

Remerciements

Je tiens à remercier ALLAH qui m'a donné la force de faire ce modeste travail, je tiens à remercier mon encadreur Monsieur D. Drihem qui m'a donné ses avis, ses orientations et ses conseils sur cet ouvrage.

Je ne saurais oublier de remercier tous les membres de jury, mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues en lointain et proche, je citerais plus particulièrement: Elhadj Saad, Tahar Aidjouli, Bashir Benattia et Foudhil Abdellaoui.

Enfin, que celles ou ceux que j'ai oublié me pardonnent.

Résumé

Dans notre thèse qui s'intitule espace de Hardy, nous avons étudié quelques résultats préliminaires que nous utiliserons dans la suite et nous avons donné la définition et quelques propriétés principales de ces espaces, puis nous avons fait la caractérisation par la fonction maximale et appliqué des applications dans cette espace.

Mots clés. L'espace H^p , l'espace L^p , la fonction maximale, atome, molécule, opérateurs multiplicateurs de Fourier.

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques résultats préliminaires	3
1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ et ℓ_p	3
1.2 Fonction maximale de Hardy-Littlewood	4
1.3 Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	6
2 Atomes et espace de Hardy	9
2.1 Définitions et quelques propriétés	9
3 La caractérisation avec la fonction maximale	15
3.1 La caractérisation	15
3.2 Molécules	25
4 Applications	27
Bibliographie	30

Introduction

En analyse complexe, les espaces de *Hardy* (ou classes de *Hardy*) H^p sont certains espaces de fonctions holomorphes sur le disque unité ou demi-plan supérieur. Ils ont été introduits par *Frigyes Riesz* (*Riesz* 1923), qui eux, nommé après *G.H Hardy*. En analyse réelle les espaces de *Hardy* sont certains espaces de distributions sur la droite réelle, qui sont (dans le sens des distributions) les valeurs limites des fonctions holomorphes des espaces complexes *Hardy* et sont liées à des espaces L^p de l'analyse fonctionnelle. Pour $1 \leq p \leq \infty$ ces véritables *Hardy* H^p espaces sont certains sous-ensembles de L^p , tandis que pour $p < 1$ les espaces L^p ont des propriétés indésirables et les espaces de *Hardy* sont beaucoup mieux comportés.

Les espaces de Hardy ont un certain nombre d'applications dans l'analyse mathématique elle-même, ainsi que dans la théorie du contrôle (telles que H^∞ méthodes) et en théorie de la diffusion.

Pour résoudre ce problème, nous avons préparé une thèse intitulée espace de Hardy.

La thèse se divise en quatre parties:

Dans la première partie on donne quelques rappelés sur les espaces L^p , ℓ_p et nous définissons la fonction maximale de Hardy-Littlewood et des autre définitions que nous utiliserons dans la suite.

Dans la deuxième partie on donne la définition de ces espaces puis on donne quelques propriétés pour ces espaces.

Dans la troisième partie on donne une caractérisation par la fonction maximale pour ces espaces, puis nous défffinisons les molécules.

Dans la quatrième partie on applique des applications dans cet espace comme la convolution, opérateurs multiplicateurs de Fourier.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous parlons des concepts de base qui touchent directement à la question de l'objet de recherche selon les chapitres suivants, qui nous rend conscients de concepts différents avec un des éléments constitutifs directs de la recherche en cours, qui traite de la question d'espace de Hardy.

1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ et ℓ_p

Définition 1.1.1. Soit $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On pose

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$.

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.1.2. (Inégalité de Hölder). Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Théorème 1.1.3. (Hölder généralisé). Soit $0 < p, q, t \leq \infty$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{t}$. Alors

$$\|f \cdot g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_t.$$

Théorème 1.1.4. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$

Si $\mu(\Omega) < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ de plus

$$\|f\|_p \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Théorème 1.1.5. (Inégalité de Minkowski). Soient $f, g \in L^p$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f + g \in L^p$ et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Définition 1.1.6. Soient $f, g \in L^1$. Le produit de convolution $f * g$ est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy.$$

Définition 1.1.7. Soit $0 < p \leq \infty$. On pose

$$\ell_p = \left\{ \{f_j\}_{j \geq 0} \subset \mathbb{C}, \text{ telle que } \left\| \{f_j\}_{j \geq 0} \mid \ell_p \right\| < \infty \right\},$$

avec

$$\left\| \{f_j\}_{j \geq 0} \mid \ell_p \right\| = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty, \\ \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |f_j| & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

Théorème 1.1.8. Si $0 < p \leq q \leq \infty$, alors on a $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$.

1.2 Fonction maximale de Hardy-Littlewood

Nous allons commencer à donner la définition de la fonction maximale Hardy-Littlewood, qui joue un rôle très important en analyse harmonique.

Définition 1.2.1. Supposons que f est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^n , i.e. $f \in L^1_{loc}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction maximale de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}f$ est définie par

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy \tag{1.2.1}$$

\mathcal{M} est aussi appelé l'opérateur maximale de Hardy-Littlewood.

Parfois, nous avons besoin d'utiliser les fonctions maximales suivantes. Pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\acute{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy, \quad (1.2.2)$$

où et ci-dessous, $Q(x,r)$ désigne le cube de centre x et avec longueur r . $|E|$ indique la mesure de Lebesgue de l'ensemble E . Plus généralement,

$$\mathring{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad (1.2.3)$$

lorsque la supremum est pris sur tous les cubes ou boules Q contenant x .

Remarque 1.2.2. Par (1.2.1)-(1.2.3), il est facile de voir qu'il existe constantes C_i ($i = 0, 1, 2, 3$) dépendant que de la dimension n tel que

$$C_0 \mathcal{M}f(x) \leq C_1 \acute{\mathcal{M}}f(x) \leq C_2 \mathring{\mathcal{M}}f(x) \leq C_3 \mathcal{M}f(x) \quad (1.2.4)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.3. La fonction maximale de Hardy-Littlewood \mathcal{M} n'est pas bornée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nous ne considérons le cas $n = 1$. Prenez $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, alors pour tout $x \geq 1$, on a

$$\mathcal{M}f(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(y) dy = \frac{1}{2x},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}f(x) dx \geq \int_1^{\infty} \mathcal{M}f(x) dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx = \infty.$$

Alors la fonction maximale \mathcal{M} n'est pas bornée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.2.4. La fonction maximale \mathcal{M} est bornée sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on vérifie que $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, on a

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy &\leq \|f\|_\infty \int_{B(x,r)} dy, & \forall x, \forall r > 0 \\ &= |B(x,r)| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

on divise sur $|B(x, r)|$ donc

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty.$$

Alors

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Théorème 1.2.5. Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n .

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{M}f$ est finie presque-partout.

(b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $C = C(n) > 0$ telle

que:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

(c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ($1 < p \leq \infty$) alors $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $C = C(n, p) > 0$ telle que $\|\mathcal{M}f\|_p \leq C \|f\|_p$.

