



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et de L'informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs

Présenté par
TOUATI Marwa

Sujet

**Existence des solutions entropiques de problèmes
paraboliques à données L^1**

Soutenu le :2022

Devant le jury :

Mr. Hallal Abdelazize	M.A.A. Univ de M'sila	Président
Mr. Rabah Mecheter	M.C.B. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Dachoucha Nouredine	M.A.A. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le moral durant ces années d'études.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon respectueux professeur et encadrant **Mr : MECHETER Rabah**, pour son orientation, son aide précieuse, ses conseils, ses encouragements.*

Mes remerciements sont adressés aux membres du jury pour m'avoir fait l'honneur de présider et examiner ce travail..

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personnes qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

-A mes parents,,

-A me mari,

-A ma tante et ma grand-mère,

-A mon frère et mes soeurs,

-A tous mes amis et toute ma famille de département

de Mathématiques,

Touati Marwa

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Notation	5
1 Préliminaires et outils de base	11
1.1 Rappels et quelques définitions	11
1.2 Espaces fonctionels	12
1.2.1 Espaces de Lebesgue	12
1.2.2 Inégalités principales	13
1.2.3 Théorèmes de convergence	14
1.3 Espaces de Sobolev	16
1.4 Les injections de Sobolev	17
1.5 La convergence faible et faible étoile (faible-*)	19
1.5.1 La convergence faible	19
1.5.2 La convergence faible étoile (faible-*)	19
2 problème parabolique régulier	20
2.1 Quelques notions et résultats sur les opérateurs	20
2.2 Opérateurs monotones	20
2.3 Opérateurs bornés	21
2.4 Opérateurs hémicontinus	21
2.5 L'opérateur p-Laplacien	22
2.6 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien	22
2.7 Opérateurs pseudo-monotones	25
2.8 L'espace $L^p(0, T; V)$	27
2.9 Théorie des opérateurs monotones	29

2.9.1	Résultat général	29
3	Problème parabolique irrégulier	30
3.1	Introduction	30
3.2	Positions du problème	30
3.2.1	Solution faible	30
3.2.2	Pourquoi la condition $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$	31
3.3	Solutions entropiques	32
3.4	Approximation de (P)	34
3.5	Estimations uniformes	35
3.6	passage à la limite	37
3.6.1	Existence d'une solution entropique	42
	Abstract	49

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

\mathcal{H}	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X .
$L^p(0, T; V)$	$\doteq \left\{ v : [0, T] \rightarrow V \text{ mesurable et } \int_0^T \ v\ _V^p dt < \infty, \right\}$.
\mathbb{R}^N	espace euclidien de dimension N , N un nombre naturel non nul
x	vecteur de \mathbb{R}^N , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
dx	mesure de Lebesgue N -dimensionnelle
$ E $	ou $\text{mes}(E)$ mesure de Lebesgue d'un ensemble E
χ_E	fonction caractéristique de E
Ω	partie ouverte de \mathbb{R}^N
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité entre X et son dual
$\int_{\Omega} f(x) dx$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue
$\nabla u = Du$	$\nabla = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ gradient de u
$\text{div } u$	divergence du vecteur u , $\text{div } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N}$
$f_n \rightarrow f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f .
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge faible vers f .
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left(\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right)^{1/p} < +\infty \text{ tel que } 1 \leq p < \infty\}$
$ u _p$	$= \left[\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right]^{1/p} = u _{L^p}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists M > 0 \mid u(x) \leq M \text{ p.p.}\}$
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
q	conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.
p.p.	presque partout

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées et ce domaine devient de plus en plus important à l'époque moderne. Les EDP ont une grande utilité dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes comme la physique, la chimie, la biologie et d'autres sciences. Autrement dit, les EDP interviennent dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations. Ces problèmes se ramènent à des modèles mathématiques écrits en général sous forme

$$L(u) = f, \quad (1)$$

où L est un opérateur défini d'un espace de fonctions E dans un espace fonctionnel F , u est la fonction inconnue et f une fonction donnée. Les EDP sont probablement apparues pour la première fois au cours du 17^{ème} siècle. Ensuite le domaine des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. Cependant, l'étude systématique des EDP est bien plus récente et c'est seulement au cours du 20^{ème} siècle que les mathématiciens ont commencé à développer et en effet cette théorie a connu récemment un très grand avancement théorique et pratique. L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité). L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est de poser la question : pouvons-nous obtenir des solutions explicitement ? Alors ce que les mathématiques peuvent faire par

contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions. Donc, généralement une solution exacte du problème (1) n'est pas facile à trouver et parfois nous ne pouvons même pas trouver la solution explicite. Ce qui conduit à introduire la notion de la solution faible qui apparue en 1934 dans les travaux de Jean Leray.

Par conséquent, dans la plupart des cas il est très difficile, voir impossible, d'exhiber les solutions d'une EDP. Dans certains cas nous arrivons à essayer de montrer que le problème admet une unique solution (on dit qu'il est bien posé). Mais nous pouvons parfois calculer des approximations numériques des solutions.

Par ailleurs, le travail présenté dans ce mémoire concerne un cas particulier des équations aux dérivées partielles du type parabolique faisant intervenir l'opérateur divergentiel

$$Au = -\operatorname{div}(a(x, t, \nabla u))$$

où $a = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ une fonction de Carathéodory, vérifie certaines hypothèses.

Nous intéressons dans ce mémoire d'étudier le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec $N > 2$, nous supposons que $f \in L^1(Q_T)$

Nous illustrons tout d'abord les difficultés principales qui peuvent apparaître lors de l'étude du problème (P)

- 1) la non linéarité de l'opérateur différentiel $A(u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$
- 2) L'irrégularité dans le cas où $f \in L^1(Q_T)$; c'est à dire le second membre du problème (P) n'appartient pas à l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Technique

Nous allons prouver l'existence de la solution entropique du problème (P). Pour ce faire, nous allons approximer le problème (P) par une suite de problèmes approchées (P_n) à

donnée dans L^∞ dont l'existence de la solution approchée est garanti par le Théorème 2.7. Puis nous allons prouver quelques estimations uniformes sur la suite des solutions de ces problèmes (P_n) et leurs dérivées partielles. Une fois cela accompli, la linéarité de l'opérateur par rapport au gradient ainsi que la bornitude et la continuité de a permettront de passer à la limite, trouvant ainsi la solution.

Plan du mémoire

Ce mémoire est décomposé en trois chapitres de la manière suivante : Le premier chapitre est dédié à donner quelques définitions et résultats de base avec des outils d'analyse fonctionnelle essentiels à l'atteinte des objectifs visés pour l'étude du problème (P) . Par exemple nous faisons un rappel à des espaces fonctionnels (Lebesgue, Sobolev) et nous donnons de brefs rappels de la convergence faible et faible étoile.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques définitions sur les opérateurs (Borné, hémicontinu, Monotone et coercitive) . nous présentons aussi la méthode des opérateurs monotones (pseudo-monotone) dans le cadre général pour prouver l'existence d'une solution pour l'équation

$$Au = f.$$

Suivant des hypothèses sur les fonctions $a = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ et f ($f \in W^{-1,p'}(\Omega)$) et pour prouver l'existence et la régularité de la solution nous utilisons le Théorème 2.6.

Le troisième chapitre nous fournissons la notion de la solution d'entropique est consacré à montrer que le problème (P) admet au moins une solution entropique dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$, de plus si $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$, $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}[$.

Pour surmonter cette difficulté, A. Prignet est introduit dans [7] le sens de la solution d'entropique dans laquelle nous allons étudier notre problème. L'idée consiste à considérer la troncature $T_k(u)$ de la solution u et à travailler avec la dérivée $\nabla T_k(u)$ au lieu de ∇u .

Ce mémoire s'appui essentiellement sur l'article [7] " Existence and uniqueness of "en-

tropy" solutions of parabolic problems with L^1 data, Non lin. Anal. TMA 28 (1997), 1943-1954". (cas particulier à prendre L'opérateur principale $Au = \Delta_p$).

