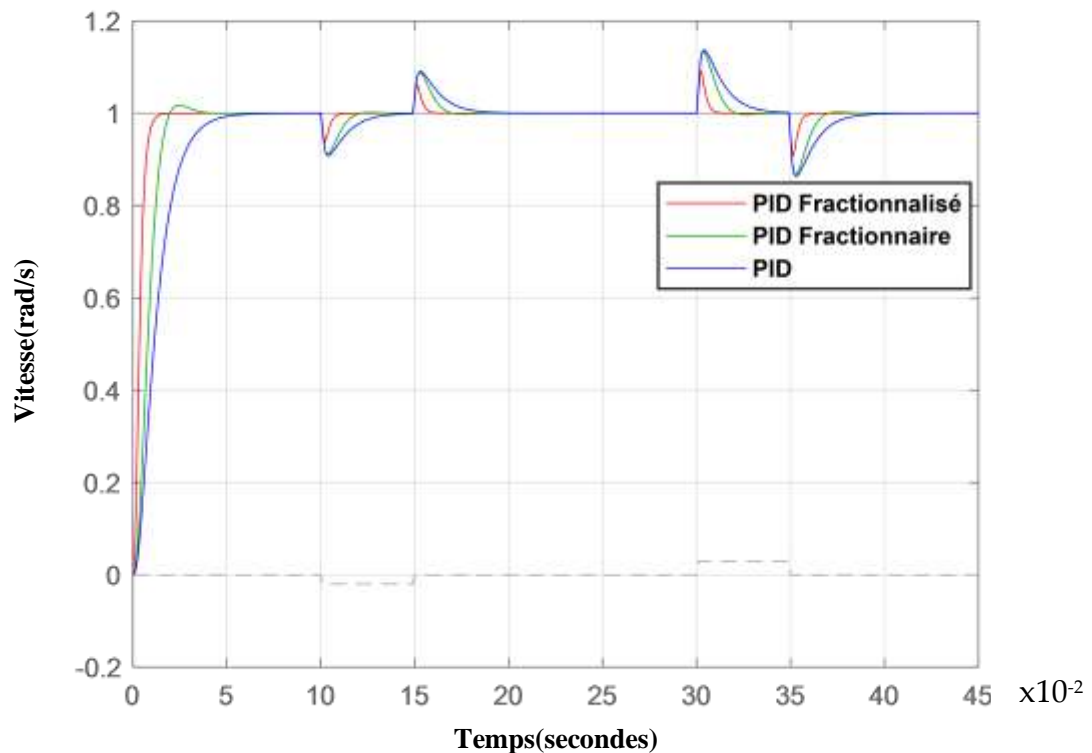
Le modèle identifié pour la vitesse de tension du moteur à courant continu est donné par [131]:

$$G_{DC\_moteur}(s) = \frac{K_{DC\_moteur}}{\tau s + 1} = \frac{0.25}{1.4s + 1} \quad (IV.27)$$

Les figures (IV.8), (IV.9) et (IV.10) montrent la vitesse du moteur à courant continu en utilisant le contrôleur PID adaptatif entier pour  $\alpha=0,1$ ,  $\alpha=0,3$  et  $\alpha=0,5$  respectivement, avec les valeurs optimisées des paramètres suivants[131]:

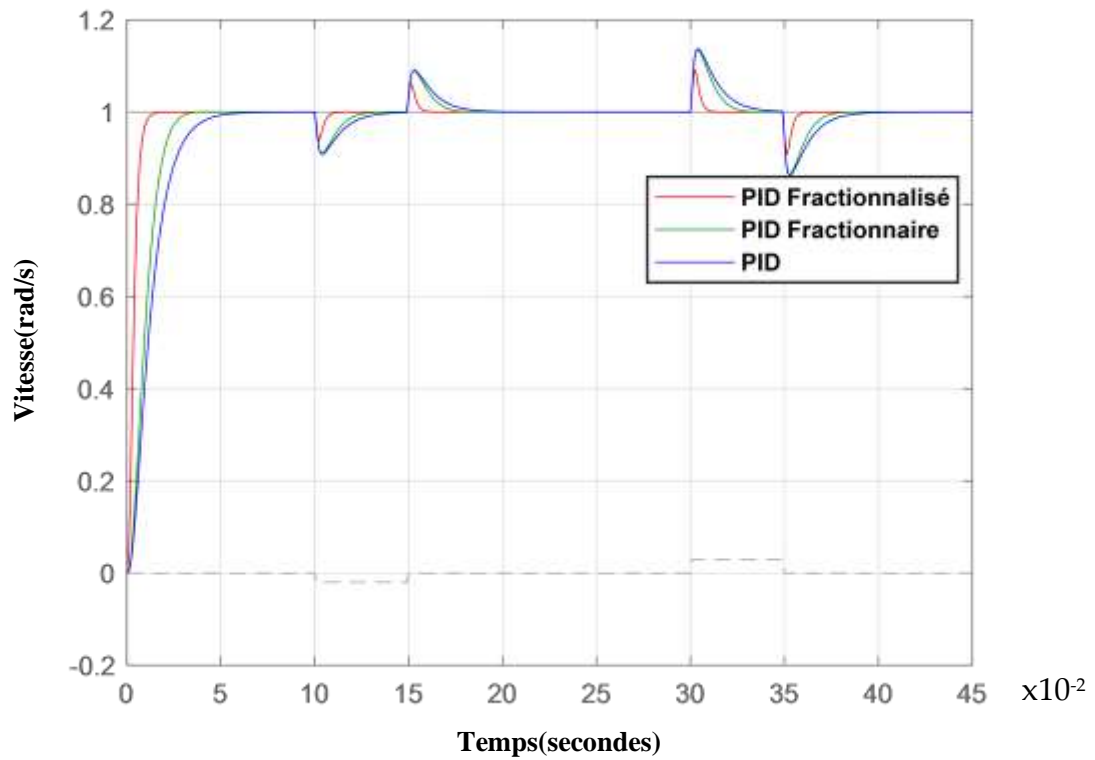
$$K_p = 966.6787, K_i = 126.8123 \text{ et } K_d = 48.3883$$