Preuve. Voir [2, page 66].

1.3 Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.3.1. Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k}

Une quasi norme sur E est une application $P : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant:

- 1) $P(\alpha f) = |\alpha| P(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall f \in E$.
- 2) $P(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\forall f \in E$.
- 3) $P(f + g) \leq C(P(f) + P(g))$, $C > 1$, $\forall (f, g) \in E$.

Définition 1.3.2. On dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est à décroissance rapide si pour tout $m \in \mathbb{N}$ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \varphi(x) = 0$. On dit que la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi$ est à décroissance rapide. Il est équivalent à dire que les quantités suivantes

$$N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|,$$

sont finies pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.3.3. On peut démontrer que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si seulement si

$$\|\varphi\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{|\beta| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\partial^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Définition 1.3.4. Une forme linéaire T définie sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dit une distribution tempérée, ce qu'on note $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{k,\mathcal{S}}.$$

Exemples 1.3.5. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3.6. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on appelle transformation de Fourier de f , la fonction \hat{f} ou $\mathcal{F}f$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ par:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx$$

et \check{f} ou $\mathcal{F}^{-1}f$ sa transformée de Fourier inverse.

Lemme 1.3.7. (Weitney). Soit F un ensemble fermé non vide dans \mathbb{R}^n . Alors son complémentaire Ω est l'union d'une suite des cubes Q_k , dont les faces sont parallèles aux axes, dont les intérieurs sont mutuellement disjoints et dont les diamètres sont sensiblement proportionnelles à leurs distances à partir F . Plus explicitement:

- i) $\Omega = {}^C F = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$.
- ii) $Q_j^0 \cap Q_k^0 = \emptyset$ si $j \neq k$.
- iii) Il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$, afin que

$$c_1 \text{diam} Q_k \leq \text{dist}(Q_k, F) \leq c_2 \text{diam} Q_k.$$

Définition 1.3.8. (Réarrangements décroissants). Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur X . Le réarrangement décroissant de f est la fonction f^* défini sur $[0, \infty)$ par

$$f^*(t) = \inf \{s > 0 : d_f(s) \leq t\},$$

tel que

$$d_f(s) = |\{x \in X : |f(x)| > s\}|.$$

Proposition 1.3.9. *Pour f μ -mesurable et $0 \leq \alpha, t < \infty$ nous avons*

(1) $d_f = d_{f^*}$.

(2) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ lorsque $0 < p < \infty$.

(3) $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$ lorsque $0 < p < \infty$.

(4) $\sup_{t>0} t f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha) = \|f\|_{L^{1,\infty}}$.

Chapitre 2

Atomes et espace de Hardy

Après nous avons parlé dans le chapitre précédent sur les éléments fondamentaux qui influent sur l'objet d'espace de Hardy fondamentalement, nous nous tournons maintenant vers les différents concepts et les définitions relatives à ce sujet, de sa définition et ses propriétés, en fonction de son association avec l'objet d'atomes.

C'est pour atteindre l'objectif de cette recherche est l'analyse et le ré-installation de la notion d'espace de Hardy, puis sortir la définition d'une claire et évidente en fonction de divers autres espaces qui sont liés à ce sujet.

2.1 Définitions et quelques propriétés

Soit $n \geq 1$ et $0 < p \leq 1$ et mettre $N = [n(1/p - 1)]$.

Définition 2.1.1. p - atome est une fonction $a \in L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a support contenu dans une boule B telle que

$$(1) \|a\|_\infty \leq |B|^{\frac{-1}{p}}.$$

$$(2) \int a(x) R(x) dx = 0 \text{ pour chaque } R \text{ polynôme de degré au plus } N.$$

On remarque que (1) implique

$$\|a\|_p \leq 1, \|a\|_1 \leq |B|^{1-\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

car

$$\begin{aligned}
 \|a\|_p &= \left(\int_B |a(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a(x)| \left(\int_B dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|a\|_\infty |B|^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq |B|^{\frac{-1}{p}} |B|^{\frac{1}{p}} = 1
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|a\|_1 &= \int_B |a(x)| dx \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a(x)| \int_B dx \\
 &\leq \|a\|_\infty |B| \\
 &\leq |B|^{\frac{-1}{p}} |B| = |B|^{1-\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Nous devons vérifier que des sommes atomiques donner un sens.

Proposition 2.1.2. *Si $(a_j)_j$ sont p -atomes, $0 < p \leq 1$ et $(\lambda_j)_j$ sont des nombres complexes avec $\sum |\lambda_j|^p < \infty$, alors $\sum \lambda_j a_j$ converge dans l'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées.*

Preuve.

Si $p = 1$, nous avons une convergence L^1 raison de (2.1) telle que

$$\begin{aligned}
 \left| \left\langle \sum \lambda_j a_j, \phi \right\rangle \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum \lambda_j a_j(x) \phi(x) dx \right| \\
 &= \left| \sum \lambda_j \int_B a_j(x) \phi(x) dx \right| \\
 &\leq \sum |\lambda_j| \|a\|_\infty \|\phi\|_\infty \left| \int_B dx \right| \\
 &\leq c.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant $p < 1$. Fixer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
 \left| \left\langle \sum \lambda_j a_j, \phi \right\rangle \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum \lambda_j a_j(x) \phi(x) dx \right| \\
 &= \left| \sum \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \phi(x) dx \right| \\
 &\leq \sum |\lambda_j| \left| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \phi(x) dx \right|
 \end{aligned}$$

puisque $\sum |\lambda_j| < \infty$, il suffit de montrer que $\left| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \phi(x) dx \right| \leq C = C(\phi)$ pour un p -atome a_j . Soit $B_j = B_j(y, r)$ une boule telle que $a_j \subset B_j$. Par (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \phi(x) dx \right| &\leq |B_j|^{1-\frac{1}{p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| \\
 &\leq C
 \end{aligned}$$

qui est bornée par C si $r \geq 1$. Si $r < 1$, on note par P_y^N le polynôme de Taylor de ϕ à y du degré N . Autrement dit

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \sum_{|\alpha| \leq N} (x-y)^\alpha D^\alpha \phi(y) + \sum_{|\alpha|=N+1} (x-y)^\alpha D^\alpha \phi(\theta y + (1-\theta)x), \quad 0 < \theta < 1 \\
 &= P_y^N(x-y) + \sum_{|\alpha|=N+1} (x-y)^\alpha D^\alpha \phi(\theta y + (1-\theta)x),
 \end{aligned}$$

puis (2) implique

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \phi(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) (\phi(x) - P_y^N(x-y)) dx \right| \\
 &\leq c |B|^{1-\frac{1}{p}} r^{N+1} \sup_{|\beta|=N+1} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\beta \phi| \\
 &\leq C,
 \end{aligned}$$

puisque $|B| \sim r^n$ $|x-y| \leq r$ et $N+1 > n(1/p-1)$.