Préliminaires et outils de base

Ce chapitre est consacré à introduire les notions nécessaires et quelques outils d'analyse fonctionnelle (définitions, théorèmes, résultats...) qui seront utilisés dans les différents chapitres de ce mémoire, et qui sont en relation avec le problème (P)

1.1 Rappels et quelques définitions

Dans tout ce qui suit Ω désignera un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, i.e. un ouvert connexe et borné de \mathbb{R}^N . Sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\bar{\Omega}$.

Soit $u = u(x_1, \dots, x_N)$ une fonction définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En supposant qu'il exist, on appelle gradient de u au point x le vecteur

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right)$$

La norme euclidienne de ∇u est notée par $|\nabla u|$:

$$|\nabla u| = \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^2 \right]^{1/2}$$

Définition 1.1. (Espace des fonctions tests). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables (de classe $C^\infty(\Omega)$) et à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle une fonction-test.

- $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$,
- $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Définition 1.2. (Espace séparable). On dit qu'un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E .

Définition 1.3. (Espaces Duals). *Le dual topologique d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbb{K} , ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E , c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans \mathbb{K} . On note cet ensemble par $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|u\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |u(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |u(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|}$$

Proposition 1.1. 1. $E_1 \subset E_2$ alors $E_2' \subset E_1'$,

2. $\langle u, x \rangle_{E'E} \leq \|u\|_{E'} \|x\|_E$.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Espaces de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et p un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire. De plus si $p = +\infty$ on a :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Remarque 1.1. soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p

$$i.e. \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Soit $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^{p'}(\Omega)$.

1.2.2 Inégalités principales

Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ deux réels et p' l'exposant conjugué de p .

Lemme 1.1 (Inégalité de Hölder). *Si $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

En particulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq q < \infty$$

Lemme 1.2. *Soient $p_i \in [1, +\infty]$ des exposants avec $1 \leq i \leq k$ tels que :*

$1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1$. Alors, pour toutes fonctions $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons $f = f_1 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder généralisée

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} \dots \|f\|_{p_k}.$$

Lemme 1.3 (Inégalité de Young). *Soient a et b deux réels positifs, alors on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \text{avec } p' = \frac{p}{p-1}. \quad (1.1)$$

Corollaire 1.1.

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^{p'}, \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lemme 1.4 (Inégalité d'interpolation). *Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$,*

Pour tout $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{avec } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$.

Théorème 1.1. *L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.2 (Fisher-Riesz). L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Lemme 1.5 (Formule de la divergence et de Green). Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^N , et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières, w un champ de vecteurs définis sur Ω . Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n \, d\sigma \quad (\text{formule de la divergence})$$

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma \quad (\text{formule de Green})$$

1.2.3 Théorèmes de convergence

dans cette section, nous présentons quelques définitions et les résultats sur la convergence des suites de fonctions mesurables

Définition 1.4. Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω et u une fonction mesurable sur Ω

— La suite (u_n) converge presque partout sur Ω vers u si et seulement si

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : u_n(x) \text{ ne converge pas vers } u(x)\} = 0,$$

— La suite (u_n) est dite Cauchy en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$ et chaque $\eta > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$, alors

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |u_n(x) - u_m(x)| > \eta\} \leq \varepsilon$$

Lemme 1.6. [8] Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R}^N . Si (u_n) de Cauchy en mesure alors il existe une sous-suite de (u_n) convergeant presque partout

Lemme 1.7. [6] Soit f une fonction mesurable strictement positive. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \subset \Omega$ mesurable on ait

$$\int_A f \, dx < \delta \Rightarrow \operatorname{meas}(A) < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Lemme 1.8. (Fatou) Soit f_n une fonction dans $L^1(E)$, telle que

1) $f_n \geq 0$ p.p dans E

2) $\int_E f_n dx \leq +\infty \forall n \in \mathbb{N}$ Soit $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ pour presque partout $x \in E$

Alors :

$$\int_E f dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

Théorème 1.3. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[6] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

(a) $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ p.p. Sur Ω .

(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Théorème 1.4 (Giuseppe Vitali[3]). soit $p \in [1, \infty[$ et (f_n) une suite des fonctions dans $L^p(\Omega)$ tels que

— $f_n \rightarrow f$ p.p. dans Ω

— (f_n) equi-integrable in Ω , i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset \Omega$ avec $|E| \leq \delta$, telle que

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou

$$\limsup_{|E| \rightarrow 0} \int_E |f_n(x)|^p dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ and } f_n \rightarrow f \text{ in } L^p(\Omega) \text{ fortement.}$$

Pour plus de détails sur les espaces de Lebesgue,¹ consulter[2]

Lemme 1.9 (J.Simon[11]). Soient $X \subset B \subset Y$ trois espaces de Banach tels que l'injection de X dans B soit compacte. Si

1. Henri Léon Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration

- F est borné dans $L^p(0, T; X)$ avec $(1 \leq p < \infty)$, et
- $F_t = \partial_t F$ est borné dans $L^1(0, T; Y)$,

Alors, F est relativement compacte dans $L^p(0, T; B)$.

Lemme 1.10 ([1]). soit (u_n) une suite dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$.

Suppose que

- (u_n) est bornée dans $L^p(\Omega)$;
- $u_n \rightarrow u$ p.p. sur Ω .

Alors $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$, pour tous $1 \leq q < p$ et faiblement dans $L^p(\Omega)$, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n v dx = \int_{\Omega} u v dx, \text{ pour tous } v \in L^{p'}(\Omega)$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.5. pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev² $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_p + \| \nabla u \|_p \tag{1.3}$$

et pour $p = \infty$

$$\| u \|_{W^{1,\infty}} = \max(\| u \|_{L^\infty}, \| \nabla u \|_{L^\infty}).$$

Définition 1.6. L'espace $D(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , on note pour $1 \leq p < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

comme pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $D(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $D'(\Omega)$. On note :

$$W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

2. Serguei Lvovitch Sobolev (1908-1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique.

Dans le cas particulier ou $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$, $W^{-1,2}(\Omega)$, sont respectivement notés $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$

L'espace H^1 est un espace de Hilbert³ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

est une norme équivalente à celle de $W^{1,2}(\Omega)$

La proposition suivante représente les propriétés fondamentales des espaces $W^{1,p}$, $W_0^{1,p}$ pour la preuve nous renvoyons le lecteur à la référence [2].

Proposition 1.2. — L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

- L'espace $W^{1,p}$ est un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$.
- L'espace $W^{1,p}$ est un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.
- L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable. De plus réflexif pour $1 < p < \infty$.
- L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.4 Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes L^p . Ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des EDP qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.5 (Théorème de compacité). Soit Ω un ouvert borné de avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

3. David Hilbert (1862-1943) est un mathématicien allemand. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du xxe siècle.

Théorème 1.6 (Injection continue). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N soit égal \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$.

— Si $1 \leq p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{Np}{N-p} > p$. Et l'injection est continue i.e $\exists C \geq 0$ (ne dépendant que de p, N et) telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

— Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}$. Où pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}$ est l'ensemble des fonctions holdériennes d'exposant α , défini par

$$C^{0,\alpha} = \{u \in C(\Omega, \mathbb{R}) / \exists K \geq 0, \quad |u(x) - u(y)| \leq K \|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2\}$$

— Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \geq 1$

Théorème 1.7 ([2]). [Rellich-Kondrachov] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$.

Si $p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^* [$.

Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty [$.

Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega),$ pour $0 \leq \gamma \leq 1 - \frac{N}{p}$

toutes ces injections sont compactes.

Lemme 1.11 (Inégalité de Poincaré). Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante C dépend de p telle que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.4}$$

De plus, par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité (1.4) reste vraie pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.2. Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).

1.5 La convergence faible et faible étoile (faible-*)

1.5.1 La convergence faible

Définition 1.7. Soit E un espace de Banach, E' son dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité sur EE' .