Suivi de consigne et rejet des perturbations



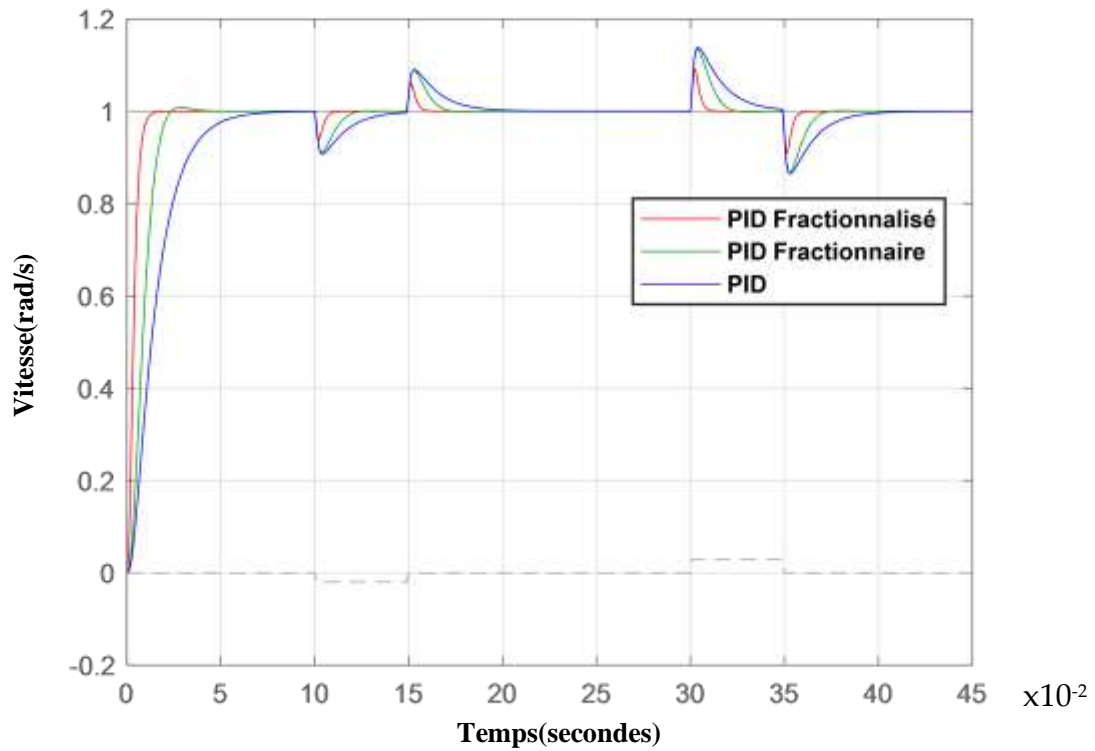
**Figure IV.10.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0,1$ ).

## Suivi de consigne et rejet des perturbations



**Figure IV.11.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0.3$ ).

## Suivi de consigne et rejet des perturbations



**Figure IV.12.** Vitesse du moteur à courant continu utilisant les contrôleurs PID, PID fractionnaire et PID fractionnalisé avec rejet des perturbations ( $\alpha=0.5$ ).

L'analyse des performances du contrôleur PID fractionnalisé, PID fractionnaire et le PID classique est donnée par le tableau ci-dessous :

Types de contrôleurs	Dépassement [%]	Temps d'établissement [s]	temps de montée[s]	Erreur absolue moyenne (rad)
<b>PID</b>	1.7242	0.0595	0.0373	0.0012
<b>PID fractionnaire</b>	0.0533	0.0193	0.0106	0.0005
<b>PID fractionnalisé</b>	<b>0.041</b>	<b>0.015</b>	<b>0.009</b>	<b>0.0001</b>

**Tableau IV.3.** Paramètres de stabilité de la réponse transitoire du système.

Nous remarquons que par rapport au contrôleur PID entier(classique), notre contrôleur PID fractionnalisé apporte une amélioration significative du :

- Dépassement :dépassement enregistré est minimal.
- Temps d'établissement :plus court.
- Temps de montée :plus rapide.
- l'erreur absolue moyenne qui est plus petite.

