

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## Mémoire de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Equations aux dérivées partielles et applications

### Thème

---

*Résolution d'un problème non linéaire un écoulement à surface libre.*

---

Présentée par :  
M<sup>r</sup> Hechaichi Akram

Membres du jury :

Mr.N.Benhamidouche	P.r,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
Mm.N.Bounab	M.C.B.,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
Mm.W.Delloum	M.A.A.,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2019/2020

---

# TABLE DES MATIÈRES

Notation	3
<b>1 INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>6</b>
<b>2 Notion préliminaires et définitions</b>	<b>11</b>
2.1 Les fluides	11
2.2 Description d'un fluide en mouvement	11
2.2.1 Description de Lagrange	11
2.2.2 Description d'Euler	12
2.3 dynamique des fluides	13
2.3.1 Débit	13
2.3.2 La densité	13
2.4 Quelques équations de la mécanique des fluides	14
2.4.1 Équation de continuité	14
2.4.2 La masse volumique	15
2.5 Les écoulements des fluides	16
2.5.1 Écoulement stationnaire	16
2.5.2 Ecoulement parfait :	16
2.5.3 Écoulement incompressible	16
2.5.4 Écoulement potentiel	17
2.5.5 Écoulement uniforme	17
2.5.6 Écoulement irrotationnel	17
2.6 Ligne et Fonction de courant	18
2.7 Equations différentielles des fonctions $\phi$ et $\psi$	19
2.8 Conservation de l'énergie du fluide	21
2.9 Equation du mouvement des fluides	22
2.10 Les équations de Stokes	23
2.11 Théorème de Bernoulli	23
2.12 Utilisation de la théorie de la variable complexe.	24

<b>3 Problème un écoulement à surface libre</b>	<b>26</b>
3.1 Théorie des lignes de courants libre . . . . .	26
3.1.1 Transformation de Schwartz-Christoffel. . . . .	27
3.2 Position du problème . . . . .	29
3.3 Solution exacte . . . . .	31
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>41</b>
<b>annexe</b>	<b>42</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

---

## NOTATION

$\rho$	Masse volumique
$\vec{u}$	Le vecteur vitesse
$m$	La masse
$\vec{a}$	L'accélération
$P$	La pression
$S$	La surface
$V$	Le volume
$n$	La normale
$f$	La force
$C$	Une courbe
$(x, y)$	Le plan
$g$	Accélération de la pesanteur
$W$	Nombre de Weber
$Fr$	Nombre de Froude
$i$	Le nombre complexe
$z$	La variable complexe
$\hat{p}$	La pression motrice
$L_c$	Longueur caractéristique
$\Gamma$	Tension superficielle
$(u, \nu)$	Composantes du vecteur vitesse
$\psi$	Fonction de courant
$\phi$	Fonction Potentielle
$\sigma$	Le tenseur des contraintes
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale

---

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu Je remercie ma famille pour leur soutien morale et physique et encouragement tout au long de mon étude.

Je tiens à remercier également mon encadreur Mme. Bounab Noura pour tous les efforts qu'il a fournis pour nous faciliter et aider à accomplir mon travail je le remercie pour ses conseils avisés qui ont rendu ce travail possible.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de l'enrichir par leurs propositions

Je viens de remercier également tous les enseignants et les étudiants du département mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf de M'SILA et sans oublier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation dans ce département.

Merci.

---

## DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

— A mes parents ma mère et mon père.

— A mes soeurs.

— A mes frères.

— A toute la famille.

— A toute mes amies.

— Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,  
En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## INTRODUCTION GENERALE

La mécanique des fluides est un outil performant qui permet d'expliquer les phénomènes qui nous entourent, de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Elle intervient dans un nombre illimité d'applications pratiques allant des systèmes biologiques à la propulsion des automobiles, des avions et des fusées et elle est aussi à la base du développement de nombreuses technologies.

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour de différents objets sont considérés comme une branche fondamentale largement utilisée dans plusieurs applications industrielles.

Les écoulements à surface libre désignent les écoulements dans lesquels le fluide qui s'écoule est en contact avec l'atmosphère. Cette terminologie est un cas particulier des écoulements de deux fluides qui ne sont pas miscibles et qu'ils sont séparés par une interface.

Dans le cas hydrostatique, l'interface est une surface plane horizontale. Dans le cas dynamique l'équation de cette interface est l'inconnue du problème étudié.

Une surface libre est en générale une interface entre un liquide et un gaz

, où la pression est supposée constante sur toute la surface libre et égale le plus souvent à la pression atmosphérique. Cette configuration apparaît dans les canaux, les rivières ou les grandes étendues d'eau comme les lacs, les mers ou les océans. La difficulté majeure dans ce type des écoulements est de déterminer les caractéristiques de la surface libre : position, forme, vitesse et autres.

Les écoulements à surface libre ont été traités généralement dans l'Hydraulique fluviale qui est nécessaire pour la conception, l'aménagement et la construction d'ouvrages hydrauliques tels que les digues, les seuils, les déversoirs et d'autres constructions tels que les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et particulièrement pour l'architecture des barrages.

Ce type des écoulements avait été l'objet d'une nombreuse études théoriques, expérimentales et numériques comme les écoulements potentielles autour des différents obstacles, ces problèmes sont difficiles à résoudre analytiquement à cause des conditions non-linéaires sur la frontière libre de forme inconnue. Ces difficultés augmentent selon la géométrie du domaine de l'écoulement, les conditions aux limites d'une part et aux propriétés de fluide d'autre part. Le problème d'écoulement à surface libre dû à une cavité a une grande et longue histoire qui a commencé avec la contribution de la théorie de la variable complexe.

Aux 19<sup>ème</sup> siècle, cette dernière a rendu l'étude théorique des écoulements bidimensionnels à surface libre possible, le fluide soit incompressible, non visqueux et les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface sont négligées. Ces hypothèses ont permis d'élaborer la théorie de potentiel complexe.

En 1868, Kirchhoff a développé la théorie des lignes de courant libre basé sur l'introduction de la variable complexe

$$\Omega = \log (dz/df)$$

qui permet de transformer le domaine de l'écoulement du plan complexe  $Z$  en un domaine polygonale sur le plan  $\Omega$  ensuite par la transformation de Schwartz-Christoffel on transforme conformément les deux domaines en un domaine auxiliaire  $\lambda$  pour obtenir un système des équations non-linéaires de  $f(\lambda)$  et  $\Omega(\lambda)$ , finalement on aboutit à une relation entre  $f$  et  $\Omega$ . Les problèmes où les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface libre sont considérés deviennent difficiles analytiquement.

