



REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques



THÈSE

Présenté pour obtenir un
Doctorat en Sciences
Option : Mathématiques Appliquées

Thème

*Existence globale et explosion d'une équation de Petrovsky avec un terme de source
dissipative non linéaire*

Présenté par :
Mosbah Kaddour

Devant le jury composé de :

Saadi Abderachid	MCA. Université de M'sila	Président
Messelmi Farid	Prof. Université de Djelfa	Rapporteur
Merzougi Abdelkrim	Prof. Université de M'sila	Co-Rapporteur
Elhadj Dahia	Prof. E.N.S- Bou saâda	Examineur
Abbassi Ahmed	MCA. E.N.S- Bou saâda	Examineur
Mokhtari Abdelhak	MCA. Université de M'sila	Examineur

Soutenue publiquement le : 19/10/2023

ملخص

أَلْهَدَف مِن هَاتِه الْأَطْرُوحَة هُو دَرَا سَة نَظَرِيَة لِثَلَا ث مَسَائِل حَدِيَة وَ غِي ر خَطِيَة فِي مِيْدَان مَحْدُود مِن $\mathbb{R}^n$ ذُو حَافَة مُنْتَظِمَة. اَلْتَنَائِج اَلْمُتَحَصَّل عَلَيْهَا لِأَجَل هَاتِه اَلْمَسَائِل مُتَعَلِقَة بِاَلْوُجُود، اَلْوَحْدَانِيَة، اَلْوُجُود اَلْكَلِي وَ اَلانْفِجَار لِاَلْحَل فِي وَقْت مَحْدُود. تَتَكُون هَاتِه اَلْأَطْرُوحَة مِن ثَلَا ث فَصُول.

اَلْفَصْل اَلْأَوَّل يَخْص مَسْأَلَة مُتَعَلِقَة بِمُعَادَلَة بِيْتروْفِيْسْكِي بِمِصْطَلَح تَبْدِيدٍ غِي ر خَطِي حَيْث تَمَرَكُز اَلْعَمَل عَلَى اَلْحَد اَلثَّانِي لِاَلْمُعَادَلَة (2.1) اَلْمُتَمَثِّل فِي $f(u)$ غِي ر خَطِي وَ ذَلِك بِاعْطَاء بَعْض اَلْفُرْصِيَّات لِدَرَا سَة اَلْوُجُود اَلْكَلِي وَ اَلْوَحْدَانِيَة لِاَلْحَل بِاسْتِعْمَال تَقْرِيْبَات فِيدُو - جَالِيْرِكِيْن Faedo-Galerkin وَ نَبِيْن اَن هَذَا اَلْحَل مُسْتَقِر فِي فُضَاء سُوْبُلِيْف Sobolev $H_0^2(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ وَ كَذَلِكَ اَنْفِجَار اَلْحَل Blow-up فِي وَقْت مَحْدُود عِنْدَمَا يَتَجَاوِز اَلْوَقْت اَلزَّمَن T^*

نَعْتَبِر فِي اَلْفَصْل اَلثَّانِي مَسْأَلَة اَلسِيلَان اَلدِيْنَامِيْكِي لِأَمَائِع بِيْنْغَهَام Bingham فِي مِيْدَان بِلَاسْتِيْك مَرْن ثَنَائِي اَلْإِبْعَاد نَبْحث اَوَّلًا عَن مُتَرَا جَة اَلشَكْل اَلتَغْيِرِي Inéquation variationnelle لِأَمَائِع بِيْنْغَهَام وَ بِاسْتِخْدَام وَ اَلتَحَقُّق مِن فُرْصِيَّات اَلتَنْظِيْم Hypothèse de régularisation لِأَمَائِع J_ε تَتَحَصَّل مِن خَلَالِهَا عَلَى مُعَادَلَة لِاَلشَكْل اَلتَغْيِرِي Equation variationnelle لِأَمَائِع بِيْنْغَهَام ثَم نَدْرُس اَلْوُجُود وَ اَلْوَحْدَانِيَة لِاَلْحَل لِأَمَائِع اَلشَكْل اَلتَغْيِرِي Equation variationnelle وَ ذَلِك بِاسْتِعْمَال تَقْرِيْبَات فِيدُو - جَالِيْرِكِيْن Faedo-Galerkin وَ بِاسْتِعْمَال طَرِيقَة اَلتَقَارِب نَبِيْن مِن خَلَالَة اَن اَلْحَل لِأَمَائِع اَلشَكْل اَلتَغْيِرِي Equation variationnelle لِأَمَائِع هُو كَذَلِكَ حَل لِأَمَائِع اَلشَكْل اَلتَغْيِرِي Inéquation variationnelle لِأَمَائِع بِيْنْغَهَام.

اَلْفَصْل اَلثَّالِث يَخْص مَسْأَلَة اَلتَطَوُّر اَلْمُتَعَلِقَة بِمُعَادَلَات نَافِي سَتُوكْس اَلْمُظْطَرِبَة بِاَلْمُعَامَل غِي ر اَلخَطِي $|u|^p u$ فِي اَلشُرُوط اَلْحَدِيَة مِن نَوْع دِيرِيْشَلِي اَلْمُتَجَانِسَة نَبْحث اَوَّلًا عَن اَلشَكْل اَلتَغْيِرِي لِأَمَائِع وَ نَدْرُس وُجُود اَلْحَل بِاسْتِعْمَال تَقْرِيْبَات فِيدُو - جَالِيْرِكِيْن Faedo-Galerkin وَ مَبْدَأ اَلتَرَا ص ثَم مِن أَجَل $n = 2$ نَقْدُم وَحْدَانِيَة اَلْحَل لِأَمَائِع.

كلمات مفتاحية : معادلة بيتروفيسكي - مصطلح تبديد - فرضيات منتظمة - تراض - إنتظام -
متراجحة شكلية تغيرية - حل ضعيف - حل قوي - انفجار الحل - معادلات نافي ستوكس - مائع
بينغهام Bingham - ألسيلان الديناميكي.

Abstract

The aim of this thesis is to propose a contribution to the theoretical study of three nonlinear boundary value problems in a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^n$ with a regular boundary. The results gained for these problems concern existence, uniqueness, global existence, and the explosion of the solution at a finite time. This thesis consists of three chapters. This thesis consists of three chapters. We suggest in the first chapter, we will approach the existence global and blow-up of the solutions in a finite time to the Petrovsky equation with nonlinear dissipative and source term. We consider in the second chapter consists of the initial value problem concerning the transient flow of the Bingham fluid in a two- dimensional elastic domain. The third chapter will relate to the problem of evolution the Navier-Stokes equations disturbed by the nonlinear term $|u|^\rho u$ under homogeneous Dirichlet boundary conditions.

Key words and phrases : Petrovsky Equation, regularization, method of compactness, monotonicity, variational formulation inequality, weak solution, strong solution, explosion of the solution ; Navier-Stokes equation, Bingham fluid, dynamic flow.

Résumé

Le but de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude théorique de trois problèmes aux limites non linéaires dans un domaine O borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière. Les résultats obtenus pour ces problèmes concernent l'existence, l'unicité, l'existence globales et l'explosion de la solution pour un temps fini. Cette thèse se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous aborderons l'existence globale et l'explosion des solutions dans un temps fini d'une équation de Petrovsky avec un terme source et dissipative non linéaire. Nous considérons dans le deuxième chapitre le problème aux limites concernant l'écoulement dynamique de fluide de Bingham dans un domaine élastique bidimensionnel. Le troisième chapitre concernera le problème d'évolution pour les équations de Navier-Stokes perturbés par le terme non linéaire $|u|^\rho u$ avec les conditions aux limites de Dirichlet-homogène.

Mots - clés : Equation de Petrovsky ; régularisation ; méthode de compacité ; monotonie ; inéquation formulation variationnelle, solution faible, solution forte, explosion de la solution ; Equations de Navier–Stokes ; Fluide de Bingham ; écoulement dynamique.

**

Dédicaces

Aux ceux qui ont fait de moi ce que je suis et qui sont toujours présents pour me soutenir à tout moment.

Je dédis le fruit de mon travail à toute la famille Mosbah et enfants, à mes grands-pères et mes grandes-mères, mon père Amar, ma mère Aïcha, ma femme Bahaz. Et mes enfants.

Aux Mes Oncles : Cheikh, Maatalah, Mohamed, Miloud, à toutes mes tantes et leurs enfants, à mon oncle Zoubir et ses enfants, tous mes frères et sœurs, à Ben Khelifa Ahmed, Azaoui Brahim, Sobhi Mustapha, Amar Med et Ben Messaoud Ahmed, tous mes professeurs qui m'ont enseigné, et à ceux avec qui je travaille, et tous mes amis et collègues qui ont étudié avec moi, et tous mes amis et collègues et tous ceux qui m'encourageaient : Merzak, Belkacem, Tayeb, Noureddine, Mansour, Kouider, Ahmed, Cheikh, Alall, à tous le personnel et les professeurs de Université Mohamed Boudiaf-M'sila et de l'université Amar Telidji de Laghouat.

Remerciements

JE remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

JE tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur professeur Messelmi Farid à l'université de Ziane Achour de Djelfa qui m'a proposé le sujet de ce travail, Son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux. le caractère novateur de ses idées, sa compétence et sa rigueur m'ont encouragé à pour suivre mes travaux de recherche.

JE remercie mon co-encadreur le professeur Merzougui abedelkrim de l'université de M'sila.

J'adresse mes remerciements les plus chalereuses et sincères poursuivre au professeur Ben nyattou Ben abderrahmane de l'université de M'sila , et Monsieur Nouri Brahim professeur à l'université de M'sila.

Comme je tiens à remercier vivement, le professeur Saadi Abderachid de l'Université de Mohamed Boudiaf M'sila, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

JE tiens à remercier Monsieur Elhadj Dahia professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Bou-Saada, le professeur Abbassi Ahmed à l'Ecole Normale Supérieure de Bou-Saada, le professeur Mokhtari Abdelhak de l'Université de Mohamed Boudiaf M'sila, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury en tant qu'examineurs.

JE remercie spécialement Monsieur Abita Rahmoune Maître de Conférences à l'Université Amar Telidji de Laghouat.

Mosbah Kaddour

Table des matières	ii
Introduction	3
Outils mathématique et rappels d'analyse	7
1 Rappels d'analyse mathématique	8
1.1 Espaces de Hilbert	8
1.2 Les Espaces $L^P(\Omega)$	9
1.2.1 Lemmes de Gronwall.	9
1.2.2 Inégalités	10
1.3 Espaces de Sobolev	11
1.3.1 L'inégalité d'interpolation	13
1.3.2 Eléments d'analyse non linéaire	14
1.3.3 Fonction convexes et sous-différentiabilité	16
1.3.4 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation	19
2 Existence globale et explosion d'une équation de Petrovsky avec des termes de source et dissipatif non linéaire	23
2.1 Introduction	24
2.2 Hypothèses	25
2.3 Existence Locale	26
2.4 Existence globale	36
2.5 Explosion de la Solution (Blow up de la Solution)	39
3 Ecoulement instationnaire du fluide de Bingham dans un domaine élastique bidimensionnel	48
3.1 Introduction	49
3.2 Position du problème :	50

3.2.1	Transformation de formulation du problème	52
3.3	Existence et Unicité de la solution	65
3.3.1	Existence	65
3.3.2	Unicité	78
4	Problème d'évolution pour l'équation de Navier–Stokes perturbée par le terme non linéaire $u ^\rho u$ avec les conditions aux limites de Dirichlet–homogène	92
4.1	Formulation variationnelle	93
4.1.1	Quelques résultats :	93
4.1.2	Formulation faible	94
4.2	Existence et Unicité	97
4.2.1	Existence	97
4.2.2	Unicité	106
	Conclusion	109
	Bibliographie	111

NOTATIONS

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω .

Γ la frontière de Ω , supposée souvent régulière.

Γ_i ($i = 0, 1$) une partie de la frontière Γ .

$\text{mes}(\Gamma_0)$ la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_0 .

ν la normale unitaire sortante à Γ .

v_ν, v_τ les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v sur $\overline{\Omega}$.

$C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles continue sur $\overline{\Omega}$.

$H_1 = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)_s^{n \times n} \mid \text{Div}(\sigma) \in L^2(\Omega)^n \right\}$.

$W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev de paramètres m et p .

$H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev de paramètres m et $p = 2$. $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ l'espace de traces d'ordre p .

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace de traces d'ordre $p = 2$. $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma)$.

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ le dual topologique de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.

H'_Γ le dual topologique de l'espace H_Γ . $H'_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.

γ l'application trace.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations :

H' le dual topologique de l'espace H .

$H^n = \{ x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, \dots, n} \}$.

$H_s^{n \times n} = \{ x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, \dots, n} \}$.

$(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de l'espace H .

$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ le produit de dualité entre l'espace H' et l'espace H .

$\|\cdot\|_H$ la norme de l'espace H .

2^H l'ensemble de toutes les parties de H .

$x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

$x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

Si X, Y deux espaces de Hilbert et $0 \leq \theta \leq 1$, on note par :

$[X, Y]_\theta$ l'espace intermédiaire d'indice θ .

Si de plus $]0, T[$ est un intervalle de temps, on note par :

$L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions mesurables de $]0, T[\rightarrow H$ telles que

$$\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty \text{ avec les modifications usuelles si } p = +\infty.$$

Pour une fonction f , on note :

$\text{dom}(f)$	le domaine de f .
$\text{epi}(f)$	l'épigraphe de f .
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	la dérivée de f par rapport à la i -ème composante x_i .
f'	la dérivée de f par rapport au temps.
$\frac{Df}{Dt}$	la dérivée particulaire de f .
∇f	le gradient de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f , $\varepsilon(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
$\text{div}(f)$	la divergence de f .
∂f	le sous-différentiel de f .

Autres notations :

$\liminf$	la limite inférieure.
S_n	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$.
$\text{Div}(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\tilde{\sigma}$	le déviateur du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\text{tr}(\sigma)$	la trace du tenseur $\sigma \in S_n$.
δ	le tenseur identique.
$p.p$	presque partout.
$ \cdot $	la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S_n .
$\cdot \cdot$	le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^n$ et S_n .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce travail concerne essentiellement, l'étude théorique de trois problèmes aux limites non linéaire dans un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière, de classe C^1 . Ce travail est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution faible pour de différents problèmes aux limites notamment.

Dans ce travail, on considère les cas suivants :

1. Existence globale et explosion en temp finie d'une équation de Petrovsky avec un terme de source dissipative non linéaire.
2. Problème aux limites concernant l'écoulement transitoire de fluide de Bingham dans un domaine élastique bidimensionnel.
3. Problème d'évolution pour les équations de Navier-Stokes perturbés par le terme non linéaire $|u|^\rho u$ avec les conditions aux limites de Dirichlet-homogène.

Ce travail comprend trois chapitres, Dans le premier chapitre, on considère le problème aux limites pour l'équation de Petrovsky avec un terme de source dissipative non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u - \Delta u' + |u|^{p-2} u + \alpha g(u') = \beta f(u) \text{ sur } \Omega \times [0, +\infty[\quad (1)$$

Où : Ω est un domaine borné ouvert dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, α , et $\beta > 0$. Pour le terme $f(u)$ non linéaire continue et pour la fonction g continue, croissante, satisfaisant $g(0) = 0$, dans des conditions appropriées, nous montrons l'existence globale de la solution par la méthode de Faedo-Galerkin combinée avec cette méthode, la solution est stable dans

l'espace $H_0^2(\Omega)$. En outre, nous prouvons que cette solution est blows up dans le temps fini, quand l'énergie initiale est négative.

Dans le second chapitre, soit deux ouverts Ω_0, Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ ($\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_0 \subset \Omega_1$), borné, Le normale η à Γ_0 est orienté vers l'extérieur de Ω_0 .

On considère un modèle mathématique pour étudier un problème de transmission entre deux domaines, un fluide de Bingham avec contact du type sous-différentiel, incompressible, visco-plastique qui occupe le domaine $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) borné, de frontière régulière $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$ mesurable et de classe C^1 . Ce fluide se déplace dans un d'autre domaine solide-élastique $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) borné, de frontière régulière $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$ de classe C^1 constituée de deux parties mesurables et disjointes $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ telle que : $\text{mes}(\Gamma_0) > 0, \text{mes}(\Gamma_1) > 0$. On désigne par $\mathbb{Q}_i$ ($i = 0, 1$) .L'ensemble $\mathbb{Q}_i = \Omega_i \times (0, T)$, ($i = 0, 1$), $T \geq 0$. Les forces volumiques de densité f agissent dans $\mathbb{Q}$, telle que : $f|_{\Omega} = (f_0|_{\Omega_0}, f_1|_{\Omega_1})$. On impose sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ des conditions de contact avec frottement du type sous- différentiel.

On désigne par $\widetilde{\sigma}_0$ le déviateur du tenseur des contraintes σ_0 , donné par ;

$$\widetilde{\sigma}_0 = (\widetilde{\sigma}_{0i,j}) \quad , \quad (\widetilde{\sigma}_{0i,j}) = \sigma_{0i,j} - \frac{\text{tr}\sigma_0}{\eta} \delta_{i,j},$$

et le tenseur des déformation ε définie par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) : \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \text{Div}(\sigma) = (\sigma_{ij,j})$$

où $\delta = (\delta_{i,j})$ est le tenseur identique.

Le problème de transmission peut se formuler de la manière suivante :

Problem 0.1. *Trouver le champ des vecteurs vitesses $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ défini dans $\mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) : \mathbb{Q}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sous le champ des contraintes $\sigma_0 = (\sigma_{0i,j})_{1 \leq i,j \leq n} : \mathbb{Q}_0 \rightarrow S_n$ et $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ défini dans $\mathbb{Q}_1 = \Omega_1 \times (0, T) : \mathbb{Q}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que ;*

$$\frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \text{Div}(\sigma_0) + f_0 \quad \text{sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \widetilde{\sigma}_0 = 2\mu\varepsilon(u) + g \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \text{ si } |\varepsilon(u)| \neq 0 \\ |\widetilde{\sigma}_0| \leq g \quad \text{ si } |\varepsilon(u)| = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) \quad (3)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T), \quad (i.e. \sum_{i=1}^n D_i u_i = 0) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \text{div } \sigma_1 + f_1 \quad \text{sur } \mathbb{Q}_1 = \Omega_1 \times (0, T) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1i,j} &= \sum_{k,l=1}^n A_{i,j,k,l} \cdot \varepsilon^{k,l}, (A : \text{tenseur d'élasticité}) \\ \text{sur } \mathbb{Q}_1 &= \Omega_1 \times (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

avec les conditions de transmission sur $\Gamma_1 \times (0, T)$:

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (7)$$

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n u_i \cos(\eta_i) \right) \times u_i \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (8)$$

$$\sigma_1 \cdot \eta_1 = g \text{ sur } \Gamma_{11} \times (0, T) \quad (9)$$

$$w = 0 \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T) \quad (10)$$

et les conditions initiales :

$$u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \quad (11)$$

$$\begin{cases} w(0) = w_0 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \end{cases} \quad (12)$$

avec $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulière.

C'est un problème mécanique de l'écoulement transitoire bidimensionnel d'un fluide de Bingham rigide, viscoplastique, et incompressible qui occupe un domaine Ω_0 dans un domaine borné élastique ayant le $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ comme épaisseur. Nous présentons quelques notations préliminaires pour trouver l'inéquation de la formulation variationnelle du problème. En utilisant la méthode d'approximations de Faedo-Galerkin ainsi que les techniques de régularisation pour avoir l'équation de la formulation variationnelle de ce problème nous obtenons des résultats d'existence. Pour $n = 2$ en utilisant quelque résultats mathématiques, on démontre l'unicité de la solution locale. Et en utilisant aussi le théorème de convergence pour démontre que la solution $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ du problème (3.3) (équation variationnelle) converge faiblement dans l'espace $L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^n)) \times L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1)^n))$ vers la solution (u, Φ) du problème (3.2) (Inéquation variationnelle).