On dit que la suite (x_n) de E converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\langle f, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in E'.$$

On note

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{dans } E.$$

Proposition 1.3. — si $x_n \rightarrow x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ dans E .

— si $x_n \rightharpoonup x$ dans E alors $\|x_n\|_E$ est bornée .

—

$$\begin{cases} \text{Si } x_n \rightharpoonup x, \text{ faiblement dans } E \\ \text{Et } f_n \rightarrow f \text{ fortement dans } E' \end{cases}$$

alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 1.8. Soit E un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n)_n \subset E$ on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ qui converge faiblement dans E .

1.5.2 La convergence faible étoile (faible-*)

Définition 1.8. On dit que la suite (f_n) de E' converge faible* vers $f \in E'$ si et seulement si :

$$\langle f_n, g \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle f, g \rangle, \quad \forall g \in E$$

on note

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{dans } E'.$$

Proposition 1.4.

$$f_n \rightarrow f \text{ fortement} \implies f_n \rightharpoonup f \text{ dans } E'$$

Pour plus de détails, vous pouvez consulter le livre [2].

problème parabolique régulier

Nous consacrons ce chapitre à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation parabolique non linéaire du type suivant

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq \Omega]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Pour $T > 0$ un nombre réel et Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N et $f \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. L'opérateur A défini par $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ avec $1 < p < \infty$

2.1 Quelques notions et résultats sur les opérateurs

2.2 Opérateurs monotones

V désigne un espace de banach réel, V' son dual topologique de V

Définition 2.1. *Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dit :*

- *monotone si $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in V$*
- *strictement monotone si $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \forall u, v \in V, u \neq v$*

Exemple 2.1. *L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par $Au = -\Delta u$ est monotone, $H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme du gradient. En effet, pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$,*

on a :

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) \\ &= \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

2.3 Opérateurs bornés

Définition 2.2. Soit V et W deux espaces de banach et soit $A : V \rightarrow W$ un opérateur. On dira que A est borné s'il envoie tout borné de V dans un borné de W ; i.e

$$\forall \rho > 0, \quad \exists C_\rho > 0 : \quad A(B_V(0, \rho)) \subset B_W(0, C_\rho)$$

2.4 Opérateurs hémicontinus

Définition 2.3. Un opérateur $A : V \rightarrow W$ est dit hémicontinu au point u_∞ de V si pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u_∞ , la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement vers Au_∞ dans W . En d'autres termes :

$$\forall v \in V, \quad \forall \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_n \rightarrow 0, \quad A(u_\infty + \lambda_n v) \rightharpoonup Au_\infty$$

faiblement dans W .

Si A est hémicontinu en tout point de V , on dit qu'il est hémicontinu sur V . Dans les espaces réflexifs et pour $W = V'$, et passant du séquentiel au continu, on peut définir l'hémicontinuité sur V en exigeant que :

$$\forall u, v, w \in V \quad \text{l'application} \quad \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w \rangle \in \mathbb{R}$$

est continue.

Exemple 2.2. L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par

$Au = -\Delta u = -\text{div}(\nabla u)$ est hémicontinu. En effet ; soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle A(u + \lambda v), w \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(u + \lambda v) \cdot \nabla w \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w + \lambda \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \\ &= a + b\lambda. \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ est continue.

2.5 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

cet opérateur sous forme divergence lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$; le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel Δ

2.6 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et soit l'opérateur

$$A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow V' = W^{-1,p'}(\Omega)$$

défini par

$$Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

On a d'après la formule de Green on a

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) : \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

Proposition 2.1. *L'opérateur $Au = -\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$*

Démonstration. De l'expression de la norme dans un espace dual, soit $\rho > 0$, pour $u \in B_V(0, \rho)$, on peut écrire :

$$\| Au \|_{V'} = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \right|.$$

Mais

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \right| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|u\|_V^{p-1} \|\varphi\|_V \\
 &\leq \rho^{p-1}
 \end{aligned}$$

D'où $\|Au\|_{V'} \leq \rho^{p-1}$. Cela montre que $A(B_V(0, \rho)) \subset B_{V'}(0, \rho^{p-1})$

□

Proposition 2.2. *l'opérateur A est hémicontinu de V dans V' .*

Démonstration. Soit $v \in V$, et $\{\lambda_n\}$ une suite réelle qui converge vers 0

$$\forall g \in V, \quad \langle A(u_{\infty} + \lambda_n v), g \rangle \rightarrow \langle Au_{\infty}, g \rangle$$

on a

$$\langle Au_{\infty}, g \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_{\infty}|^{p-2} \nabla u_{\infty} \cdot \nabla g$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \langle A(u_{\infty} + \lambda_n v), g \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla(u_{\infty} + \lambda_n v)|^{p-2} \nabla(u_{\infty} + \lambda_n v) \cdot \nabla g \\
 &= \int_{\Omega} |(\nabla u_{\infty} + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_{\infty} + \lambda_n \nabla v) \cdot \nabla g
 \end{aligned}$$

$$1. \quad |\nabla(u_{\infty} + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_{\infty} + \lambda_n \nabla v) \cdot \nabla g \xrightarrow{p \cdot p} |\nabla u_{\infty}|^{p-2} (\nabla u_{\infty}) \cdot \nabla g$$

on peut mettre $|\lambda_n| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}
 \left| |\nabla(u_{\infty} + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_{\infty} + \lambda_n \nabla v) \cdot \nabla g \right| &= |\nabla(u_{\infty} + \lambda_n \nabla v)|^{p-1} |\nabla g| \\
 &\leq \left[|\nabla u_{\infty}| + |\lambda_n| |\nabla v| \right]^{p-1} |\nabla g| \\
 &\leq \left[|\nabla u_{\infty}| + |\nabla v| \right]^{p-1} |\nabla g|
 \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^\alpha \leq \max\{1, N^{\alpha-1}\} \sum_{i=1}^N a_i^\alpha, \quad \forall a_i \geq 0, \alpha > 0 \quad (2.1)$$

En utilisant l'inégalité de Young (1.3) et (2.1), on écrit

$$\begin{aligned} \left| |\nabla(u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2} (\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v) \nabla g \right| &\leq \frac{|\nabla g|^p}{p} + \frac{\left[|\nabla u_\infty + |\nabla v|| \right]^p}{p'} \\ &\leq \frac{1}{p} |\nabla g|^p + \frac{\max(1, 2^{p-1})}{p'} \left(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p \right). \end{aligned}$$

Le fait que $g, v, u_\infty \in W_0^{1,p}(\Omega)$, implique que

$$\frac{1}{p} |\nabla g|^p + \frac{2^{p-1}}{p'} \left(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p \right) \in L^1(\Omega)$$

D'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A(u_\infty + \lambda_n v), g \rangle = \langle A(u_\infty), g \rangle$$

d'où l'hémicontinuité de A . □

Proposition 2.3. *l'opérateur A est coercitif de V dans V' .*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|_V} &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p}{\|v\|_V} \\ &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\|v\|_V^p}{\|v\|_V} \\ &= \lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \|v\|_V^{p-1} = +\infty \quad \text{car } 1 < p < +\infty. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *l'opérateur A est monotone de V dans V' .*

Démonstration. On rappelle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^N : (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x - y) \geq \alpha|x - y|^p, \alpha > 0$

Alors $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) \nabla(u - v) \\ &\geq \int_{\Omega} \alpha |\nabla u - \nabla v|^p \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

2.7 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 2.4. Un opérateur $A : V \rightarrow V'$

i) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 1) s'il est

— pour tout $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au_n, u - v \rangle, \quad \forall v \in V$$

ii) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 2) s'il est

— pour tout $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible avec $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle \xi, u \rangle$$

on a

$$\xi = A(u) \quad \text{et} \quad \langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$$

Proposition 2.5. Si $A : V \rightarrow V'$ est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone (au sens 1).