#### **IV.8. Conclusion**

Dans ce dernier chapitre, nous avons introduit la commande PID Fractionnée. Ensuite, nous avons comparé les cas de PID entier et de PID fractionnalisé. Les résultats de simulation montrent que le contrôleur PID fractionnalisé offre les meilleures performances en termes de rapidité, de dépassement minimal et de robustesse par rapport au PID entier classique.

---

# CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Actuellement, le recours au calcul fractionnaire en ingénierie de commande devient de plus en plus populaire, que ce soit pour la modélisation ou la conception des contrôleurs dans la commande des systèmes industriels.

De nos jours, de nombreux chercheurs se concentrent sur l'élaboration de méthodes et techniques innovantes pour identifier les systèmes d'ordre fractionnaire et ajuster les correcteurs d'ordre fractionnaire  $PI^\alpha D^\beta$ . L'importance de ces correcteurs réside dans leur capacité à offrir une plus grande flexibilité dans la conception de la commande, grâce à leurs deux paramètres supplémentaires représentant les ordres fractionnaires, en plus des actions dérivée et intégrale. Cette caractéristique permet au correcteur de répondre à des exigences de performance supplémentaires dans le contrôle, ce qui en fait un domaine de recherche crucial pour la simulation et l'implémentation. Cependant, en raison de l'impossibilité d'une implémentation directe, il est nécessaire d'obtenir une approximation aussi fidèle que possible du fonctionnement du modèle réel.

L'objectif de l'étude décrite dans cette thèse consistait à développer une nouvelle stratégie qui est appelée «Fractionnalisation» pour concevoir des contrôleurs à ordre fractionnaire (non entier).

Ainsi, dans le premier chapitre, nous avons rapidement exposé les connaissances actuelles sur les systèmes d'ordre fractionnaire. Les définitions des opérateurs d'ordre non entier, leurs caractéristiques et leurs interprétations géométriques et physiques ont été exposées. Nous avons également présenté les techniques couramment utilisées dans la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, les différentes techniques d'approximation des systèmes d'ordres fractionnaires ont été exposées. Parmi celles-ci, trois méthodes sont particulièrement examinées : les méthodes de Matsuda, d'Oustaloup et de Charef.

Le troisième chapitre met en avant notre première contribution de notre travail. nous nous sommes intéressé à la comparaison des différentes méthodes d'approximation en introduisant la technique de « Fractionnalisation » dans le système entier original sans le

modifier, grâce à cela, nous avons pu sélectionner la meilleure méthode (méthode sélectionnée).

Le quatrième chapitre met en lumière notre deuxième contribution. Une méthode de commande d'ordre fractionnaire a été développée, appelée « Commande Fractionnalisée » en se basant sur le principe de « Fractionnalisation ». Afin de confirmer l'efficacité et la robustesse de cette commande, une application sur un moteur à courant continu a été réalisée par une simulation de quelques exemples. Les résultats obtenus confirment que la commande proposée est efficace et Elle met en évidence les bénéfices de performance (améliorations notables) qu'elle propose par rapport à la commande fractionnaire  $PI^{\alpha}D^{\beta}$  et à la commande classique PID.

En conclusion, L'apport de cette thèse est important dans la création de nouvelles méthodes de commande d'ordre fractionnaire visant à améliorer les performances des systèmes industriels. Les résultats obtenus ouvrent la voie à de nouvelles possibilités de recherche dans ce domaine, avec un potentiel important pour l'innovation et l'amélioration des technologies industrielles.

Concernant les futures pistes de recherche, nous jugeons qu'il serait pertinent d'approfondir les schémas de commande élaborés dans cette thèse et de les adapter pour les appliquer à des classes de systèmes d'ordre fractionnaire plus diversifiées, afin d'améliorer leur rejet du bruit et leur robustesse dans diverses approches des systèmes de contrôle.

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] S. Canat, « Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non entier de la machine synchrone à cage ». Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechniques de Toulouse (France), 2005.
- [2] M. Assaba, « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine (Algérie), 2015.
- [3] K. Bettou, « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire », Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine (Algérie), 2011.
- [4] A. Djouambi, « Contribution à la commande CRONE' ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine (Algérie), 2008.
- [5] A. SI Ammour, « Contribution à la commande par mode glissants d'ordre fractionnaire », Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou (Algérie), 2011.
- [6] S. Ladaci, « contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat en Science, Département d'Electronique, Université des Frères Mentouri-Constantine (Algérie), 2007.
- [7] Y. Bensafia, « Utilisation des Filtres Fractionnaires pour la Conception de Régulations Adaptatifs Robustes ». Thèse de Doctorat en Science, Département de Génie Electrique, Université de Skikda (Algérie), 2016.
- [8] N. Bertrand, J. Sabatier, O. Briat, J.M. Vinassa, « Fractional non-linear modelling of ultracapacitors ». Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, Vol.15, No. 5, pp. 1327-1337, 2010.
- [9] H. Cao, Z. Deng, X. Li, J. Yang, Y. Qin, «Dynamic modeling of electrical characteristics of solid oxide fuel cells using fractional derivatives ». International Journal of Hydrogen Energy, Vol. 35, No. 4, pp. 1749-1758, 2010.
- [10] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petráš , « A Fractional Model for IPMC Actuators ». IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC 2008, pp. 2103-2107, 2008.
- [11] R. Martinez, Y. Bolea, A. Grau, H. Martinez, «Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems ». IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009, pp. 1-6, 2009.