Dans le troisième chapitre, le problème est de chercher la vitesse $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}; u : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$ et une fonction scalaire $p : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$, ($P \geq 0$) vérifiant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + |u|^\rho u &= f - \text{grad } p, (\nu > 0), \rho > -1 \\ \text{div } u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ u_i(x, 0) &= u_{0_i}(x), x \in \Omega \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Il s'agit ici d'un problème d'évolution de l'équation de Navier–Stokes perturbée par le terme non linéaire $|u|^\rho u$. On associe à ce problème des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et des conditions initiales.

En utilisant la formulation variationnelle et les techniques de Faedo–Galerkin et en se basant sur la méthode de compacité nous permettent de démontrer que ce problème possède au moins une solution variationnelle. Pour $n = 2$ en utilisant quelque résultats mathématiques, on démontre l'unicité de la solution.

Dans le dernier chapitre on fait rappel de quelques principaux résultats d'analyse fonctionnelle qu'on a utilisé dans ce travail. Aussi, on précise quelques principes fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev dans différents domaines et qui nous permettent de mieux comprendre le continu de ce travail, surtout les espaces de Sobolev relatifs à un ouvert Ω dans différents cas.

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et rappels d'analyse pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.

1.1 Espaces de Hilbert

Théorème 1.1. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $a(.,.)$ une forme sesquiliénaire continue sur H , alors il existe un opérateur A linéaire continu de H dans H' (un isomorphisme de H dans H'), telle que ;*

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_{H' \times H} = ((u, v))_{H' \times H}, \forall (u, v) \in H^2$$

Lemme 1.1. [18, p73]

Soit $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ alors ; $u \in L^4(0, T, (L^p(\Omega))^n)$

p donné par

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad (p < q, \text{ où ; } q \text{ donné en } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \text{ et } q \text{ fini quelconque si } n = 2)$$

Lemme 1.2. [18, p72] *Pour $u \in V$, la forme linéaire*

$$v \rightarrow b(u, u, v)$$

est continue sur

$$V_s = \text{adhérence de } \{\varphi / \varphi \in (D(\Omega))^n, \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

On a ;

$$b(u, u, v) = (g(u), v)_\Omega, g(u) \in V_s', \text{ avec } \|g(u)\|_V \leq C \|u\|_{(L^p(\Omega))^n}^2,$$

où ;

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad p < q, \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad \text{avec} \quad s = \frac{n}{2}$$

1.2 Les Espaces $L^p(\Omega)$

L'espace $L^p(\Omega)$ des fonctions de puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, et muni de la norme ;

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(s)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty$$

$L^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornées pour $p = \infty$.

Lemme 1.3. [18, p12] Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(\Theta)$, $1 < q < \infty$, telles que ;

$$\|g_\mu\|_{L^q(\Theta)} \leq c, \quad g_\mu \rightarrow g \quad p.p. \text{ dans } \Theta$$

alors ;

$$g_\mu \rightarrow g \quad \text{dans } L^q \text{ faible}$$

1.2.1 Lemmes de Gronwall.

On présente ici des lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.4. Soient $f, g \in C(0, T, \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0, T]$, et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) \Psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors ;

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t f(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t g(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour le cas particulier $f = 0$, cette définition devient ;

Corollaire 1.1. Soit $g \in C(0, T, \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t g(s) \Psi(s) ds, \forall t \in [0, T]$$

Alors ;

$$\Psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right), \forall t \in [0, T]$$

Lemme 1.5. Soient $f, g \in C(0, T, \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0, T]$, et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t f(s) \Psi(s) ds + \int_0^t g(s) \Psi^2(s) ds, \forall t \in [0, T]$$

Alors ;

$$|\Psi(t)| \leq \left(a + \int_0^t f(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right), \forall t \in [0, T]$$

Dans le cas particulier $f = 0$, cette définition devient ;

Corollaire 1.2. Soient $g \in C(0, T, \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T, \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t g(s) \Psi^2(s) ds, \forall t \in [0, T]$$

Alors ;

$$|\Psi(t)| \leq a \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right), \forall t \in [0, T]$$

Lemme 1.6. Si on a $f \in L^\infty(0, T)$ et $g \in L^1(0, T)$, $f(t) \geq 0$ p.p.t, $g(t) \geq 0$ p.p.t, et si

$$f(t) \leq C + \int_0^t f(s)g(s)ds \quad \text{p.p.t}$$

Alors f vérifie ;

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right).$$

1.2.2 Inégalités

Lemme 1.7 (Inégalité de young). [15, p56] Si $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ et soit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors ;

$$a.b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Lemme 1.8 (Inégalité de Hölder). [15, p56] Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ telle que $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors ;

$$u v \in L^1(\Omega)$$

et on a :

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

si $p = 2$, $q = 2$, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwartz ;

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, alors ; $uvw \in L^1(\Omega)$, et on a :

$$\|uvw\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \|w\|_{L^r(\Omega)}$$

1.3 Espaces de Sobolev

Quelques propriétés des espaces $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$

Proposition 1.1. i On munit $H^s(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \forall u, v \in H^s(\Omega)$$

la norme associée étant donné par

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} |D^\alpha v|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in H^s(\Omega)$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert

ii Pour $s = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $s_1 > s_2$, on a $H^{s_1}(\Omega) \subset H^{s_2}(\Omega)$ avec injection continue.

iii Pour tout $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ est un espace séparable.

iv Pour tout $s \geq 0$, nous désignons par $H_0^s(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$, i.e, $H_0^s(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ dans $H^s(\Omega)$, et par $H^{-s}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^s(\Omega)$.

v Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^s(\Omega)$ peuvent être définie comme suit :

$$H_0^s(\Omega) = \{v / v \in H^s(\Omega), D^\alpha v|_\Gamma = 0, |\alpha| \leq s-1\}$$

i.e.

$$H_0^s(\Omega) = \{v / v \in H^s(\Omega), v = Dv = D^2v = \dots = D^{s-1}v = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ p.p}\}$$

v

$$v \rightarrow \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha v|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^s(\Omega)$ équivalente à la norme $\|v\|_{H^s(\Omega)}$.

Lemme 1.9. [18, p06] *L'espace*

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \text{ où } p = \rho + 2, \text{ et } \rho > 0$$

où ;

$$V = H_0^1(\Omega) \text{ si } \rho \leq \frac{4}{n-2}, n \geq 3, \text{ et } \rho > 0$$

est séparable. (i.e : admet un ensemble dénombrable dense).

Théorème 1.2. [18, p44] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec la frontière de Ω est une variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul côté de Γ (i.e, on considère $\overline{\Omega}$ variété à bord de classe C^∞ , le bord étant Γ), on a l'espace $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$, et m entier > 0 .

Théorème 1.3. [18, p46] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec la frontière de Ω est une variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul côté de Γ (i.e, on considère $\overline{\Omega}$ variété à bord de classe C^∞ , le bord étant Γ), on a l'espace $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$, et s réel ≥ 0 .

Théorème 1.4 (Formule de Green pour le Laplacien). [29, p27] On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ , C^1 par morceaux. alors si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\text{Si } u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ et } v \in C^1(\overline{\Omega}), \text{ on a : } \int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma$$

$$\text{Si } u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega), \text{ on a : } \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv (\vec{\eta} \cdot \vec{e}_i) d\sigma$$

Lemme 1.10 (Inégalité de Friedrichs-Poincaré). Soit p un réel, $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ inclus dans la bande $Bd(h) = \{x \in \mathbb{R}^n / a < \langle x, h \rangle < b\}$, alors on a :

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \implies C \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \text{ et } \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ceci permet de munir $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'une norme équivalente à sa norme usuelle

$$u \rightarrow \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Corollaire 1.3 (Plongement de Sobolev). [15, p168] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné et soit $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\text{Si } 1 \leq p < n \text{ alors ; } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où ; } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

$$\text{Si } p = n \text{ alors ; } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[$$

$$\text{Si } p > n \text{ alors ; } W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

Avec injection continues.

Lemme 1.11 (Plongement de Sobolev). [18, p06] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, on a :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où ; } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ Si } n \geq 3$$

De façon générale, on a :

1. $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ Si $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{1}{n} > 0$
2. $H^s(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ Si $\frac{1}{s} - \frac{1}{n} < 0$
3. $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q$ fini si $\frac{1}{s} - \frac{1}{n} = 0$

Avec injection continues.

1.3.1 L'inégalité d'interpolation

Corollaire 1.4.

$$\text{Pour } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \text{ on a } \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Corollaire 1.5. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Théorème 1.5 (Dualité de D-Rham). [18, p67] Soit L un opérateur continue sur V , on peut représenter L (de façon non unique) par ;

$$L(v) = \sum_{i=1}^n (L_i, v_i), \quad L_i \in H^{-1}(\Omega)$$

L est nule sur $V = \{\varphi / \varphi \in (D(\Omega))^n, \operatorname{div} \varphi = 0\}$, d'après le théorème de dualité de Rham :

$$L_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad S \in D'(\Omega)$$

Alors $S \in L^2(\Omega)$ est dans ces conditions on a

$$L(v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, v_i \right) = - (S, \operatorname{div} v) = 0, \forall v \in V$$

Où

$$V = \{v / v \in (H_0^1(\Omega))^n, \operatorname{div} v = 0\}$$

1.3.2 Eléments d'analyse non linéaire

Dans la première partie de cette section, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire usuel $(\cdot, \cdot)_H$ ainsi que de la norme induite $\|\cdot\|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H et par $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H .

Propriétés générale

Lemme 1.12. [18, p127] Si $v \in H^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), $\Gamma =$ frontière de Ω , on a : $v|_\Gamma \in L^3(\Gamma)$ et

$$\|v|_\Gamma\|_{L^3(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{3}}, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Lemme 1.13 (Formule de Green pour l'élasticité). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. Soient $u \in H^1(\Omega)^2$ et $v \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2}$ tel que $\operatorname{div} v \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2}$ et v symétrique alors :

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : v dx = - \int_\Omega u \cdot \operatorname{div} v dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot \eta d\Gamma$$

Lemme 1.14. [18] La forme bilinéaire $a(u, v)$ est symétrique, continue et coercive sur $V \times V$ et la forme trilinéaire $b(u, v, w)$ est continue sur $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Lemme 1.15. [18]

1. $(\operatorname{grad} P, v)_\Omega = 0, \forall v \in V, P \in D'(\Omega)$
2. $b(u, v, w) = -b(u, w, v) + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2, \forall u, v, w \in V$ avec $\operatorname{div} P = \sum_{i=1}^n (D_i p)$, où $D_i p = \frac{\partial p}{\partial x_i}$.

Lemme 1.16. [18] Si $u, v \in V$, alors on a :

$$b(v, v, v) = b(u, v, v) = 0, \forall u, v \in V$$

Lemme 1.17. [18] Si $n = 2$, il existe une constante $C(\Omega)$ telle que ;

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_V^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V$$

Lemme 1.18. [18] Pour $n = 2$, si $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$, alors $\sum_{i=1}^n u_i D_i u \in L^2(0, T, V')$.

Lemme 1.19. [18] Si $n = 3$, il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^4(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \forall v \in V \subset H_0^1(\Omega) \\ &\leq C(\Omega) \|v\|_V^{\frac{1}{4}} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \forall v \in V \subset H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Lemme 1.20. [18] Majoration préliminaire : On suppose $n \geq 3$, $(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$, et si

$$u \in L^s(0, T, (L^r(\Omega))^n), \frac{2}{s} + \frac{n}{r} \leq 1, r \geq n,$$

On a :

$$|b(u, v, w)| \leq C_1 \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{(L^p(\Omega))^n} \text{ si } \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}, \forall u, v, w \in V \subset H_0^1(\Omega)$$

Lemme 1.21. [18] On suppose que la dimension d'espace est de $n \leq 4$, et pour

$$u \in V$$

Alors, la fonction $g(u)$ définie par ;

$$b(u(t), u(t), v) = \langle g(u)(t), v \rangle, \forall v \in V, \forall t \in [0, T]$$

Avec

$$\|g(u)\|_{V'} \leq C \|u\|_{(L^p(\Omega))^n}^2, \forall u \in V, \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Vérifiant que :

$$g(u) \in L^1(0, T, V')$$

De plus si $u \in L^\infty(0, T, V)$, avec $V \subset H \subset V'$, alors :

$$b(u(t), u(t), v) = \langle g(u)(t), v \rangle, \forall v \in V, \forall t \in [0, T], \text{ et } g(u) \in L^\infty(0, T, H)$$

Lemme 1.22. [18, p06] L'espace de Banach $H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$, avec $p = \rho + 2$, et $\rho > 0$ est muni de la norme

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

est Séparable (i.e. admet un ensemble dénombrable dense) .

Lemme 1.23. [18, p08]

$$\text{Si } u \in L^p(\Omega) \text{ alors : } |u|^\rho u \in L^{p'}(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

1.3.3 Fonction convexes et sous-différentiabilité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel E et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$. φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞ , c'est à dire s'il existe $x \in E$ tel que : $\varphi(x) < \infty$. φ est dite convexe si :

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in [0, 1],$$

φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $x, y \in E$ et tels que $x \neq y$. On définit le domaine et l'épigraphe de φ , respectivement, par :

$$\text{dom}(\varphi) = \{x \in E \text{ tel que } \varphi(x) < \infty\},$$

$$\text{epi}(\varphi) = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\}.$$

Il clair qu'on peut établir les résultats suivants :

- i φ est dite propre si et seulement si $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.
- ii Le domaine de φ est un convexe de E si φ est convexe.
- iii φ est convexe si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est un ensemble convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique E et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\{x \in E \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\}$$

est fermé.

Nous donnons ici quelques propriétés des fonctions semi-continue inférieurement.

Définition 1.1 (hémi-continu). *Toute opérateur A de $V \longrightarrow V'$ est dite hémi-continu, s'il vérifie la propriété suivante, $\forall u, v, w \in V$, la fonction ;*

$$\lambda \mapsto (A(u + \lambda v), w)$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.24 (semi-continue inférieurement). *Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ Alors :*

- i φ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.
- ii φ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $u \in H$ et tout $x \in H$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_x de x dans H telque : $\varphi(u) \geq \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $u \in V_x$.
Il en résulte en particulier que si : φ est semi-continue inférieurement et si $x_n \longrightarrow x$, alors :

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x),$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant

Théorème 1.6 (Différentielle au sens de Gâteaux). *Soit $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre Alors : φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle semi-continue inférieurement pour la topologie faible de H . Une fonction $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux - différentiable en point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u+t.v) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_H$, $\forall v \in H$. L'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de φ au point u . La fonction φ est dite Gâteaux - différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de H ; dans ce cas l'opérateur : $u \longrightarrow \nabla\varphi(u) : H \longrightarrow H$ s'appelle le gradient de la fonction φ . La convexité des fonctions Gâteaux - différentiables peut être caractérisée de la façon suivante.*

Lemme 1.25 (convexité). *Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable Alors : φ est convexe si et seulement si ;*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.2)$$

L'inégalité ((1.2)) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H, \quad \forall v \in H. \quad (1.3)$$

L'élément f est appelé sous-gradient de φ au point u et l'ensemble des sous-gradients de φ en point u est appelé le sous-différentiel de φ en point u est noté $\partial\varphi(u)$;

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H / \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H, \quad \forall v \in H \} \quad (1.4)$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{ u \in H \text{ tel que } \partial\varphi(u) \neq \emptyset \} \quad (1.5)$$

En utilisant (1.4), ((1.5)) est la définition du domaine d'une fonction, il résulte :

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom}(\varphi) \quad (1.6)$$

L'opérateur multivoque : $H \longrightarrow 2^H : u \longrightarrow \partial\varphi(u)$ s'appelle le sous-différentiel de φ . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle sous-différentiable en tout point $u \in H$, c'est à dire : $\text{dom}(\partial\varphi) = H$.

Proposition 1.2. Si $v \longrightarrow J(v)$ est une fonction différentiable au sens de Gâteaux sur V et convexe Alors ; l'application : $v \longrightarrow J'(v)$ de $V \longrightarrow V'$ est monotone et héli continue.

Remarque 1.1. Si $v \longrightarrow J(v)$ est une fonction différentiable au sens de Gâteaux sur V et si $J'(u)$ est monotone et héli continue de $V \longrightarrow V'$. Alors ; J est convexe.

Lemme 1.26 (convexité, propre et semi-continue inférieurement). Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous - différentiable Alors : φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement. Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par ;

Lemme 1.27 (sous-différentiable). Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux - différentiable Alors : φ est sous - différentiable et on a :

$$\partial\varphi(u) = \{ \nabla\varphi(u) , \forall u \in H \} , .$$

Opérateur fortement monotones et inéquations variationnelles

Soient $A : H \longrightarrow H$ un opérateur, $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$.

Un nombre considérable de problèmes aux limites en mécanique des milieux continus ont un lieu avec les problèmes suivants :

Trouver $u \in H$ tel que ;

$$(A(u), v - u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H , \forall v \in H. \quad (1.7)$$

Le problème (1.7) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H .

L'opérateur A est dit :

i Fortement monotone s'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$(A(u) - A(v), u - v)_H \geq m \|u - v\|_H^2, \forall u, v \in H. \quad (1.8)$$

ii Lipschitzien s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|A(u) - A(v)\|_H \leq M \|u - v\|_H, \forall u, v \in H. \quad (1.9)$$

En ce qui concerne le problème (1.7) on a le résultat d'existence et d'unicité suivant ;

Théorème 1.7 (d'existence et d'unicité du problème). *Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitzien et φ une fonction convexe et semi - continue inférieurement Alors : l'inéquation variationnelle élliptique de seconde espèce (1.7) admet une solution unique.*

Définition 1.2 (Les opérateurs pseudo-monotone). *Un opérateur A de $V \rightarrow V'$ est dit pseudo-monotone si :*

i A est borné.

ii Lorsque $u_j \rightarrow u$ dans V faible et $\limsup (A(u_j), u_j - v) \leq 0$.

Alors :

$$\liminf (A(u_j), u_j - v) \geq (A(u), u - v), \forall v \in V.$$

1.3.4 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation

On introduit ici des notations générales sur les espaces de Sobolev ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les injections de Sobolev, le théorème de trace et les différents résultats de compacité. on rappelle ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et liés aux opérateurs divergence et déformation.

Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. $1 \leq p \leq \infty$ et $T > 0$, on désigne par $L^p(0, T; H)$ l'espace des classe de fonctions : $t \rightarrow u(t)$ de $[0, T] \rightarrow H$ qui sont mesurables à valeurs dans H telles

que ;

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(0,T;H)} < +\infty \quad (1.10)$$

Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme (1.10). En particulier,

si $p = 2$, $L^2(0, T; H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt, \quad \forall u, v \in L^2(0, T; H). \quad (1.11)$$

si $p = \infty$, $L^\infty(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par ;

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = \sup_{t \in]0,T[} \|u\|_H, \quad \forall u \in L^\infty(0, T; H). \quad (1.12)$$

Pour traiter les problèmes d'évolution, on a besoin des résultats suivants.

Théorème 1.8 (Théorème de Dunford-Pettis). *Soit H un espace de Hilbert et $T > 0$, alors : l'espace $L^\infty(0, T; H')$ est le dual de l'espace $L^1(0, T; H)$.*

Lemme 1.28. *Soient X, Y deux espaces de Hilbert vérifiant l'hypothèse ; $X \subset Y$, X dense dans Y avec injection continue. et $T > 0$, Si :*

$$u \in L^2(0, T; X) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; Y)$$

Alors : u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[0, T]$, continue de $[0, T]$ dans $[X, Y]_{\frac{1}{2}}$.

Théorème 1.9 (Théorème de compacité d'Aubin). *Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach tels que ; $B_0 \subset B \subset B_1$, l'injection : $B_0 \longrightarrow B$ est compact et B_0 et B_1 , sont réflexifs. Considérons pour $T > 0$ et $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, l'espace de Banach suivant :*

$$W = \left\{ u \in L^{p_0}(0, T; B_0) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\},$$

menu de la norme ;

$$\|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

Alors ; l'injection : $W \longrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$ est compacte.

Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par S_n l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), „.” et $|\cdot|$ représentent, respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne induite sur $\mathbb{R}^n$ et S_n . Ainsi,

$$u.v = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad |u| = (u.u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma.\tau = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S_n,$$

On utilise les notations suivantes :

$$L^2(\Omega)_s^{n \times n} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) / i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$\begin{aligned} H^1(\Omega)^n &= \left\{ u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega) / i = 1, 2, \dots, n \right\} \\ &= \left\{ u = (u_i) / u \in L^2(\Omega) / \varepsilon(u) \in L^2(\Omega)_s^{n \times n} \right\} \end{aligned}$$

$$H_1 = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)_s^{n \times n} / \text{Div}(\sigma) \in L^2(\Omega)^n \right\}$$

où $\varepsilon : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)_s^{n \times n}$ et $\text{Div}(\sigma) : H_1 \rightarrow L^2(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) : \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \text{Div}(\sigma) = (\sigma_{ij,j}). \quad (1.13)$$

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normale sortant ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H^1(\Omega)^n$ nous conservons la notation v pour désigner la trace de v sur Γ et on note par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ , données par la formule :

$$v_\nu = v.\nu, \quad v_\tau = v - v_\nu.\nu. \quad (1.14)$$

Désignons par γ l'application trace :

$$\gamma : H^1(\Omega)^n \rightarrow L^2(\Gamma)^n,$$

et faisons introduire les notations ;

$$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n = \gamma \left(H^1(\Omega)^n \right) \quad \text{et} \quad H'_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n,$$

et par $(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma_0 \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in H'_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ tel que la formule de Green pour l'élasticité suivante soit satisfaite ;

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{L^2(\Omega)_s^{n \times n}} + (\text{Div}(\sigma), v)_{L^2(\Omega)} = (\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons ;

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega)^n,$$

où $d\Gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ , par la formule :

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.15)$$

Tout au long de cette thèse, dans les problèmes mécaniques, Γ est partitionnée en deux parties mesurables et disjointes Γ_0 et Γ_1 , telles que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$. Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles ;

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^n \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}.$$

L'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_0 telle que ;

$$\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)_s^{n \times n}} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)^n}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^n. \quad (1.16)$$

Lemme 1.29 (Inégalité de Korn). *Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_0 telle que ;*

$$\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)_s^{n \times n}} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)^n}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^n.$$

où $\varepsilon : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)_s^{n \times n}$ et $\text{Div}(\sigma) : H_1 \rightarrow L^2(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) : \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \text{Div}(\sigma) = (\sigma_{ij,j}).$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE GLOBALE ET EXPLOSION D'UNE ÉQUATION DE PETROVSKY AVEC DES TERMES DE SOURCE ET DISSIPATIF NON LINÉAIRE

Résumé

Dans ce chapitre et pour l'étude le problème aux limites initiale pour l'équation de Petrovsky avec un source terme et dissipatifs :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u - \Delta u' + |u|^{p-2} u + \alpha g(u') = \beta f(u) \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[, \quad p > 2$$

Où Ω est un domaine borné ouvert dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, α , et $\beta > 0$. Pour le terme $f(u)$ non linéaire continue et pour g continue, croissante, satisfaisant $g(0) = 0$, dans des conditions appropriées, nous montrons l'existence globale de la solution par la procédure de la méthode de Faedo-Galerkin combiné avec cette méthode la solution est stable dans l'espace $H_0^2(\Omega)$. En outre, nous prouvons que cette solution blows up dans le temps fini, quand l'énergie initiale est négative.

2.1 Introduction

Ce chapitre consacré à l'existence globale, à l'unicité, et blow-up de la solution pour l'équations non linéaires du Général Petrovsky ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u(t) - \Delta u'(t) + |u|^{p-2} u(t) + \alpha g(u'(t)) = \beta f(u(t)) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, p > 2 \\ u = \partial_\eta u = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Récemment, en l'absence du terme d'amortissement forte $-\Delta u'(t)$ et dans le cas où $\beta f(u(t)) = -q(x)u(x, t) + |u|^{p-2}u(t)$ pour g une fonction continue, croissante, satisfaisant de $g(0) = 0$, et $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction borné, le problème (2.1) devient le suivant ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u(t) + q(x)u(x, t) + g(u'(t)) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

Cette équation ainsi que des états d'initiale et de frontière de type de Dirichlet a été considérée par Guesmia dans [14], il a prouvé une existence globale et un résultat de régularité de solution, l'auteur dans des conditions appropriées de croissance sur g a prouvé que la solution décroissante exponentiellement si g se comporte comme une fonction linéaire, tandis que la décroissante est d'un ordre polynôme autrement. Sans du terme d'amortissement forte $-\Delta u'(t)$ avec le $\alpha g(u'(t)) = |u'(t)|^{\sigma-2}u'(t)$ et $\beta f(u(t)) = (b+1)|u(t)|^{p-2}u(t)$, $b > 0$, le problème (2.1) réduit au problème suivant ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u(t) + |u'(t)|^{\sigma-2}u'(t) = b|u(t)|^{p-2}u(t) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

ce problème a été considéré par Messaoudi dans [25], où il a étudié l'existence globale et blow up de la solution. Plus précision, il a prouvé que les solutions avec n'importe quelles données initiales continuent à exister globalement à temps si $\sigma \geq p$ et blow up dans le temps fini si le $\sigma < p$ et l'énergie initiale est négative. Il a utilisé une nouvelle méthode présentée par Georgiev et Todorova dans [13] basé sur le théorème de point fixe pour la preuve. Et dans [33] Wu et Tsai ont prouvé que la solution du problème considéré par Messaoudi dans [25] est globale dans certaines conditions. En outre, Chen et Zhou dans [8] ont étudié le blow-up de la solution du même problème de Messaoudi dans [25]. En présence de l'amortissement forte, dans le cas où $\beta f(u(t)) = (b+1)|u(t)|^{p-2}u(t)$, $g(u'(t)) = |u'(t)|^{\sigma-1}u'(t)$, $b > 0$, le problème du Général Petrovsky comme de dans (2.1) devient ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u(t) - \Delta u'(t) + |u'(t)|^{\sigma-1}u'(t) = b|u(t)|^{p-1}u(t), \quad (P1)$$

ce problème a été considéré par Li et al [23], Piskin Polat dans [27] et Nour dans [2], les auteurs ont obtenu l'existence globale, decay uniforme des solutions sans n'importe quelle

interaction entre p et le σ , blow up de la solution a été établie quand $\sigma < p$, très récemment, Pişkin et Polat dans [27] ont étudié la décroissance de la solution du problème (P1).

Dans ce document, notre but est de prolonger le résultat de Messaoudi dans [25], de WuandTsai dans [33] et d'autre établis dans des domaines bornés au problème général en tant que de dans (2.1). La non linéaire terme f dans (2.1) aime $f(u(x, t)) = a(x)|u(t)|^{r-2}u(t) - b(x)|u(t)|^{q-2}u(t)$ avec $r > q \geq 1$ et $a(x), b(x) > 0$, et g dans (2.1) telle que $g(u'(x, t)) = \alpha(x)|u'(t)|^{\sigma-2}u'(t)$ avec $\sigma \geq 2$ pour une fonction $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie : $\alpha_1 \geq \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$. Dans ces buts, nous devons établir l'existence globale de la solution pour le problème (2.1), nous utilisons l'approche variationnelle de l'approximation de Faedo-Galerkin combinée avec la monotonie, la compacité, l'ensemble des méthodes stable comme dans les résultats de Messaoudi dans [25], Wenying dans [8] et dans [27] de Piskin Polat avec une certaine modification dans quelques passages pour conduire le blow-up (explosion) dans la période finie de la solution.

2.2 Hypothèses

Soit les hypothèses précises sur p, g et f . Soit p être un nombre avec ;

$$2 < p \leq \frac{2n-6}{n-4} \quad (n \geq 5) \quad (2 \leq p < \infty \text{ si } n = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{H1})$$

g est une fonction impaire croissante de classe C^1 et ;

$$\begin{cases} xg(x) \geq d_0|x|^\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p > \sigma \geq 2, \\ |g(x)| \leq d_1|x| + d_2|x|^{\sigma-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p > \sigma \geq 2, \quad d_i \geq 0. \end{cases} \quad (\text{H2})$$

Soit $f(x, s) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, satisfait :

$$sf(x, s) + k_1(x)|s| \geq pF(x, s), \quad p > 2, \quad (\text{H3})$$

là où ; $F(x, s) = \int_0^s f(x, \zeta) d\zeta$, et les conditions de croissance ;

$$\begin{cases} |f(x, s)| \leq l_0(|s|^\theta + k_2(x)), \\ |f_s(x, s)| \leq l_1(|s|^{\theta-1} + k_3(x)) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (\text{H4})$$

avec un certain $l_0, l_1 > 0$ et le non négatif des fonctions $k_1(x), k_2(x), k_3(x) \in L^\infty(\Omega)$, p.p. $x \in \Omega$, et $\frac{p}{2} > \frac{\sigma}{2} \geq \theta > 1$.

2.3 Existence Locale

Dans cette section, nous établissons un résultat local existence pour le problème (2.1) dans les hypothèses sur f , g et p .

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses (H_1) - (H_4) précédente. Alors donné quels $(u_0, u_1) \in W \cap L^p(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \cap L^{2\sigma-2}(\Omega)$, le problème (2.1) admet une solution unique $u(t)$ satisfaire :*

$$u \in L^\infty(0, T; W \cap L^p(\Omega)), \quad (2.2)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad (2.3)$$

$$g(u'(t)) \cdot u'(t) \in L^1(0, T; L^1(\Omega)), \quad (2.4)$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.5)$$

où ;

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) : \varphi = \partial_\eta \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

et

$$W = \left\{ \varphi \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) : \Delta \varphi = \partial_\eta \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Dans tout ce document, C dénote dépendre constant de positif générique de Ω et de toutes autres constantes données, qui peuvent être différentes d'entre phases et sont capables de l'examen et modification.

Démonstration. Nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin pour construire une solution globale. soit $T > 0$ être fixe et dénoter par V_m l'espace engendré par $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, où l'ensemble $\{w_m, m \in \mathbb{N}\}$ est une base de $L^2(\Omega)$, $H_0^2(\Omega)$ et de $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Nous construisons l'approximation des solutions u_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) sous la forme ;

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m K_{jm}(t) w_j,$$

où ; K_{jm} sont déterminés par les équations ordinaires suivantes :

$$(u_m'', w_j) + (\Delta^2 u_m, w_j) - (\Delta u_m', w_j) + (|u_m|^{p-2} u_m, w_j) + \alpha (g(u_m'), w_j) = \beta (f(u_m), w_j) \quad (2.6)$$

et par l'intégration par partie on trouve ;

$$(\Delta^2 u_m, w_j) = \int_{\Omega} \Delta u_m \Delta w_j dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta u_m)}{\partial \eta} w_j d\Gamma,$$

et

$$(\Delta u_m', w_j) = - \int_{\Omega} \nabla u_m' \nabla w_j dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial (u_m')}{\partial \eta} w_j d\Gamma,$$

et comme $\Delta u_m = \partial_\eta \Delta u_m = u_m = \partial_\eta u_m = 0$ sur $\partial\Omega$ donc ;

$$\begin{aligned} (u_m'', w_j) + (\Delta u_m, \Delta w_j) + (\nabla u_m', \nabla w_j) \\ + (|u_m|^{p-2} u_m, w_j) + \alpha(g(u_m'), w_j) = \beta(f(u_m), w_j) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} u_m(0) &= u_{0m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_j) w_j \xrightarrow{\text{lorsque } m \rightarrow \infty} u_0 \\ &\text{dans } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \cap L^p(\Omega), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} u_m'(0) &= u_{1m} = \sum_{i=1}^m (u_1, w_j) w_j \xrightarrow{\text{lorsque } m \rightarrow \infty} u_1 \\ &\text{dans } H_0^2(\Omega) \cap L^{2\sigma-2}(\Omega), \end{aligned}$$

avec les u_0, u_1 sont des fonctions données sur Ω , en vertu de la théorie d'équations ordinaires, le système (2.6)- (2.8) a une solution locale unique sur un certain intervalle $[0, t_m]$. Nous prétendons que pour n'importe quel $T > 0$, une telle solution peut être prolongée à l'intervalle entier $[0, T]$ en employant la première estimations a priori ci-dessous. Nous dénotons par C, C_k ou c_k les constantes qui sont indépendant de m et initial des données u_0 et u_1 . Multipliant l'équation (2.6) par $K'_{jm}(t)$ et effectuant la somme en $j = 1, \dots, m$, et l'intégration par partie donne,

$$\begin{aligned} (u_m''(t), u_m'(t)) + (\Delta u_m, \Delta u_m'(t)) + (\nabla u_m', \nabla u_m'(t)) \\ + (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t), u_m'(t)) + \alpha(g(u_m'(t)), u_m'(t)) = \beta(f(u_m), u_m'(t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et comme on a ;

$$\begin{aligned} (u_m''(t), u_m'(t)) &= \int_\Omega u_m''(t), u_m'(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2, \\ (\Delta u_m, \Delta u_m'(t)) &= \int_\Omega \Delta u_m \Delta u_m'(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2, \\ (\nabla u_m'(t), \nabla u_m'(t)) &= \int_\Omega (\nabla u_m'(t))^2 dx = \frac{1}{2} |\nabla u_m'(t)|^2, \\ (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t), u_m'(t)) &= \int_\Omega |u_m(t)|^{p-1} u_m'(t) dx = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_p^p, \\ (f(u_m(t)), u_m'(t)) &= \int_\Omega f(u_m(t)) u_m'(t) dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt} \left(\int_0^{u_m(t)} f(x, \xi) d\xi \right) dx = \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega F(x, u_m(t)) dx \right), \quad f(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

c-à-d ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_p^p \\ - \beta \frac{d}{dt} \int_\Omega F(x, u_m(t)) dx + \frac{1}{2} |\nabla u_m'(t)|^2 + \alpha(g(u_m'(t)), u_m'(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

donc ;

$$E_m'(t) + |\nabla u_m'(t)|^2 + \alpha(g(u_m'(t)), u_m'(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.10)$$

où ;

$$E_m(t) = \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p - \beta \int_{\Omega} F(x, u_m(t)) dx, \quad (2.11)$$

par l'hypothèse (H₃) et l'utilisation de l'inégalité de Young, nous avons ;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, u_m) dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} [k_1(x) |u_m| + u_m f(x, u_m)] dx, p > 2 \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} k_1(x) |u_m| dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx, p > 2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} F(x, u_m) dx &\geq -\frac{1}{p} \int_{\Omega} k_1(x) |u_m| dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx \\ &\geq -\frac{1}{p} |u_m| |k_1(x)| - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx \\ &\geq -\frac{1}{2p} (|u_m|^2 + |k_1(x)|^2) - \left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx \right), (|u_m(t)| \leq c |\Delta u_m(t)|) \\ &\geq -\varepsilon C_*^2 |\Delta u_m(t)|^2 - C_{\varepsilon} |k_1(x)|^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

et en utilisant l'hypothèse (H₄), et l'inégalité de Young nous avons ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x, u_m)| |u_m| dx \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\int_{\Omega} |f(x, u_m)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2p} \left(\int_{\Omega} |f(x, u_m)|^2 dx \right) + \frac{1}{2p} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2p} \left(\int_{\Omega} (l_1 (|u_m|^{\theta} + k_2(x)))^2 dx \right) + \frac{1}{2p} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2p} \left(\int_{\Omega} (l_1^2 (|u_m|^{2\theta} + |k_2(x)|^2 + 2 |u_m|^{\theta} |k_2(x)|)) dx \right) + \frac{1}{2p} \int_{\Omega} |u_m|^2 dx \\ &\leq \frac{l_1^2}{p} \varepsilon \int_{\Omega} (|u_m|^{2\theta} + |k_2(x)|^2) dx + \frac{c(\varepsilon, p)}{p^2} \int_{\Omega} |u_m|^2 dx, (p > 2) \\ &= \frac{l_1^2}{p} \varepsilon \|u_m\|_{2\theta}^{2\theta} + \frac{l_1^2}{p} \varepsilon |k_2(x)|^2 + \frac{c(\varepsilon, p)}{p^2} \|u_m\|_p^2, (p \geq 2\theta > 2) \\ &\leq \frac{l_1^2}{p} \varepsilon \left(\frac{p-2\theta}{p} + \frac{2\theta}{p} \|u_m\|_p^p \right) + \frac{l_1^2}{p} \varepsilon |k_2(x)|^2 \\ &\quad + C'(\varepsilon, p) + \frac{1}{p^2} \|u_m\|_p^p \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega} u_m f(x, u_m) dx &\leq \frac{l_1^2}{p} \varepsilon \left(\frac{p-2\theta}{p} + \frac{2\theta}{p} \|u_m\|_p^p \right) + \frac{l_1^2}{p} \varepsilon |k_2(x)|^2 \\ &\quad + C'(\varepsilon, p) + \frac{1}{p^2} \|u_m\|_p^p \end{aligned} \quad (2.13)$$

Moyennant (2.13) de (2.12), et choisissons $\varepsilon \leq C_0 = \min \left(\frac{1}{2C_*^2}, \frac{p}{2\theta l_1^2 + 1} \right)$, l'équation (2.11) devient ;

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p - \beta \int_{\Omega} F(x, u_m(t)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p \\ &\quad - \beta \varepsilon C_*^2 |\Delta u_m(t)|^2 - \beta C_{\varepsilon} |k_1(x)|^2 \\ &\quad - \beta \left[-\frac{l_1^2}{p} \varepsilon \left(\frac{p-2\theta}{p} + \frac{2\theta}{p} \|u_m\|_p^p \right) - \frac{l_1^2}{p} \varepsilon |k_2(x)|^2 - C'(\varepsilon, p) - \frac{1}{p^2} \|u_m\|_p^p \right] \\ &\geq \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + C_1 |\Delta u_m(t)|^2 + C_2 \|u_m\|_p^p - C_3 (1 + K_1 + K_2), \end{aligned}$$

donc ;

$$E_m(t) \geq \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + C_1 |\Delta u_m(t)|^2 + C_2 \|u_m\|_p^p - C_3 (1 + K_1 + K_2), \quad (2.14)$$

ou ;

$$|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \|u_m\|_p^p \leq C_4 (E_m(t) + K_1 + K_2 + 1), \quad (2.15)$$

la où ;

$$\begin{aligned} 0 < C_1 &\leq (1 - C_0 C_*^2), \quad 0 < C_2 \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{2\theta l_1^2 + 1}{p^2} C_0 \right), \\ C_3 &= \max \left(C_\varepsilon, \frac{l_1^2}{p} \varepsilon; C'(\varepsilon, p) + \frac{l_1^2}{p} \varepsilon \frac{p - 2\theta}{p} \right), \\ C_4 &= \max \left(\frac{1}{\min(\frac{1}{2}, C_1, C_2)}, C_3 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, il suit l'intégration de (2.10) sur $(0; t)$ et l'utilisation de (2.14), pour n'importe quel $m = 1, 2, \dots$, et $t \geq 0$;

$$\begin{aligned} &|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|_p^p + \int_0^t |\nabla u'_m(s)|^2 ds \\ &+ \alpha \int_0^t (g(u'_m(s)), u'_m(s)) ds \leq C_4 (E_m(0) + K_1 + K_2 + 1). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Par les hypothèses (H_2) - (H_4) et l'utilisation des inégalités du Hölder, Young et de (2.13), nous avons ;

$$\begin{aligned} |\int_\Omega F(x, u_{0m}) dx| &\leq \frac{1}{p} |\int_\Omega (k_1(x) |u_{0m}| + u_{0m} f(x, u_{0m})) dx|, \quad p > 2, (H_3) \\ &\leq \frac{1}{p} \int_\Omega k_1(x) |u_{0m}| dx + \frac{1}{p} \int_\Omega u_{0m} f(x, u_{0m}) dx \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\int_\Omega |k_1(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_m(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{p} \int_\Omega u_{0m} f(x, u_{0m}) dx, (1.13) \\ &\leq \frac{1}{p} \left(|k_1(x)|^2 + |u_m(0)|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{p} \left(\frac{l_1^2}{p} \varepsilon \left(\frac{p-2\theta}{p} + \frac{2\theta}{p} \|u_m(0)\|_p^p \right) + \frac{l_1^2}{p} \varepsilon |k_2(x)|^2 + C'(\varepsilon, p) + \frac{1}{p^2} |u_m(0)|^2 \right) \\ &\leq C \left(|k_1(x)|^2 + |u_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|_p^p + |k_2(x)|^2 + |u_m(0)|^2 \right) \end{aligned}$$

donc ;

$$\left| \int_\Omega F(x, u_{0m}) dx \right| \leq C \left(|u_m(0)|^2 + |k_1(x)|^2 + \|u_m(0)\|_p^p + |k_2(x)|^2 + |u_m(0)|^2 \right). \quad (2.17)$$

Alors moyennant (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) nous obtenons ;

$$\begin{aligned} E_m(t) &\leq E_m(0) = \frac{1}{2} |u_{1m}|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u_{0m}|^2 + \frac{1}{p} \|u_{0m}\|_p^p \\ &\quad - \beta \int_\Omega F(x, u_{0m}) dx \\ &\leq C_4 \left(|u_{1m}|^2 + |\Delta u_{0m}|^2 + \|u_{0m}\|_p^p + |u_{0m}|^2 + K_1 + K_2 \right) \leq C, \end{aligned} \quad (2.18)$$

pour un certain $C > 0$, où $K_1 = \|k_1\|_\infty^2$, $K_2 = \|k_2\|_\infty^2$.