Plusieurs travaux sont effectués comme celle de Elcrat et Trefethen qui ont développé une méthode basée sur les transformations de Schwartz-Christoffel. Cette transformation traite le cas des parois constituées d'un grand nombre de segments rectilignes, c'est la méthode dite de Schwartz-Christoffel modifiée. Bloor a traité les écoulements sur les radiers en utilisant une méthode basée aussi sur la transformation de Schwartz-Christoffel, une méthode similaire a été utilisée par Peng et Parker pour l'impact d'un jet sur une paroi. Une autre méthode basée sur les transformations conformes a été employée sur les écoulements au dessus d'un radier par Vanden-Broeck. Ces résultats ont été étendus avec Dias et Vanden-Broeck, Vanden-Broeck et Keller aussi E.O. Tuck, Vande-broeck[4], H. Mekias [5],[2], B. Bouderah[18] et A.Gasmi[1].

F. Toison et J. Hureau ont traité les écoulements potentiel bidimensionnels issu d'un "curved nozzle" de quelques formes en utilisant un processus numérique pour résoudre le problème de frontières mixtes. "Mixed problem boundary".

Dans ce mémoire, on a résolu le problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel dans un domaine de la forme d'un trapèze isocèle en négligeant les effets des forces de la gravité et les effets de la tension de la surface puisque l'écoulement est bidimensionnel et potentiel, le plan des variables  $(x, y)$  d'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$  en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité. Théoriquement, on peut calculer la solution exacte en utilisant une transformation conforme d'hodographe due à Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwartz-Christoffel.

c'est à dire : déterminer la fonction  $\phi(x, y)$  qui vérifie :  
l'équation  $\Delta\phi = 0$  sur  $(x, y) \in D$  tel que  $D$  : domaine de l'écoulement.

Le travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est une introduction générale sur les travaux antérieurs (Recherche bibliographique).

Le deuxième chapitre est consacré aux définitions et notions préliminaires concernant la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluide.

Dans le troisième chapitre, on présente le problème d'un jet devant un domaine de la forme dans Trapèze isocèle d'angle  $\beta = (\pi/3)$  avec l'axe  $(x'ox)$  le cas où la gravité et la tension de la surface sont négligées en introduisant la notion des lignes de courant et leurs applications introduites par Kirchhoffel à la résolution du problème où la surface libre sera déterminée explicitement grâce à la notion de la vitesse complexe.

Ce travail est complété par une présentation d'un annexe : qui contient des notions sur quelques transformations conformes et petite description de la méthode d'intégration numérique dite de Simpson.

---

---

# CHAPITRE 2

---

## NOTION PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS

### 2.1 Les fluides

Un fluide est un corps dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz). Les fluides n'ont pas de forme propre (à la différence des solides) donc ils se déforment facilement. Quand vous introduisez un fluide dans un récipient, ce dernier en épouse les formes.

Généralement les fluides sont répartis en deux groupes :

- Les liquides : Corps peu compressibles et dont la masse volumique est importante (eau, huile, ...). Les liquides occupent des volumes bien définis et présentent des surfaces libres.
- Les gaz : corps très compressibles et même extensibles (dioxyde de carbone, Air, ...). Les gaz se dilatent jusqu'à occuper toutes les parties du récipient qui le contient.

Pour les liquides on distingue deux classes :

- Les fluides parfaits : un fluide parfait est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans aucun frottement.
- Les fluides réels : un fluide réel est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres avec frottement.

### 2.2 Description d'un fluide en mouvement

#### 2.2.1 Description de Lagrange

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités ( $p$ ,  $\rho$ , *température*  $T$ , etc) pour chaque particule individuellement lors de son mouvement. Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position  $\vec{r}(M_0, t)$  à tout instant  $t$  pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \text{ ou } \vec{r} = \vec{r} M_0(x_0, y_0, z_0, t). \quad (2.1)$$

C'est-à dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t). \quad (2.2)$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t) = \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

## 2.2.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composants de la vecteur vitesse et autres quantités physique en chaque point de l'espace c'est -à-dire ,on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

A l'instant  $t_1$ , on détermine en M une particule  $P_1$  de vitesse  $\vec{u}$  et d'autres caractéristiques physique K.

Et à L'instant  $t_2 = t_1 + \partial t$ , on trouve au même point M de l'espace, une autre particule  $P_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en M et à l'instant  $t_1$

$$\vec{u} = \vec{u}(p_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1). \quad (2.4)$$

Et à l'instant  $t_2$ , on a au même point M.

$$\vec{u} = \vec{u}(p_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2). \quad (2.5)$$

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composants de la vecteur vitesse et autres quantités physique .

## 2.3 dynamique des fluides

### 2.3.1 Débit

En génie thermique, il est essentiel de pouvoir connaître la quantité du fluide qui circule à l'intérieur des différents éléments (gainés, pompes, tuyauterie,.. ). Par conséquent, il est nécessaire de définir la notion de débit.

Considérons, par exemple, une conduite dans laquelle circule un fluide. On appellera section de passage la surface à travers laquelle s'écoule le fluide.

Le débit est la quantité de matière (exprimée par une masse ou un volume) qui passe à chaque unité de temps à travers cette section.

On distingue deux type de débits :

1. **Débit volumique** débit volumique à travers la section S par unité de temps.

défini par :  $q_v = v_{moy} \cdot S$  avec  $v_{moy}$  vitesse moyenne sur la section S.

Donnée par :

$$V = \int \int_s \vec{u} \cdot \vec{n} ds. \quad (2.6)$$

2. **Débit massique** c'est la quantité de fluide qui travers la section S par unité de temps.

défini par :  $q_m = \rho \cdot v_{moy} \cdot S = \rho \cdot q_v$ .

et Donnée par :

$$m = \int \int_s \int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds. \quad (2.7)$$

### 2.3.2 La densité

La densité d'un corps est le rapport entre la masse volumique de ce corps et la masse volumique d'un corps de référence.

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (2.8)$$

Les deux masses volumiques étant déterminées dans les mêmes conditions de température et de pression.

— Pour les liquides, cette définition se traduit par la relation suivante :

$$d_l = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide d'eau}} = \frac{\rho}{\rho_{eau}} \quad (2.9)$$

— Pour les gaz, cette définition se traduit par la relation suivante :

$$d_g = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de gaz}} = \frac{\rho}{\rho_{gaz}} \quad (2.10)$$

## 2.4 Quelques équations de la mécanique des fluides

### 2.4.1 Équation de continuité

Soit une partie d un fluide de masse volumique  $\rho$  délimitée par une surface fermée S (de volume V). Soit  $dS$  un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la Surface fermée.

La partie de fluide a une masse  $m = \int \int_V \int \rho dV$ . Le débit massique sortant de la surface S est égal à  $\int \int_s \rho \vec{u} dS$ . La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{dm_s}{dS} - \int \int_s \rho \vec{u} dS = m = \int \int_V \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.11)$$

Où  $\frac{dm_s}{dS}$  représente le **débit massique** de fluide interne au volume considéré, compté

positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits. Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky pour transformer L'intégrale de surface en intégrale de volume.

$$\int \int_s \vec{u} = \int \int_V \int \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.12)$$

L'équation de conservation de la masse écrite :

$$\frac{dm_s}{dS} = \int \int_V \int \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.13)$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégrale est nulle,

ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.14)$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer :

1. Si le fluide est **incompressible** la masse volumique ne change pas dans le temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.15)$$

Pour un écoulement stationnaire ou non stationnaire. Cet écoulement est dit **isovolume**.