Démonstration. a) Soit $\{u_j\}$ une suite convergeant faiblement vers u dans V . Supposons que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \leq 0$$

Si A est monotone, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

En effet, la monotonie de A et la convergence faible de $\{u_j\}$ vers u implique que

$$\langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \langle Au, u_j - u \rangle \rightarrow 0 \quad \text{pour } j \rightarrow \infty$$

Et donc

$$0 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - u \rangle \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \langle Au, u_j - u \rangle = 0$$

D'où (2.2)

b) pour $v \in V$ et $t \in]0, 1[$, posons $w = (1-t)u + tv$. On a $\langle Au_j - Aw, u_j - w \rangle$ de sorte que :

$$t \langle Au_j, u - v \rangle \geq -\langle Au_j, u_j - u \rangle + \langle Aw, u_j - u \rangle - t \langle Aw, v - u \rangle.$$

D'où, grâce à (2.2) :

$$t \liminf_j \langle Au_j, u - v \rangle \geq -t \langle Aw, v - u \rangle,$$

d'où, en divisant par t et tenant compte de (2.2) :

$$\liminf_j \langle Au_j, u_j - v \rangle \geq \langle Aw, u - v \rangle \quad (2.3)$$

$$w = (1-t)u + tv \quad \forall t \in]0, 1[$$

En faisant tendre t vers 0 dans (2.3), et en utilisant l'hémi-continuité, on déduit

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle Au_j, u_j - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle, \quad \forall v \in V$$

Ce qui signifie que A est pseudo-monotone au sens 1. □

2.8 L'espace $L^p(0, T; V)$

Soit $1 \leq p < \infty$, $L^p(a, b; V)$ est un espace des fonctions mesurables $u : [a, b] \rightarrow V$ tel que

$$\| u \|_{L^p(a,b;V)} = \left(\int_a^b \| u \|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Alors que $L^\infty(a, b; V)$ est un espace des fonctions mesurables telles que :

$$\| u \|_{L^\infty(a,b;V)} = \sup_{[a,b]} \| u \|_V < \infty.$$

Rappelons que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(a, b; V)$ est un espace de Banach. De plus, si $1 \leq p < +\infty$ et V' l'espace dual de V est séparable alors l'espace dual de $L^p(a, b; V)$ peut être identifié avec $L^{p'}(a, b; V')$

pour notre but V sera principalement soit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ ou l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$ et Ω sera un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^N . puisque, dans ce cas, V est séparable, nous avons que $L^p(a, b; L^p(\Omega)) = L^p((a, b)\Omega)$, l'espace ordinaire de Lebesgue défini dans $(a, b)\Omega$ et $L^p(a, b; W_0^{1,p}(\Omega))$ se compose de toutes les fonctions $u : [a, b]\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui appartiennent à $L^p((a, b)\Omega)$ et de telle sorte que $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$ appartient à $L^p((a, b)\Omega)^N$ de plus

$$\left(\int_a^b \int_\Omega | \nabla u |^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme équivalente par l'inégalité de Poincaré.

Pour $a = 0, b = T$ on définit l'espace suivant

$$L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \doteq \left\{ v : [0, T] \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ mesurable} \right. \\ \left. \int_0^T \| v \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt < \infty, \right\},$$

la norme dans cet espace donné par

$$\| v \| = \left(\int_0^T \| v \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^T \int_\Omega | \nabla v |^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions mesurables telles que :

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} = \sup_{[0, T]} \|u\|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Théorème 2.1 (Densité). *Pour tout $1 \leq p < +\infty$ l'espace $\mathcal{C}([0, T]; V)$ est dense dans $L^p(0, T; V)$.*

Démonstration. : Voir [13, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.2 (Séparabilité). *Si V est séparable alors pour tout $1 \leq p < +\infty$ l'espace $L^p(0, T; V)$ est séparable.*

Démonstration. : Voir [13, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.3. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace $L^p(0, T; V)$ est de Banach.*

Démonstration. : Voir [10, Satz 1.22., p. 39], [13, Proposition 23.2, p. 407]. □

Théorème 2.4. *Si V s'injecte continûment dans un espace de Banach W , $p, r \in [1, +\infty]$, $p \leq r$, alors $L^r(0, T; V)$ s'injecte continûment dans $L^p(0, T; W)$.*

Démonstration. : Voir [4, Proposition 2.2.5., p. 128]. □

Définition 2.5. *Soient $V \subset W$ (avec injection continue) deux espaces de Banach, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Nous disons qu'une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ a une dérivée faible dans $L^q(0, T; W)$ s'il existe une fonction $g \in L^q(0, T; W)$ telle que*

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = - \int_0^T \varphi(t)g(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

(Cette égalité a lieu en W). Si une telle fonction g existe, il est unique et nous notons

$$\frac{du}{dt} = g.$$

Théorème 2.5 (Inégalité de Hölder). *Si $u \in L^p(0, T; V)$ et $v \in L^{p'}(0, T; V')$, alors*

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle|_{V', V} dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V'}^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Voir [13, Proposition 23.6., p. 411]. □

2.9 Théorie des opérateurs monotones

2.9.1 Résultat général

Soient V un espace de Banach réflexif et séparable et $A : V \rightarrow V'$ un opérateur

Théorème 2.6 (Théorème d'Existence). *On suppose que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur*

- borné
- hémicontinu
- coercitif, au sens que

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

- monotone

Soient f et u_0 donnés avec

$$f \in L^p(0, T; V'), \quad u_0 \in H \quad (\text{espace de Hilbert})$$

Alors, il existe une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ et une seule telle que

$$\partial_t u + Au = f \quad \text{et} \quad u(0, x) = u_0(x)$$

Pour la preuve de ce théorème, on peut renvoyer le lecteur au livre [5]

Théorème 2.7. *Soient $f \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Alors le problème (P_0) possède une seule solution $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, pour tout $1 < p \leq +\infty$.*

Démonstration. D'après les propositions précédentes, on a l'opérateur principale $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ et pseudo-monotone c'est à dire borné, hémicontinu, monotone et coercitif, alors d'après le Théorème 2.6 le problème (P_0) possède une seule solution solution $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, pour tout $1 < p \leq +\infty$. \square

Problème parabolique irrégulier

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons approcher le problème (P) par une suite de problèmes (P_n) , puis nous montrerons de manière détaillée que la preuve de tous les résultats d'existence sera obtenue par une approximation. Autrement dit, il faut obtenir des estimations uniformes pour pouvoir passer à la limite dans le problème approché. Et la limite obtenue sera la solution du problème (P) .

3.2 Positions du problème

Nous supposons que T un nombre réel positif, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et (P) est posé dans un cylindre $Q =]0, T[\Omega$ du type suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Nous supposons que $u_0 \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$, et le nombre réel $p > 1$

3.2.1 Solution faible

Définition 3.1 (Solution faible). *On dit que u est une solution faible du problème (P)*

si : $u \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$ et

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx dt = \int_{Q_T} f \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[\Omega). \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle dt = - \int_{Q_T} u_n \partial_t \varphi dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0, x) u_0(x) dx.$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[\Omega)$

Théorème 3.1. [9] Soit $1 + \frac{N}{N+1} < p$. Alors le problème (P) possède au moins une solution faible $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$. pour tout $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}[$.