Définition 2.1.3. (Espace de Hardy). On désigne par $H^p(\mathbb{R}^n)$, l'espace de toutes distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec des représentations $f = \sum \lambda_j a_j$ telle que $(a_j)_j$ sont p -atomes, $0 < p \leq 1$ et $(\lambda_j)_j$ sont des nombres complexes avec $\sum |\lambda_j|^p < \infty$. On pose

$$\|f\|_{H^p} = \inf \left(\sum |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où l'inf est sur toutes une représentation de f .

L'espace de Hardy est un espace quasi-normé. L'inégalité du triangulaire remplacé par

$$\|f + g\|_{H^p} \leq C_p(\|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p}),$$

où $C_p = 1$ seulement pour $p = 1$, de la preuve vient de donner, nous obtenons

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq c \|f\|_{H^p} \sup_{|\beta| \leq N+1} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\beta \phi|$$

pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par un procédure limitation, nous avons que $\langle f, \phi \rangle$ est défini dès que $f \in H^p$, $\phi \in C^{N+1}$ et le double sup dans la partie droite est fini. En particulier, la transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \langle f(x), \exp(-2\pi i x \cdot \xi) \rangle$$

et l'intégrale de Poisson

$$p_t f(t, x) = p_t * f(x) = \left\langle f(y), c_n \frac{t}{((x-y)^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \right\rangle,$$

existent et sont fonction continue de $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Il est également clair que $H^1 \subset L^1$ avec une inclusion continue.

Pour traiter intégrale singulière, il nous avons besoin de type plus général d'atomes.

Définition 2.1.4. Soit $0 < p \leq 1 \leq q < \infty$, $p < q$. Une (p, q) -atome est une fonction $a \in L^q$ avec $\text{supp } a \subset B$ telle que

$$(1') \quad (|B|^{-1} \int |a(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} \leq |B|^{\frac{-1}{p}}.$$

$$(2') \quad \int a(x) R(x) dx = 0 \text{ pour chaque } R \text{ polynôme de degré au plus } N.$$

(p, ∞) - atome est par définition un p -atome.

Par l'inégalité de Hölder, tout (p, q) -atome, en particulier tout p -atome, est une (p, q_1) -atome pour $q_1 < q$.

Remarque 2.1.5.

· On remarque que (2.1) et la proposition 2.1.2 restent valables pour (p, q) -atomes.

· Plus tard, nous verrons que (p, q) -atomes peuvent être utilisés à la place du p -atomes dans la définition de H^p , mais d'abord nous donner un résultat sur les intégrales singulières. Soit K un noyau de class C^{N+1} à l'extérieur 0 ayant une valeur 0 sur chaque sphère et tel que

$$|D^\beta K(x)| \leq c |x|^{-n-|\beta|} \text{ pour } |\beta| \leq N + 1$$

par K , nous désigne également la distribution

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{X\{\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon\}}$$

puisque $\mathcal{F}K$ est borné, la convolution par K est borné sur L^2 .

Théorème 2.1.6. *Si a est un $(p, 2)$ -atome, la convolution $K * a$ peut être écrit comme $\sum \lambda_j a_j$, où $\sum |\lambda_j|^p < c = c(p, K)$ et le a_j sont $(p, 2)$ -atomes. Si $f \in H^p$, la distribution $K * f$ existe et peut même être écrire $\sum \lambda_j a_j$, avec $(p, 2)$ -atomes a_j et*

$$\left(\sum |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{H^p} .$$

Preuve.

Nous prouvons la première déclaration, la seule difficulté dans la deuxième déclaration est alors de vérifier que $K * f$ est indépendante de la décomposition atomique de f . Mais qui est facilement manipulé, si nous appliquons les distributions à un test de fonction ϕ , donc envisager un atome a avec $\text{supp} a \subset B = B(0, r)$, choisissez les fonctions $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $i = 0, 1, \dots$, avec

$$\begin{cases} \psi_i \geq 0 \\ \sum \psi_i = 1 \end{cases}$$

tel que $\text{supp} \psi_0 \subset [0, 2r]$ et $\text{supp} \psi_i \subset [2^{i-1}r, 2^{i+1}r]$, $i \geq 1$ et $|D^k \psi_i(t)| \leq c_k t^{-k}$ pour $t > 0$, $k = 1, 2, \dots$ laissant $K_i(x) = K(x) \psi_i(|x|)$, nous voyons que K_i satisfait la même condition que K . En particulier, K_0 est un convolutor borné sur L^2 , donc $\|K_0 * a\|_2 \leq c \|a\|_2$, et $\text{supp} K * a \subset B(0, 3r)$. Il est facile de vérifier que les moments de $K_0 * a$ d'ordre jusqu'à N disparaissent, comme ceux de a . Donc, $K_0 * a$ est un $(p, 2)$ -atome. Pour $i \geq 1$, nous voyons que $|D^\beta K_i(x)| \leq c (2^i r)^{-n-|\beta|}$ pour toute x .

Si P_y^N est le polynôme de Taylor de K_i à y de degré N , nous obtenons

$$K_i * a(y) = \int (K(x) - P_y^N(x-y)) a(y-x) dx$$

ici, entre parenthèses est au plus

$$c |x-y|^{N+1} \sup_{|\beta|=N+1} |D^\beta K_i|$$

et $|x-y| \leq r$. maintenant (2.1) implique

$$\begin{aligned} |K_i * a(y)| &\leq cr^{N+1} (2^i r)^{-n-N-1} r^{n-\frac{n}{p}} \\ &\leq c2^{i(n(\frac{1}{p}-1)-N-1)} (2^i r)^{\frac{-n}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque $\text{supp} K_i * a \subset B(0, 2^{i+2}r)$, nous avons

$$K_i * a = c2^{i(n(\frac{1}{p}-1)-N-1)} a_i,$$

où a_i est un p -atome et donc a est $(p, 2)$ -atome.

Ici, les coefficients sont assez petits, puisque $n\left(\frac{1}{p}-1\right) - N - 1 < 0$ et la preuve est terminée.

Chapitre 3

La caractérisation avec la fonction maximale

Dans ce chapitre, le troisième, qui était la caractérisation avec la fonction maximale, nous allons essayer de suivre et de répondre à la question de la caractérisation avec la fonction maximale, car il est très important dans cette étude et qui sont nécessaires pour compléter la compréhension de la forme sous réserve de l'année.

3.1 La caractérisation

Si ϕ est une fonction, on pose $\phi_t(x) = t^{-n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$ et introduit la fonction maximale

$$M_\phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)| .$$

En supposant que les convolutions $f * \phi_t$ existe et sont des fonctions.

Théorème 3.1.1. *Si a est un (p, q) -atome, $p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ et $\phi \in C^{N+1}$ satisfait*

$$|D^\beta \phi(x)| \leq (1 + |x|)^{-n-|\beta|-\delta}, \quad |\beta| \leq N + 1 \quad (3.1.1)$$

pour tout $\delta > 0$, alors $M_\phi a \in L^p$ et $\|M_\phi a\|_p \leq C = C(p, q, \delta, n)$.