L'équation (1.27) exprime la conservation du volume d'un élément de fluide au cours de sa déformation par l'écoulement.

2. Le cas **d'un écoulement stationnaire**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  alors :

$$\operatorname{div}(\rho u) = 0 = \rho \operatorname{div} u + (u \cdot \nabla) \rho. \quad (2.16)$$

En dehors du cas 1, il existe la possibilité d'écoulements isovolumes tels que  $(u \cdot \nabla) \rho = 0$ , C'est-à-dire les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse.

## 2.4.2 La masse volumique

La masse volumique est le rapport entre la masse  $\mathbf{m}$  d'une matière et son volume  $\mathbf{v}$ . généralement elle est exprimée en  $\frac{Kg}{m^3}$ .

$$\rho = \frac{Masse}{Volume} = \frac{m}{v} \quad (2.17)$$

Pour les liquides la masse volumique varie très peu avec la pression, mais plus sensiblement avec la température. Les liquides sont appelés des fluides incompressibles.

Contrairement à celle des liquides, la masse volumique des gaz varie avec la pression et la température. Les liquides sont appelés des fluides compressibles.

## 2.5 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine.

### 2.5.1 Écoulement stationnaire

Les écoulements stationnaires (on dit aussi permanent), sont les écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps. Dans ce type des écoulement on a :

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0 \quad (2.18)$$

Un tel écoulement est possible lorsque le domaine, les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps. Par exemple Les équations de Navier-Stokes stationnaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.5.2 Ecoulement parfait :

Un écoulement parfait est une approximation dans le cas ou les effets visqueux sont négligeable, et un fluide parfait possédant une viscosité rigoureusement nulle il n'y a implication que un sens.

### 2.5.3 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante.

$$\rho = \text{cte}. \quad (2.20)$$

## 2.5.4 Écoulement potentiel

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel C'est-à-dire :

$$\vec{u} = \nabla\phi. \quad (2.21)$$

$$u = \frac{d\phi}{dx}, v = \frac{d\phi}{dy}. \quad (2.22)$$

La fonction  $\phi(x, t)$  est le potentiel des vitesses.

## 2.5.5 Écoulement uniforme

L'écoulement uniforme implique deux conditions : la permanence et la continuité. L'écoulement est uniforme si la profondeur, la pente, la vitesse et la section droite demeurent constantes sur une longueur donnée du canal ( $\frac{\partial h}{\partial L} = 0; \frac{\partial v}{\partial t} = 0; etc.$ ) tel que :

- h=la profondeur d'eau.
- v=la vitesse.
- t=le temps.
- L=longueur du canal.

## 2.5.6 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est appelé écoulement irrotationnel si :

$$rot \vec{u} = 0. \quad (2.23)$$

rot  $u=0$ .

Naturellement, un écoulement qui n'est pas irrotationnel est dit rotationnel. Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel. En effet, on a :

$$u = \nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right). \quad (2.24)$$

$$\text{rot } u = \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right). \quad (2.25)$$

## 2.6 Ligne et Fonction de courant

### lignes de courant

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)} \quad (2.26)$$

### Fonction de courant

si on considère l'écoulement incompressible (i.e.  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ) alors l'équation de continuité sera donnée :

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (2.27)$$

ou encore :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

Nous présentons une nouvelle fonction  $\psi$  de  $x$  et  $y$  que l'on appelle **fonction de courant**, vérifiant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.29)$$

Les surfaces définies par  $\psi = cte$  sont des **lignes de courant**, en effet, la différentielle exacte de est donne :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy \quad (2.30)$$

Puisque  $\psi = cte$ , alors  $\partial\psi = 0$ , on trouve l'équation de la ligne de courant d'après (2.29).

Soient, C une courbe fine qui part d'un ligne de courant vers autre caractérisée par  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = \psi_2$  respectivement.

Soient  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le Sens de l'écoulement, le flux à travers C donné par :

$$Q = \int_C \vec{u} \cdot \vec{n} = \left( \int_C -u \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \int_C (vdx - udy)dt \quad (2.31)$$

D'où :

$$Q = \int_C \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \right) = \int_C d\psi \quad (2.32)$$

Par conséquent :

$$Q = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.33)$$

## 2.7 Equations différentielles des fonctions $\phi$ et $\psi$

soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. Puisque :

$$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\phi \quad (2.34)$$

Et :

$$div \vec{u} = 0 \quad (2.35)$$

Il vient que :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{\phi}) = 0 \quad (2.36)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.37)$$

C'est-à-dire :

$$\Delta\phi = 0 \quad (2.38)$$

De même, d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left( \frac{-\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

Et :

$$\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \quad (2.40)$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.41)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.42)$$

C'est-dire :

$$\Delta\psi = 0 \quad (2.43)$$

D'où, la fonction potentielle  $\phi$  et la fonction ligne de courant  $\psi$  et vérifient L'équation de **Laplace**. Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux est écoulement potentiel.

## 2.8 Conservation de l'énergie du fluide

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2.44)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.29) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (2.45)$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope  $-p\delta_{i,j}$ , et en un déviateur  $d_{i,j}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (2.46)$$

Ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (2.47)$$

Enfin, en tenant compte de la condition de compressibilité ( $\nabla \cdot u = 0$ ), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.32) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[ u \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (2.48)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en Intégrant chacun des termes sur un volume V fixe et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V e_c dV \right) = \int_S \frac{\rho u^2}{2} u \cdot n dS + \int_S (\sigma \cdot u) \cdot n dS + \int_V u \cdot f dV - \sigma \cdot \nabla u dV \quad (2.49)$$

Quelle est la signification physique des différents termes :

1. le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique "convectée" par l'écoulement á travers la surface S.
2. le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la Surface S.
3. le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
4. enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume V. Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

## 2.9 Equation du mouvement des fluides

Par la relation fondamentale de la dynamique, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V f dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot n ds \quad (2.50)$$

Où est la surface délimitant le volume V,  $ds$  est un élément de surface de normale  $n$ ,  $f$  est la force exercée par unité de volume et  $\sigma$  le tenseur des contraintes. La masse de l'élément de fluide  $\rho dx$  reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V \rho \frac{du}{dt} dx \quad (2.51)$$

L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, á l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme  $\int_V \text{div} \sigma dx$ . En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) = f + \text{div} \sigma \quad (2.52)$$

## 2.10 Les équations de Stokes

L'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \rho(u.\nabla)u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}u = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes pro-

portionnels à la masse volumique du fluide  $(u.\nabla)u$ , on obtient l'équation de Stokes :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}u = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de  $\Omega$  et de la valeur de la

viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de Navier-Stokes. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

## 2.11 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement.

### Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire on a conservation de la charge

$$H = \frac{\hat{p}}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{Cont.} \quad (2.55)$$

$$\hat{p} = p + \rho g z.$$

### Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left[ \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] = -\nabla \hat{p} \quad (2.56)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \quad (2.57)$$

## 2.12 Utilisation de la théorie de la variable complexe.

Soient  $\phi$  et  $\psi$  la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapporte le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant  $z = x + iy$ , puis on définit la fonction complexe  $f(z)$  par :

$$f(z) = \phi + i\psi \quad (2.58)$$

Tel que  $i^2 = -1$ .  $f(z)$  est appelé le potentiel complexe de l'écoulement.