3.2.2 Pourquoi la condition $p > 1 + \frac{N}{N+1} = 2 - \frac{1}{N+1}$

Pour justifier la condition $p > 2 - \frac{1}{N+1}$, on se rappelle que la solution (modèle) du problème (elliptique)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \delta & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{U}) \\ u = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{U}, \end{cases}$$

où δ est la mesure de Dirac à l'origine et \mathcal{U} la boule euclidienne unité ouverte de \mathbb{R}^N , est donnée par :

$$u_{mod} = \begin{cases} C(|x|^{\frac{p-N}{p-1}} - 1) & \text{si } p \neq N; \\ C \log |x| & \text{si } p = N; \end{cases}$$

dans le cas $p \neq N$, on a

$$|\nabla u_{mod}| = C_1 |x|^{\frac{p-N}{p-1}-1} = C_1 |x|^{\frac{1-N}{p-1}}$$

de sorte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{mod}| dx &= C_1 \int_{B(0,1)} |x|^{\frac{1-N}{p-1}} dx \\ &= C_2 \int_0^1 r^{\frac{1-N}{p-1}} r^{N-1} dr \\ &= C_2 \int_0^1 r^{\frac{1-N}{p-1} + N-1} dr \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si $\frac{1-N}{p-1} + N - 1 > -1$, donc, si $p > 2 - \frac{1}{N}$. Ce calcul montre que :

$$u_{mod} \text{ n'est dans } W_0^{1,1}(B(0,1)) \text{ que si } p > 2 - \frac{1}{N}.$$

Alors

$$u_{mod} \in W_0^{1,1}(\Omega) \Leftrightarrow p > 2 - \frac{1}{N}.$$

Donc (dans le cas parabolique)

$$u_{\text{mod}} \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \Leftrightarrow p > 2 - \frac{1}{N+1}.$$

3.3 Solutions entropiques

Lemme 3.1 (Stampacchia). *Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction globalement lipschitzienne, i.e.*

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad |T(s) - T(t)| \leq C|s - t|, \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

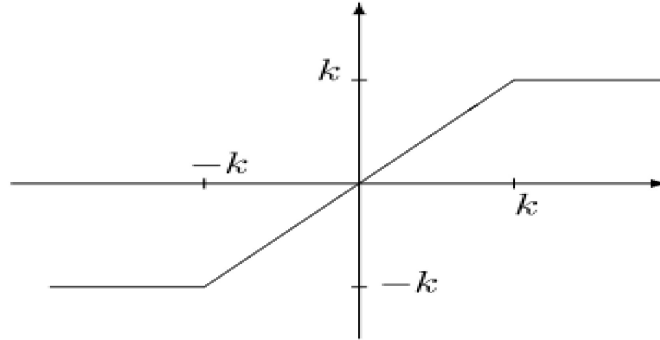
telle que $T(0) = 0$. Alors, $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ on a :

$$T(v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T(v) = T'(v)\nabla v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad p.p \quad \text{dans} \quad \Omega$$

Définition 3.2 (La Troncature). *a Soit $k > 0$. On appelle troncature aux niveaux $-k$ et k la fonction T_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par*

$$T_k(r) = \begin{cases} k, & \text{si } r \geq k, \\ r, & \text{si } |r| < k, \\ -k, & \text{si } r \leq -k. \end{cases}$$

On peut vérifier que la fonction T_k est une fonction globalement lipschitzienne satisfaisant



$|T_k(r)| \leq k$ et $|T_k(r)| \leq |r|$ et sa primitive $\Theta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ défini par :

$$\Theta_k(r) = \int_0^r T_k(t) dt = \begin{cases} \frac{r^2}{2}, & \text{si } |r| \leq k \\ k|r| - \frac{k^2}{2}, & \text{si } |r| > k \end{cases}$$

Nous utiliserons par la suite le résultat suivant

$$\int_0^T \langle \partial_t v, T_k(v) \rangle dt = \int_{\Omega} \Theta_k(v(T)) - \int_{\Omega} \Theta_k(v(0)). \quad (3.2)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente la dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme cette fonction est lipschitzienne, le théorème de Stampacchia affirme que pour u une fonction $W^{1,p}(\Omega)$ avec $p \geq 1$, on a $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\nabla T_k(u) = T'_k(u) \nabla u = \mathbf{1}_{\{|u| < k\}} \nabla u$$

Définition 3.3 (Solution entropique). Pour $f \in L^1(Q_T)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. On appelle solution entropique de (P) une fonction $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ telle que pour $k > 0$, on ait $T_k(u) \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ et qui vérifie

$$\int_0^T \langle \partial_t u, T_k(u - \varphi) \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx dt \leq \int_{Q_T} f T_k(u - \varphi), \quad (3.3)$$

pour tout $k > 0$ et $\varphi \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ tel que $\partial_t \varphi \in L^{p'}(0, T, (W_0^{1,p}(\Omega))')$.

Remarque 3.2. 1-D'après l'inégalité (3.2), on a

$$\int_0^T \langle \partial_t u, T_k(u - \varphi) \rangle dt = \int_\Omega \Theta_k(u - \varphi)(T) dx - \int_\Omega \Theta_k(u - \varphi)(0) dx + \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u - \varphi) \rangle dt.$$

2- Nous observons que chaque terme dans (3.3) est bien défini, il est claire pour le côté droit (car $f \in L^1(Q_T)$ et T_k est bornée). Alors que pour le côté gauche, nous avons

$$\int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx dt = \int_{Q_T} |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi) dx dt$$

où $M = k + \|\varphi\|_{L^\infty}$. En effet

comme $\varphi \in L^\infty(Q_T)$

$$\begin{aligned} |u - \varphi| < k &\implies |u| - |\varphi| < |u - \varphi| < k \\ &\implies |u| < |\varphi| + k \\ &\implies |u| < \|\varphi\|_{L^\infty} + k \\ &\implies |u| < k \end{aligned}$$

Ce qui est implique $\{|u - \varphi| < k\} \subset \{|u| < k\}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx dt &= \int_{\{|u - \varphi| < k\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(u - \varphi) dx dt \\ &= \int_{\{|u - \varphi| < k\}} |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u), \nabla(u - \varphi) dx dt \\ &= \int_{Q_T} |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi) dx dt. \end{aligned}$$

Le résultat que nous prouvons ici est le théorème suivant

Théorème 3.2. Soient Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N , $f \in L^1(Q_T)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$, alors le problème (P) admet au moins une solution entropique. De plus si $p > 2 - \frac{1}{N+1}$ alors $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}[$

La preuve de ce théorème exige plusieurs étapes : approximation du problème (P) par une suite de problèmes (P_n) qu'on sait résoudre, estimations uniformes des solutions approchées (u_n) et enfin, passage à la limite.

3.4 Approximation de (P)

Soit (f_n) avec $f_n = T_n(f)$ une suite de $L^\infty(Q)$ qui converge vers f dans $L^1(Q)$ et qui vérifie l'inégalité

$$\begin{cases} \|f_n\|_{L^1(Q)} \leq \|f\|_{L^1(Q)}, \\ |f_n| \leq n. \end{cases}$$

Soit (u_{0n}) avec $u_{0n} = T_n(u_0)$ une suite de $L^\infty(\Omega)$ qui converge vers u_0 dans $L^1(\Omega)$ et qui vérifie l'inégalité

$$\begin{cases} \|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \\ |u_{0n}| \leq n. \end{cases}$$

où T_n la troncature au niveau $-n$ and n (Voir la définition 3.2). Nous approchons le problème (P) par la suite de problèmes :

$$(P_n) \quad \begin{cases} \partial_t u_n + A u_n &= f_n \text{ sur } Q_T \doteq]0, T[\Omega; \\ u_n(0, x) &= u_{0n}(x) \text{ dans } \Omega; \\ u_n &= 0 \text{ sur } \Gamma_T \doteq]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

Pour l'existence de la suite des solutions u_n . pour tout $1 < p \leq +\infty$ de problème (P_n) , voir le théorème 2.7 dans le chapitre 2.

c'est à dire que l'on a

$$u_n \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \partial_t u_n \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)),$$

et que u_n vérifie

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx dt = \int_{Q_T} f_n \varphi. \quad (3.4)$$

pour tout $\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

3.5 Estimations uniformes

Dans cette section, nous prouvons des estimations uniformes pour les solutions du problème (P_n) . Nous devons choisir comme fonction test

$$\varphi \quad \text{une fonction de } u_n \text{ telle que} \quad \|\varphi(u_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \forall n \geq 1 \quad \text{avec} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Pour choisir les fonctions tests nous utilisons le résultat dans le lemme de stampacchia [3.1](#)

Lemme 3.2. *[9] Soient p et q tels que*

$$p > 1 + \frac{N}{N+1} \quad \text{et} \quad q \in \left[1, p - \frac{N}{N+1}\right[$$

Alors,

— la suite (u_n) des solutions approchées de problème (P_n) reste dans un borné de $L^\infty(0, T, L^1(\Omega))$.