- [12] S. Racewicz, D. Riu, N. Retière, P.J. Chrzan, « Nonlinear half-order modeling of synchronous machine ». IEMDC 2009, pp. 778-783, Miami, Florida, 2009.
- [13] A. Oustaloup, X. Moreau, M. Nouillant, «The CRONE suspension ». Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 8, pp. 1101–1108,1996.
- [14] S. Ladaci, Y. Bensafia, « Indirect fractional order pole assignment based adaptive control ». Engineering Science and Technology, an International Journal, Elsevier, [DOI: 10.1016/j.jestch.2015.09.004], 2015.
- [15] I. N'Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, A. Bouaziz, « Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties ». 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, pp. 821-826, Thessaloniki, 2009.
- [16] A. Oustaloup, « La Commande CRONE ». Hermès science publications, Paris, 1991.
- [17] D.O. Craiem, R.L. Armentano, « Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model ». 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS '06, pp. 1098-1101, 2006.
- [18] V.V. Kulish, W.K. Chan, « Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach ». International Conference on Cyberworlds, pp. 289-296, 2005.
- [19] R.L. Balgley and R.A. Calico, « Fractional –Order State Equations for the Control of Viscoelastic Damped Structures: Control and Dynamics ». J. Guidance, vol. 14, No. 2, pp 304-311, 1991.
- [20] M. Axell and E.M. Bise, « Fractional Calculus Applications in Control Systems ». Proc IEEE 1990 National Aerospace and Electronics Conference, pages 563-566, New York, USA, 1990.
- [21] A. Oustaloup, « From Fractality to Non Integer Derivation Through Recursivity a Property Common to These Two Concepts: A Fundamental Idea for a New Process Control Strategy». Proc 12th IMCS World conference, Paris (France), 1988.
- [22] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, « Fractal System as Represented by Singularity Function ». IEEE Trans, On Automatic Control, vol. 37, No .9, pp.1465-1470, 1992.
- [23] K. Khettab, « Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains». Thèse de doctorat en sciences, Université de Skikda (Algérie), 2016.

- [24] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, « Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method ». *Annals of Biomedical Engineering*, vol.20, No.3 pp 321-335, 1992.
- [25] S. Ladaci, J. Loiseau, « Adaptive Internal Model Control with Fractional Order Parameter». Conference Paper, Boumerdes (Algerie), 2009.
- [26] Y. Ferdi, « Impulse Invariance-Based Method for the Computation of Fractional Integral of Order  $0 < \alpha < 1$  ». *Computers and Electrical Engineering*, vol.35.No.5. pp 722–729, 2009.
- [27] R. Hilfer, « Applications of Fractional Calculus in Physics ». World Scientific, 2000.
- [28] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado, « Advances in fractional calculus ». Springer, 2007.
- [29] N.M. Retière, M.S. Ivanès, « An introduction to electric machine modeling by systems of noninteger order. Application to double-cage induction machine ». *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 4, pp. 1026-1032, 1999.
- [30] N.M. Retière, M.S. Ivanès, « Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems ». *IEEE Power Engineering Review*, pp. 62–64, 1998.
- [31] D. Riu, « Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi ». Thèse de Doctorat de l'INPG, 2001.
- [32] D. Riu, N.M. Retière, « Modélisation des machines électriques par des systèmes d'ordre un demi ». *Revue internationale de Génie Electrique*, Vol. 3, No. 4, 2000.
- [33] S. Racewicz, « Modélisation des machines synchrones par des systèmes d'ordre un demi ». Stage Master 2 Recherche à l'INP de Grenoble, 2005.
- [34] W. Jun, Z. Zhengming, S. Xiaoying, « Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric air plane ». *Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2003*, Vol. 2, pp. 665-668, 2003.
- [35] K. Khettab, Y. Bensafia, S. Ladaci, « Robust Adaptive Fuzzy control for a Class of Uncertain nonlinear Fractional Systems ». *Second International Conference on Electrical Engineering And Control Applications, ICEECA'14*, Constantine (Algerie), 2014.
- [36] M. Lin, A. Srivastava, N.N. Schulz, « A Generic Digital Model of Multiphase Synchronous Generator for Shipboard Power System ». *IEEE Electric Ship Technologies Symposium, ESTS 2007*, pp. 348-355, Arlington, Virginia, 2007.
- [37] C. Rossi, D. Casadei, A. Pilati, M. Marano, « Wound Rotor Salient Pole Synchronous Machine Drive for Electric Traction ». *Conference Record of the 2006 IEEE Industry*