Puisque la partie réelle et la partie imaginaire de  $f(z)$  vérifient l'équation de Laplace, de plus on a :

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.59)$$

Alors les relations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.60)$$

La théorie des variables complexes offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulements. Si le plan  $(x, y)$  est considéré comme plan de  $z = x + iy$  la fonction  $f(z)$  sera analytique dans le domaine de l'écoulement. De plus la vitesse complexe est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = u + iv. \quad (2.61)$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous permettre d'utiliser, par la suite, la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

---

---

# CHAPITRE 3

---

## PROBLÈME UN ÉCOULEMENT À SURFACE LIBRE

### 3.1 Théorie des lignes de courants libre

La théorie des lignes de courants libre consiste à étudier les problèmes d'écoulement potentiel, limité par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libre de formes inconnues, sur les quelles la pression est supposée constante.

Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligés, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi les lignes de courants libres présentes et les effets de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligés, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale Cette région est un parfait du plan hodographe défini :

$$\Omega = \left(1/\frac{df}{dz}\right). \quad (3.1)$$

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libres on donne la méthode de résolution introduite par Kirchhoff (1869). L'idée est d'introduire la fonction complexe définie par :

$$\Omega = \log \left( U/\frac{df}{dz} \right) = \log \left( \frac{U}{u-iv} \right) = \log \left( \frac{U}{q} \right) + i\theta. \quad (3.2)$$

Où  $f = \phi + i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u + iv$ ,  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse suivant de l'axe x et l'axe y respectivement,  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U la vitesse de référence :

- La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur la ligne de courant libre, i.e.  $\log\left(\frac{u}{q} = cte\right)$ .
- La partie imaginaire de  $\Omega$  est constante sur chaque paroi rectiligne, i.e.  $\theta = cte$ .

Par conséquent, L'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone) note  $\Omega$ .

A l'aide de transformation de Schwarz-Christoffel, le domaine  $\Omega$  polygonal est transformé en un demi plan supérieur de la variable auxiliaire  $\lambda$ , Ainsi, dans le plan  $\lambda$  l'écoulement est uniforme représenté par la fonction potentielle  $F(\lambda) = c\lambda$  Pour illustrer ce qui précède, on donne quelques propriétés de la transformation conforme de Schwarz-Christoffel.

### 3.1.1 Transformation de Schwartz-Christoffel.

On considéra un polygone [Figure (3.1)] dans le plan  $\Omega$ , ayant pour sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et pour angle intérieurs respectivement  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les point correspondant respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de l'axe réel du plan des  $\lambda$  [figure(3.2)].

Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme L'intérieur d'un polygon en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad (3.3)$$

Ou bien :

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + \beta \quad (3.4)$$

Ou  $\alpha, \beta$  sont des constantes complexes. On notera que :

1. Parmi les points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  On peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes  $\alpha, \beta$  déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple  $\lambda_n$ , à l'infini, cas dans lequel facteur de (3.4) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones.

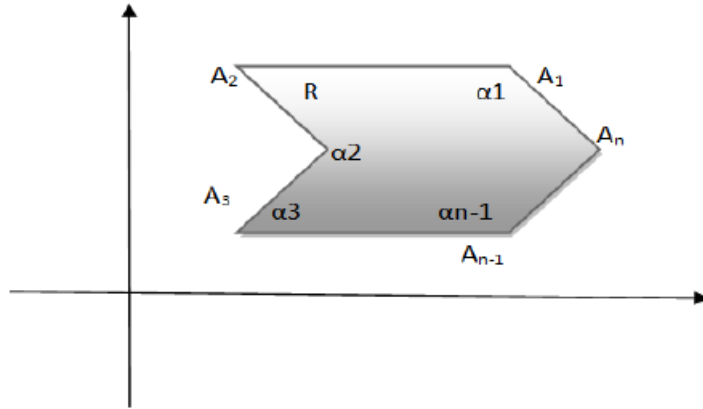


FIGURE 3.1 – plan de  $\Omega$

---

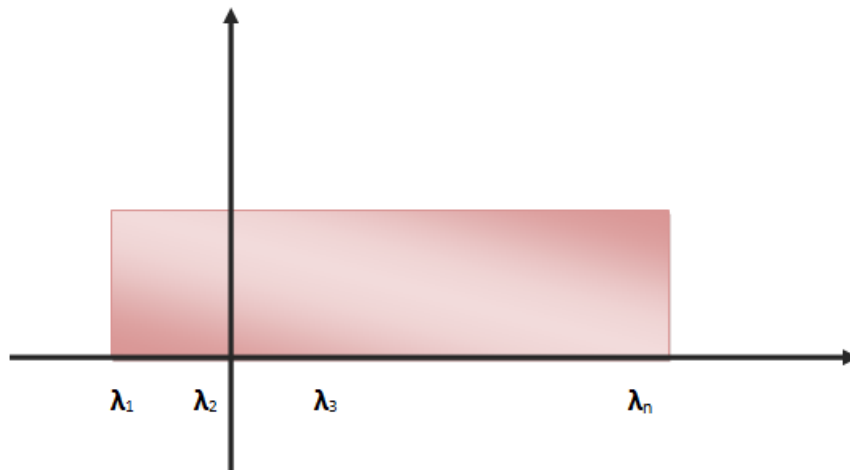


FIGURE 3.2 – plan de  $\lambda$

---

## 3.2 Position du problème

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non-visqueux, dans un trapèze isocèle, qui forme avec l'axe horizontale (OX) un angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . On note l'écoulement dans ABCDEF avec la courbe GHIJK qui est la surface libre.

Loin du domaine BCDE, l'écoulement est uniforme de vitesse constante  $U_0$  et de profondeur constant L.

sur la surface libre, puisque les tensions de surface sont négligées, l'équation de Bernoulli donne :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = cte \quad (3.5)$$

où  $q$  est la vitesse,  $P$  est la pression et  $\rho$  est la densité du fluide. La pression est constante sur la surface libre, donc l'équation de Bernoulli devient

$$q = cte$$

sur la surface libre.