— la suite (∇u_n) reste dans un borné de $L^q(Q)$.i.e

il existe une constante $C = C(q) > 0$ telle que :

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q \, dx dt \leq C$$

Lemme 3.3. *Soit*

$$1 + \frac{N}{N+1} < p \leq \infty \quad \text{et} \quad q \in \left[1, p - \frac{N}{N+1}\right[$$

Alors,

$(\partial_t u_n)$ reste dans un borné de $L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega))') + L^1(Q)$ et r' est le conjugué de r .

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\partial_t u_n = \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) + f_n,$$

comme f_n est une suite bornée dans $L^1(Q)$, il nous reste à montrer que

$$v_n = \operatorname{div}(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \subset \left(\text{borné de } L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega))') \text{ avec } r > 1 \right).$$

où r' est le conjugué de r , on a pour $r > 1$, nous écrivons, pour toute fonction $\varphi \in W_0^{1,r'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle v_n, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \varphi A v_n dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Par Hölder, on peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle v_n, \varphi \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla \varphi| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'} &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle v_n, \varphi \rangle| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

En intégrant (3.5) sur $[0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \|v_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'}^r dt &\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx \right)^{\frac{r}{r}} dt \\ &\leq \int_Q |\nabla u_n|^{(p-1)r} dx dt \end{aligned}$$

Le membre de gauche est borné si (∇u_n) est bornée dans $L^{(p-1)r}(Q)$, donc grâce au lemme 3.2, il vient que

$$1 \leq (p-1)r < \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$$

où encore,

$$1/(p-1) \leq r < \frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$$

Avant de terminer, on peut remarquer que l'existence de $r > 1$ est garantit car :

$$\frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right) > 1.$$

Donc, on obtient

$$\int_0^T \|v_n\|_{(W_0^{1,r'}(\Omega))'}^r dt \leq C$$

□

3.6 passage à la limite

Lemme 3.4. *On peut extraire de la suite des solutions approchées (u_n) une sous-suite (notée de même), qui converge vers une fonction $u \in L^1(Q)$ et faiblement dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$, pour tout $q \in [1, (p - \frac{N}{N+1})[$.*

Démonstration. grâce au lemme 3.2, la suite (u_n) est bornée dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q \in [1, (p - \frac{N}{N+1})[$ et nous avons déjà mentionné que $(\partial_t u_n)$ demeure dans un borné de $L^r(0, T; (W_0^{1,r'}(\Omega))') + L^1(Q)$ avec $r < \frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right)$. De plus $L^1(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega)$ pour tout $r < N/(N-1)$ (Voir le Théorème 1.6) et comme $p > 2 - 1/(N+1)$ on a $\frac{1}{(p-1)} \left(p - \frac{N}{N+1} \right) < N/(N-1)$ et on a aussi f_n est borné dans $L^1(Q) = L^1(0, T; L^1(\Omega))$, l'est aussi dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$ pour tout r , donc la suite $(\partial_t u_n)$ reste bornée dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$. Ainsi

- (u_n) est bornée dans $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$
- $(\partial_t u_n)$ est bornée dans $L^1(0, T; W^{-1,r}(\Omega))$

donc, d'après le lemme 1.9, la suite (u_n) est relativement compact dans $L^q(0, T; L^q(\Omega)) \subset L^1(Q)$. Par conséquent, la suite (u_n) est converge fortement vers une fonction $u \in L^1(Q)$, ce qui garantit l'existence d'une sous-suite (u_n) , notée de même, telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1(Q) \text{ et p.p. dans } Q \quad (3.6)$$

□

Lemme 3.5. *La suite (∇u_n) converge presque partout vers ∇u (éventuellement à une sous-suite près).*

Démonstration. Montrons que (∇u_n) est de Cauchy en mesure, ce qui entrainera $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ presque partout, pour une sous suite. Cela consiste à prouver que

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall p, q \geq n_0 \quad \text{meas}\{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |(\nabla u_p - \nabla u_q)(t, x)| \geq \delta\} \leq \varepsilon$$

Pour cela, fixons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, et remarquons que pour $\lambda > 0$ et $\eta > 0$ nous avons

$$\{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |(\nabla u_p - \nabla u_q)(t, x)| \geq \delta\} \subset E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

où

$$E_1 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |\nabla u_p| \geq \lambda\}, \quad E_2 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |\nabla u_q| \geq \lambda\}$$

$$E_3 = \{(t, x) \in (0, T)\Omega \mid |u_p - u_q| \geq \eta\}$$

et

$$E_4 = \{|\nabla u_p - \nabla u_q| \geq \delta, |\nabla u_p| \leq \lambda, |\nabla u_q| \leq \lambda, |u_p - u_q| \leq \eta\}.$$

Et comme la suite (∇u_n) reste dans un borné de $L^q(Q_T)$ pour tout $q \in [1, p - \frac{N}{N+1}]$ [Voir le lemme 3.2], en choisissant λ grand, nous pouvons rendre $\text{meas}(E_1)$ et $\text{meas}(E_2)$ arbitrairement petits. Par exemple

$$\text{meas}(E_1) = \int_{E_1} 1 dx dt = \frac{1}{\lambda} \int_{E_1} \lambda dx dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_{E_1} |\nabla u_p| dx dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_T} |\nabla u_p| dx dt \leq \frac{C}{\lambda}$$

Alors,

$$\text{meas}(E_1) \rightarrow 0 \quad \text{si } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Pour $\text{meas}(E_3)$, on a

$$\text{meas}(E_3) \leq \frac{1}{\eta} \int_{E_3} |u_p - u_q| dx dt \leq \frac{1}{\eta} \int_Q |u_p - u_q| dx dt$$

Puisque (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$ [Voir (3.6)], alors pour $\eta > 0$ fixe, on voit que

$$\text{meas}(E_3) \rightarrow 0 \quad \text{si } p, q \rightarrow +\infty$$

Il reste à contrôler $\text{meas}(E_4)$. D'après la monotonie de la fonction $a(t, x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ (Voir chapitre 2), nous avons $(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) > 0$ or l'ensemble des $\{(\xi_1, \xi_2) \mid |\xi_1| \leq \lambda, |\xi_2| \leq \lambda, |\xi_1 - \xi_2| \leq \delta\}$ est un ensemble compact et a est continue en ξ , donc $(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\mu(t, x)$ tel que

$$(a(t, x, \xi_1) - a(t, x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq \mu(t, x) > 0.$$

Par conséquent, par (1.2) on a pour tout $\tau > 0$ il existe $\tau' > 0$ tel que

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt < \tau' \Rightarrow \text{meas}(E_4) < \tau. \quad (3.7)$$

Pour obtenir $\text{meas}(E_4) < \tau$, il suffit de montrer que $\int_{E_4} \mu(x) dx < \tau'$. Par la définition de $\mu(t, x)$ et E_4 , on peut écrire

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt \leq \int_{E_4} \left(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \right) \nabla(u_p - u_q) \mathbf{1}_{\{|u_p - u_q| \leq \eta\}} dx dt$$

de plus le terme intégral est positif et $\nabla T_\varepsilon(u_p - u_q) = \nabla(u_p - u_q) \mathbf{1}_{\{|u_p - u_q| \leq \eta\}}$, donc nous avons

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt \leq \int_{E_4} \left(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \right) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \quad (3.8)$$

où T_η la troncature au niveau $-\eta$ and η et T'_η définir par

$$T'_\eta(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \leq \eta; \\ 0, & |\sigma| > \eta. \end{cases}$$

En prend $T_\eta(u_p - u_q)$ comme une fonction de test dans (P_n) pour u_p et u_q , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u_p, T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f_n T_\eta(u_p - u_q) \end{aligned} \quad (3.9)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u_q, T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f_n T_\eta(u_p - u_q). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puis soustrayant l'inégalité résultant (3.9) et de (3.10) , on trouve

$$\int_0^T \langle \partial_t(u_p - u_q), T_\eta(u_p - u_q) \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt = 0.$$