- Applications Conference, 41st IAS Annual Meeting, Vol. 3, pp. 1235-1241, Tampa, Florida, 2006.
- [38] W. Yu, Y. Luo, Y. Pi, « Fractional order modeling and control for permanent magnet synchronous motor velocity servo system ». *Mechatronics*, Vol. 23, pp. 813–820, 2013.
- [39] D. Riu, N.M. Retière, M.S. Ivanec, « Turbine generator modeling by non-integer order systems ». *IEMDC 2001*, pp. 185-187, Cambridge, Massachusetts, 2001.
- [40] J. Faucher, T. Khaorapapong, H. Kabbaj, « Comparison of four fractional power order transfer function models of rotor bar ». *Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2001*, Vol. 1, pp. 448-451, Shenyang, 2001.
- [41] J. Faucher, T. Khaorapapong, H. Kabbaj, « Parametric identification of fractional transfer function models of induction motor rotor bar ». *IEEE SDEMPED Conference, International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives*, pp. 299-303, Grado Italy, 2001.
- [42] V.H. Schmidt, J.E. Drumheller, « Dielectric properties of lithium hydraziniumsulfate ». *Physical Review B*, Vol. 4, pp. 4582–4597, 1971.
- [43] N. Mrani, « Contribution à l'étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications ». *Thèse de Doctorat, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat(Maroc)*, 2004.
- [44] I. Podlubny, « Fractional-order system and fractional-order controllers ». Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [45] Y.-Q. Chen, I. Petrás, D. Xue, « Fractional order control - a tutorial ». *IEEE American Contr. Conf., St-Louis, USA*, 2009.
- [46] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petrás, « Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications ». *World scientific series on nonlinear science, Series A*. World scientific, Singapore, 2010.
- [47] B. Mbodje, G. Montseny, « Boundary fractional derivative control of the wave equation ». *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 40, pp.378–382, 1995.
- [48] K. Matsuda, H. Fuji, « H1 optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results ». *J. Guidance, Contr. & Dynamics*, Vol. 16, pp. 1146–1153, 1993.
- [49] A. Oustaloup, B. Mathieu, P. Lanusse, « The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission ». *European J. Contr.*, Vol. 1, pp.113–121, 1995.
- [50] P. Lanusse, A. Oustaloup, D. Sutter, « Multi-scalar CRONE control of multivariable plants ». *Wsc'96-Isiac, Montpellier, France*, 1996.
- [51] I. Podlubny, « Fractional Order Systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.

- [52] H.S. Ahn, V. Bhambhani, Y.-Q. Chen, « Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking ». *Sadhana*. Vol. 34, No. 5, pp. 833-850, 2009.
- [53] K. Bettou, A. Charef, « Tuning of Fractional Order  $PI^\alpha$ -PD Controller using Particle Swarm Optimization Algorithm ». *Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control, Alger(Algerie)*, 2013.
- [54] N. Fergani, A. Charef, « Process step response based fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller parameters tuning for desired closed loop response ». *International Journal of Systems Science*, 2014.
- [55] M. Moradi, « A genetic-multivariable fractional order PID control to multi-inputmulti-output processes ». *Journal of Process Control*, Vol. 24, pp. 336-343, 2014.
- [56] M. Abedini, M.A. Nojournian, H. Salarieh, A. Meghdari, « Model reference adaptive control in fractional order systems using discrete-time approximation methods ». *Commun. Nonlinear Sci. Numer.Simulat*, Vol. 25, pp. 27-40, 2015.
- [57] A. Charef A., M. Assabaa , S. Ladaci, J.J. Loiseau, « Fractional order adaptive controller for stabilized systems via high-gain feedback ». *IET Control Theory and Applications*, Vol. 7, No. 6, pp. 822-828,2013.
- [58] Y. Wei Y., Sun Z., Hu Y., Wang Y. « On fractional order composite model reference adaptive control ». *Int. J. of Systems Science*, 2015.
- [59] H. Delavari, R. Ghaderi, N. A. Ranjbar, S.H. HosseinNia, S. Momani, « Adaptive Fractional PID Controller for Robot Manipulator ». *Proceedings of FDA'10. The 4<sup>th</sup> IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*. Badajoz, Spain, 2010.
- [60] M. Tabatabaei, « Design of a fractional order adaptive controller for velocity control of a permanent magnet synchronous motor ». *The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, Vol. 34, No. 4. 2015.
- [61] Y. He, R. Gong , « Application of fractional order MRAC on industry Boiler Burning System ». *Int. Conf. Intelligent Computation Technology and Automation*. Pp. 750-753, 2010.
- [62] A. Neçaibia, S. Ladaci, A. Charef, J.J. Loiseau, « Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photovoltaic panels ». *Front. Energy*, Vol. 9, No. 1, pp. 43-53, 2015.
- [63] R.L. Bagley, P.J. Torvik , « On the appearance of the fractional derivatives in the behavior of real materials ». *Journal Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 294-298,1984.
- [64] J.J. Loiseau, H. Mounier, « Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux ». *ESAIM : Proc.*, pp. 131-144, 1998.