Par conséquent, pour n'importe quel $t \geq 0$ et $m = 1, 2, \dots$, de (2.16) et (2.18) nous obtenons ;

$$\begin{aligned} &|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u'_m(s)|^2 ds + \|u_m(t)\|_p^p \\ &+ \alpha \int_0^t \int_\Omega g(u'_m(s)) u'_m(s) dx ds \leq C \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par les conditions de croissance, par l'estimation (2.19), et comme $2\theta \leq p$, nous avons

$$|f(u_m)|^2 \leq Cl_1 \left(|u_m|^{2\theta} + |k_2(x)|^2 \right) \leq C \left(\|u_m\|_p^{2\theta} + \|k_2\|_\infty^2 \right) \leq C.$$

Avec cette évaluation nous pouvons prolonger l'approximation de solution $u_m(t)$ à l'intervalle $[0, T]$ et aux estimations d'a priori suivantes ;

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \\ u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ g(u'_m) \cdot u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^1(\Omega \times (0, T)), \\ \Delta u_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ f(u_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour démontrer l'équation (2.5) on utilise les lemmes suivantes : □

Lemme 2.1. *Il existe une constante $K > 0$ tels que ;*

$$\|g(u'_m(t))\|_{L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\Omega \times [0, T])} \leq K, \quad (\sigma \geq 2)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. De l'hypothèse (H_2) , et l'utilisation des inégalités du Hölder et de Young donne ;

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt = \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m)|^1 |g(u'_m)|^{\frac{1}{\sigma-1}} dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| \left(d_1 |u'_m(t)| + d_2 |u'_m(t)|^{\sigma-1} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} dx dt, (H_2) \\ & \leq C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| \left(|u'_m(t)|^{\frac{1}{\sigma-1}} + |u'_m(t)| \right) dx dt \\ & = C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)|^{\frac{1}{\sigma-1}} dx dt \\ & \quad + C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt \\ & \leq C \int_0^T \left(\int_\Omega (|g(u'_m(t))|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|u'_m(t)|^{\frac{1}{\sigma-1}})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \quad + C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (|u'_m(t)|^{\frac{1}{\sigma-1}})^2 dx dt \\ & \quad + C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt, \quad (p > \sigma \geq 2\theta > 2) \\ & \leq \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \right) + C(\sigma) \int_0^T \int_\Omega |u'_m(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \\ & \quad + C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt, \end{aligned}$$

et par conséquent ;

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\sigma-1}{\sigma} \right) \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \leq C(\sigma) \int_0^T \int_\Omega |u'_m(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \\ & \quad + C \int_0^T \int_\Omega |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \int_0^T \int_{\Omega} |g(u'_m(t))|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt &\leq C(\sigma) \int_0^T \int_{\Omega} |u'_m(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\Omega} |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt \\ &\leq C \int_0^T \|u'_m(t)\|_2^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dt + C \int_0^T \int_{\Omega} |g(u'_m(t))| |u'_m(t)| dx dt, \end{aligned}$$

par conséquent, et par (2.20), nous concluons ;

$$\int_0^T \int_{\Omega} |g(u'_m(t))|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dx dt \leq K$$

□

Lemme 2.2. *Il existe une constante $M > 0$ tels que ;*

$$|u''_m(t)| + |\Delta u'_m(t)| + \int_0^T |\nabla u''_m(t)| dt \leq M,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. A partir de (2.6), nous obtenons ;

$$|u''_m(0)| \leq |u_{0m}|^{p-1} + |\Delta^2 u_{0m}| + |\Delta u_{1m}| + \alpha |g(u_{1m})| + \beta |f(u_{0m})|,$$

par l'hypothèse (H₄), nous avons ;

$$|f(u_{0m})|^2 \leq l_1 (|u_{0m}|^{2\theta} + |k_2(x)|^2) \leq C (|\Delta u_{0m}|_2^{2\theta} + \|k_2\|_{\infty}^2)$$

Puisque $g(u_{1m})$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$ et l'hypothèse (H₂), de (2.7) et (2.8) nous obtenons ;

$$|u''_m(0)| \leq C.$$

la dérivation de (2.6) en t , nous obtenons

$$\begin{aligned} (u'''_m, w_j) + (\Delta^2 u'_m, w_j) - (\Delta u''_m, w_j) + (p-1) (|u_m|^{p-2} u'_m, w_j) \\ + \alpha (g'(u'_m) u''_m, w_j) = \beta (f'(u_m) u'_m, w_j). \end{aligned} \quad (2.21)$$

en multipliant (2.21) par $K''_{jm}(t)$ et l'on somme de $j = 1, \dots, m$, et l'utilisation de l'inégalité du Hölder, on trouve ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u''_m(t)|^2 + |\Delta u'_m(t)|^2) + |\nabla u''_m(t)|^2 + \alpha (g'(u'_m) u''_m, u''_m), g \text{ croissante} \\ \leq C_1 (p-1) \left(\int_{\Omega} |u_m|^{p-2} |u'_m| |u''_m| dx \right) + C_1 \beta \left(\int_{\Omega} |f'(u_m)| |u'_m| |u''_m| dx \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

et prendre λ vérifiant les inégalités ;

$$\begin{cases} \lambda + 1 \leq \min \left(\frac{p}{2(\theta-1)}, \frac{n}{n-4} \right) & \text{si } n \geq 5, \\ \lambda + 1 \leq \frac{p}{2(\theta-1)} & \text{si } n = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

$$2 < p \leq 2(\lambda + 1) \leq \frac{2n}{n-4}$$

alors par l'hypothèse (H₄) et l'estimation (2.20) avec l'utilisation l'inégalité de Hölder généralisé, nous déduisons ;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |f'(u_m)| |u'_m| |u''_m| dx \\ & \leq C_2 \left\| l_1 \left(|u_m|^{\theta-1} + k_3(x) \right) \right\|_{2(\lambda+1)}^{\lambda} \|u'_m\|_{2(\lambda+1)} \|u''_m\|_2 \\ & \leq C_3 \left(\left\| |u_m|^{\theta-1} \right\|_{2(\lambda+1)}^{\lambda} + \|k_3(x)\|_{2(\lambda+1)}^{\lambda} \right) \|u'_m\|_{2(\lambda+1)} \|u''_m\|_2, \quad 2 < p \leq 2(\lambda + 1) \\ & \leq C_4 \left(\|u_m\|_p^{\lambda(\theta-1)} + \|k_3(x)\|_p^{\lambda} \right) \|\Delta u'_m\|_2 \|u''_m\|_2 \\ & \leq C_5 \left(|u''_m(t)|^2 + |\Delta u'_m(t)|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

là où $C_1, \dots, C_5$ sont des constantes positive indépendant de m et $t \in [0, T]$. Par la même façon, l'utilisation de l'hypothèse (H₁), l'inégalité de Young, l'injection de Sobolev et l'évaluation (2.20), nous avons ;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m|^{p-2} |u'_m| |u''_m| dx & \leq \left\| |u_m|^{p-2} \right\|_n \|u'_m\|_{\frac{2n}{n-2}} \|u''_m\|_2 \\ & \leq C \|\Delta u'_m\|_2 \|u''_m\|_2 \leq C_5 \left(|u''_m(t)|^2 + |\Delta u'_m(t)|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

La combinaison (2.22), (2.23) et (2.24), nous déduisent ;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|u''_m(t)|^2 + |\Delta u'_m(t)|^2 \right) + |\nabla u''_m(t)|^2 + \alpha (g'(u'_m) u''_m, u''_m) \\ & \leq C_6 \left(|u''_m(t)|^2 + |\Delta u'_m(t)|^2 \right). \end{aligned}$$

L'intégration de cette dernière inégalité sur $(0, t)$ et l'application du lemme de Gronwall (voir le Lemme (1.4)), nous obtenons ;

$$|u''_m(t)| + |\Delta u'_m(t)| + \int_0^t |\nabla u''_m(s)|^2 ds \leq M \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} u''_m & \text{ demeure dans un borné de } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Delta u'_m & \text{ demeure dans un borné de } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla u''_m & \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

il suit de (2.25), (u'_m) est demeure dans un borné de $L^{\infty}(0, T; H_0^2(\Omega))$. En outre, en appliquant le lemme de compacité de Lions-Aubin, nous avons

$$u'_m \text{ est précompact sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.26)$$

nous concluons (2.20) et (2.25) , nous pouvons extraire une sous suite (u_m) tels que ;

$$\begin{aligned}
 u_m &\longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\
 u_m &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort}, \\
 u'_m &\longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\
 u'_m &\longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort}, \\
 u''_m &\longrightarrow u'' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\
 g(u'_m) &\longrightarrow \chi \text{ dans } L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\Omega \times (0, T)) \text{ faible } *, \\
 f(u_m) &\longrightarrow \zeta \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

En utilisant la compacité de $H_0^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$, il est facile de voir que ;

$$\int_0^T \int_\Omega |u_m|^{p-2} u_m v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega |u|^{p-2} u v dx dt, \text{ pour tout } v \in L^\sigma(0, T; H_0^2(\Omega)),$$

lorsque $m \rightarrow \infty$. De l'hypothèse (H_2) et les estimations (2.27) , nous avons ;

$$g(u'_m) \longrightarrow g(u') \text{ p.p dans } \Omega \times (0, T).$$

Donc, de [18, Chapitre1, Lemma1.3], il resulte que ;

$$g(u'_m) \longrightarrow g(u') \text{ dans } L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0, T; L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}) \text{ faible } *,$$

lorsque $m \rightarrow \infty$, et ceci implique que ;

$$\int_0^T \int_\Omega g(u'_m) v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega g(u') v dx dt \text{ pour tout } v \in L^\sigma(0, T; H_0^2(\Omega)).$$

et par la même façon on utilison les conditions de l'hypothèse (H_4) et l'évaluation (2.27) , nous voyons que ;

$$\int_0^T \int_\Omega |f(u_m)|^{\frac{\theta+1}{\theta}} dx dt \text{ est borné},$$

et

$$f(u_m) \longrightarrow f(u) \text{ p.p dans } \Omega \times (0, T).$$

alors ;

$$f(u_m) \longrightarrow f(u) \text{ dans } L^{\frac{\theta+1}{\theta}}(0, T; L^{\frac{\theta+1}{\theta}}) \text{ faible}*$$

lorsque $m \rightarrow \infty$, et ceci implique que ;

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_m) v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega f(u) v dx dt \text{ pour tout } v \in L^\theta(0, T; H_0^2(\Omega)).$$

Il découle immédiatement de toutes les évaluations précédentes et pour chaque $v \in L^\theta(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap L^\sigma(0, T; H_0^2(\Omega))$ fixe, on a ;

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_\Omega (u''_m + \Delta^2 u_m - \Delta u'_m + |u_m|^{p-2} u_m + \alpha g(u'_m) - \beta f(u_m)) v dx dt \\
 &\rightarrow \int_0^T \int_\Omega (u'' + \Delta^2 u - \Delta u' + |u|^{p-2} u + \alpha g(u') - \beta f(u)) v dx dt,
 \end{aligned}$$

lorsque $m \rightarrow \infty$. En conséquence que ;

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(u'' + \Delta^2 u - \Delta u' + |u|^{p-2} u + \alpha g(u') - \beta f(u) \right) v dx dt = 0, \\ \forall v \in L^{\theta} \left(0, T; H_0^2(\Omega) \right) \cap L^{\sigma} \left(0, T; H_0^2(\Omega) \right).$$

Ceci signifie que le problème admet une solution faible u satisfaisant (2.1) et (2.2)–(2.5). $\square$

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème (2.1), la solution u donné par le théorème (2.1) est unique.*

Démonstration. Soit u et v deux solutions vérifie les conditions du théorème (2.1). Alors $w = u - v$ vérifie ;

$$w'' + (\Delta^2 u - \Delta^2 v) - \Delta w' + \alpha (g(u') - g(v')) \\ + (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) = \beta (f(u) - f(v)), \quad (2.28)$$

$$w(0) = w'(0) = 0 \text{ sur } \Omega, \quad (2.29)$$

$$w = \partial_{\eta} w = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (2.30)$$

$$w \in L^p(0, T; W \cap L^p(\Omega)), \quad (2.31)$$

$$w' \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (2.32)$$

Multiplions les deux membres de (2.28) par w' et intégrons sur Ω . Et en utilisant la formule de Green et les conditions (2.30) et l'intégration par partie sur $[0, t]$ et les conditions (2.20), on trouve que ;

$$\begin{aligned} (w''(t), w'(t)) &= \int_{\Omega} w''(t) w'(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'(t)|^2, \\ (\Delta^2 u - \Delta^2 v, w'(t)) &= \int_{\Omega} [\Delta^2 u(t) w'(t) - \Delta^2 v(t) w'(t)] dx, \\ \int_{\Omega} \Delta^2 u(t) w'(t) dx &= \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta w'(t) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta u(t))}{\partial \eta} w'(t) d\Gamma, (\partial_{\eta} \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma) \\ \int_{\Omega} \Delta^2 v(t) w'(t) dx &= \int_{\Omega} \Delta v(t) \Delta w'(t) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta v(t))}{\partial \eta} w'(t) d\Gamma, (\partial_{\eta} \Delta v = 0 \text{ sur } \Gamma) \\ (\Delta^2 u - \Delta^2 v, w'(t)) &= \int_{\Omega} \Delta w(t) \Delta w'(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta w(t)|^2, \\ (-\Delta w'(t), w'(t)) &= \int_{\Omega} \nabla w'(t) \nabla w'(t) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial(w'(t))}{\partial \eta} w'(t) d\Gamma, (w'(t) = 0 \text{ sur } \Gamma) \\ &= \frac{1}{2} |\nabla w'(t)|^2. \end{aligned}$$

c-à-d ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} |w'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} (|\Delta w(s)|^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\nabla w'(s)|^2 ds \\ + \int_0^t \alpha (g(u') - g(v')) w'(s) ds \\ + \int_0^t (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w'(s) ds = \int_0^t \beta (f(u) - f(v)) w'(s) ds, \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|w'(t)|^2 + |\Delta w|^2) &\leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right) |w'| dx ds \\ &+ \beta \left(\int_0^t \int_{\Omega} |f(u) - f(v)| |w'| dx ds \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Moyennant les inégalités de Hölder et de Young, l'hypothèse (H₁), l'évaluation (2.27), la première terme dans le côté droit de (2.33) peuvent être estimées comme suit

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right) |w'| dx ds \\ &\leq (p-1) \int_0^t \left(\| |u|^{p-2} \|_{L^n(\Omega)} + \| |v|^{p-2} \|_{L^n(\Omega)} \right) \|w\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq C \int_0^t \left(\|u\|_{L^{n(p-2)}(\Omega)}^{p-2} + \|v\|_{L^{n(p-2)}(\Omega)}^{p-2} \right) \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq C \int_0^t \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{p-2} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^{p-2} \right) \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)} ds, \\ &\leq C \int_0^t (|w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2) ds. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Maintenant plaçant $U_{\varepsilon} = \varepsilon u + (1 - \varepsilon) v$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, par les conditions de croissance, pour la deuxième terme du côté droit à l'estimation (2.33), nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\Omega} |f(u) - f(v)| |w'| dx dt \right| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} f(U_{\varepsilon}) d\varepsilon w' dx ds \right| \\ &\leq \int_0^t \int_{\Omega} \left| \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} f(U_{\varepsilon}) d\varepsilon \right| |w'| dx ds \\ &\leq \int_0^t \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \frac{d}{d\varepsilon} f(U_{\varepsilon}) d\varepsilon \right| |w'| dx ds \\ &\leq l_1 \int_0^t \int_{\Omega} \int_0^1 (|U_{\varepsilon}|^{\theta-1} + |k_3(x)|) (|u - v|) |w'| d\varepsilon dx ds, \quad (H_4), \\ &\leq C \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^{\theta-1} + |v|^{\theta-1} + |k_3(x)|) |w(s)| |w'(s)| dx ds = I. \end{aligned}$$

Et en utilisant les inégalités de Hölder généralisé et de Young et l'évaluation (2.27), et choisir λ satisfaire que

$$\begin{cases} \lambda + 1 \leq \frac{n}{(\theta-1)(n-4)} \text{ si } n \geq 5, \\ 2 \leq \lambda + 1 < \infty \text{ si } n = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

nous voyons que ;

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_0^t \left(\|u\|^{\theta-1} + \|v\|^{\theta-1} + \|k_3(x)\|_{2(\lambda+1)}^{\lambda} \right) \|w\|_{2(\lambda+1)} \|w'\|_2 \\ &\leq C \int_0^t \left(\|u\|^{\theta-1}_{2(\lambda+1)} + \|v\|^{\theta-1}_{2(\lambda+1)} + \|k_3(x)\|_{2(\lambda+1)}^{\lambda} \right) \|w\|_{2(\lambda+1)} \|w'\|_2 ds \\ &\leq C \int_0^t \left(\|\Delta u\|_2^{\lambda(\theta-1)} + \|\Delta v\|_2^{\lambda(\theta-1)} + \|k_3(x)\|_{\infty}^{\lambda} \right) \|\Delta w\|_2 \|w'\|_2 ds \\ &\leq C \int_0^t \|\Delta w\|_2 \|w'\|_2 ds \leq C \int_0^t (|w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2) ds. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La combinaison des évaluations (2.33), (2.34) de (2.35), on trouve ;

$$|w'(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2 \leq C \int_0^t (|w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2) ds.$$

Et l'application du lemme de Gronwall, nous obtenons que $w = 0$. □

2.4 Existence globale

Afin d'énoncer et prouver nos résultats, nous présentons d'abord les fonctions suivantes :

$$I(t) = I(u(t)) = |\Delta u(t)|^2 - \beta \int_{\Omega} f(u(t)) u(x, t) dx - \beta \int_{\Omega} k_1(x) |u(x, t)| dx, \quad (2.36)$$

$$J(t) = J(u(t)) = \frac{1}{2} |\Delta u|^2 - \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (2.37)$$

$$E(t) = E(u(t), u'(t)) = J(u(t)) + \frac{1}{2} |u_t(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p. \quad (2.38)$$

Et l'ensemble stable telle que

$$W = \{u : u \in H_0^2(\Omega), I(t) > 0\} \cup \{0\}. \quad (2.39)$$

Le prochain lemme prouve que notre énergie fonctionnelle (2.38) est une fonction décroissante de la solution de l'équation (2.1) ;

Lemme 2.3. *$E(t)$ est une fonction décroissante pour $t \geq 0$ et*

$$E'(t) = -|\nabla u'(t)|^2 - \alpha \int_{\Omega} u'(t) g(u'(t)) dx \leq 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.40)$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.1) par u' et l'on intègre sur Ω avec l'utilisation de l'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u''(s) u'(s) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^2 u(s) u'(s) dx ds \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u'(s) u'(s) dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u(s) u'(s) dx ds + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} g(u'(s)) u'(s) dx ds \\ & = \beta \int_0^t \int_{\Omega} f(u(s)) u'(s) dx ds, \end{aligned}$$

où ;