On rapporte le plan d'écoulement dans le repère (Oxy) au plan complexe de la variable  $z = x + iy$  pour pouvoir résoudre le problème. Dans ce plan, la fonction  $f = \phi + i\psi$  où  $\phi$  est la fonction potentielle,  $\psi$  est la fonction ligne de courant sont analytiques de la variable  $z$ . notre problème est

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{P}{\rho} = cte & \text{sur la surface libre.} \end{cases} \quad (3.6)$$

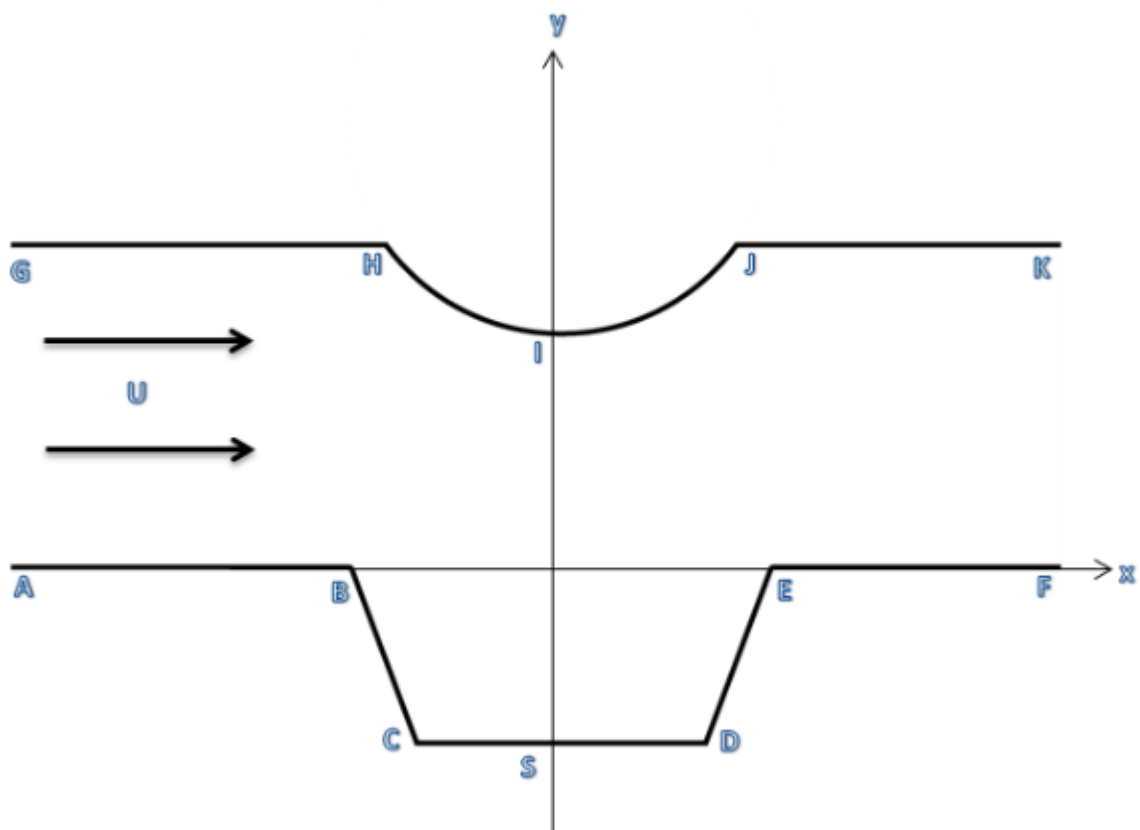


FIGURE 3.3 – **plan z**  
Schéma d'un écoulement bidimensionnel d'une dépression trapèze

### 3.3 Solution exacte

Dans notre problème, nous avons un écoulement délimité par un fond rigide trapéze ABCDEF et une surface libre (GHIJKL).on néglige les tensions de surface et les forces de gravité, une solution exacte peut être calculée en utilisant la transtormation hodographe et la transtormation de Schwartz- Christoffel.pour trouver la solution de ce problème nous effectuons les etapes suivantes :

#### 1<sup>ère</sup> étape

La transformation hodographe  $\Omega$  transforme le domaine d'écoulement réel dans le plan  $(x, y)$  en un domaine d'écoulement de frontière polygonale dans le plan  $\left(\log \frac{U_0}{q}, \theta\right)$ , [figure(3.3)].

#### 2<sup>ème</sup> étape : La transtormation de $\Omega$ à $\lambda$

Par la transformation de Schwartz- Christoffel, le domaine d'écoulement dans le plan  $\Omega$  est transtormé en un demi plan supérieureur de la variable complexe  $\lambda$  [figure(3.2)]. Les points correspondants :

Les points	la variable complexe $\lambda$
A=G	$\lambda = -1$
B	$\lambda = -a$
C	$\lambda = -\frac{1}{3}$
S	$\lambda = 0$
D	$\lambda = \frac{1}{3}$
E	$\lambda = a$
H	$\lambda = -b$
F=K	$\lambda = 1$
J	$\lambda = b$
I	$\lambda = \infty$

On trouve la représentation conforme suivante :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{\alpha(\lambda^2 - b^2)}{\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) (\lambda^2 - a^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad (3.7)$$

lorsqu'on déplace de la ligne BC à la ligne DE on fait un saut de  $4\pi$  dans le plan  $\Omega$ .

donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{4}{3}. \quad (3.8)$$

on trouve alors la valeur du paramètre  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{-4ia^2}{27b^2} \quad (3.9)$$

qui nous donne l'intégration suivante :

$$\Omega(\lambda) = \frac{-4ia^2}{27b^2} \int \frac{(\lambda^2 - b^2)}{\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) (\lambda^2 - a^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda + \gamma. \quad (3.10)$$

$\gamma$  une constante d'intégration.

En fait une changement de variable :

$$h = \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (3.11)$$

on obtient :

$$\Omega(h) = \frac{-4ia^2}{27b^2} \int \frac{(h^2 + 1 - b^2)dh}{(h^2 + 1)(h^2 + \frac{8}{9})(h^2 + 1 - a^2)} + \gamma \quad (3.12)$$

d'où :

$$\Omega(h) = \frac{-4ia^2}{27b^2} \left( \int \frac{dh}{(h^2 + \frac{8}{9})(h^2 + 1 - a^2)} - b^2 \int \frac{dh}{(h^2 + 1)(h^2 + \frac{8}{9})(h^2 + 1 - b^2)} \right) + \gamma \quad (3.13)$$

donc :

$$\Omega(\lambda) = \frac{-4ia^2}{27b^2} \left( \frac{9(a^2 - b^2)}{a^2(9a^2 - 1)(a^2 - 1)} \arctan \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{1 - a^2}} \right) - \frac{81(1 + 9b^2)}{8(9a^2 - 1)} \arctan \left( \frac{3\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{8}} \right) - \frac{9b^2}{a^2} \arctan \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right) + \gamma \quad (3.14)$$

Puisque :

$$\arctan \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{1 - a^2}} \right) = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{\sqrt{1 - a^2} + i\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{1 - a^2} - i\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \quad (3.15)$$

Et

$$\arctan \left( \frac{3\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{8}} \right) = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \quad (3.16)$$