- [65] R. Hotzel, « Contribution à Théorie Structurale et à la commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires ». Thèse de Doctorat, Université de PARIS XI, Orsay, France, 1998.
- [66] I. Podlubny, « Fractional Differential Equations ». Academic Press, New York, 1999.
- [67] B.S. Lee, D.E. Gushee, « Massive Electricity Storage Makes Sense ». Chemical Engineering Progress, 2010.
- [68] S. Buller, E. Karden, D. Kok, R.W. Doncker, « Modeling the dynamic behavior of supercapacitors using impedance spectroscopy ». IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 38, No. 6, November/December 2002.
- [69] D. Riu, N.M. Retière, D. Linzen, « Half-order modelling of supercapacitors », IEEE industry applications conference: 39th IAS annual meeting, pp. 2550-2554, Seattle, 3-7 October 2004.
- [70] E. Kuhn, « Contribution à la conception optimale d'une motorisation hybride parallèle: Choix d'un modèle d'accumulateur ». Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2004.
- [71] R. L. Bagley et P. J. Torvik, « A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity ». Journal of Rheology, 27 :201–210, 1983.
- [72] R. L. Bagley et P. J. Torvik, « On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior ». Journal of Rheology, 30 :133–155, 1986.
- [73] T. Pfitzenreiter, « A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations ». Z. Angew. Math. Mech., 84(4) :284–287, 2004.
- [74] F. Dubois, A.C. Galucio, et N. Point, « Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications ». Techniques de l'Ingénieur AF510, 2010.
- [75] Hélié, D. Matignon, « Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses ». Math. Models Methods Appl. Sci., 16(4) :503–536, 2006.
- [76] A. Khalouta, « Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques. Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat en sciences, Université Ferhat Abbas SETIF 1, 2019.
- [77] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, and Ch. Ceyral, « Fractional differentiation for edge detection ». Signal Processing, 83 :2421–2432, 2003.
- [78] G. Cooper and D. Cowan, « The application of fractional calculus to potential field data ». Exploration geophysics, 34 :51–56, 2003.
- [79] M. García-Finana and L.M. Cruz-Orive, « Fractional trend of the variance in cavalieri sampling ». Image analysis and stereology, 19(2) :71–79, 2000.

- [80] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, and A. Charef, « Un filtre numérique basé sur la dérivation non-entière pour l'analyse du signal électrocardiographique ». ITBM-RBM, 21 :205– 209, 2000.
- [81] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, A. Charef, and B. Boucheham, « R wave detection using fractional digital differentiation ». ITBM-RBM, 24 :273–280, 2003.
- [82] A. Goutas, Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, M. Boudraa, and B. Boucheham, « Digital fractional order differentiation-based algorithm for p and t-waves detection and delineation ». ITBM-RBM, 26 :127–132, 2005.
- [83] I. Ndoye « Généralisation du Lemme Gronwald-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires ». Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré, Nancy 1 et Université Hassan II Aïn Chock, Casablanca(Maroc), 2011.
- [84] Nakib. A., Oulhadj H., YUCEF F., P. Siarry, « Segmentation d'image par dérivation d'ordre non entier ». 1ère Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications, Université de Skikda(Algérie), 2010.
- [85] S.G. Samko, A.A. Kilbas et O.I. Marichev, « Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications ». Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [86] A. Charef, « Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional  $\pi$  controller ». IEE Proceedings-Control Theory and Applications , vol. 153, no. 6, pp. 714–720, 2006.
- [87] I. Podlubny, « Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation ». Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 5, no. 2, pp. 367–386, 2002.
- [88] I. Podlubny, V. Despotovic, T. Skovranek, and B. McNaughton, « Shadows on the walls : Geometric interpretation of fractional integration ». Journal of Online Mathematics and its Applications, vol. 7, pp. Article–ID, 2007.
- [89] R. Cioc, « Physical and geometrical interpretation of grünwald-letnikov differintegrals : measurement of path and acceleration ». Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 19, no. 1, p. 161, 2016.
- [90] R. Hotzel, « Contribution a la théorie structurelle et la commande des systèmes linéaires fractionnaires ». PhD thesis, Paris 11, 1998.
- [91] A.J. Calderon, B.M. Vinagre, V. Feliu, « Fractional order control strategies for power electronic buck converters ». Signal Processing, Vol. 86, pp. 2803-2819, 2006.
- [92] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petras, « Fractional order systems: Modeling and control applications ». World scientific, 2010.