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} u''(s) u'(s) dx ds = \frac{1}{2} |u_t(t)|_2^2 - \frac{1}{2} |u_t(0)|_2^2 \\
& \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^2 u(s) u'(s) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u(s) \Delta u'(s) dx ds \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta u(s))}{\partial \eta} u'(s) d\Gamma ds, \quad (\partial_{\eta} \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma) \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u(s) \Delta u'(s) dx ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} (|\Delta u(s)|_2^2) ds \\
& \quad = \frac{1}{2} |\Delta u(t)|_2^2 - \frac{1}{2} |\Delta u(0)|_2^2, \\
& \int_0^t \int_{\Omega} (-\Delta u'(s)) u'(s) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u'(s) \nabla u'(s) dx ds - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial(u'(s))}{\partial \eta} u'(s) d\Gamma ds, \\
& \quad (u'(t) = 0 \text{ sur } \Gamma) \\
& \quad = \frac{1}{2} \int_0^t |\nabla u'(s)|^2 ds, \\
& \quad \text{et} \\
& \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} u(s) u'(s) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-1} u'(s) dx ds \\
& \quad = \frac{1}{p} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u(s)\|_p^p ds = \frac{1}{p} \|u(s)\|_p^p - \frac{1}{p} \|u(0)\|_p^p, \\
& \quad \text{et} \\
& \beta \int_0^t \int_{\Omega} f(u(s)) u'(s) dx ds = \beta \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx - \beta \int_{\Omega} F(x, u(0)) dx.
\end{aligned}$$

c-à-d ;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |\Delta u(t)|_2^2 - \beta \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx + \frac{1}{2} |u_t(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(s)\|_p^p \\
& - \frac{1}{2} |\Delta u(0)|_2^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u(0)) dx - \frac{1}{2} |u_t(0)|_2^2 - \frac{1}{p} \|u(0)\|_p^p \\
& = -\frac{1}{2} \int_0^t |\nabla u'(s)|^2 ds - \alpha \int_0^t \int_{\Omega} g(u'(s)) u'(s) dx ds
\end{aligned}$$

où ;

$$E(t) - E(0) = -\frac{1}{2} \int_0^t |\nabla u'(s)|^2 ds - \alpha \int_0^t \int_{\Omega} g(u'(s)) u'(s) dx ds$$

donc ;

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t |\nabla u'(s)|^2 ds - \alpha \int_0^t \int_{\Omega} u'(s) g(u'(s)) dx ds \text{ pour } t \geq 0.$$

□

Lemme 2.4. On suppose les l'hypothèses (H_1) - (H_4) , soit $u_0 \in W$ et $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ tels que ;

$$\gamma = \beta C_*^{\theta+1} \left(\frac{2p}{p-2} E(0) \right)^{\frac{\theta-1}{2}} (l_0 + l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) < 1. \quad (2.41)$$

Alors $u \in W$ pour chaque $t \geq 0$.

Où C_* est le constante de l'injection de Sobolev-Poincaré tels que pour tout $2 < p \leq \frac{2n}{n-4}$ ($n \geq 5$), ($2 \leq p < \infty$ si $n = 1, 2, 3, 4$), nous avons

$$\|u(t)\|_p \leq C_* \|\Delta u(t)\|_2, \forall u \in H_0^2(\Omega).$$

Démonstration. Puisque $I(0) > 0$ et par la continuité, il existe $0 < T_m < T$ tels que ;

$$I(t) \geq 0, \forall t \in [0, T_m],$$

ce donne de l'équation (2.37) et l'hypothèses (H₃) que ;

$$E(t) \geq J(t) = \frac{1}{p} I(t) + \frac{p-2}{2p} |\Delta u|^2 + \frac{\beta}{p} \left(\int_{\Omega} f(u) u dx + \int_{\Omega} k_1(x) |u| dx - p \int_{\Omega} F(x, u) dx \right) \geq \frac{p-2}{2p} |\Delta u|^2. \quad (2.42)$$

Moyennant (2.42), (2.38) et (2.40), on trouve ;

$$|\Delta u|^2 \leq \frac{2p}{p-2} J(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(0), \quad (2.43)$$

Par le rappel des hypothèses (H₁)-(H₄), les inégalités (2.41), (2.43), et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'injection de Sobolev, on a ;

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega} f(u) u dx + \beta \int_{\Omega} k_1(x) |u| dx \leq \beta \int_{\Omega} |f(u)| |u| dx + \beta \int_{\Omega} |k_1(x)| |u| dx \\ & \leq \beta l_1 \int_{\Omega} |u|^{\theta+1} dx + \beta l_1 \int_{\Omega} |k_2(x)| |u| dx + \beta \int_{\Omega} |k_1(x)| |u| dx \\ & \leq \beta l_1 \|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} + \beta (l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) \|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} \\ & \leq \beta l_1 C_*^{\theta+1} |\Delta u(t)|^{\theta+1} + \beta C_*^{\theta+1} (l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) |\Delta u(t)|^{\theta+1} \\ & = \beta l_1 C_*^{\theta+1} |\Delta u(t)|^{\theta-1} |\Delta u(t)|^2 \\ & \quad + \beta C_*^{\theta+1} (l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) |\Delta u(t)|^{\theta-1} |\Delta u(t)|^2 \\ & \leq \left[\beta C_*^{\theta+1} \left(\frac{2p}{p-2} E(0) \right)^{\frac{\theta-1}{2}} (l_0 + l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) \right] |\Delta u|^2 < |\Delta u|^2 \text{ sur } [0, T_m]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Donc, par l'utilisation de l'équation (2.36), nous concluons que $I(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m]$.

En répétant ce procedur et en utilisant la limite suivante ;

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \beta C_*^{\theta+1} \left(\frac{2p}{p-2} E(t) \right)^{\frac{\theta-1}{2}} (l_0 + l_1 \|k_2(x)\|_{\infty} + \|k_1(x)\|_{\infty}) \leq D < 1$$

T_m est prolongé au T . □

Lemme 2.5. En prenant l'inégalité (2.41), il existe alors $\eta = 1 - \gamma$ tels que ;

$$\beta \int_{\Omega} f(u) u dx + \beta \int_{\Omega} k_1(x) |u| dx \leq (1 - \eta) |\Delta u|^2 \quad (2.45)$$

et donc ;

$$|\Delta u|^2 \leq \frac{1}{\eta} I(t). \quad (2.46)$$

Démonstration. De l'inégalité (2.44), nous avons ;

$$\beta \int_{\Omega} f(u) u dx + \beta \int_{\Omega} k_1(x) |u| dx \leq \gamma |\Delta u|^2.$$

Nous obtenons (2.45) en prenant à $\eta = 1 - \gamma > 0$, et par l'utilisation (2.45) de (2.36), nous obtenons le résultat (2.46). □

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses (H_1) - (H_4) . Soit $u_0 \in W$ satisfaire l'inégalité (2.41) Alors la solution du problème (2.1) est globale.*

Démonstration. suffisamment pour voir que $\|u_t\|_2^2 + |\Delta u|^2$ est borné indépendamment au t . Pour voir ceci nous utilisons (2.36) , (2.38) et l'hypothèse (H_3) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 E(0) &\geq E(t) = \left(\frac{1}{2} |\Delta u|^2 - \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \right) + \frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p \\
 &\geq \frac{1}{2} |\Delta u|^2 - \frac{\beta}{p} \int_{\Omega} f(u) u dx - \frac{\beta}{p} \int_{\Omega} k_1(x) |u| dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p = \frac{1}{2} |\Delta u|^2 + \frac{1}{p} (I(t) - |\Delta u|^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p \\
 &= \frac{p-2}{2p} |\Delta u|^2 + \frac{1}{p} I(t) + \frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p \\
 &\geq \frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 + \frac{p-2}{2p} |\Delta u(t)|^2.
 \end{aligned}$$

puisque $I(t) \geq 0$ et $p > 2$. Donc ;

$$\|u'(t)\|_2^2 + |\Delta u|^2 \leq \max \left(2, \frac{2p}{p-2} \right) E(0),$$

Ces évaluations impliquent que la solution $u(t)$ existent globalement sur $[0, +\infty[$. $\square$

2.5 Explosion de la Solution (Blow up de la Solution)

Dans cette section, nous prouvons que la solution du problème (2.1) blows up dans le temps fini sous l'estimation $E(0) < 0$, où ;

$$\begin{aligned}
 E(t) = E(u(t), u'(t)) &= \frac{1}{2} |u'(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p \\
 &\quad - \beta \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Remarque 2.1. *On pose*

$$H(t) = -E(t), \tag{2.48}$$

nous multiplions le problème (2.1) par $-u'$ et on intègre sur Ω , et en utilisant l'hypothèse (H_2) pour obtenir ;

$$H'(t) = |\nabla u'(t)|^2 + \alpha \int_{\Omega} u'(t) g(u'(t)) dx \geq \alpha d_0 \|u'(t)\|_{\sigma}^{\sigma} \quad p.p \quad t \in [0, T], \tag{2.49}$$

$H(t)$ est une fonction absolument continue et par conséquent ;

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \quad (2.50)$$

où

$$E(0) < 0.$$

Nous avons besoin du lemme suivant, ce qui est facile, en utilisant la définition de l'énergie correspondant à la solution

Lemme 2.6. Soit $2 < p \leq \frac{2n}{n-4}$ si $n \geq 5$ et $2 < p$ si $n \leq 4$. Alors il existe une constante positive $C > 1$, dépendant seulement de Ω , tels que

$$\|u(t)\|_p^s \leq C \left(\|u(t)\|_p^p + |\Delta u(t)|^2 \right), \text{ avec } 2 \leq s \leq p \quad (2.51)$$

pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$. Si u est la solution construite comme théorème (2.1), alors

$$\|u(t)\|_p^s \leq C \left(H(t) + \|u(t)\|_p^p + |u'(t)|^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx \right), \quad (2.52)$$

avec $2 \leq s \leq p$ sur $[0, T)$.

Théorème 2.4. Soit les conditions du théorème (2.1) être satisfaisantes. On suppose que ;

$$E(0) < 0. \quad (2.53)$$

Alors la solution (2.2) ($u \in L^\infty(0, T; W \cap L^p(\Omega))$), s'explode en temps fini.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} L(t) &= |u(t)|^2 = \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx, \\ L'(t) &= 2(u(t), u'(t)), \\ L''(t) &= 2|u'(t)|^2 + 2(u(t), u''(t)), \end{aligned}$$

nous définissons la fonction ;

$$\begin{aligned} G(t) &= H^{1-a}(t) + \varepsilon L'(t) - 3\varepsilon p e^{T-t} \beta \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx \\ &\quad + \gamma_1 \varepsilon t \|k_1(x)\|_{\infty} + \gamma_2 \varepsilon t \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

là où $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ est des constantes positive à spécifier plus tard, et

$$0 < a \leq \min \left(\frac{p-2}{2p}, \frac{p-\sigma}{(\theta+1)(\sigma-1)} \right) < 1, \quad (2.55)$$

on dérivé l'équation (2.54) et en utilisant l'équation (2.1) avec l'hypothèse (H_3), nous obtenons ;

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= (1-a)H^{-a}(t)H'(t) + \varepsilon L''(t) + \gamma_1\varepsilon \|k_1(x)\|_\infty \\
&\quad + \gamma_2\varepsilon \|k_2(x)\|_\infty^\sigma + \frac{d}{dt}\left(-3p\varepsilon e^{T-t}\beta \int_\Omega F(x, u(t)) dx\right) \\
&= (1-a)H^{-a}(t)H'(t) + 2\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\varepsilon (u(t), u''(t)) \\
&\quad + \gamma_1\varepsilon \|k_1(x)\|_\infty + \gamma_2\varepsilon \|k_2(x)\|_\infty^\sigma \\
&\quad + 3p\varepsilon e^{T-t}\beta \int_\Omega F(x, u(t)) dx - 3p\varepsilon e^{T-t}\beta \int_\Omega f(u(t)) u'(t) dx \\
&= (1-a)H^{-a}(t)H'(t) + 2\varepsilon |u'(t)|^2 + 2\beta\varepsilon \int_\Omega u(t) f(u(t)) dx \\
&\quad - 2\varepsilon |\Delta u(t)|^2 - 2\varepsilon \int_\Omega u(t) \Delta u'(t) dx - 2\varepsilon \|u(t)\|_p^p \\
&\quad + \gamma_1\varepsilon \|k_1(x)\|_\infty + \gamma_2\varepsilon \|k_2(x)\|_\infty^\sigma \\
&\quad + 3p\varepsilon e^{T-t}\beta \int_\Omega F(x, u(t)) dx - 3p\varepsilon e^{T-t}\beta \int_\Omega f(u(t)) u'(t) dx \\
&\quad + (-2\alpha\varepsilon \int_\Omega u(t) g(u'(t)) dx),
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Nous utilisons les inégalités de Holder et de Young et les hypothèses sur g pour estimer la dernière terme de l'équation (2.56) tels que ;

$$\begin{aligned}
2\alpha\varepsilon \left| \int_\Omega u(t) g(u'(t)) dx \right| &\leq 2\alpha\varepsilon d_1 \int_\Omega |u'(t)| |u(t)| dx + 2\alpha\varepsilon d_2 \int_\Omega |u'(t)|^{\sigma-1} |u(t)| dx \\
&\leq 2\alpha\varepsilon d_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|u(t)\|_\sigma^\sigma + 2\alpha\varepsilon d_1 \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&\quad + 2\alpha\varepsilon d_2 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|u(t)\|_\sigma^\sigma + 2\alpha\varepsilon d_2 \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_\sigma^\sigma \\
&= 2(d_1 + d_2) \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \alpha\varepsilon \|u(t)\|_\sigma^\sigma \\
&\quad + 2\alpha\varepsilon \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(d_1 \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + d_2 \|u'(t)\|_\sigma^\sigma \right), \quad \delta > 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

parce que $\frac{\sigma}{\sigma-1} \leq \sigma$ alors de (2.49) nous avons ;

$$\begin{aligned}
d_1 \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + d_2 \|u'(t)\|_\sigma^\sigma &\leq C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} d_1 \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \frac{d_2}{\alpha d_0} H'(t) \\
&\leq C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} \|u'(t)\|_\sigma^\sigma + \frac{d_2}{\alpha d_0} H'(t) \leq \frac{1}{\alpha d_0} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) H'(t).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Par les conditions de frontière nous dérivons l'évaluation suivantes ;

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(t) \Delta u'(t) dx &= \int_\Omega \Delta u(t) u'(t) dx - \int_\Gamma \frac{\partial(\Delta u(t))}{\partial \eta} u'(t) dx \\
&= \int_\Omega \Delta u(t) u'(t) dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_\Omega |\Delta u(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left(\int_\Omega |u'(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |\Delta u(t)|^2 + 2 |u'(t)|^2 \right)
\end{aligned}$$

donc ;

$$\int_\Omega u(t) \Delta u'(t) dx = \int_\Omega \Delta u(t) u'(t) dx \leq \frac{1}{4} |\Delta u(t)|^2 + |u'(t)|^2. \tag{2.59}$$

En utilisant l'hypothese (H_4) et les inégalités de Hölder et de Young avec la condition (2.55)

et (2.49), on trouve ;

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(u(t))| |u'(t)| dx &\leq l_1 \int_{\Omega} (|u|^\theta |u'(t)| + |k_2(x)| |u'(t)|) dx \\
&\leq l_1 \|u(t)\|_{2\theta}^\theta \|u'(t)\|_2 \\
&\quad + l_1 \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|k_2(x)\|_\infty^\sigma \\
&\leq \frac{l_1}{\sigma} C(\delta, \sigma) \delta^\sigma \|u(t)\|_{2\theta}^{2\theta} + \frac{1}{\sigma} l_1 \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_2^2 \\
&\quad + l_1 \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|k_2(x)\|_\infty^\sigma \\
&\leq \frac{l_1}{\sigma} C^* C(\delta, \sigma) C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \|u\|_\sigma^\sigma, (\sigma \geq 2\theta > 2) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma} l_1 C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|u'(t)\|_\sigma^\sigma \\
&\quad + l_1 \frac{\sigma-1}{\sigma} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \|u'(t)\|_\sigma^\sigma + l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|k_2(x)\|_\infty^\sigma \\
&\leq \frac{l_1}{\alpha d_0} C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} H'(t) \\
&\quad + \frac{l_1}{\sigma} C(\delta, \sigma) \delta^\sigma C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \|u\|_\sigma^\sigma + l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|k_2(x)\|_\infty^\sigma.
\end{aligned}$$

Par la hypothèse (H_3) et l'évaluation (2.50) , nous donnons ;

$$\begin{aligned}
2\beta \int_{\Omega} u(t) f(u(t)) dx &\geq 2\beta p \int_{\Omega} F(x, u(t)) dx - 2\beta \int_{\Omega} k_1(x) |u(t)| dx \\
&\geq 2pH(t) - 2\beta (\int_{\Omega} k_1(x) |u(t)| dx),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

et par les inégalités de Hölder et de Young, on a

$$\int_{\Omega} k_1(x) |u(t)| dx \leq C(\sigma, \alpha) \|k_1(x)\|_\infty + 2\alpha \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|u(t)\|_\sigma^\sigma \tag{2.61}$$

Par la substitution dans (2.56) et l'utilisation (2.57)-(2.61) , on trouve ;

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} G(t) \\
&\geq \left(\begin{aligned} &(1-a) H^{-a}(t) \\ &-\frac{1}{\alpha d_0} \left(3p\varepsilon e^{T-t} \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} + 2\alpha \varepsilon \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \right) \delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \end{aligned} \right) H'(t) \\
&\quad + 2p\varepsilon H(t) - 2\varepsilon \|u(t)\|_p^p - \frac{5}{2}\varepsilon |\Delta u(t)|^2 + (\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha)) \varepsilon \|k_1(x)\|_\infty \\
&\quad + \left(\gamma_2 - 3p\varepsilon e^{T-t} \beta l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \right) \varepsilon \|k_2(x)\|_\infty^\sigma + 3p\beta \varepsilon \int_{\Omega} F(x, u(s)) dx \\
&\quad - \varepsilon \left(3p e^{T-t} \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} + 2\beta \alpha (d_1 + d_2) \right) \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \|u(t)\|_\sigma^\sigma, \forall \delta, \varepsilon > 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

En ce moment, pour qu'un grande constante λ positive soit choisir plus tard, en prendre δ

tels que ; $\delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \lambda H^{-a}(t) > 0$ de (2.62), nous arrivons pour tout $t > 0$;