Corollaire 3.1.2. *Si ϕ est comme dans le théorème 3.1.1 et $f \in H^p$, alors $M_\phi f \in L^p$*

et

$$\|M_\phi f\|_p \leq C \|f\|_{H^p} .$$

Preuve.

Si $f = \sum \lambda_j a_j$, nous avons

$$\begin{aligned} |M_\phi f(x)|^p &= \left| M_\phi \left(\sum \lambda_j a_j(x) \right) \right|^p \\ &= \left| \sum \lambda_j M_\phi a_j(x) \right|^p \\ &\leq \sum |\lambda_j M_\phi a_j(x)|^p \\ &\leq \sum |\lambda_j|^p |M_\phi a_j(x)|^p. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int |M_\phi f(x)|^p dx \leq \sum |\lambda_j|^p \int |M_\phi a_j(x)|^p dx.$$

On applique le théorème 3.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|M_\phi f\|_p &\leq \|M_\phi a_j\|_p \|f\|_{H^p} \\ &\leq C \|f\|_{H^p}. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.3. Nous laissons $f^*(x) = \sup_{t>0} |pf(t, x)|$, où $pf(t, x) = f * p_t(x)$ et

$$p_t(x) = C_n \frac{t}{(x^2 + t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}$$

est le noyau de Poisson. Laissant $\phi = p_1$ dans le corollaire 3.1.2, nous obtenons:

Corollaire 3.1.4. Si $f \in H^p$, alors

$$f^* \in L^p \text{ et } \|f^*\|_p \leq C \|f\|_{H^p}.$$

Preuve du théorème 3.1.1.

Soit $B = B(0, r)$ une boule qui est support a . Dans $B(0, 2r)$, nous estimons $M_\phi a \leq M_\psi |a|$, où $\psi(x) = (1 + |x|)^{-n-\delta}$. Comme M_ψ est bornée sur L^q si $q > 1$ donc l'inégalité de Hölder implique

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 2r} |M_\phi a(x)|^p dx &\leq C \left(\int_{|x| \leq 2r} (M_\psi |a(x)|)^q dx \right)^{\frac{p}{q}} |B|^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq C \|a\|_q^p |B|^{1-\frac{p}{q}} = C. \end{aligned}$$

Si $q = 1$, alors $p < 1$ et $M_\psi : L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$, donc $\|M_\psi |a|\|_{L^{1,\infty}} \leq c \|a\|_1$. Mais $\sup_{t>0} t (M_\psi |a|)_*(t) = \|M_\psi |a|\|_{L^{1,\infty}}$, alors

$$(M_\psi |a|)_* \leq C \|a\|_1 t^{-1}.$$

En utilisant les relations simples

$$(|f|^p)_* = (f_*)^p \quad \text{et} \quad \int_E |f(x)| dx \leq \int_0^{|E|} f_*(t) dt,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2r)} |M_\psi a(x)|^p dx &\leq c \int_0^{|B(0,2r)|} \|a\|_1^p t^{-p} dt \\ &\leq C |B|^{p-1+1-p} = C. \end{aligned}$$

Hors $B(0, 2r)$, nous utilisons les moments nuls de a et notons par P_y^N le polynôme de Taylor à y de degré N . Alors

$$\begin{aligned} a * \phi_t(y) &= \int \phi_t(x) a(y-x) dx \\ &= t^{-n} \int \phi\left(\frac{x}{t}\right) a(y-x) dx \\ &= t^{-n} \int \left(\phi\left(\frac{x}{t}\right) - P_{\frac{y}{t}}^N\left(\frac{(x-y)}{t}\right) \right) a(y-x) dx, \end{aligned}$$

mais

$$\left| \phi\left(\frac{x}{t}\right) - P_{\frac{y}{t}}^N\left(\frac{(x-y)}{t}\right) \right| \leq C \left(\frac{|x-y|}{t}\right)^{N+1} \sup_{|\beta|=N+1, z \in B\left(\frac{y}{t}, \frac{|x-y|}{t}\right)} |D^\beta \phi(z)|.$$

Comme $|x-y| < r$ et $|y| > 2r$, nous avons $B\left(\frac{y}{t}, \frac{|x-y|}{t}\right) \subset \left\{ |z| > \frac{|y|}{2t} \right\}$. Alors (3.1.1) implique

$$\begin{aligned} |a * \phi_t(y)| &\leq C t^{-n} \left(\frac{r}{t}\right)^{N+1} \left(1 + \frac{|y|}{2t}\right)^{-n-N-1-\delta} \|a\|_1 \\ &\leq C t^{-n} \left(\frac{r}{t}\right)^{N+1} \left(1 + \frac{|y|}{2t}\right)^{-n-N-1-\delta} |B|^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq C r^{N+1+n-\frac{n}{p}} t^{-n-N-1} \left(1 + \frac{|y|}{2t}\right)^{-n-N-1-\delta}, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

où nous utilisons (2.1). Il est facile de voir que la dernière expression est la valeur maximale à $C r^{N+1+n-\frac{n}{p}} |y|^{-n-N-1}$ pour $t \sim |y|$. On obtient

$$\left(\int_{|y|>2r} |M_\psi a(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq C.$$

La preuve est terminée.

Définition 3.1.5. Soit $A_{\delta, N+1}$ l'ensemble de tous les $\phi \in C^{N+1}$ satisfaisant (3.1.1). Alors la grande fonction maximale est définie par

$$M_{\delta, N+1}f(x) = \sup_{\phi \in A_{\delta, N+1}} \sup_{t > 0} |f * \phi_t(x)|$$

et la fonction nontangential maximale que

$$M_{\delta, N+1}^V f(x) = \sup_{\phi \in A_{\delta, N+1}} \sup_{t > 0} \sup_{|x-y| < \gamma t} |f * \phi_t(x)| ,$$

où $\gamma > 0$ est une constante.

Corollaire 3.1.6.

(a) Chaque $f \in H^p$ satisfait $M_{\delta, N+1} \in L^p$ pour $\delta > 0$ et

$$\|M_{\delta, N+1}f\|_p \leq C \|f\|_{H^p}, \quad C = C(n, p, \delta).$$

(b) Le même est vrai pour $M_{\delta, N+1}^V$, avec un C dépendant aussi γ .

Preuve.

(a) Les inégalités $M_\psi a \leq M_\psi |a|$ et (3.1.2) de la dernière preuve sont également valables pour $M_{\delta, N+1}$, ce qui implique (a).