- [93] AO. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, « Fractional order-Systems: and Controls : Fundamentals and Applications ». Springer-Verlag, London, 2010.
- [94] S. Guermah « Commande CRONE, Application à un procédé pilote de laboratoire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou(Algerie), 2011.
- [95] B. Vinagre, « Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones íntegro-diferenciales de orden fraccional ». PhD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2001.
- [96] D. Boudjehem, M. Sedraoui, and B. Boudjehem, « A fractional model for robust fractional order smith predictor ». *Nonlinear Dynamics*, vol. 73, no. 3, pp. 1557–1563, 2013.
- [97] D. Boudjehem and B. Boudjehem, « A fractional model predictive control for fractional order systems ». In *Fractional dynamics and control*, pp. 59–71, Springer, 2012.
- [98] P. Nazarian and M. Haeri, « Generalization of order distribution concept use in the fractional order system identification ». *Signal processing*, vol. 90, no. 7, pp. 2243–2252, 2010.
- [99] A. Narang, S. L. Shah, and T. Chen, « Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays ». *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 7, pp. 900–912, 2011.
- [100] A. Maachou, R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, and B. Hay, « Thermal system identification using fractional models for high temperature levels around different operating points ». *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 2, pp. 941–950, 2012.
- [101] J.-D. Gabano, T. Poinot, and H. Kanoun, « Identification of a thermal system using continuous linear parameter-varying fractional modelling ». *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 7, pp. 889–899, 2011.
- [102] S. Victor, R. Malti, H. Garnier, and A. Oustaloup, « Parameter and differentiation order estimation in fractional models ». *Automatica*, vol. 49, no. 4, pp. 926–935, 2013.
- [103] A. CHAREF « Analogue Realization of fractional order integrator and differentiator and fractional  $PI \lambda D\mu$  controller ». Original paper. The institution of engineering and technology. IEE proceedings on line 20050019, 2006.
- [104] T. BENSUOICI « Implémentation numérique du retard d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine(Algerie), 2012
- [105] I. Petras, I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcak, and B. M. Vinagre, « Analogue Realization of Fractional Order Controllers ». *Fakulta Berg*, TU Kosice, 2002.

- [106] M. BENMALEK , « Contribution à l'analyse de l'électrocardiogramme (ECG) en utilisant les concepts des opérateurs d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine(Algérie), 2011.
- [107] H. NEZZARI « Contribution à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine(Algérie). 2011.
- [108] A.CHAREF, D. IDIOU « Design of analog variable fractional order differentiator and integrator ». Original paper. Springer science + media B.V 2012. Published online 10 March 2012.
- [109] G.E. Carlson and C.A. Halijak, « Approximation of fractional capacitors  $\left[ \left( \frac{1}{s} \right)^N \right]$  by regular newton process ». IRE Transactions on Circuit Theory, 11(2) :210–213, 1964.
- [110] A. Oustaloup, « La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications », Hermès, Paris, 1995
- [111] J.-C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup et F. Levron, « Modeling and identification of a non-integer order system ». European Control Conference, IEEE, Karlsruhe, Germany, pp. 2453-2458, 1999.
- [112] W. Krajewski, U. Viaro, « A method for the integer-order approximation of fractional-order systems ». Journal of the Franklin Institute 351(1): 555–564, 2014.
- [113] R. Mansouri, M. Bettayeb, S. Djennoune, « Multivariable fractional system approximation with initial conditions using integral state space representation ». Computers and Mathematics with Applications, 59: 1842–1851, 2010.
- [114] X. Moreau, P. Serrier, A. Oustaloup, « La dérivation non entière en isolation vibratoire : application au contrôle global de la suspension de véhicule ». (Equipe CRONE - LAPS - UMR 5131 CNRS - ENSEIRB - Université Bordeaux 1).
- [115] M. Chetoui, « Identification des systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités ». Thèse de Doctorat. Universités de Gabès et Bordeaux(France), 2013.
- [116] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, et A. Oustaloup, « Numerical simulation of fractional systems ». ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, 2003.
- [117] A. Charef, « Modelling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation ». Nonlinear Dynamics, 46:195-210, 2010.

- [118] B. Vinagre, I. Petras, I. Podlubny, Y. Chen, « Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control ». *Nonlinear Dynamics*, 29 :269-279, 2002.
- [119] M.A. Al-Alaoui, « Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule ». *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications*, 41(2): 186–187, 1994.
- [120] D. Tabak, « Digitalization of control systems”, *Computer-Aided Design* 3(2): 13–18, 1971.
- [121] Y.Q. Chen, L. Kevin., L. Moore, « Discretization schemes for fractional- order differentiators and integrators ». *IEEE Trans. On Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3): 363-367,2002.
- [122] S. Ladaci, A. Charef, « On fractional adaptive control ». *Nonlinear Dynamics* 43(4): 365–378, 2006.
- [ 123] D. Mondal, K. Biswas, « Performance study of fractional order integrator using single-component fractional order element ». *IET Circuits Devices & Systems* 5(4): 334–342, 2011.
- [124] Y. Bensafia, K. Khettab, H .Idir, « An Improved Robust Fractionalized PID Controller for a Class of Fractional-Order Systems with Measurement Noise ». *International Journal of Engineering and Intelligent Systems*, DOI: 10.22266/ijies2018.0430.22 , 11, nr. 2, 2018.
- [125] [8] Bensafia .Y, Ladaci .S, Khettab .K, « Using a Fractionalized Integrator for Control Performance Enhancement ». *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2015.
- [126] Y. Bensafia, A. Idir, A. Zemmit, K. Khettab, « Performance Improvement of Aircraft pitch angle using the Fractional Order Adaptive PID Controller ». *Przegląd Elektrotechniczny*, 99, nr. 5, 98-101, 2023
- [127] Y. Bensafia, T.Boukra, K. Khettab, « Fractionalized PID Control in Multi-model Approach: A New Tool for Detection and Diagnosis Faults of DC Motor ». *Przegląd Elektrotechniczny*, 99 (2023),nr. 6, 45-48.
- [128] S. Ladaci., J. Loiseau, A. Charef, « Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants ». *Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics, ICAMEM 2006, Hammamet, Tunisie, 2006.*
- [129] R. DIB, Y. Bensafia, K. Khettab, « "Fractionalization": A new approach for comparing different approximation methods of fractional order systems and disturbances Rejection in PID Control ». *Przegląd Elektrotechniczny*, nr. 7, 227-231, 2023.