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} G(t) \\ & \geq \left(-\frac{\lambda}{\alpha d_0} \left(3p\varepsilon e^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} + 2\alpha\varepsilon \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \right) \right) H^{-a}(t) H'(t) \\ & \quad + 3\beta p\varepsilon \int_{\Omega} F(x, u) dx - 2\varepsilon \|u(t)\|_p^p - \frac{5}{2}\varepsilon |\Delta u(t)|^2 + 2p\varepsilon H(t) \\ & \quad + (\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha))\varepsilon \|k_1(x)\|_{\infty} \\ & \quad + \left(\gamma_2 - 3p\varepsilon e^T \beta l_1 \frac{\delta^{\sigma}}{\sigma} \right) \varepsilon \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma} \\ & - \varepsilon \left(3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} + 2\beta\alpha(d_1 + d_2) \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} H^{a(\sigma-1)}(t) \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma}, \quad \forall \delta, \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

par l'exploitation de (2.50), nous avons

$$H^{a(\sigma-1)}(t) \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma} \leq \beta^{a(\sigma-1)} \left(\int_{\Omega} F(x, u) dx \right)^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma}, \quad (2.64)$$

et l'utilisation des l'hypotheses (H₃)-(H₄), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, u) dx & \leq \frac{l_1}{p} \left(\int_{\Omega} |u(t)|^{\theta+1} dx + (|k_2(x)| + |k_1(x)|) |u| \right) \\ & \leq \frac{l_1}{p} \|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} + C \frac{l_1}{p} (\|k_1(x)\|_{\infty} + \|k_2(x)\|_{\infty}) \|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} \\ & \leq C \frac{l_1}{p} \|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} \end{aligned} \quad (2.65)$$

par la condition de (2.55) et l'inégalité (2.52), nous confirmons que

$$\begin{aligned} & \beta^{a(\sigma-1)} \left| \int_{\Omega} F(x, u) dx \right|^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma} \leq \\ & \leq C \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \left(\|u(t)\|_{\theta+1}^{\theta+1} \right)^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma} \\ & = C \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\theta+1}^{(\theta+1)a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\sigma}^{\sigma} \\ & \leq C \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\theta+1}^{(\theta+1)a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\theta+1}^{\sigma} \\ & = C \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \|u(t)\|_{\theta+1}^{(\theta+1)a(\sigma-1)+\sigma} \\ & \leq \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} C \left(H(t) + \|u(t)\|_p^p + |u'(t)|^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \right) \\ & \leq C \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \left(H(t) + \|u(t)\|_p^p + |u'(t)|^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \right. \\ & \quad \left. + \|k_1(x)\|_{\infty} + \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

et moyennant (2.66) de (2.63) , nous obtenons ;

$$\begin{aligned}
& \geq \left((1-a) - \frac{\lambda}{\alpha d_0} \left(\begin{aligned} & \frac{d}{dt} G(t) \\ & 3p\varepsilon e^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ & + 2\alpha\varepsilon \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{aligned} \right) \right) \\
& \quad \times H^{-a}(t) H'(t) \\
& \quad + 3p\beta\varepsilon \int_{\Omega} F(x, u) dx - \frac{5}{2}\varepsilon |\Delta u(t)|^2 - 2\varepsilon \|u(t)\|_p^p \\
& \quad + \varepsilon (\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha)) \|k_1(x)\|_{\infty} \\
& \quad + \varepsilon \left(\gamma_2 - 3p\varepsilon e^T \beta l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \right) \|k_2(x)\|_{\infty}^\sigma \\
& + \varepsilon \left(\begin{aligned} & 2pH(t) - \left(\begin{aligned} & 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ & + 2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{aligned} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \\ & \times C \left(\begin{aligned} & H(t) + \|u(t)\|_p^p + |u'(t)|^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ & + \|k_1(x)\|_{\infty} + \|k_2(x)\|_{\infty}^\sigma \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

où ;

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} G(t) \\
& \geq \left(\begin{aligned} & (1-a) \\ & - \frac{\lambda}{\alpha d_0} \left(\begin{aligned} & 3p\varepsilon e^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ & + 2\alpha\varepsilon \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) H^{-a}(t) H'(t) \\
& \quad + 3p\beta\varepsilon \int_{\Omega} F(x, u) dx - \frac{5}{2}\varepsilon |\Delta u(t)|^2 - 2\varepsilon \|u(t)\|_p^p \\
& \quad + \varepsilon (\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha)) \|k_1(x)\|_{\infty} \\
& \quad + \varepsilon \left(\gamma_2 - 3p\varepsilon e^T \beta l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \right) \|k_2(x)\|_{\infty}^\sigma \\
& \quad + \varepsilon \left(\begin{aligned} & (5p-1) H(t) \\ & - \left(\begin{aligned} & 3\theta p e^{T-t} \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ & + 2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{aligned} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \\ & \times C \left(\begin{aligned} & H(t) + \|u(t)\|_p^p + |u'(t)|^2 + \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ & + \|k_1(x)\|_{\infty} + \|k_2(x)\|_{\infty}^\sigma \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
& \quad - \varepsilon (3p-1) H(t) .
\end{aligned} \tag{2.68}$$

En utilisant la définition de (2.48) , l'inégalité (2.68) nous donne

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} G(t) \\
& \geq \left(\begin{array}{c} (1-a) \\ -\frac{\lambda}{\alpha d_0} \left(\begin{array}{c} 3p\varepsilon e^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ +2\alpha\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \\
& \quad \times H^{-a}(t) H'(t) \\
& + \varepsilon \left[- \left(C \left(\begin{array}{c} \left(\frac{3p-1}{2} \right) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] \\
& \quad \times |u'(t)|^2 \\
& \quad + \left(\frac{3p-1}{2} - \frac{5}{2} \right) \varepsilon |\Delta u(t)|^2 \\
& + \varepsilon \left[-C \left(\left(\begin{array}{c} (\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha)) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] \|k_1(x)\|_{\infty} \\
& + \varepsilon \left[-C \left(\left(\begin{array}{c} \left(\gamma_2 - 3p\varepsilon e^T \beta l_1 \frac{\delta^\sigma}{\sigma} \right) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma} \\
& + \varepsilon \left[-C \left(\left(\begin{array}{c} \left(\frac{3p-1}{p} - 2 \right) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] \\
& \quad \times \|u(t)\|_p^p \\
& + \varepsilon \left[-C \left(\left(\begin{array}{c} 3p - (3p-1) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] \beta \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
& + \varepsilon \left[-C \left(\left(\begin{array}{c} (5p-1) \\ 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{\lambda^{1-\sigma}}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right) \right] H(t)
\end{aligned}$$

on pose

$$C_1 = C \left(\left(\begin{array}{c} 3\theta p e^T \beta l_1 C(\delta, \sigma) C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2\theta}{2\theta\sigma}} \\ +2\beta\alpha(d_1 + d_2) \end{array} \right) \frac{1}{\sigma} \frac{l_1}{p} \beta^{a(\sigma-1)} \right),$$

nous arrivons à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} G(t) \\ (1-a) \\ -\frac{\lambda}{\alpha d_0} \varepsilon \left(\begin{array}{l} 3pe^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ + 2\frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{array} \right) \\ + \varepsilon \left[\frac{3p-1}{2} - C_1 \lambda^{1-\sigma} \right] |u'(t)|^2 + \left(\frac{3p-1}{2} - \frac{5}{2} \right) \varepsilon |\Delta u(t)|^2 \\ + \varepsilon ((\gamma_1 - 2\beta C(\sigma, \alpha)) - C_1 \lambda^{1-\sigma}) \|k_1(x)\|_\infty \\ + \varepsilon ((\gamma_2 - 3pe^T \beta l_1 \frac{\delta\sigma}{\sigma}) - C_1 \lambda^{1-\sigma}) \|k_2(x)\|_\infty \\ + \varepsilon \left[\frac{p-1}{p} - C_1 \lambda^{1-\sigma} \right] \|u(t)\|_p^p + \varepsilon [1 - C_1 \lambda^{1-\sigma}] \beta \int_\Omega F(x, u) dx \\ + \varepsilon ((5p-1) - C_1 \lambda^{1-\sigma}) H(t). \end{array} \right\} H^{-a}(t) H'(t) \quad (2.69)$$

on choisir $\gamma_1 = 1 + 2\beta C(\sigma, \alpha)$, $\gamma_2 = 1 + 3pe^T \beta l_1 \frac{\delta\sigma}{\sigma}$ et λ satisfaisant l'inégalité suivante ;

$$\lambda \geq \lambda_0 = \min \left(\sigma^{-1} \sqrt{\frac{2C_1}{3p-1}}, \sigma^{-1} \sqrt{\frac{pC_1}{p-1}}, \sigma^{-1} \sqrt{C_1}, \sigma^{-1} \sqrt{\frac{C_1}{5p-1}} \right)$$

de sorte que les coefficients de $H(t)$, $|u'(t)|^2$, $|\Delta u(t)|^2$, $\|u(t)\|_p^p$, $\|k_1(x)\|_\infty$, $\|k_2(x)\|_\infty$ et $\int_\Omega F(x, u) dx$ de l'inégalité (2.69) sont strictement positive, et par conséquent nous obtennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} G(t) \\ (1-a) \\ -\frac{\lambda}{\alpha d_0} \varepsilon \left(\begin{array}{l} 3pe^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ + 2\alpha \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{array} \right) \\ + \omega \varepsilon \left(\begin{array}{l} H(t) + |u'(t)|^2 + \|u(t)\|_p^p + \int_\Omega F(x, u) dx \\ + \|k_1(x)\|_\infty + \|k_2(x)\|_\infty \end{array} \right), \end{array} \right\} H^{-a}(t) H'(t) \quad (2.70)$$

là où le ω est le minimum de ces coefficients. Nous choisirons le ε assez petit, de sorte que ;

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \min \left(\frac{1-a}{\frac{\lambda}{\alpha d_0} \left(\begin{array}{l} 3pe^T \beta C^* C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{2\sigma}} \\ + 2\alpha \frac{\sigma-1}{\sigma} \left(C^* d_1 C(\Omega)^{\frac{\sigma-2}{\sigma}} + d_2 \right) \end{array} \right)}, \frac{H^{1-a}(0)}{-L'(0) + 3pe^T \beta \int_\Omega F(x, u_0) dx} \right)$$

donc, l'inégalité (2.70) prendre la forme suivante ;

$$\frac{d}{dt} G(t) \geq \omega \varepsilon \left(\begin{array}{l} H(t) + |u'(t)|^2 + \|u(t)\|_p^p \\ + \int_\Omega F(x, u) dx + \|k_1(x)\|_\infty + \|k_2(x)\|_\infty \end{array} \right), \quad (2.71)$$

et par conséquent ;

$$G(t) \geq G(0) > 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

La deuxième terme de (2.54) en appliquant l'inégalité de Young nous pouvons estimer comme suit ;

$$\frac{1}{2}L'(t) = (u(t), u'(t)) \leq c|u'(t)| \|u(t)\|_p \leq c \left(|u'(t)|^{2(1-a)} + \|u(t)\|_p^{\frac{2(1-a)}{1-2a}} \right),$$

ainsi que ;

$$|(u(t), u'(t))|^{\frac{1}{1-a}} \leq C \left(|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_p^{\frac{2}{1-2a}} \right)$$

et en utilisant le Lemme (2.6) et la condition (2.55) , nous obtenons ;

$$\begin{aligned} & |(u(t), u'(t))|^{\frac{1}{1-a}} \\ & \leq C \left(H(t) + |u'(t)|^2 + \|u(t)\|_p^p + \int_{\Omega} F(x, u) dx \right), \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

Et en conséquence nous avons ;

$$\begin{aligned} G(t)^{\frac{1}{1-a}} &= (H^{1-a}(t) + 2\varepsilon \int_{\Omega} u(x, t) u'(t) dx + \gamma_1 \varepsilon t \|k_1(x)\|_{\infty} + \gamma_2 \varepsilon t \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma})^{\frac{1}{1-a}} \\ &\leq c \left(H(t) + |2\varepsilon \int_{\Omega} u(x, t) u'(t) dx|^{\frac{1}{1-a}} + |\gamma_1 \varepsilon t \|k_1(x)\|_{\infty}|^{\frac{1}{1-a}} + |\gamma_2 \varepsilon t \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma}|^{\frac{1}{1-a}} \right) \\ &\leq C \left(H(t) + |u'(t)|^2 + \|u(t)\|_p^p + \int_{\Omega} F(x, u) dx + \|k_1(x)\|_{\infty} + \|k_2(x)\|_{\infty}^{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

Nous combinons alors (2.71) , (2.72) et (2.73), pour arriver que :

$$\frac{d}{dt} G(t) \geq \rho G(t)^{\frac{1}{1-a}} \quad (2.74)$$

où ρ est une constante dépendre en C , ω et ε seulement et ne pas dépendre de u . Et l'intégration de (2.74) sur $(0, t)$, pour obtenir ;

$$\int_0^t G(s)^{-\frac{1}{1-a}} G'(s) ds \geq \int_0^t \rho ds, \text{ avec } 0 < a < 1,$$

alors

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{-a}{1-a}\right)} G(s)^{-\frac{1}{1-a}+1} \right]_0^t \geq [\rho.s]_0^t$$

donc on obtient

$$G(t)^{\frac{a}{1-a}} \geq \frac{1}{G(0)^{\frac{a}{1-a}} - t \cdot \frac{a}{(1-a)} \rho}$$

et alors pour

$$T^* = \frac{1-a}{a\rho G^{\frac{a}{1-a}}(0)},$$

on obtient que $G(t)$ s'explode dans un temps fini T où ;

$$T \leq T^*.$$

□

CHAPITRE 3

ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE DU FLUIDE DE BINGHAM DANS UN DOMAINE ÉLASTIQUE BIDIMENSIONNEL

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'étudier un problème aux limites de la valeur initial concernant l'écoulement transitoire d'un fluide rigide, viscoplastique, et incompressible de fluide de Bingham dans un domaine borné élastique de $\mathbb{R}^2$. En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin ainsi que les techniques de régularisation, nous obtenons des résultats d'existence et l'unicité des solutions locales.

3.1 Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence de la solution à quelques problèmes des valeurs aux limites concernant l'écoulement transitoire d'un fluide rigide, viscoplastique et incompressible de Bingham dans un domaine élastique. Un fluide de Bingham est un fluide viscoplastique non newtonnien qui possède un effort de fléchissement qui doit être surpassé avant que le fluide coule. En beaucoup de matériaux géologiques et d'industrie, des fluides de Bingham sont employés comme base mathématique générale d'écoulement dans la technologie drilling, l'inclusion dans la manipulation des boues, des suspensions granulaires, du fluide etc. Bingham est baptisée du nom d'Eugene C. Bingham, qui a déclaré son explication mathématique. Il est bien connu que Bingham ait étudié la première fois l'équation constitutive de Bingham-plastique dans [26, 3], est le modèle le plus employé souvent pour un matériel viscoplastique. Ce des régions du comportement rigide-solide et de non élastique-fluide sont séparées en termes d'état de rendement de von Mises'. L'équation constitutive rapportant les tenseurs d'effort et de taux-de-contrainte $\dot{\gamma}$ de τ de deviators est donnée comme dans [26, 4]

$$\tau = \left(\eta_0 + \frac{\tau_\eta}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma} \quad (\tau > \tau_\eta) \quad (3.1)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (\tau \leq \tau_\eta) \quad (3.2)$$

où le τ et les $\dot{\gamma}$ sont les deuxièmes invariants des tenseurs, définis as

$$\tau = \left(\frac{1}{2} \tau, \tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

et le η_0 et le τ_η s'appellent la viscosité plastique et l'effort de fléchissement respectivement. Les équations (3.1)-(3.2) définissent deux régions distinctes d'écoulement. Dans le premier le τ invariable dépasse l'effort de fléchissement et les écoulements de la matière avec une fonction non Newtonnienne de viscosité définie comme $\eta(\dot{\gamma}) := \eta_0 + \frac{\tau_\eta}{\dot{\gamma}}$. Dans la seconde l'effort est moins que la valeur de rendement et le matériel se comporte comme solide rigide. Les régions liquides et solide sont séparées par une surface distincte de rendement.

Une exploration des lois pour l'écoulement plastique a été étudiée par Bingham dans [6]. Darby et Melson dans [11] ont formulé une expression empirique pour deviner le facteur de perte de frottement pour la dérive d'un fluide de Bingham. Bird et al dans [5] a analysé les phénomènes de rhéologie et d'écoulement des matériaux viscoplastiques. Le transfert de chaleur de convection pour le plastique de Bingham à l'intérieur d'une pipe circulaire et l'approche numérique pour l'écoulement hydrodynamiquement naissant et l'écoulement simultanément naissant ont été étudiés par Min et al dans [24]. Liu et Mei dans [22] ont considéré la diffusion lente d'une feuille liquide de Bingham sur un avion incliné. Pour des

fluides de Bingham, l'écoulement de Couette-Poiseuille entre deux plats poreux, considérant la glissade conditionné, a été étudié par Chen et Zhu dans [7]. Sreekala et Kesavareddy dans [32] ont mentionné les impacts de Hall sur l'écoulement (MHD) plastique de Bingham de magnéto-hydrodynamique au-dessus d'un milieu poreux, y compris l'aspiration et l'injection uniformes. Pour des fluides de Bingham, l'écoulement magnéto-hydrodynamique pour un cas instable considérant Hall des courants a été décrit par Parvin et al dans [28]. Rees et Bassom dans [30] ont considéré des fluides de Bingham au-dessus d'un milieu poreux suivant une modification rapide du flux thermique extérieur. Le papier est organisé comme suit. Dans la section 2 nous présentons le problème mécanique de l'écoulement transitoire bidimensionnel d'un Bingham rigide, viscoplastique, et incompressible qui occupent un domaine Ω_0 dans un domaine élastique ayant le $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ comme épaisseur. Nous présentons quelques notation et préliminaires. Nous dérivons la formulation variationnelle du problème. Dans la section 3, nous présentons la formulation mathématique et nous prouvons une existence et des résultats d'unicité.

3.2 Position du problème :

On considère deux ouverts Ω_0, Ω_1 de $\mathbb{R}^2$ ($\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$), borné, comme indiqués Figure 01 :

Le normale η à Γ_0 est orientée vers l'extérieur de Ω_0 (donc l'intérieur de Ω_1) (respectivement : Le normale ν à Γ_1 est orientée vers l'extérieur de Ω_1).

On considère un modèle mathématique pour étudier un problème de transmission entre deux domaines , un fluide de Bingham avec contact du type sous-différentiel , incompressible, visco-plastique qui occupe le domaine $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ borné ,de frontière régulière $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$ mesurable et de classe C^1 . Cette fluide qui se déplace dans un d'autre domaine solide-élastique $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ borné,de frontière régulière $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$ de classe C^1 constituée de deux parties mesurables et disjointes $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ telle que : $mes(\Gamma_0) > 0$, $mes(\Gamma_1) > 0$. On désigne par $\mathbb{Q}_i$ ($i = 0, 1$) : l'ensemble $\mathbb{Q}_i = \Omega_i \times (0, T)$, ($i = 0, 1$), $T \geq 0$. Les forces volumiques de densité f agissent dans $\mathbb{Q}$, telle que : $f_{\Omega} = (f_{0 \setminus \Omega_0}, f_{1 \setminus \Omega_1})$. On impose sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ des conditions de contact avec frottement du type sous-différentiel. μ, g sont les coefficients qui caractérisent le modèle de fluide Bingham et qui représentent respectivement : la consistance (la viscosité) et le seuil de plasticité.

On désigne par $\widetilde{\sigma}_0$ le déviateur du tenseur des contraintes $\sigma_0 = (\sigma_{0i,j})$, donné par ;

$$\widetilde{\sigma}_0 = (\widetilde{\sigma}_{0i,j}) \text{ , } \widetilde{\sigma}_{0i,j} = \sigma_{0i,j} - \frac{tr\sigma_0}{\eta} \delta_{i,j},$$

$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) : \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et $u_{i,j} = Di u_j, 1 \leq i, j \leq 2$ et $Div(\sigma) = (\sigma_{ij,j})$ où $\delta = (\delta_{i,j})$ est le tenseur identique.

Le problème de transmission peut se formuler de la manière suivante :

Problem 3.1. Trouver le champ des vecteurs de vitesses : $u = \{u_1, u_2\}$ défini dans $\mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) : \mathbb{Q}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec le champ des contraintes $\sigma_0 = (\sigma_{0,i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} : \mathbb{Q}_0 \rightarrow S_2$ et $w = \{w_1, w_2\}$ défini dans $\mathbb{Q}_1 = \Omega_1 \times (0, T) : \mathbb{Q}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tels que ;

$$\frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = Div(\sigma_0) + f_0 \text{ sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_0 = 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon(u) + g \cdot \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \text{ si } |\varepsilon(u)| \neq 0 \\ |\tilde{\sigma}_0| \leq g \text{ si } |\varepsilon(u)| = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ sur } \mathbb{Q}_0 = \Omega_0 \times (0, T), (i.e. \sum_{i=1}^2 Di u_i = 0) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma_1 + f_1 \text{ sur } \mathbb{Q}_1 = \Omega_1 \times (0, T) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{1i,j} = \sum_{k,l=1}^2 A_{i,j,k,l} \cdot \varepsilon^{k,l}, \text{ sur } \mathbb{Q}_1 = \Omega_1 \times (0, T) \quad (3.8)$$

où A est le tenseur d'ordre 4, tenseur de Cauchy et $\varepsilon^{k,l}$ la déformation tensor avec les conditions de transmission sur $\Gamma_1 \times (0, T)$:

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.9)$$

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 u_i \cos(\eta_i) \right) \times u_i \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.10)$$

$$\sigma_1 \cdot \eta_1 = g \text{ sur } \Gamma_{11} \times (0, T) \quad (3.11)$$

$$w = 0 \text{ sur } \Gamma_{12} \times (0, T) \quad (3.12)$$

et les conditions initiales ;

$$u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_0 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Rappelons ici que $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulière.