Et :

$$\arctan(\sqrt{\lambda^2 - 1}) = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \quad (3.17)$$

Au point  $S(\lambda = b)$ , lorsqu'on le déplace de la ligne IJ à la ligne JK on fait un saut de  $2\pi$  dans le plan  $\Omega$ .

donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow a} \left( (\lambda - a) \frac{d\Omega}{d\lambda} \right) = \frac{1}{3}. \quad (3.18)$$

donc :

$$b = \sqrt{\frac{8}{9(2 + \sqrt{5})}}$$

Où remplace relations, on trouve :

$$\Omega(\lambda) = \log \left( \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)}} \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) + \gamma$$

Pour  $\lambda = 1$  on a :  $\Omega = 0$  alors  $\gamma = 0$ , donc :

On sait que  $\Omega(\lambda) = \log \left( U_0 \cdot \frac{dz}{df} \right)$ , alors :

$$U_0 \cdot \frac{dz}{df} = \left[ \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)}} \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (3.19)$$

### 3<sup>ème</sup> étape

Le domaine d'écoulement réel dans le plan  $z$  est transformé à une bande de largeur  $TU_0$  dans le plan de la variable  $f = \phi + i\psi$ , en choisissant  $\psi = 0$  sur la ligne de courant (AB, BC, CD, DE, EF) et  $\phi = 0$  ainsi que  $\psi + TU_0$  sur la surface libre GHIJKL.

#### 4<sup>ème</sup> étape : La transformation de $f$ à $\lambda$

En utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel, on transforme la bande de largeur  $TU_0$  du plan  $f$  en demi plan supérieur de la variable  $\lambda$ , où la correspondance des points A,S et F est donnée par :  $\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 1$

d'où :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{M}{(\lambda^2 - 1)} \quad (3.20)$$

donc :

$$f(\lambda) = M \int \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} d\lambda + N \quad (3.21)$$

alors :

$$f(\lambda) = \frac{M}{2} \log \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) + N \quad (3.22)$$

M et N sont constantes à déterminer.

Lorsque :

- Si :  $\lambda \rightarrow 1$  (point F) alors :  $f = iLU_0 \rightarrow N = iLU_0$ .
- Si :  $\lambda \rightarrow 0$  (point S) alors :  $f = 0 \rightarrow M = \frac{-2LU_0}{\pi}$ .

On déduit la fonction :

$$f(\lambda) = \frac{-2LU_0}{\pi} \log \left( \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \quad (3.23)$$

ou bien :

$$\lambda = \frac{e \left( \frac{\pi f}{LU_0} \right) - 1}{e \left( \frac{\pi f}{LU_0} \right) + 1} \quad (3.24)$$

Par conséquent :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{-2LU_0}{\pi} \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \quad (3.25)$$

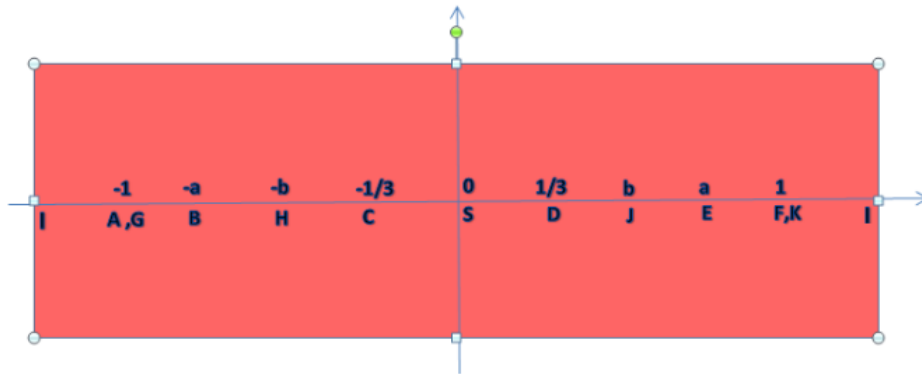


FIGURE 3.4 – **plan  $\lambda$**

Transformé du plan  $\lambda$  par la transformation de *Schwartz – christoffel*

---

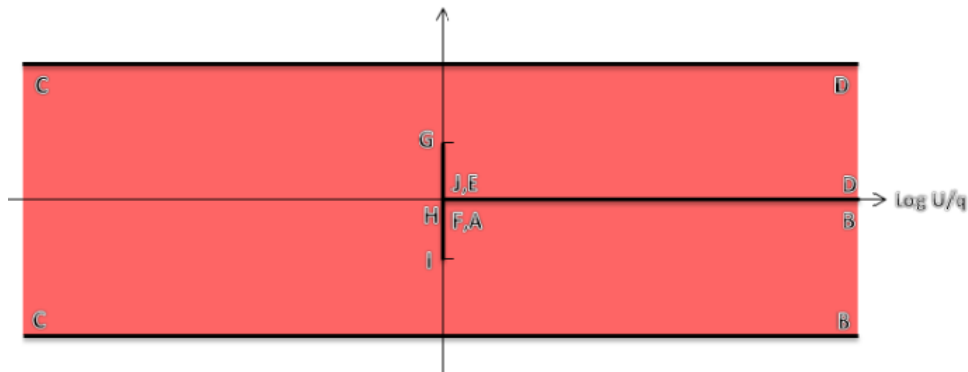


FIGURE 3.5 – **plan  $\Omega$**

Transformé du plan  $z$  par la transformation de *kirchhoff*

---

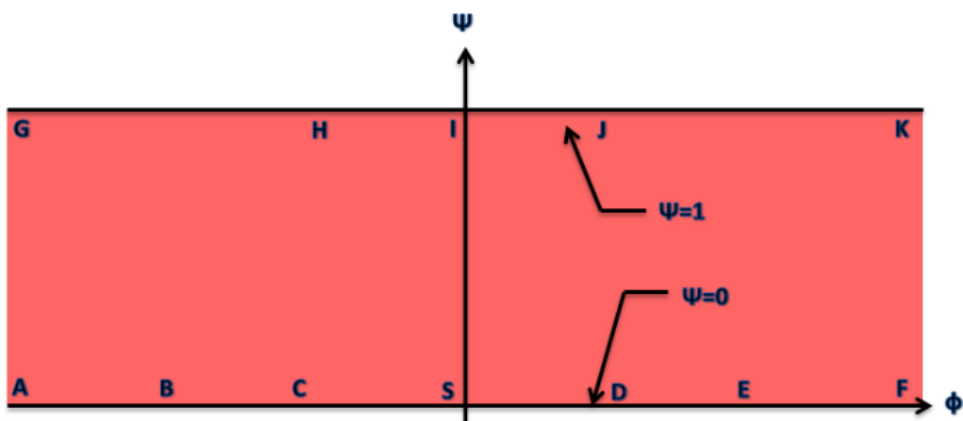


FIGURE 3.6 – **plan  $f$**

Transformé du plan  $z$  par l'application du  $f = \Phi + i\Psi$

---

5<sup>eme</sup> étape : La solution.