- [130] I. BarKana, « Positive realness in discrete-time adaptive control systems ». International Journal of Systems Science, Vol. 17, No. 7, pp. 1001-1006, 1986.
- [131] A. Idir, K. Khettab, & Y. Bensafia, « Design of an Optimally Tuned Fractionalized PID Controller for DC Motor Speed Control Via a Henry Gas Solubility Optimization Algorithm ». Int. J. Intell. Eng. Syst., N 15, 59–70, 2022.

**ملخص** - مؤخرًا، ركزت العديد من الأبحاث على الأنظمة ذات الرتبة الكسرية وطرق تقريبها. لقد ثبتت فعاليتها كأداة مفيدة لتعزيز ديناميكيات الأنظمة من حيث الأداء الزمني والترددية. في هذا العمل، نقترح نهجًا جديدًا لمقارنة بين مختلف طرق تقريب الأنظمة ذات الرتبة الكسرية ورفض التشويش في التحكم بوحدة تحكم PID لمحرك التيار المستمر عن طريق تحويل مشتق الرتبة الصحيحة في النظام الأصلي إلى النظام الكسري. تم تنفيذ التحويل الكسري باستخدام طرق التقريب المعتمدة، ولتحديد أفضل الطرق، يتم مقارنة استجابات النظام الأصلي بتلك النظم الكسرية. توضح أمثلة المحاكاة التوضيحية أن النهج الكسري يعطي القرار الأفضل (الطريقة المختارة)، كأداة جيدة للمقارنة بين مختلف طرق التقريب وتحقيق رفض جيد للتشويش في التحكم بوحدة تحكم PID لمحرك التيار المستمر. يمكن تعميم هذا النهج أيضًا إلى طرق تقريب رقمية أخرى ويمكن استخدامه أيضًا في مجال التحكم بالأنظمة.

**الكلمات المفتاحية** - الأنظمة ذات الرتبة الكسرية، أساليب التقريب، تحليل الأداء، محرك التيار المستمر، رفض التشويش.

**Abstract** - Lately, there has been a significant focus on fractional order systems and their approximation methods in research. These methods have proven to be effective in improving the dynamics of plants in terms of time and frequency performance. This study introduces a new approach for comparing different approximation methods of fractional order systems and their impact on disturbance rejection in PID control of DC motor. The approach involves fractionalizing an integer order derivative operator in the original system. The fractionalized terms are implemented using established approximation methods, and the best method is determined by comparing the responses of the original integer system with those of the fractionalized systems. Simulation examples demonstrate that the fractionalization approach is effective in selecting the best method and provides good disturbance rejection in PID control of DC motor. This approach can be extended to other numerical approximation methods and applied in the field of systems control.

**Keywords** - Fractional order systems, Approximation methods, performances Analysis, DC Motor, disturbance rejection.

**Résumé** - Récemment, de nombreux travaux de recherche se sont concentrés sur les systèmes d'ordre fractionnaire et leurs méthodes d'approximation. Il a été démontré que c'est un outil utile pour améliorer la dynamique des systèmes en termes de performances temporelles et fréquentielles. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle approche pour comparer les différentes méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire et le rejet des perturbations dans le contrôle PID du moteur à courant continu en fractionnant un opérateur dérivé d'ordre entier dans le système d'ordre entier d'origine. La mise en œuvre des termes fractionnés est réalisée au moyen des méthodes d'approximation bien établies et afin de déterminer la meilleure méthode, les réponses du système d'ordre entier d'origine sont comparées à celles des systèmes fractionnés. Des exemples de simulations illustratives montrent que l'approche de fractionnement donne la meilleure décision (méthode sélectionnée), un bon outil pour comparer les différentes méthodes d'approximation et elle permet un bon rejet des perturbations dans le contrôle PID du moteur à courant continu. Cette approche peut également être généralisée à d'autres méthodes d'approximation numérique et peut également être utilisée dans le domaine du contrôle des systèmes.

**Mots-clés** - Systèmes d'ordre fractionnaire, Méthodes d'approximation, Analyse des performances, Moteur à courant continu, rejet des perturbations.