1. L'équation (3.4) : représente l'équation du mouvement durant la période $(0, T)$ telle que $Div(\sigma) = (\sigma_{i,j}, j)$ et f est la densité des forces volumiques agissant sur le fluide, avec : $f_{\setminus \Omega} = (f_{0 \setminus \Omega_0}, f_{1 \setminus \Omega_1})$.
2. L'équation (3.5) : représente la loi de comportement du fluide viscoplastique de Bingham.
3. L'équation (3.6) : représente la condition d'incompressibilité du fluide dans laquelle $\text{div } u = 0$.
4. L'équation (3.7) : représente la loi de comportement élastique.
5. L'équation (3.8) : représente les contraintes.
6. L'équation (3.9) : représente l'accélération.
7. L'équation (3.10) : représente les conditions de transmissions des contraintes.
8. L'équation (3.11) : représente les conditions aux limites de traction.
9. L'équation (3.12)-(3.14) : représente les conditions initiales.

3.2.1 Transformation de formulation du problème

On introduit :

$$\Phi = w' = \frac{\partial w}{\partial t} \Leftrightarrow \Phi' = w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

Nous allons introduisons dans le premier temps quelques notations et hypothèses et nous établissons des lemmes qui permettent d'obtenir la formulation variationnelle. On désigne par V_1 l'espace ;

$$V_1 = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^2, \text{div } v = 0 \text{ sur } \Omega, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}, s = \frac{n}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (3.16)$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement

$$((v, w))_1 = \sum_{i=1}^2 (v_i, w_i)_{H^1(\Omega)}, \quad \|v\|_1 = ((v, v))_1^{\frac{1}{2}}$$

On note :

$$V_0 = H = H^0(\Omega) = L^2(\Omega), \|v\|_0 = |v| \text{ et } ((v, w))_0 = (v, w), \text{ pour } s = 0$$

On introduit ensuite les notations suivantes :

$$V_1 = \left\{ v / v \in (H^1(\Omega_0))^2, \text{div } v = 0 \text{ sur } \Omega_0 \right\}$$

$$V_2 = \left\{ v / v \in (H^1(\Omega_1))^2, v = 0 \text{ sur } \Gamma_{12} \right\}$$

Et que ;

$$V = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

$$(f, g)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} f g dx, i = 1, 2,$$

$$a_{\Omega_0} : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}, a_{\Omega_0}(u, v) = 2\mu \int_{\Omega_0} \varepsilon(u) \varepsilon(v) dx,$$

$$b_1 : V_1 \times V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}, b_1(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx,$$

$$a_{\Omega_1} : V_2 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}, a_{\Omega_1}(u, \varphi) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx,$$

$$J : V_1 \rightarrow \mathbb{R}, J(v) = g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)| dx,$$

On va alors vérifier que l'on peut formuler le problème posé sous la forme suivante :

Inéquation variationnelle

Problem 3.2. On cherche u, Φ , avec

$$u \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2),$$

$$\Phi \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ \quad + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx \\ + (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u) d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_{11}} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma \\ \geq (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \\ v = \varphi \text{ sur } \Gamma_0 \\ u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \\ \Phi(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ u = \Phi = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit u une solution du problème (3.2), on multiplie l'équation (3.4) par $(v - u) \in H^1(\Omega_0)$ et on intègre sur Ω_0 , il vient ;

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial t} (v - u) dx + \int_{\Omega_0} u \nabla u (v - u) dx = \int_{\Omega_0} \text{Div}(\sigma_0) (v - u) dx + \int_{\Omega_0} f_0 (v - u) dx,$$

i.e ;

$$(u', v - u)_{\Omega_0} + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} (v - u)_j dx = (\text{Div}(\sigma_0), v - u)_{\Omega_0} + (f_0, v - u)_{\Omega_0},$$

Donc ;

$$(u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) = (\text{Div}(\sigma_0), v - u)_{\Omega_0} + (f_0, v - u)_{\Omega_0}, \quad (3.17)$$

En utilisant la formule de Green pour l'élasticité (voir le Lemme (1.13)), on voit que :

$$(\sigma_0, \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} + (\text{Div}(\sigma_0), v - u)_{\Omega_0} = \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u) d\Gamma, \forall v \in V_1$$

i.e ;

$$(\text{Div}(\sigma_0), v - u)_{\Omega_0} = -(\sigma_0, \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} + \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u) d\Gamma, \forall v \in V_1$$

et on a ;

$$\begin{aligned} \sigma^D \varepsilon(v) &= (\sigma_0 - \frac{1}{\eta} \text{tr} \sigma_0 \delta) \varepsilon(v) \\ &= (\sigma_0 \varepsilon(v)) + (-\frac{1}{\eta} \text{tr} \sigma_0 \delta \varepsilon(v)) \end{aligned}$$

et que ;

$$\delta \varepsilon(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{22}}{\partial x_2} \right) \end{pmatrix}$$

d'où ;

$$\delta \varepsilon(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

donc ;

$$-\frac{1}{\eta} \text{tr} \delta \varepsilon(v) = -\frac{1}{\eta} \text{tr} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } v = 0 \text{ sur } \Omega_0$$

et que ;

$$\sigma^D \varepsilon(v) = (\sigma_0 - \frac{1}{\eta} \text{tr} \sigma_0 \delta) \varepsilon(v) = (\sigma_0 \varepsilon(v))$$

Et on a ;

$$\begin{aligned} (\sigma_0, \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} &= (2\mu \varepsilon(u) + g \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|}, \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} \\ &= (2\mu \varepsilon(u), \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} + (g \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|}, \varepsilon(v - u))_{\Omega_0} \\ &= 2\mu \int_{\Omega_0} \varepsilon(u) \varepsilon(v - u) dx + \int_{\Omega_0} g \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(v - u) dx \\ &= a_{\Omega_0}(u, (v - u)) + g \int_{\Omega_0} \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(v - u) dx \end{aligned}$$

et on a ;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(v-u) dx &= \int_{\Omega_0} \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega_0} \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(u) dx \\ &\leq \int_{\Omega_0} \frac{|\varepsilon(u)|}{|\varepsilon(u)|} |\varepsilon(v)| dx - \int_{\Omega_0} \frac{|\varepsilon(u)|}{|\varepsilon(u)|} |\varepsilon(u)| dx \\ &\leq \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)| dx - \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u)| dx, \forall v \in V_1 \end{aligned}$$

donc ;

$$g \int_{\Omega_0} \frac{\varepsilon(u)}{|\varepsilon(u)|} \varepsilon(v-u) dx \leq g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)| dx - g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u)| dx, \forall v \in V_1$$

i.e ;

$$(\sigma_0, \varepsilon(v-u))_{\Omega_0} \leq a_{\Omega_0}(u, (v-u)) + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx, \forall v \in V_1$$

on tire que ;

$$\begin{aligned} (Div(\sigma_0), v-u)_{\Omega_0} &= -(\sigma_0, \varepsilon(v-u))_{\Omega_0} + \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v-u) d\Gamma, \forall v \in V_1 \\ &\geq -a_{\Omega_0}(u, v-u) - g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx + \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v-u) d\Gamma, \forall v \in V_1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Moyennant (3.18) de (3.17), il résulte ;

$$\begin{aligned} (u', v-u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v-u) &= (Div(\sigma_0), v-u)_{\Omega_0} \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v-u) d\gamma + (f_0, v-u)_{\Omega_0} \\ &\geq -a_{\Omega_0}(u, v-u) - g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v-u) d\Gamma + (f_0, v-u)_{\Omega_0}, \forall v \in V_1, \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} (u', v-u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v-u) + a_{\Omega_0}(u, v-u) + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx \\ - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v-u) d\gamma \geq (f_0, v-u)_{\Omega_0}, \forall v \in V_1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

De même, soit Φ une solution du problème (3.1), on multiplie l'équation (3.15) par $(\varphi - \Phi) \in H^1(\Omega_1)$ et on intègre sur Ω_1 , il vient ;

$$\int_{\Omega_1} \Phi' (\varphi - \Phi) dx = \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \sigma_1 (\varphi - \Phi) dx + \int_{\Omega_1} f_1 (\varphi - \Phi) dx, \forall \varphi \in V_2,$$

i.e ;

$$(\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} = (\operatorname{div} \sigma_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall \varphi \in V_2, \quad (3.20)$$

En utilisant la formule de Green pour l'élasticité (voir le Lemme (1.13)), on voit que :

$$\begin{aligned} &(\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + (\operatorname{div}(\sigma_1), (\varphi - \Phi))_{\Omega_1} \\ &= \int_{\Gamma_1} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma, \forall \varphi \in V_2, \end{aligned}$$

i.e ;

$$\begin{aligned} &(\operatorname{div}(\sigma_1), v-u)_{\Omega_1} = -(\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} \\ &+ \int_{\Gamma_1} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma, \forall \varphi \in V_2, \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} &= -(\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_1} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall \varphi \in V_2, \end{aligned}$$

Et comme $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$, on trouve ;

$$\begin{aligned} (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} &= -(\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{12}} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall \varphi \in V_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

et comme $w = \int_0^t \Phi(\tau) d\tau + w_0$, $w = 0$ sur $\Gamma_{12} \times (0, T)$ et $(\varphi - \Phi) = 0$ sur Γ_{12} , $\sigma_1 \cdot \eta_1 = g$ sur $\Gamma_{11} \times (0, T)$ et que η_1 par $(-\eta_1)$, on tire ;

$$\begin{aligned} (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} &= -(\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} - \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall \varphi \in V_2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Et par addition de (3.19) et (3.22), on trouve ;

$$\begin{aligned} & (u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ & + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u) d\Gamma + (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} \\ & + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (\varphi - \Phi) d\Gamma \\ & \geq (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \\ & \quad v = \varphi \text{ sur } \Gamma_0 \\ & \quad u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \\ & \quad \Phi(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ & \quad u = \Phi = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & (u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ & + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx + (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} \\ & + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) (v - u) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ & \geq [(f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}], \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \\ & \quad v = \varphi \text{ sur } \Gamma_0 \\ & \quad u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \\ & \quad \Phi(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ & \quad u = \Phi = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.

1. a_{Ω_0} est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $V_1 \times V_1$.
2. a_{Ω_1} est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $V_2 \times V_2$.

3. b_1 est trilinéaire sur $V_1 \times V_1 \times V_1$.
4. J est continue sur V_1 .

Démonstration.

1. La bilinéarité et la symétrie sont triviales, il suffit de montrer les autres propriétés. En effet, on a d'après l'inégalité de Hôlder ;

$$\begin{aligned} |a_{\Omega_0}(u, v)| &= \left| 2\mu \int_{\Omega_0} \varepsilon(u) \varepsilon(v) dx \right| \leq 2\mu \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u) \varepsilon(v)| dx \leq 2\mu \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u)| |\varepsilon(v)| dx \\ &\leq 2\mu \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\mu \|u\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{2}{1} \times 2} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{2}{1} \times 2} \\ &\leq C \|u\|_{V_1} \|v\|_{V_1}, \quad \forall u, v \in V_1 \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de la fonction a_{Ω_0} .

Par ailleurs, on sait d'après l'inégalité de Korn qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a_{\Omega_0}(u, u) = 2\mu \int_{\Omega_0} \varepsilon(u) \varepsilon(u) dx = 2\mu \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u)|^2 dx \geq 2\mu\alpha \|u\|_{V_1}^2, \quad \forall u \in V_1$$

d'où la coercivité de la fonction a_{Ω_0} .

2. La linéarité est triviale, il suffit donc de montrer les autres propriétés

Soit $u, \varphi \in V_2$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwartz, on a ;

$$\begin{aligned} |a_{\Omega_1}(u, \varphi)| &= \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^2 \left(\int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_1)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq C \|u\|_{V_2} \|\varphi\|_{V_2}, \quad \forall u, \varphi \in V_2 \end{aligned}$$

comme la norme sur V_2 est équivalente à la norme sur $H^1(\Omega)$ ce qui montre la continuité de la fonction a_{Ω_1} . D'autre part, on a :

$$|a_{\Omega_1}(u, u)| = \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx \right| = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega_1))^2}^2$$

et comme Ω_1 est borné et $V_2 \subset H^1(\Omega_1)$, de l'inégalité de Poincaré (voir le Lemme (1.10)), on tire ;

$$|a_{\Omega_1}(u, u)| = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega_1))^2}^2 \geq C \|u\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \geq C \|u\|_{V_2}^2$$

d'où la coercivité de la fonction $a_{\Omega_1}(u, \varphi)$ sur $V_2 \times V_2$.

3. La trilinéaire de la fonction b_1 sur $V_2 \times V_2 \times V_2$ est triviale.

□

Lemme 3.2. $\forall (u, v, w) \in V_1 \times V_1 \times V_1$ on a :

1. $|b_1(u, v, w)| \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}} |w|^{\frac{1}{2}} \|v\|_1$
2. $b_1(u, v, w) = -b_1(u, w, v) + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma_0$.

Démonstration.

1. Soit $(u, v, w) \in V_1 \times V_1 \times V_1$, on obtient, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |b_1(u, v, w)| &= \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i (D_i v_j) w_j dx \right| \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_0} |u_i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{i,j=1}^2 \left[\left(\int_{\Omega_0} |D_i v_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int_{\Omega_0} |w_j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \|u\|_{L^p(\Omega_0)} \left(\sum_{i,j=1}^2 \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega_0)} \right) \|w\|_{L^p(\Omega_0)}, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

d'où ;

$$|b_1(u, v, w)| \leq C \|u\|_{L^p(\Omega_0)^2} \left(\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \right) \|w\|_{L^p(\Omega_0)^2}, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{2} = 1$$

On sait que si $v \in V_1$ alors : $v_j \in H^1(\Omega_0)$. Donc d'après les inclusions de Sobolev

$$D_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_0),$$

on en déduit

$$|b_1(u, v, w)| \leq C \|u\|_{L^p(\Omega_0)^2} \|v\|_{V_1} \|w\|_{L^p(\Omega_0)^2}, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{2} = 1$$

Et nous utilisons l'inégalité de Convexité suivante, voir J.L. Lions [18]

$$\|v\|_{L^p(\Omega_0)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_0), \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{2} = 1 \quad (3.23)$$

De (3.23) , on déduit que

$$|b_1(u, v, w)| \leq C \left(\|u\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \right) \|v\|_{V_1} \left(\|w\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned} |b_1(u, v, w)| &\leq C \|u\|_V^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \|w\|_V^{\frac{1}{2}} |w|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{V_1}, \\ \forall (u, v, w) &\in V_1 \times V_1 \times V_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

2. Faisons une intégration par parties et l'utilisation de (3.6) , on aura

$$b_1(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i (D_i v_j) w_j dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} (u_i w_j) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx$$

Par intégration par partie, on obtient

$$b_1(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} D_i(u_i w_j) v_j dx$$

i.e

$$\begin{aligned} b_1(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} D_i(u_i w_j) v_j dx \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_0} \left(\sum_{i=1}^2 (D_i u_i) \right) w_j v_j dx \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i D_i(w_j) v_j dx \end{aligned}$$

et comme $\operatorname{div} u = 0$ dans Ω_0 , (i.e. $\sum_{i=1}^2 D_i u_i = 0$), donc

$$b_1(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_0} u_i D_i(w_j) v_j dx$$

d'où le résultat suivant

$$b_1(u, v, w) = -b_1(u, w, v) + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_i w_j v_j \eta_i d\Gamma, \forall u, v, w \in V_1 \times V_1 \times V_1 \quad (3.25)$$

3. Pour montrer la continuité de J il suffit de considérer une suite $(v_n) \in V_1$ qui converge vers v dans V_1 , et utiliser l'inégalité de Hôlder pour obtenir ;

$$\begin{aligned} |J(v_n) - J(v)| &= \left| g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_n)| dx - g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)| dx \right| \\ &= g \int_{\Omega_0} ||\varepsilon(v_n)| - |\varepsilon(v)|| dx \\ &\leq g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_n) - \varepsilon(v)| dx \leq g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_n - v)| dx \\ &\leq g \left(\int_{\Omega_0} 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_n - v)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq g |\Omega_0|^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(v_n - v)\|_{L^2(\Omega_0)_1^{2 \times 2}} \\ &\leq g |\Omega_0|^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{1}{2} [\nabla(v_n - v) + \nabla^T(v_n - v)] \right\|_{L^2(\Omega_0)_1^{2 \times 2}} \\ &\leq \frac{g}{2} |\Omega_0|^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla(v_n - v)\|_{L^2(\Omega_0)_1^{2 \times 2}} + \|\nabla^T(v_n - v)\|_{L^2(\Omega_0)_1^{2 \times 2}} \right) \\ &\leq g |\Omega_0|^{\frac{1}{2}} \|v_n - v\|_{V_1} \leq C \|v_n - v\|_{V_1}. \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{v \in V_1} \frac{|J(v_n) - J(v)|}{\|v_n - v\|_{V_1}} \leq Cte.$$

□

Lemme 3.3. (voir [18, page 127]) Si $v \in H^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), Γ la frontière de Ω , on a : $v|_{\Gamma} \in L^3(\Gamma)$ et

$$\|v|_{\Gamma}\|_{L^3(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{3}}, \forall v \in H^1(\Omega)$$

On décrit maintenant la fonctionnelle d . On suppose que d est propre, convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de V . En outre, on assume l'existence d'une famille de fonctionnelles $(d_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ qui vérifient l'hypothèse de régularisation suivante :

Hypothèse de régularisation (H) :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $v \rightarrow d_{\varepsilon}(v)$ de $V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et différentiable sur V .
2. Pour tout $v \in L^2(0, T, V)$, on a ;

$$\int_0^T d_{\varepsilon}(v(t)) dt \rightarrow \int_0^T d(v(t)) dt \text{ quant } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

3. Si $v_{\varepsilon} \rightarrow v$ dans $L^2(0, T, V)$ faiblement et $v'_{\varepsilon} \rightarrow v'$ dans $L^2(0, T, V')$ faiblement alors :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T d_{\varepsilon}(v_{\varepsilon}(t)) dt \geq \int_0^T d(v(t)) dt \quad (3.27)$$

4. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in L^2(0, T, V)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\|Dd_{\varepsilon}(v)\|_{L^2(0, T, V')} \leq C \|v\|_{L^2(0, T, V)} \quad (3.28)$$

5. où $Dd_{\varepsilon}(v)$ représente la différentielle au sens de Gâteaux de $d_{\varepsilon}(v)$.

Régularisation :

On régularise la fonctionnelle J , en utilisant une famille de fonctionnelles J_{ε} ($\varepsilon > 0$), telle que J_{ε} est la fonctionnelle différentiable suivante

$$J_{\varepsilon}(v) = \frac{g}{1 + \varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx. \quad (3.29)$$

Le résultat suivant est nécessaire pour la régularisation du problème variationnel.

Lemme 3.4.

1. Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|DJ_{\varepsilon}(v)\|_{V'} \leq c \|v\|_{V_1}, \forall v \in V_1 \quad (3.30)$$

2. Si $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $L^2(0, T, V_1)$ faiblement et $v'_\varepsilon \rightarrow v'$ dans $L^2(0, T, V'_1)$ faiblement alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \int_0^T D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)) dt \geq \int_0^T D(J(v)) dt$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $v \rightarrow J_\varepsilon(v)$ de $V_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et différentiable sur V_1 .

Démonstration.