(b) Nous laissons $\tau_z \phi(x) = \phi(x - z)$ et d'obtenir

$$\begin{aligned} f * \phi_t(x) &= f * \tau_{y-x} \phi_t(y) \\ &= f * \left(\tau_{\frac{y-x}{t}} \phi \right)_t(y). \end{aligned}$$

Mais $\frac{|x-y|}{t} < \gamma$ et $A_{\delta, N+1}$ presque invariant par translation dans le sens que $\phi \in A_{\delta, N+1}$ implique $\tau_z \phi \in CA_{\delta, N+1}$ pour $|z| < \gamma$, où C dépend γ . Alors

$$M_{\delta, N+1}^V f(x) \leq CM_{\delta, N+1}f(x) ,$$

ce qui donne (b).

Définition 3.1.7. Soit A_m pour $m \in \mathbb{N}$ désignent l'ensemble de tous les $\phi \in C^m$ satisfaisant

$$|D^\beta \phi(x)| \leq (1 + |x|)^{-m}, \quad |\beta| \leq m.$$

Si $f \in \mathcal{S}'$, il existe m et C tels que

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C \sup_{|\beta| \leq m} \sup_x (1 + |x|)^m |D^\beta \phi(x)| \quad (3.1.3)$$

pour $\phi \in \mathcal{S}$, telle que f est définie et borné sur A_m . Alors $f * \phi$ est une fonction continue si $\phi \in A_m$.

Définition 3.1.8. Nous définissons M_m et M_m^V comme $M_{\delta, N+1}$ et $M_{\delta, N+1}^V$ mais avec $A_{\delta, N+1}$ remplacé par A_m .

Théorème 3.1.9. Soit $f \in \mathcal{S}'$ et m pour lequel (3.1.3) est vérifiée. Si $M_m f \in L^p$, alors $f \in H^p$ et

$$\|f\|_{H^p} \leq C \|M_m f\|_p.$$

Ce qui implique la caractérisation suivante:

Corollaire 3.1.10. Soit $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ et $f \in \mathcal{S}'$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $f \in H^p$.
- (ii) $f = \sum \lambda_j a_j$ avec la convergence dans \mathcal{S}' , où le a_j sont (p, q) -atomes et $\sum |\lambda_j|^p < \infty$.
- (iii) $M_m f \in L^p$ pour tout m .
- (iv) $M_m^V f \in L^p$ pour tout m .

Preuve.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est trivial et (ii) \Rightarrow (iii) est par le corollaire 3.1.6(a), car $M_m \leq M_{\delta, N+1}$ si $m > \delta + N + 1 + n$. La méthode de la preuve d'après la corollaire 3.1.6(b) donne (iii) \Rightarrow (iv) et (iv) \Rightarrow (iii) est trivial. Finalement, (iii) \Rightarrow (i) est le théorème 3.1.9.

Corollaire 3.1.11. Si K est comme dans le théorème 2.1.6 et $f \in H^p$, alors $K * f$ existe dans H^p et

$$\|K * f\|_{H^p} \leq C \|f\|_{H^p}.$$

Lemme 3.1.12. Soit $m > n$ et $0 < t \leq 1$. Si ϕ et ψ appartiennent à A_m , alors $\phi * \psi_t \in CA_m$, où $C = C(n, m)$.

Preuve.

Nous trouvons

$$|\phi * \psi_t| \leq \sup |\phi| \int |\psi_t| dx \leq C.$$

Pour $|y| > 1$

$$\phi * \psi_t(y) = \int_{|x| < \frac{|y|}{2}} \phi(y-x) \psi_t(x) dx + \int_{|x| > \frac{|y|}{2}} \phi(y-x) t^{-n} \psi\left(\frac{x}{t}\right) dx.$$

On a

$$\left| \int_{|x| < \frac{|y|}{2}} \phi(y-x) \psi_t(x) dx \right| \leq \sup_{B(y, \frac{|y|}{2})} |\phi| \int |\psi_t| dx \leq C(1+|y|)^{-m}$$

et

$$\left| \int_{|x| > \frac{|y|}{2}} \phi(y-x) t^{-n} \psi\left(\frac{x}{t}\right) dx \right| \leq C \int |\phi| dx t^{-n} \left(\frac{|y|}{2t}\right)^{-m} \leq C|y|^{-m}.$$

Ce qui donne l'estimation pour $\phi * \psi_t$. On termine la preuve par le fait que $\partial^\alpha(\phi * \psi_t) = \partial^\alpha \phi * \psi_t$.

Preuve du théorème 3.1.9.

Nous supposons f satisfait les hypothèses et laissez

$$\Omega_k = \{x : M_m f(x) > 2^k\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Nous pouvons diviser l'ensemble ouvert Ω_k en cubes de whitney $Q_i^k, i = 1, 2, \dots$, avec des intérieurs disjoints satisfaisant $\Omega_k = \cup_i Q_i^k$ et

$$\text{diam } Q_i^k \leq \text{dist}(Q_i^k, \mathbb{R}^n / \Omega_k) \leq 4 \text{diam } Q_i^k. \quad (3.1.4)$$

Laissez Q_i^k ont un centre x_i^k et le coté t_i^k (tous les cubes sont parallèles aux axes) plus, nous pouvons trouver une partition associée de l'unité $(\phi_i^k)_i, i.e., C_0^\infty$ des fonctions telles que

$$\begin{cases} \phi_i^k \sim 1 & \text{dans } Q_i^k \\ \sum_i \phi_i^k = 1 & \text{dans } \Omega_k \end{cases} \quad (3.1.5)$$

et telle que ϕ_i^k a un support dans le cube $\tilde{Q}_i^k \subset \Omega_k$ centré à x_i^k avec de coté $(1+\varepsilon)t_i^k$, pour un $\varepsilon > 0$. ϕ_i^k également satisfaire $0 \leq \phi_i^k \leq 1$ et

$$|D^\beta \phi_i^k| \leq C (t_i^k)^{-|\beta|}, C = C(\beta, n).$$

Supposons maintenant g est une fonction continue satisfaisant $M_m g \leq C M_m f$. Nous commençons par décomposer g en une somme atomique. Fixer k et i . Laissez V_i^k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus N , étant donné la norme de l'espace pondérée $L^2(\phi_i^k)$, donc

$$\|P\|_{k,i} = \left(\int |P(x)|^2 \phi_i^k(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Choisir une base orthonormée $(\pi_l)_{l=1}^L$ dans V_i^k . La projection de g dans V_i^k est

$$P_i^k = \sum_l \pi_l \int g \pi_l \phi_i^k dx.$$

Clairement, $(g - P_i^k) \phi_i^k$ a moments nuls jusqu'à l'ordre N .