En utilisant la relation  $U_0 \frac{dz}{d\lambda} = U_0 \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}$ .

on obtient :

$$U_0 \frac{dz}{d\lambda} = \frac{-2LU_0}{\pi} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)} \\ \times \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \end{array} \right) \quad (3.26)$$

Alors :

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{-2L}{\pi} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)} \\ \times \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \end{array} \right) \quad (3.27)$$

Pour obtenir la solution du problème, on élimine la variable auxiliaire  $\lambda$  des deux relations (3.19) et (3.24), ainsi on aboutit à une relation entre  $f$  et  $z$  sera établie :

$$z(\lambda) = \frac{-2L}{\pi} \int \left( \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)} \right. \\ \left. \times \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) d\lambda + z_0 \quad (3.28)$$

$$-1 < \lambda < 1 \quad (3.29)$$

avec  $z_0$  constante à déterminer.

Sur la surface libre,  $f = \phi - iLU_0$ ;  $-\infty < \phi < +\infty$ , donc la forme de la surface libre est donnée par :

$$x(\Phi) = \text{Real} \left( \frac{-2L}{\pi} \int \left( \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) d\lambda + z_0 \right) \quad (3.30)$$

Et

$$y(\Phi) = \text{Image} \left( \frac{-2L}{\pi} \int \left( \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{6 + 3(9a^2 - 1)\sqrt{1 - a^2} - 54a^2}{8(9a^2 - 1)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\sqrt{(1 - a^2)} - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{(1 - a^2)} + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right) \frac{1}{3\sqrt{1 - a^2}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) d\lambda + z_0 \right) \quad (3.31)$$

$$\lambda = \frac{e^{\left(\frac{\pi f}{LU_0}\right)} - 1}{e^{\left(\frac{\pi f}{LU_0}\right)} + 1}, \quad d\lambda = \frac{2\pi}{LU_0} \frac{e^{\left(\frac{\pi f}{LU_0}\right)}}{\left(e^{\left(\frac{\pi f}{LU_0}\right)} + 1\right)^2} df \quad (3.32)$$

$$f = \Phi + iLU_0 \quad -\infty < \Phi < +\infty$$

$$\text{Si : } a = \frac{2}{3}$$

donc La forme :

$$\int \left[ \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( \frac{\sqrt{8} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{8} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{-6 + \sqrt{5}}{8}} \left( \frac{\sqrt{5} - 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\sqrt{5} + 3i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{\sqrt{5}}{5}} \left( \frac{1 + i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{1 - i\sqrt{(\lambda^2 - 1)}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] d\lambda \quad (3.33)$$

est une intégrale qu'on ne puet pas la résoudre par les méthodes d'intégrations connues. En l'intégrant numériquement, on obtient la surface libre.

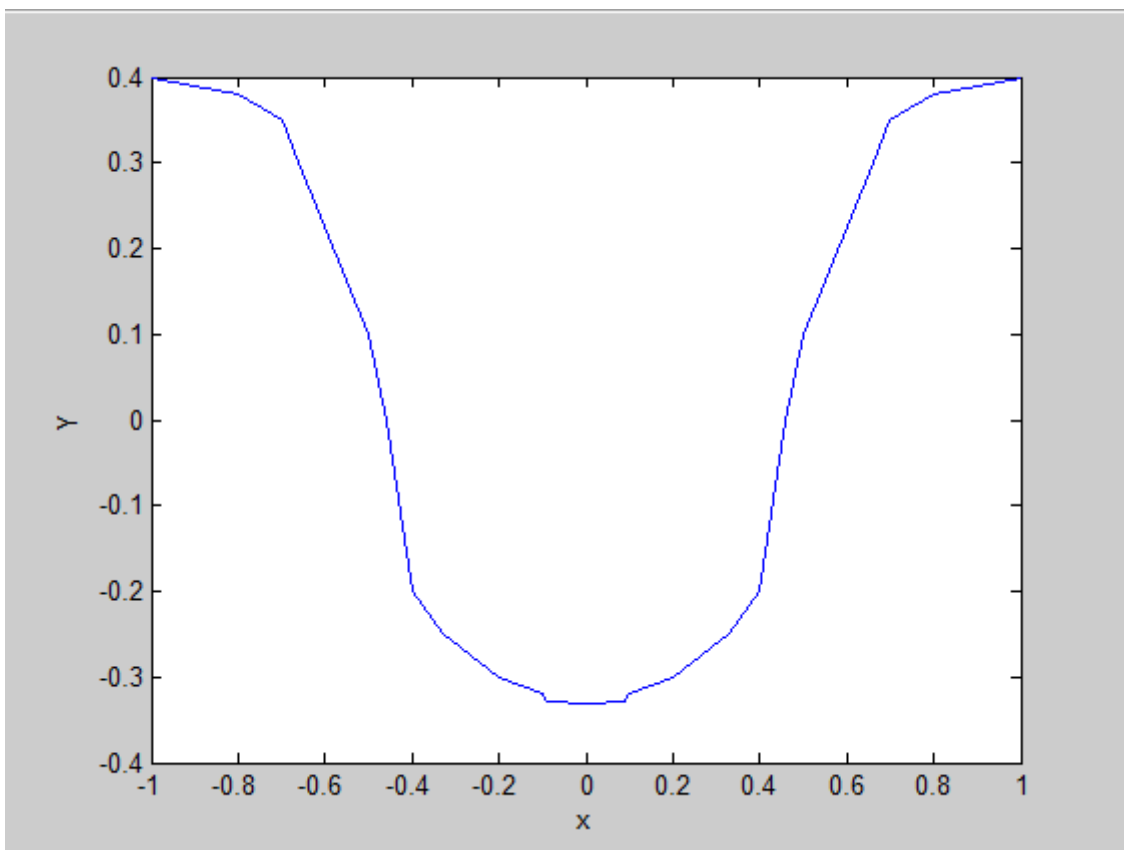


FIGURE 3.7 – Forme de la surface libre

---

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Les équations de Navier-Stokes ont de grande importance dans la mécanique des fluides, car elles décrivent le mouvement de fluide. En générales elles ont des solutions particulières pour plusieurs problèmes en physique et en science de l'ingénieur.

Dans ce travail, on a traité un problème non-linéaire qui est un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide parfait dans un trapèze isocèle qui fait un angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$  avec l'axe horizontale ( $OX$ ). Où on a déterminé analytiquement sa solution exacte (forme de la surface libre) en négligeant les effets de la tension de la surface et les forces de la gravité, avec l'utilisation de la méthode des lignes de courants basée sur la transformation hodographe et la transformation de Schawartz-Christoffel. Nous envisagerons les perspectives, qu'ils ouvrent d'un point de vue des futures travaux comme par exemple la résolution numérique de ce type des problèmes en considérant les effets de la tension de la surface et les forces de la gravité. Aussi le changement de la géométrie du domaine ou l'état de l'écoulement (écoulement rotationnel, tridimensionnel, ....etc...)