Par (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Theta_\eta(u_p - u_q)(T) dx - \int_\Omega \Theta_\eta(u_p - u_q)(0) dx \\ & + \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt = 0. \end{aligned}$$

le premier terme est positif ($\Theta_\eta(x) \geq 0$) et ($\Theta_\eta(x) \leq \eta|x|$), donc

$$\int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \leq \eta \int_\Omega |u_0^p - u_0^q| dx.$$

le fait que $u_0 \in L^1(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p - |\nabla u_q|^{p-2} \nabla u_q) \nabla T_\eta(u_p - u_q) dx dt \\ & \leq C\eta \rightarrow^{\eta \rightarrow 0} 0 \text{ (uniformément dans p and q)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour η assez petit, (3.8) and (3.11) impliquent

$$\int_{E_4} \mu(t, x) dx dt < \tau',$$

et aussi par (3.7) nous avons $mes(E_4) \leq \tau$. Ainsi, nous avons la convergence de ∇u_n vers ∇u en mesure, ainsi que le lemme 1.6 (après extraction d'une sous suite)

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{p.p dans } (0, T)\Omega.$$

□

Par la suite nous avons besoin de la propriété suivante

Propriété 1. *La suite (u_n) est de Cauchy dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$, aussi $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ et u_n converge vers u dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$.*

Démonstration. Soient m et n deux entiers, u_n et u_m vérifient alors (D'après (3.4))

$$\int_0^T \langle \partial_t(u_n - u_m), \varphi \rangle dt + \int_{Q_T} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m] \nabla \varphi = \int_{Q_T} (f_n - f_m) \varphi,$$

Prenons $\varphi = T_1(u_n - u_m) \mathbf{1}_{[0,t]}$, $t \leq T$, c'est claire que $\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ donc

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \partial_t(u_n - u_m), T_1(u_n - u_m) \rangle dt + \int_{Q_t} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m] \nabla T_1(u_n - u_m) \\ &= \int_{Q_t} (f_n - f_m) T_1(u_n - u_m) \leq T \int_{Q_T} |f_n - f_m|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

et rappelons que Θ_1 est la primitive de T_1 , d'où

$$\langle \partial_t(u_n - u_m), T_1(u_n - u_m) \rangle = \left(\int_{\Omega} \Theta_1(u_n - u_m) \right)_t$$

or $u_n \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, donc

$$\int_0^t \langle \partial_t(u_n - u_m), T_1(u_n - u_m) \rangle dt = \int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](t) - \int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](0).$$

de plus $\nabla T_1(u_n - u_m) = \nabla(u_n - u_m) \mathbf{1}_{\|u_n - u_m\| \leq 1}$ aussi

$$\begin{aligned} & \int_{Q_t} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m] \nabla T_1(u_n - u_m) \\ &= \int_{Q_t} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m] \nabla(u_n - u_m) \mathbf{1}_{\|u_n - u_m\| \leq 1} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

grâce à la monotonie de a , si bien que (3.12) conduit à

$$\int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](t) - \int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](0) \leq T \int_{Q_T} |f_n - f_m|,$$

soit

$$\int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](t) \leq \int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](0) + T \int_{Q_T} |f_n - f_m|$$

or $\Theta_1(x) \leq |x|$, donc

$$\int_{\Omega} [\Theta_1(u_n - u_m)](t) \leq \int_{\Omega} |u_n(0) - u_m(0)| + T \int_{Q_T} |f_n - f_m| = a_{n,m}.$$

Aussi, on a

$$\int_{\{|u_n - u_m| < 1\}} \frac{|u_n - u_m|^2}{2}(t) + \int_{\{|u_n - u_m| \geq 1\}} \frac{|u_n - u_m|(t)}{2} \leq \int_{\Omega} \Theta_1(u_n(t) - u_m(t)) \leq a_{n,m}$$

et and

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_n - u_m|(t) &= \int_{\{|u_n - u_m| < 1\}} |u_n - u_m|(t) + \int_{\{|u_n - u_m| \geq 1\}} |u_n - u_m|(t) \\ &\leq \left(\int_{\{|u_n - u_m| < 1\}} |u_n - u_m|^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \text{meas}(\Omega)^{\frac{1}{2}} + 2 a_{n,m} \\ &\leq (2 \text{meas}(\Omega))^{\frac{1}{2}} + a_{n,m}^{\frac{1}{2}} + 2 a_{n,m}. \end{aligned}$$

Comme (f_n) et (u_n) convergent dans L^1 on a $a_{n,m} \rightarrow 0$ pour m et $n \rightarrow \infty$ donc (u_n) est de Cauchy dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$, aussi u dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ et $\forall t \geq T$ on a $u_n(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^1(\Omega)$. Ce qui achève la démonstration de cette propriété. \square

3.6.1 Existence d'une solution entropique

Lemme 3.6. Soient $p > 1$, $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(Q_T)$. Alors

$$\|\nabla T_k(u_n)\|_{L^p(Q_T)} \leq k(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)}),$$

c'est à dire $T_k(u_n) \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$

Démonstration. on choisit $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (P_n) , on obtient

$$\int_0^T \langle \partial_t u, T_k(u_n) \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u_n) dx dt = \int_{Q_T} f_n T_k(u_n) dx dt. \quad (3.14)$$

Par (3.2) on a

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u_n)(T) dx - \int_{\Omega} \Theta_k(u_n)(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^p dx dt \leq \int_{Q_T} f_n T_k(u_n) dx dt.$$

Le fait que $|\Theta_k(x)| \leq k|x|$, on écrit,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Theta_k(u_n)(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^p dx dt &\leq \int_{Q_T} |f_n| |T_k(u_n)| dx dt + \int_{\Omega} |\Theta_k(u_n)(0)| dx \\ &\leq k(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Le premier terme est positif puisque nous avons $\Theta_k \geq 0$, donc après suppression des termes non négatifs, on obtient

$$\int_{Q_T} |\nabla T_k(u_n)|^p dx dt \leq k(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)}).$$

Donc, on a pour tout $k > 0$, $(\nabla T_k(u_n))$ est borné dans $L^p(Q_T)$, alors on peut extraire une sous-suite (u_n) , notée de même, tel que

$$\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{faiblement dans } L^p(Q_T). \quad (3.15)$$

Cela termine la preuve du Lemme 3.6. □

Nous pouvons maintenant montrer que la limite u de la suite (u_n) , définie précédemment, est une solution entropique de (P) , c'est à dire qu'elle vérifie (3.3).

La solution u obtenue au paragraphe précédent, est limite de (u_n) qui vérifie (3.4), c'est a dire,

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, \psi \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} f_n \psi. \quad (3.16)$$

pour tout $\psi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Choisissons $\psi = T_k(u_n - \varphi)$ où φ vérifie $\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$ et $\varphi_t \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$. Ce choix de ψ dans (3.16) est possible car $\psi \in L^p(Q_T)$, $\nabla \psi \in L^p(Q_T)$ et

$$\nabla \psi = \nabla T_k(u_n - \varphi) = \nabla(u_n - \varphi) 1_{\{|u_n - \varphi| \leq k\}}.$$

Alors, nous obtenons

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) = \int_{Q_T} f_n T_k(u_n - \varphi).$$

et comme $\partial_t u_n = \partial_t(u_n - \varphi) + \partial_t \varphi$ on a

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt = \int_\Omega \Theta_k(u_n - \varphi)(T) dx - \int_\Omega \Theta_k(u_n - \varphi)(0) dx + \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(T)dx - \int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(0)dx + \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt \\ + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) = \int_{Q_T} f_n T_k(u_n - \varphi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

(c'est la formulation entropique pour u_n avec une égalité). Etudions le passage à la limite pour $n \rightarrow \infty$ de chacun des termes.

1) Passage à la limite dans $\int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(T)dx, \int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(0)dx$ et $\int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt$

On a vu que $u_n \rightarrow u$ dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$, donc $\forall t \leq T, u_n(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^1(\Omega)$.