Lemme 3.1.13. *Nous avons $|P_i^k| \leq C 2^k$ dans \tilde{Q}_i^k , où C ne dépend pas de k et i .*

Preuve. Puisque nous pouvons faire une transformation affine, il suffit de considérer le cas $x_i^k = 0$, $t_i^k = 1$ à une constante, la norme V_i^k est contenue entre les norme L^2 non pondérées dans Q_i^k et \tilde{Q}_i^k . Mais chaque deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes et nous concluons

$$\|P\|_{k,i} \sim \sum |\text{coefficients de } P|, P \in V_i^k.$$

Le π_l ont norme 1, afin que leurs coefficients sont limitées par C . En raison de (3.1.4), nous pouvons choisir $y \notin \Omega_k$ avec $|y| \leq C$. Pour chaque l , la fonction $\pi_l \phi_i^k$ a support contenu dans $B(y, C)$ et ses dérivés sont limités par C . Par conséquent, on peut écrire $\pi_l \phi_i^k = \psi(y - \cdot)$ pour tout $\psi \in A_m$. Cela signifie que

$$\begin{aligned} \left| \int g(x) \pi_l \phi_i^k(x) dx \right| &= |g * \psi(y)| \\ &\leq C M_m g(y) \\ &\leq C M_m f(y) \\ &\leq C 2^k \end{aligned}$$

et le lemme suit.

Maintenant nous écrivons $g = g_k + b_k$, où

$$g_k = g \chi_{\mathbb{R}^n} + \sum_i P_i^k \phi_i^k$$

et

$$b_k = \sum_i (g - P_i^k) \phi_i^k.$$

C'est une généralisation de la décomposition de Calderón-Zygmund. Notez que g_k dans un certain sens proche de g , mais g_k est une bonne fonction $|g_k| \leq C2^k$, comme suite dans lemme 3.1.13 et le fait que $|g| \leq CM_m g \leq CM_m f$. Donc, $g_k \rightarrow g$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Lemme 3.1.14. *On a $g_k \rightarrow g$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ dans le sens de distribution.*

Preuve.

Clairement $|\Omega_k| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$ et ainsi $\sup_i t_i^k \rightarrow 0$. Donc, il suffit de montrer que $\sum_i P_i^k \phi_i^k$ est localement bornée, uniformément dans k . Dans le lemme 3.1.13, nous avons estimé P_i^k en termes de valeurs de $M_m g$ près de \tilde{Q}_i^k . Il suffit donc d'estimer $M_m g$ uniformément dans $B(0, R)$ pour R large. Écrire $g' = g \chi_{B(0, 2R)}$ et $g'' = g - g'$. Alors $M_m g' \leq C \sup |g'| < \infty$ partout. Prendre $y, y_0 \in B(0, R)$ et $\phi \in A_m$.

- Si $t \geq R$, on peut estimer $g'' * \phi_t(y)$ par $M_m^V g''(y_0) \leq CM_m g''(y_0)$, cf. corollaire 3.1.6(b).

- Si $t < R$, prendre un $\eta \in C^\infty$ qui est 0 dans $B(0, \frac{3R}{2})$ et 1 hors $B(0, 2R)$. Alors

$$g'' * \phi_t(y) = \int g''(x) \eta(x) \phi_t(y - x) dx$$

et il est facile de vérifier que $\eta(x) \phi_t(y - x) = \psi_t(y_0 - x)$ pour tout $\psi \in CA_m$. Par conséquent, $M_m g''(y) \leq CM_m g''(y_0)$, $C = C(R)$. Donc si $M_m g$ est fini à y_0 , il est bornée dans $B(0, R)$, le lemme suit. Nous obtenons:

$$g = \sum_{-\infty}^{+\infty} (g_{k+1} - g_k)$$

dans le sens de la distribution et

$$\begin{aligned} g_{k+1} - g_k &= b_k - b_{k+1} \\ &= \sum_i (g - P_i^k) \phi_i^k - \sum_j (g - P_j^{k+1}) \phi_j^{k+1} \\ &= \sum_i ((g - P_i^k) \phi_i^k - \sum_j (g - P_j^{k+1}) \phi_j^{k+1} \phi_i^k) \\ &= \sum_i \alpha_i^k, \end{aligned}$$

en raison de (3.1.5) et depuis $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$. Le support de α_i^k est contenu dans \tilde{Q}_i^k . Également remarquer que les termes contenant g dans α_i^k annuler dans Ω_{k+1} . Par le lemme 3.1.13, ce qui implique $|\alpha_i^k| \leq C 2^k$. Toute fois, α_i^k ne doivent pas être un multiple atome, puisque les moments de

$$\sum_j (g - P_j^{k+1}) \phi_j^{k+1} \phi_i^k$$

ne doivent pas disparaître. Nous allons donc P_{ij}^{k+1} désigne la projection de $(g - P_j^{k+1}) \phi_j^{k+1} \phi_i^k$ dans V_j^{k+1} . Depuis $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, (3.1.4) implique

$$t_j^{k+1} \leq C t_i^k. \quad (3.1.6)$$

Si \tilde{B}_i^k et \tilde{B}_j^{k+1} se croisent, puis ϕ_i^k varie plus lentement que ϕ_j^{k+1} . Par conséquent, nous pouvons utiliser la méthode du lemme 3.1.13 pour obtenir $|P_{ij}^{k+1}| \leq C 2^k$ dans \tilde{Q}_j^{k+1} . Aussi

$$\sum P_{ij}^{k+1} = 0,$$

puisque $g - P_j^{k+1}$ a projection 0 dans V_j^{k+1} . Afin de laisser

$$\beta_i^k = \alpha_i^k - \sum_j P_{ij}^{k+1} \phi_j^{k+1},$$

nous obtenons

$$g_{k+1} - g_k = \sum_i \beta_i^k$$

et β_i^k a moments nuls et de support contenues dans l'union de \tilde{Q}_i^k et ceux \tilde{Q}_j^{k+1} croisant \tilde{Q}_i^k , cette union est contenu dans une boule B_i^k de rayon au plus $C t_i^k$, raison de (3.1.6).

En outre, $|\beta_i^k| \leq C 2^k$ création $\lambda_i^k = C 2^k |B_i^k|^{\frac{1}{p}}$, nous concluons que $a_i^k = \frac{\beta_i^k}{\lambda_i^k}$ est un p -atome et

$$g = \sum_{k,i} \lambda_i^k a_i^k$$

dans le sens des distributions. Plus,

$$\begin{aligned} \sum_i |\lambda_i^k|^p &= C 2^{kp} \sum_i |B_i^k| \\ &\leq C 2^{kp} |\Omega_k|, \end{aligned}$$

depuis $|B_i^k| \sim |Q_i^k|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k,i} |\lambda_i^k|^p &\leq C \int \sum_k 2^{kp} \chi_{\Omega_k} dx \\ &\leq C \int \sum_{2^k < M_m f(x)} 2^{kp} dx \\ &\leq C \int (M_m f(x))^p dx, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

il s'ensuit que $g \in H^p$.