---

## ANNEXE

### Transformations conformes

Soit  $f$  une fonction de variable complexe de le plan  $Z$  vers le plan  $W$ .

Une transformation  $f(z) = w$  est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan  $Z$  est égale à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans la plan  $W$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction  $f(z)$  soit analytique.

### Quelques transformations générales

**Translation.**

$$w = z + x \tag{3.34}$$

par cette transformation les figures du plan sont déplacées ou translatées dans la direction du vecteur  $\beta$ .

**Rotation.**

$$w = \exp(i\theta)z \tag{3.35}$$

par cette transformation les figures des  $z$  subissent une rotation d'angle  $\theta$ .

## Homothétie.

$$w = az \tag{3.36}$$

par cette transformation les figures sont dilatées si  $a$  est supérieure à 1

## Transformation homographique.

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{3.37}$$

est appelée transformation homographique. Cette transformation peut être considérée comme le produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie.

La transformation est définie par la donnée de trois points distincts du plan des  $z$  et de leurs trois points transformés le plan des  $w$ , l'un d'entre eux peut être à l'infini t.q :  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des nombres complexes.

## Méthode de Simpson

La méthode d'intégration de Simpson est basée sur une division de l'intervalle de dérivation  $[a, b]$  en sous intervalles de taille fixe  $h$ . et ensuite de diviser la longueur  $h$  en 3. Tel que :

$$I_s(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 4f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}) + \dots + f(x_n + 1)] \tag{3.38}$$

$$I_s(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_1) + f(x_n + 1) + 4 \sum_{(i-paire)} f(x_i) + 2 \sum_{(i-impaire)} f(x_i) \right]$$

Le programme Matlab suivant correspond à l'exemple de :  $f(x) = 3x^2 + 2x$ .

## Programme Matlab

```
function I = Simpson(a, b, n)
h = (b - a)/n;
x = [a : h : b];
f = 3 * x.^2 + 2 * x;
I = f(1) + f(n + 1);
```

```
for i = 2 : 2 : n
I = I + 4 * f(i);
end
for i = 3 : 2 : n
I = I + 2 * f(i);
end
I = h/3 * I;
```

en exécutant ce programme sur l'intervalle  $[1, 2]$  avec 8 sous intervalles :

```
>> I = Simpson(1, 2, 8)
I =
10
```

On remarque que le résultat pour ce programme est très précis.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical flat plate, *Appl. Math, Sci*, 1(2007) ; 2687 - 2698
- [2] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical flat plate, *Appl. Math, Sci*. 1 (2007), 2687-2698.
- [3] A.R. Elcrat and L.N. Trefthen, Classical free-streamline flows over a polygonal obstacle, *J. Comp and Applied Math*. 14 (1986), 256-265.
- [4] asavanat and Jean-Marc Vanden-Broeck.free-surface supercritical splashless flows past a two-dimensional symmetrical rectilinear body , *Eur .J.Mech.B/Fluids*.(1998)Vol 17,N<sup>o</sup>6882.
- [5] B.Bouder and H.Mekias, The cusp free surface flow due to a sink with effects of surface-tension, *Kybernetez*,G.B.August 2001.
- [6] Ben Hamouda Riad, *Notions de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés*, Centre de Publication Universitaire Tunis 2008 .
- [7] C. Grossetête. *Mécanique des fluides*, Ellipses, Paris, (1991).
- [8] E. O. Tuck, Eflux from a slit in a vertical wall, *J. Fluid Mech*. 176 (1987), 253-264.
- [9] G. Birkhoff and E. H. Zarantonello. *Jets, wakes and cavities*, New York, (1957).
- [10] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge (1967).
- [11] J.M. Vanden-Broeck and J. B. Keller, Weir flows, *J. Fluid Mech*. 176 (1987), 283-293.
- [12] J. M. Vanden-Broeck, Flow under a gate, *Phys. Fluids*, 29 (10) (1986), 3148-3151.
- [13] J.M. Vanden-Broeck. Free streamline model for a rising bubble, *Phys. Fluids*, 29 (9) (1986), 2798-2801.
- [14] J. Roussel-E. N. S. C. R. *Mécanique des fluides* (2010).
- [15] M. Damou. *Mécanique des fluides*, (O. P. U), (1993).
- [16] M.I.G. Bloor, Large amplitude surface waves, *J. Fluid Mech* . 84 (1978), 167-179.
- [17] M. I. Gurevich, *Theory of Jets in Ideal Fluids*, Academic Press, New York and London (1965).
- [18] N. Bounab and B. Bouderah, Computing Solution of the Flow due to a Nozzle. I. *J of computer Application*, 67 (13) (2013), 14-18.

- [19] N. Bounab, Simulation numérique de quelques écoulements potentiels en 2D 'Curved nozzle', Thèse de Doctorat, Université de Mohamed Boudiaf M'sila, (2015).
- [20] Scott Tooley The Effects Of Surface Tension On Free Surface Flows Intersecting Rigid Walls, A thesis submitted to the School of Mathematics of the University of East Anglia for the degree of Doctor of Philosophy July 2002.
- [21] T. B. Benjamin, On the flow in channels when rigid obstacles are placed in the stream, J. Fluid Mech. 1 (1956), 227-248.
- [22] W. Peng and D.F. Parker, An ideal fluid jet impinging an uneven wall, J. Fluid Mech. 333 (1997), 231-255.

**ملخص:** في هذه المذكرة قمنا بدراسة تدفق كموني ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج أمام عائق على شكل شبه منحرف متساوي الساقين يصنع زاوية  $\beta = \frac{\pi}{3}$  مع محور الفواصل ولقد تبينا طريقة خطوط التيار التي تعتمد على التحويلات المطابقة وتحويلات شوارتز- كريستوفال في إيجاد شكل السطح الحر للتدفق عند انعدام قوى تأثير التوتر السطحي و قوى الجاذبية .

**الكلمات المفاتيح:** سائل مثالي - تدفق كموني - توتر سطحي - تحويلات شوارتز-كريستوفال

**Abstract:** In this thesis, we have studied a potential flow problem, of an incompressible fluid and non-viscous in front of an obstacle in the form of trapezoid witch forms with the horizontal an angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . We adopted a resolution method based on the conformal transformations and Shwartz-Christoffel transformation in order to find the shape of the free surface of the flow where gravitational forces and the effect of surface tension are neglected.

**Key-Words:** Ideal fluid - Potential flow – Surface tension - Shwartz-Christoffel transformation

**Résumé:** Dans ce mémoire, on a étudié un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle de la forme d'un trapèze isocèle qui forme avec l'horizontale un angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$ . On a adopté la méthode des lignes de courants qui est basée sur les transformations conformes et la transformation de Shwartz-Christoffel pour trouver la forme de la surface libre de l'écoulement en négligeant les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface.

**Mots-clés:** Fluide parfait – Ecoulement potentiel – Tension de la surface – Transformation de Shwartz-Christoffel.