Comme Θ_k est lipschitzienne de coefficient k , on a, lorsque $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(T)dx \rightarrow \int_{\Omega} \Theta_k(u - \varphi)(T)dx$$

et

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(0)dx = \int_{\Omega} \Theta_k(u_n(0) - \varphi(0))dx \text{ et } u_n(0) \rightarrow u_0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

donc de même

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u_n - \varphi)(0)dx \rightarrow \int_{\Omega} \Theta_k(u(0) - \varphi(0))dx$$

Passons maintenant à la limite dans $\int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt$. Utilisons la remarque 3.2, alors $T_k(u_n - \varphi) = T_k(T_M(u_n) - \varphi)$ avec $M = K + \|\varphi\|_{L^\infty(Q_T)}$ de plus $\partial_t \varphi \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega))$, il suffit donc de montrer que

$$T_k(T_M(u_n) - \varphi) \rightharpoonup T_k(T_M(u) - \varphi) \text{ dans } L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega)).$$

La convergence dans $L^p(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))$ faible signifie que

$$\nabla T_k(T_M(u_n) - \varphi) \rightharpoonup \nabla T_k(T_M(u) - \varphi) \text{ dans } L^p(Q_T).$$

ce qui bien le cas puisque $\nabla T_k(T_M(u_n) - \varphi) = \nabla(T_M(u_n) - \varphi)1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}}$ et $\nabla T_M(u_n)$ converge dans $L^p(Q_T)$ faible (D'après le lemme 3.6), et puisqu'à une sous-suite près $T_M(u_n)$ converge presque partout vers $T_M(u)$ dans Q_T , donc

$$\int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(T_M(u_n) - \varphi) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(T_M(u) - \varphi) \rangle dt,$$

c'est à dire que

$$\int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u_n - \varphi) \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u - \varphi) \rangle dt.$$

2) Passage à la limite dans $\int_{Q_T} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) dx dt$

on peut écrire ce terme comme suit

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla T_k(T_M(u_n) - \varphi) \\ &= \int_{Q_T} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla T_M(u_n) 1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}} \\ & - \int_{Q_T} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla \varphi 1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}}. \end{aligned}$$

Gâce à la convergence dominée, on a

$$\nabla \varphi 1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}} \longrightarrow \nabla \varphi 1_{\{|T_M(u) - \varphi| \leq k\}} \quad \text{dans } L^p(Q_T).$$

Comme $T_M(u_n)$ est borné dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et d'après la proposition 2.1 on a

$$|\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \quad \text{est bornée dans } L^{p'}(Q_T)$$

alors, d'après le lemme 1.10, on en déduit

$$|\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \rightharpoonup |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u) \quad \text{dans } L^{p'}(Q_T)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla \varphi 1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}} = \int_{Q_T} |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u) \nabla \varphi 1_{\{|T_M(u) - \varphi| \leq k\}}$$

l'autre terme étant positif, le lemme de Fatou nous donne (nous avons montré la convergence presque partout de (∇u_n) ce qui entraîne celle de $\nabla T_M(u_n)$)

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} |\nabla T_M(u)|^{p-2} \nabla T_M(u) \nabla T_M(u) 1_{\{|T_M(u) - \varphi| \leq k\}} \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |\nabla T_M(u_n)|^{p-2} \nabla T_M(u_n) \nabla T_M(u_n) 1_{\{|T_M(u_n) - \varphi| \leq k\}}. \end{aligned}$$

3) Passage à la limite dans $\int_{Q_T} f_n T_k(u_n - \varphi) dx dt$

Enfin il reste à passer à la limite dans $\int_{Q_T} f_n T_k(u_n - \varphi)$. C'est claire que $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(Q_T)$, et comme $|T_k(u_n - \varphi)| \leq k$, $T_k(u_n - \varphi)$ converge vers $T_k(u - \varphi)$ dans $L^\infty(Q_T)$ faible* par convergence dominée donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} f_n T_k(u_n - \varphi) dx dt = \int_{Q_T} f T_k(u - \varphi) dx dt$$

Et finalement grâce à (3.17) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Theta_k(u - \varphi)(T) dx - \int_{\Omega} \Theta_k(u - \varphi)(0) dx + \int_0^T \langle \partial_t \varphi, T_k(u - \varphi) \rangle dt \\ + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_{Q_T} f T_k(u - \varphi). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] L. Boccardo and G. Croce. *Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions*. De Gruyter Stud. Math. Vol. 55, De Gruyter, Berlin, 2014.
- [2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1987). 117
- [3] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [4] L. Gasinski and N. S. Papageorgiou, *Nonlinear Analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications*, vol. 9. (2006).
- [5] J. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes au limites*. Dunod, Paris, (1969). 130, 143, 149
- [6] R. Mecheter, *ANISOTROPIC PARABOLIC PROBLEM IN R^N WITH VARIABLE EXPONENT AND LOCALLY INTEGRABLE DATA* university of Msila. Algeria (2020).
- [7] A. Prignet, *Existence and uniqueness of “entropy” solutions of parabolic problems with L^1 data*, *Nonlin. Anal. TMA* 28 (1997), 1943–1954.
- [8] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel* UMPA-ENS Lyon France (1997).
- [9] J.M. Rakotoson, *SOME QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS* *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 17, No 12, pp. 1163-1175, 1991.
- [10] M. Ruzicka, *Nichtlineare Funktionalanalysis : Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2006.

- [11] J.Simon, *Compact sets -in the space $L^p(0,T;B)$* . Ann. Mat. Pura App **146** 65-96 (1987).133
- [12] R. Temam, *Navier Stokes equations, theory and numerical analysis*. North Holland, Amesterdam (1984).
- [13] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A : Linear Monotone Operators*. 1990.

Abstract

in this work, we prove the existence of entropy solutions for an parabolic problem (P) defined by

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq \Omega]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

the operator $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ is a pseudo-monotone operator. The method of solving our problem consist of obtaining local estimates for suitable approximate problems and then passing to the limit to obtain an entropic solution of problem (P) .

keywords : Sobolev spaces, pseudo-monotone, operator nonlinear, parabolic equation, entropy solution

Résumé

Dans ce travail, nous prouvons l'existence des solutions entropiques pour le problème parabolique (P) à donnée L^1 définie par

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{sur } Q_T \doteq \Omega]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur }]0, T[\partial\Omega, \end{cases}$$

L'opérateur $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ est un opérateur pseudo-monotone. Les étapes principales de la preuve consister à approcher par une suite de problèmes à donnée dans L^∞ , ensuite obtenir des estimations uniformes et locales pour la suite des solutions approchées u_n et ∇u_n , puis le passage à la limite pour obtenir une solution entropique de problème (P) .

mots-clés : Espace de Sobolev, pseudo-monotone, opérateur non linéaire, équation parabolique, solution entropique .

ملخص

في هذه المذكرة نسعى الى اثبات وجود الحلول الانتروبية وغير الخطية للمعادلة المعرفة كما يلي: $\partial_t u + Au = f$ تحت الشروط التالية $u(0, x) = u_0(x)$ و $u = 0$ حيث ان الطرف الايمن f ينتمي الى الفضاء $L^1(Q_T)$ و u_0 في الفضاء $L^1(\Omega)$ المؤثر $Au = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $1 < p < \infty$ معرف بشكل جيد بين الفضاء $W_0^{1,p}$ وفضاءه

الثنوي، الخطوات الرئيسية للاثبات تتمحور فيمايلي:

نقرب الجملة (P) بمتتالية جمل (P_n) ثم نبرهن ان الجملة المقربة تتمتع بحل محدود u_n ثم الحصول على التقديرات لمتتالية الحلول التقريبية u_n و ∇u_n . وفي الاخير نمر بالنهاية في المسألة التقريبية للحصول على حل انتروبي للجملة (P)

كلمات مفتاحية: معادلات تكافئية غير خطية ، مؤثر غير خطي، فضاء سوبولوف، الحل الانتروبي