Pour traiter la distribution f , nous prenons une fonction positive $\psi \in C_0^\infty$ avec $\int \psi dx = 1$, telle que $\psi \in CA_m$. Si $\phi \in A_m$ et $0 < s \leq t$, nous avons $\phi_t * \psi_s = (\phi * \psi_{\frac{s}{t}})_t$ et $\phi * \psi_{\frac{s}{t}} \in CA_m$ par le lemme 3.1.12. Pour $s > t$ nous interchanger s et t ici et dans les deux cas

$$|\phi_t * \psi_s * f| \leq CM_m f.$$

Ainsi la C^∞ fonction $f^s = \psi_s * f$ satisfait $M_m f^s \leq CM_m f$. Donc, nous pouvons laisser $g = f^s$ dans le précédent, obtenir

$$f^s = \sum_{k,i} \lambda_i^k a_i^{k,s}, \tag{3.1.8}$$

où $a_i^{k,s}$ est un p -atome de support contenu dans B_i^k . Par la compacité *-faible, nous pouvons trouver pour chaque k, i un séquence $s(v) \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$, pour lequel $a_i^{k,s(v)}$ *-faiblement converge dans L^∞ . La limite a_i^k doit être un p -atome dans B_i^k . Une procédure de diagonale donne un séquence $s(v)$ telque chaque $a_i^{k,s(v)}$ convergent vers a_i^k . Si nous pouvons passer à la limite en (3.1.8), le résultat sera

$$f = \sum_{k,i} \lambda_i^k a_i^k$$

dans le sens de distribution.

Ce est permis en raison de (3.1.7) et l'estimation $|\int a \phi dx| \leq C$ de la preuve da la proposition 2.1.2, qui donne une convergence dominée.

Par conséquent, $f \in H^p$ et l'estimation souhaitée pour $\|f\|_{H^p}$ suit, donc le théorème 3.1.9 est démontré.

3.2 Molécules

Nous allons définir de nouveaux objets, appelées molécules, telle que beaucoup d'opérateurs correspondent atomes en molécules et cette propriété implique borné entre les propres espaces H^p , puisque les molécules seront bornée dans H^p .

Définition 3.2.1. (Molécules). Soit $0 < p < q$, $1 \leq q \leq \infty$ et prendre $b > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Un (p, q, b) -molécule centrée à $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une fonction M tel que

$$\|M\|_{H^q}^{1-\theta} \left\| |\cdot - x_0|^{nb} M \right\|_q^\theta \leq 1, \quad (3.2.1)$$

où $\theta = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{b}$ et

$$\int x^\beta M(x) dx = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq N = n \left(\frac{1}{p} - 1 \right). \quad (3.2.2)$$

Remarque 3.2.2. La norme de H^q est ici la norme de L^q sauf lorsque $q = 1$, également remarquer que (3.2.1) implique que les moments dans (3.2.2) existe, parce que $x^\beta M \in L^1_{loc}$ et

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |x|^N |M(x)| dx &\leq \left\| |\cdot|^{nb} M \right\|_q \left\| |\cdot|^{N-nb} \right\|_{L^{q'}(|x|>1)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

depuis $N - nb + \frac{n}{q} < n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) - n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{n}{q} = 0$. Ici, nous avons supposé $x_0 = 0$ qui nous le faisons souvent et la condition $b > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ sera également souvent être compris.

Théorème 3.2.3. Un (p, q, b) -molécule M appartient à H^p et

$$\|M\|_{H^p} \leq C = C(n, p, q, b).$$

En particulier, $M \in L^p$ si $p > 1$.

Preuve. Voir [1, pages 49-50].

Corollaire 3.2.4. L'espace H^p pour $p \leq 1$ peut être caractérisé comme étant composée de toutes les sommes $\sum \lambda_j M_j$ avec $(\lambda_j)_j \in \ell_p$ et M_j étant (p, q, b) -molécules, $q > 1$.

Preuve.

En raison de la théorème précédente, il suffit de vérifier que un (p, q) -atome a est un (p, q, b) -molécule. Soit $B = B(0, r)$ une boule support de a , alors

$$\|a\|_q \leq |B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \text{ et } \left\| |\cdot|^{nb} a \right\|_q \leq C |B|^b \|a\|_q$$

implique que le produit dans (3.2.1) est d'au plus $C |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|a\|_q \leq C$.

Corollaire 3.2.5. *Soit $0 < p_i < q_i \leq \infty$ et $p_1 \leq 1 \leq q_i$, $i = 1, 2$ et $p_1 \leq p_2$. Un opérateur linéaire envoie tout (p_1, q_1) -atome dans un (p_2, q_2, b) -molécule, autrement dit $H^{p_1} \rightarrow H^{p_2}$.*

Preuve. Ce qui suit depuis $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$.

Chapitre 4

Applications

Nous commençons par une extension du théorème de Sobolev sur l'intégration fractionnaire.

Pour $0 < \lambda < n$, on note I_λ l'opérateur de convolution défini par le noyau $|x|^{\lambda-n}$, transformation de Fourier dont est $C_\lambda |\xi|^{-\lambda}$. Puisque les distributions de H^p ont continue transformées de Fourier, on peut définir $I_\lambda f$ pour $f \in H^p$ que la distribution satisfait

$$(I_\lambda f)^\wedge(\xi) = C_\lambda |\xi|^{-\lambda} \hat{f}(\xi) ,$$

si une telle distribution existe.

Il est bien connu $I_\lambda: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$ pour $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\lambda}{n}$ et $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Ceci généralise à des espaces H^p .

Théorème 4.1.1. *Soit $0 < \lambda < n$ et $0 < p_1 < \infty$, suppose $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\lambda}{n} \geq 0$. Alors $I_\lambda: H^{p_1} \rightarrow H^{p_2}$ pour $p_2 < \infty$.*

Preuve.

Pour $p_2 < \infty$, nous pouvons assumer clairement $p_1 \leq 1$, prendre $1 < q_1 < q_2 < \infty$ avec $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\lambda}{n}$ et soit a un (p_1, q_1) -atome. Nous doit vérifier que $I_\lambda a$ est un (p_2, q_2, b) -molécule pour certains b . Le cas bien connu du théorème donne

$$\|I_\lambda a\|_{q_2} \leq C \|a\|_{q_1} .$$

Si $B(0, r)$ est une boule support de a , il s'ensuit que

$$\left\| |\cdot|^{nb} I_\lambda a \right\|_{L^{q_2}(B(0, 2r))} \leq C r^{nb} \|a\|_{q_1} ,$$

en utilisant le polynôme de Taylor P de $|x|^{\lambda-n}$ à y de degré $N_1 = n \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{|y|>2r} \left| |y|^{nb} I_\lambda a(y) \right|^{q_2} dy = \int_{|y|>2r} \left| |y|^{nb} \int_{|x|<r} a(x) |y-x|^{\lambda-n} dx \right|^{q_2} dy \\
 &= \int_{|y|>2r} \left| |y|^{nb} \int_{|x|<r} \left(|y-x|^{\lambda-n} - P(-x) \right) a(x) dx \right|^{q_2} dy \\
 &\leq C \int_{|y|>2r} |y|^{(nb+\lambda-n-N_1-1)q_2} dy \left(\int_{|x|<r} |x|^{N_1+1} |a(x)| dx \right)^{q_2} \\
 &\leq C r^{n+(nb+\lambda-n-N_1-1)q_2} r^{(N_1+1)q_2+nq_2-\frac{nq_2}{q_1}} \|a\|_{q_1}^{q_2} \\
 &\leq C \left(r^{nb} \|a\|_{q_1} \right)^{q_2},
 \end{aligned}$$

où nous utilisons l'inégalité de Hölder, assumé

$$(nb + \lambda - n - N_1 - 1) q_2 < -n \quad (4.1)$$

et écrit $\lambda = \frac{n}{q_1} - \frac{n}{q_2}$, puisque $N_1 + 1 > n \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right)$ et $\lambda = \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}$, (4.1) sera satisfaite si b est assez proche de $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$. Avec $\theta = \frac{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}}{b} = \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}}{b}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 \|I_\lambda a\|_{q_2}^{1-\theta} \left\| |\cdot|^{nb} I_\lambda a \right\|_{q_2}^\theta &\leq C r^{n \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|a\|_{q_1} \\
 &\leq C,
 \end{aligned}$$

en raison de la définition d'un (p_1, q_1) -atome.

Ainsi, il reste seulement vérifier les moments disparaissant de $I_\lambda a$. Soit $|\beta| \leq N_2 = n \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right)$. Depuis $x^\beta I_\lambda a \in L^1$, il suffit de vérifier que

$$\mathcal{F}(x^\beta I_\lambda a)(0) = C D_\xi^\beta \left(|\xi|^{-\lambda} \hat{a}(\xi) \right) \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (4.2)$$

Mais \hat{a} est une fonction C^∞ dont les dérivés de l'ordre jusqu'à N_1 disparaissent à 0, donc $|\hat{a}(\xi)| = 0 \left(|\xi|^{N_1+1} \right)$ à 0. Puisque $N_1 + 1 - \lambda > n \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \geq |\beta|$, ce qui implique (4, 2).

Donc, $I_\lambda a$ est une molécule et $I_\lambda : H^{p_1} \rightarrow H^{p_2}$ par Corollaire 3.2.5, donc le théorème 4.1.1 est démontré.

Nous avons finalement donné un théorème multiplicateur de type Hörmander pour H^p .

Définition 4.1.2. (Opérateurs multiplicateurs de Fourier). Une fonction m est appelé un multiplicateur de Fourier sur H^p si $m\hat{f}$ est la transformation de Fourier d'une certaine distribution H^p pour chaque $f \in H^p$. Un tel multiplicateur doit être en fait une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Définition 4.1.3. Pour des nombres naturels σ , on note L^p_σ l'espace de Sobolev des fonctions avec des dérivés de l'ordre jusqu'à σ dans L^p .

Théorème 4.1.4. Soit $m \in L^2_{\sigma,loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ pour un certain entier $\sigma > \frac{n}{2}$, supposons

$$R^{|\beta|} \left(R^{-n} \int_{R < |\xi| < 2R} |D^\beta m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1, \quad (4.3)$$

pour $R > 0$ et $0 \leq |\beta| \leq \sigma$, alors m est un multiplicateur de Fourier sur H^p pour $p_0 < p < \infty$, où p_0 est donné par

$$\frac{\sigma}{n} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}.$$

Preuve du théorème 4.1.4. Voir [1, pages 54-55].

Lemme 4.1.5. Soit m comme dans le théorème 4.1.4, si $1 \leq \rho < \infty$ et β est un multiindice avec $\frac{n}{\rho} \geq 2(|\beta| - \sigma) + n$, alors pour $R > 0$

$$R^{|\beta|} \left(R^{-n} \int_{R < |\xi| < 2R} |D^\beta m(\xi)|^{2\rho} d\xi \right)^{\frac{1}{2\rho}} \leq C.$$

Plus, $|m| \leq C$.

Preuve.

Prendre $\eta \in C_0^\infty$ avec

$$\begin{cases} \text{supp}(\eta) \subset \{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 4\} \\ \eta(\xi) = 1 \text{ si } 1 \leq |\xi| \leq 2, \end{cases}$$

donc $g(\xi) = m(R\xi)$ et $h(\xi) = \eta(\xi)m(R\xi)$ également satisfait (4.3).

Maintenant l'inégalité de Sobolev implique que $h \in L^2_\tau$ bornée si $\frac{1}{2\rho} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma-\tau}{n}$ et donc aussi pour les petits ρ , puisque $\text{supp}(h) \subset B(0, 4)$. Ce qui implique la première conclusion du lemme, la seconde conclusion est aussi l'inégalité de Sobolev, puisque $\sigma > \frac{n}{2}$.

Définition 4.1.6. Soit p et q comme dans la définition de (p, q) -atome et prendre un nombre naturel s . Un (p, q, s) -atome est défini comme un (p, q) -atome exception que nous avons besoin de la disparition de moments d'ordre au plus s au lieu de $N = n \left(\frac{1}{p} - 1 \right)$.

Lemme 4.1.7. Soit $0 < p \leq 1$ et prendre un $(p, 2, \sigma - 1)$ -atome a avec support contenu dans une boule $B(0, r)$, si $|\gamma| \leq \sigma - 1$ et $2 \leq q \leq \infty$, alors

$$(a) |D^\gamma \hat{a}(\xi)| \leq Cr^{\sigma+n-\frac{n}{p}} |\xi|^{\sigma-|\gamma|} .$$

$$(b) \|D^\gamma \hat{a}\|_q \leq Cr^{|\gamma|+n-\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} .$$

Preuve.

(a) Soit P le polynôme de Taylor de la fonction $x \rightarrow \exp(-2\pi i x \cdot \xi)$ à 0 de degré $\sigma - 1 - |\gamma|$, alors

$$\begin{aligned} |D^\gamma \hat{a}(\xi)| &= \left| \int a(x) (-2\pi i x)^\gamma \exp(-2\pi i x \cdot \xi) dx \right| \\ &= \left| \int a(x) (-2\pi i x)^\gamma (\exp(-2\pi i x \cdot \xi) - P(x)) dx \right| \\ &\leq C \int |a(x)| |x|^\sigma dx |\xi|^{\sigma-|\gamma|} \\ &\leq Cr^{\sigma+n-\frac{n}{p}} |\xi|^{\sigma-|\gamma|} . \end{aligned}$$

(b) Appliquer l'inégalité de Hausdorff-Young à $(-2\pi i x)^\gamma a(x)$.

Bibliographie

- [1] P. Sjögren, Lectures on atomic H^p spaces theory in \mathbb{R}^n , University of umea, Sweden, 1981.
- [2] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton university press, New jersey, 1970.
- [3] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*, Springer, USA, 2008.
- [4] L. Grafakos, *Modern fourier analysis*, Springer, USA, 2009.