1. On a ;

$$J_\varepsilon(v) = \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx, \forall v \in V_1$$

et $DJ_\varepsilon(v)$: représente la différentielle au sens de Gâteaux de $J_\varepsilon(v)$ au point v , i.e ;

$$(DJ_\varepsilon(v), w) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(v + \lambda w) - J_\varepsilon(v)}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (J_\varepsilon(v + \lambda w))|_{\lambda=0}, \forall w \in V_1$$

Alors ;

$$\begin{aligned} (DJ_\varepsilon(v), w)_{V'_1 \times V_1} &= \frac{d}{d\lambda} (J_\varepsilon(v + \lambda w))|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{g}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v + \lambda w)|^{1+\varepsilon} dx \right) |_{\lambda=0} \\ &= \left(\frac{g}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega_0} \frac{d}{d\lambda} (|\varepsilon(v + \lambda w)|^{1+\varepsilon}) dx \right) |_{\lambda=0} \\ &= \left(\frac{g}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega_0} (1+\varepsilon) |\varepsilon(v + \lambda w)|^\varepsilon \left| \varepsilon \left(\frac{d}{d\lambda} (v + \lambda w) \right) \right| dx \right) |_{\lambda=0} \\ &= \left(g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v + \lambda w)|^\varepsilon |\varepsilon(w)| dx \right) |_{\lambda=0} \\ &= g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^\varepsilon |\varepsilon(w)| dx \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder donne ;

$$(DJ_\varepsilon(v), w)_{V'_1 \times V_1} \leq g \left(\int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)|^\varepsilon)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(w)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \forall w \in V_1$$

On peut toujours prendre ε assez petit, de plus il existe une constante strictement positive δ de sorte que ;

$$\delta |\varepsilon(v)| > 1, \forall v \in V_1 \setminus \{0\}$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $C(\varepsilon, \delta) > 0$ vérifiant l'inégalité ;

$$\|DJ_\varepsilon(v)\|_{V'_1} \leq C(\varepsilon, \delta) \|v\|_{V_1}, \forall v \in V_1$$

D'où la preuve. Ce lemme nous permet d'obtenir, en utilisant l'hypothèse de régularisation (H), on a ;

$$\left(\int_0^T \|DJ_\varepsilon(v(t))\|_{V'_1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq (C^2(\varepsilon, \delta))^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V_1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V_1$$

Donc l'inégalité ;

$$\|DJ_\varepsilon(v)\|_{L^2(0,T,V'_1)} \leq C \|v\|_{L^2(0,T,V_1)}, \forall v \in L^2(0,T,V_1) \quad (3.31)$$

2. Vérifions que ;

Si $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $L^2(0, T, V_1)$ faiblement et $v'_\varepsilon \rightarrow v'$ dans $L^2(0, T, V'_1)$ faiblement alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \int_0^T d(J_\varepsilon(v_\varepsilon(t))) dt \geq \int_0^T d(J(v(t))) dt$$

On a ;

$$J_\varepsilon(v) = \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx, \forall v \in V_1,$$

et ;

$$J : V_1 \rightarrow \mathbb{R}, J(v) = g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)| dx, \forall v \in V_1,$$

et $DJ_\varepsilon(v)$: représente la différentielle au sens de Gâteaux de $J_\varepsilon(v)$ au point v , i.e ;

$$(DJ_\varepsilon(v), w) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(v + \lambda w) - J_\varepsilon(v)}{\lambda}, \forall v, w \in V_1$$

Donc ;

$$(D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)), w) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda w) - J_\varepsilon(v_\varepsilon)}{\lambda}, \forall v_\varepsilon, w \in V_1$$

Nous montrons que ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup (D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)), v_\varepsilon - v) \leq 0$$

donc ; $\forall v_\varepsilon, v \in V_1$;

$$\begin{aligned} (D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)), v_\varepsilon - v) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v)) - J_\varepsilon(v_\varepsilon)}{\lambda}, \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^{1+\varepsilon} dx - \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon)|^{1+\varepsilon} dx \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} [|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^{1+\varepsilon} - |\varepsilon(v_\varepsilon)|^{1+\varepsilon}] dx \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon |\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^1 - |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon |\varepsilon(v_\varepsilon)|^1 dx \\ &\leq (1+\varepsilon) \frac{1}{(1+\varepsilon)} \frac{1}{\lambda} g \int_{\Omega_0} \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^1 - |\varepsilon(v_\varepsilon)|^1) dx \\ &\leq g \int_{\Omega_0} \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^1 - |\varepsilon(v_\varepsilon)|^1}{\lambda} dx \\ &\leq \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{1}{\lambda} g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^1 dx - g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon)|^1 dx \\ &\leq \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^1 dx - g \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v_\varepsilon)|^1 dx}{\lambda} \\ &\leq \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{J(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v)) - J(v_\varepsilon)}{\lambda} \\ &\leq \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{J(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v)) - J(v_\varepsilon)}{\lambda}, \forall v_\varepsilon, v \in V_1 \end{aligned}$$

i.e ;

$$\begin{aligned} & (D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)), v_\varepsilon - v) \\ & \leq \sup_{v_\varepsilon \in V_1} (|\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(v_\varepsilon - v))|^\varepsilon, |\varepsilon(v_\varepsilon)|^\varepsilon) \cdot (D(J(v_\varepsilon)), v_\varepsilon - v), \forall v_\varepsilon, v \in V_1 \end{aligned}$$

et par passage à la limite on trouve ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup (D(J_\varepsilon(v_\varepsilon)), v_\varepsilon - v) \leq 0 \quad (3.32)$$

Et comme la fonction J_ε ;

$$J_\varepsilon(v) = \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx, \forall v \in V_1$$

est borné sur V_1 , i.e ;

$$\begin{aligned} \forall v \in V_1, |J_\varepsilon(v)| &= \left| \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx \right| \\ &\leq \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx \\ &\leq g \left(\int_{\Omega_0} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{2(1+\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq g (\text{mes}(\Omega_0))^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega_0)}^{(1+\varepsilon)} \leq g (\text{mes}(\Omega_0))^{\frac{1}{2}} \|v\|_{V_1}^{2(1+\varepsilon)} \leq C \|v\|_{V_1}^{2(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

puisque $\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \|v\|_{V_1}^2$, D'où ;

$$|J_\varepsilon(v)| \leq C \|v\|_{V_1}^{2(1+\varepsilon)}, \forall v \in V_1 \quad (3.33)$$

d'après (3.32) et (3.33) alors ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \int_0^T (D(J_\varepsilon(v_\varepsilon(t))), w) \geq \left(\int_0^T D(J(v(t))) dt, w \right), \forall v_\varepsilon, v, w \in V_1$$

D'où ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \int_0^T d(J_\varepsilon(v_\varepsilon(t))) dt \geq \int_0^T d(J(v(t))) dt, \forall v \in V_1$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $v \rightarrow J_\varepsilon(v)$ de $V_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et différentiable sur V :

La fonction $v \rightarrow J_\varepsilon(v)$ de $V_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est continue convexe sur V_1 , il suffit donc de montrer que ;

$$J_\varepsilon((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta)J_\varepsilon(u) + \theta J_\varepsilon(v), \forall u, v \in V_1, \forall \theta \in]0, 1[$$

où ;

$$J_\varepsilon(v) \rightarrow +\infty \text{ si } \|v\|_{V_1} \rightarrow +\infty,$$

et comme $|\varepsilon(v)| \geq c \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^2, \forall v \in V_1$, on a ;

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) &= \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx, \forall v \in V_1 \\ &\geq \frac{cte.g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{2(1+\varepsilon)} dx, \geq \left(\frac{cte.g}{1+\varepsilon}\right) \cdot \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{4(1+\varepsilon)} \geq \left(\frac{cte.g}{1+\varepsilon}\right) \cdot \|v\|_{V_1}^{4(1+\varepsilon)}, \forall v \in V_1, \end{aligned}$$

et par passage à la limite $\|v\|_{V_1} \rightarrow +\infty$, on trouve ;

$$\lim_{\|v\|_{V_1} \rightarrow +\infty} J_\varepsilon(v) = +\infty,$$

donc, la convexité de la fonction $v \rightarrow J_\varepsilon(v)$ sur V_1 .

Passons maintenant à la régularisation du problème (3.1) (Inéquation variationnelle). **En effet**, remplaçons dans (3.2) v par $u + \lambda(v - u)$ où $\lambda > 0$, divisions l'inéquation par λ puis faisons tendre λ vers 0, nous obtiendrons l'inéquation ;

$$\begin{aligned} &(u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u+\lambda(v-u)) - J(u)}{\lambda} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u) d\Gamma \\ &+ (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} \\ &+ \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &\geq [(f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}], \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned}$$

On va rapprocher la fonctionnelle J par la famille de fonctionnelles $(J_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ et on cherche $u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon$ solution de l'inéquation régularisée obtenue suivantes ;

$$\begin{aligned} &(u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\ &+ (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V'_1 \times V_1} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u_\varepsilon) d\Gamma \\ &+ (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} \\ &+ \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &\geq [(f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}], \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Comme la fonction J_ε est différentiable au sens de Gâteaux, l'inéquation (3.34) équivaut l'équation variationnelle où le problème variationnelle suivantes

□

Problem 3.3 (Problème variationnelle).

$$\begin{aligned} &(u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\ &+ (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V'_1 \times V_1} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u_\varepsilon) d\Gamma_0 \\ &+ (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_0} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ &= [(f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}], \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \\ &\quad v = \varphi \text{ sur } \Gamma_0 \\ &\quad u_\varepsilon(0) = u_{\varepsilon 0} \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \\ &\quad \Phi_\varepsilon(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\ &\quad u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \end{aligned} \tag{3.35}$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problem 3.4. On donne

$$f_{0 \setminus \Omega_0} \in L^2(0, T, V_1'), \quad f_{1 \setminus \Omega_1} \in L^2(0, T, V_1') \quad (3.36)$$

$$u(0) = u_0 \in \left(L^2(\Omega_0)\right)^2 \text{ et } \Phi(0) = w'(0) = w_1 \in \left(L^2(\Omega_1)\right)^2 \quad (3.37)$$

On cherche u, Φ , avec ;

$$u \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_0)\right)^2), \quad (3.38)$$

$$\Phi \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_1)\right)^2), \quad (3.39)$$

Solution du problème variationnelle (P.V).

3.3 Existence et Unicité de la solution

3.3.1 Existence

Théorème 3.1. Sous les hypothèses (3.36) , (3.37) suivants :

$$f_{0 \setminus \Omega_0} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)), \quad f_{1 \setminus \Omega_1} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \in \left(L^2(\Omega_0)\right)^2, \quad w_0 \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, V_2), \\ \Phi(0) &= w'(0) = w_1 \in \left(L^2(\Omega_1)\right)^2 \end{aligned}$$

le problème (P.V) admet au moins une solution (u, Φ) pour T fini quelconque, vérifie ;

$$u \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_0)\right)^2) \text{ et } u' \in L^2(0, T, V_1'),$$

et

$$\Phi \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_1)\right)^2) \text{ et } \Phi' \in L^2(0, T, V_2').$$

Démonstration. La démonstration du théorème se décompose en trois étapes :

a) Solutions approchées (on construit des solutions approchées par la méthode de Faedo–Galerkin) ;

- b) Estimations apriori (on établit, sur ces solutions approchées des estimations à apriori) ;
 c) Passage à la limite (en utilisant la propriété de compacité) ;
a) Solutions approchées Soit l'espace $(H^1(\Omega))^2$, muni du produit scalaire ;

$$(u, v)_1 = \sum_{i=1}^2 (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Avec cette notation, on a ;

1. le problème spectral

$$((y, v))_1 = \lambda (y, v), \quad \forall v \in V_1 = \text{adhérence de } \left\{ \phi / \phi \in (D(\Omega))^2, \text{div } \phi = 0 \right\} \text{ dans } (H^1(\Omega))^2$$

Et ;

$$\|u\|_1 = ((u, u))_1^{\frac{1}{2}}$$

qui admet une suite des solutions non nulles sont des vecteurs propres y_j associées aux valeurs propres λ_j ;

$$((y_j, v))_1 = \lambda_j (y_j, v), \quad \forall v \in V_1, \lambda_j > 0$$

Avec ;

$$V_1 \subset L^2(\Omega) \text{ et } V_1 \rightarrow (L^2(\Omega))^2 \text{ est compacte}$$

2. le problème spectral ;

$$((z, \psi))_1 = \mu (z, \psi), \quad \forall \psi \in V_1 = \text{adhérence de } \left\{ \phi / \phi \in (D(\Omega))^2, \text{div } \phi = 0 \right\} \text{ dans } (H^1(\Omega))^2$$

Et ;

$$\|u\|_1 = ((u, u))_1^{\frac{1}{2}}$$

qui admet une suite des solutions non nulles sont des vecteurs propres z_j associées aux valeurs propres μ_j ;

$$((z_j, \psi))_1 = \mu_j (z_j, \psi), \quad \forall \psi \in V_1, \mu_j > 0$$

Avec ;

$$V_1 \subset V_2 \subset L^2(\Omega) \text{ et } V_2 \rightarrow (L^2(\Omega))^2 \text{ est compacte}$$

Comme l'espace V_1 est séparable (respectivement V_2 est séparable), il existe une base Préhilbertienne $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ (respectivement $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$), des fonctions ayant les propriétés suivantes :

- (a) $[y_1, y_2, \dots, y_m]$ (respectivement $[z_1, z_2, \dots, z_m]$), une base ortho-normale, i.e, $\|y_k\| = 1, \forall k$, et $(y_i, y_j) = 0, \forall i, j, i \neq j, \forall j, y_j \in V_1$,
 (respectivement : $\|z_k\| = 1, \forall k$, et $(z_i, z_j) = 0, \forall i, j, i \neq j, \forall j; z_j \in V_2$)
 (b) La famille $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ (respectivement $[z_1, z_2, \dots, z_m]$) est linéairement indépendante,
 (c) l'espace $V_{1,m}$ (respectivement $V_{2,m}$) engendré par $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ (respectivement $[z_1, z_2, \dots, z_m]$) est dense dans V_1 (respectivement V_2) .

comme base spéciale dans la méthode de Faedo-Galerkin :

On va rapprocher les vecteurs u_ε par la suite de vecteurs $u_m = (u_{\varepsilon m})$ (respectivement les vecteurs Φ_ε par la suite de vecteurs $\Phi_m = (\Phi_{\varepsilon m})$).

On définit $u_m(t), \Phi_m(t)$ solution approchées d'ordre "m" par ;

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_{\varepsilon m, k}(t) y_k \text{ et } \Phi_m(t) = \sum_{k=1}^m \mu_{\varepsilon m, k}(t) z_k$$

D'après (3.35), on a pour tout $(v - u_\varepsilon) \in V_{1,m}$ et $(\varphi - \Phi_\varepsilon) \in V_{2,m}$;

$$\begin{aligned} & (u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\ & + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V'_1 \times V_1} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (v - u_\varepsilon) d\Gamma \\ & + (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} \\ & + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ & = [(f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}], \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

De (3.40), en remplaçant $(v - u_\varepsilon)$ par $y_k, \forall k = 1, \dots, m$ et $(\varphi - \Phi_\varepsilon)$ par $z_k, \forall k = 1, \dots, m$, on obtient ;

$$\begin{aligned} & (u'_\varepsilon, y_k)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, y_k) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, y_k) + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), y_k)_{V'_1 \times V_1} \\ & - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu y_k d\gamma + (\Phi'_\varepsilon, z_k)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 z_k d\Gamma \\ & = [(f_0, y_k)_{\Omega_0} + (f_1, z_k)_{\Omega_1}], \forall (y_k, z_k) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Comme $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ (respectivement $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$) est linéairement indépendante, la matrice associée des systèmes (3.41) est inversible et d'après les arguments standards des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires nous concluons que le système (3.41) admet au moins une solution (u_m, Φ_m) dans $V_{1,m} \times V_{2,m}$,

$$\begin{aligned} u_m(0) & \longrightarrow u_{m,0}, \quad u_m(0) \in \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \\ u_{m,0} & \longrightarrow u_0 \text{ dans } V_{1,m}, \\ \Phi_m(0) & \longrightarrow w_1, \quad \Phi_m(0) \in \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \\ \Phi_{m,0} & \longrightarrow w_1 \text{ dans } V_{2,m}, \end{aligned}$$

D'où l'existence d'une suite (u_m, Φ_m) des solutions du problème (3.4)-(3.14).

b) Estimations a priori I : Comme $u_m \in V_{1,m} = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$, on multiplie l'équation suivante ;

$$\begin{aligned} & (u'_\varepsilon, y_k)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, y_k) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, y_k) + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), y_k)_{V'_1 \times V_1} \\ & - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu y_k d\Gamma = (f_0, y_k)_{\Omega_0}, \forall y_k \in V_{1,m}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

par $\lambda_{\varepsilon m, k}(t)$ et l'on somme en k dans (3.42) et comme $\Phi_m \in V_{2,m} = \langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle$, on multiplie l'équation suivante ;

$$\begin{aligned} & (\Phi', z_k)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 z_k d\Gamma \\ & = (f_1, z_k)_{\Omega_1}, \forall z_k \in V_{2,m}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

par $\mu_{\varepsilon m, k}(t)$ et l'on somme en k dans (3.43), et par addition de (3.42) et (3.43), on trouve ;

$$\begin{aligned}
& (u'_m(t), u_m(t))_{\Omega_0} + b_1(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) + a_{\Omega_0}(u_m(t), u_m(t)) \\
& \quad + (DJ_\varepsilon(u_m(t)), u_m(t))_{V'_1 \times V_1} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu u_m(t) d\Gamma \\
& + (\Phi'_m(t), \Phi_m(t))_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\Phi_m(t)))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g \Phi_m(t) d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 \Phi_m(t) d\Gamma \\
& = (f_0, u_m(t))_{\Omega_0} + (f_1, \Phi_m(t))_{\Omega_1}, \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

On va vérifier que ;

$$\begin{aligned}
& u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2), \\
& \Phi_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2), \\
& \int_0^t \Phi_m(\tau) d\tau \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_2)
\end{aligned}$$

De (3.44), on a pour tout $u_m \in V_{1,m}$ et $\Phi_m \in V_{2,m}$;

$$\begin{aligned}
& (u'_m(t), u_m(t))_{\Omega_0} + b_1(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) + a_{\Omega_0}(u_m(t), u_m(t)) \\
& \quad + (DJ_\varepsilon(u_m(t)), u_m(t))_{V'_1 \times V_1} \\
& \quad + (\Phi'_m(t), \Phi_m(t))_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\Phi_m(t)))_{\Omega_1} \\
& \quad + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) u_m(t) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} g \Phi_m(t) d\Gamma \\
& = (f_0, u_m(t))_{\Omega_0} + (f_1, \Phi_m(t))_{\Omega_1}, \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m}
\end{aligned}$$

Relativement à cette formulation on a ;

$$\begin{aligned}
& (u'_m(t), u_m(t))_{\Omega_0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2, \\
& (\Phi'_m(t), \Phi_m(t))_{\Omega_1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2
\end{aligned} \tag{3.45}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a ;

$$\begin{aligned}
& |(f_0(t), u_m(t))_{\Omega_0}| \leq c \|f_0(t)\|_{L^2(\Omega_0)} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)} \\
& \leq C \|f_0(t)\|_{L^2(\Omega_0)} \|u_m(t)\|_{V_1}, \\
& |(f_1(t), \Phi_m(t))_{\Omega_1}| \leq c \|f_1(t)\|_{L^2(\Omega_1)} \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)} \\
& \leq C \|f_1(t)\|_{L^2(\Omega_1)} \|\Phi_m(t)\|_{V_2}
\end{aligned}$$

Moyennant à l'Inégalité de Young, il résulte ;

$$\begin{aligned}
| (f_0(t), u_m(t))_{\Omega_0} | & \leq \frac{C_1}{2} \left(\|f_0(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \right), \\
| (f_1(t), \Phi_m(t))_{\Omega_1} | & \leq \frac{C_2}{2} \left(\|f_1(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Et d'après la continuité de la forme $a_{\Omega_0}(u, v)$ sur V_1 , on a ;

$$|a_{\Omega_0}(u_m(t), u_m(t))| \leq C_3 \|u_m(t)\|_{V_1} \|u_m(t)\|_{V_1} = C_3 \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \tag{3.47}$$

Et comme on a ;

$$b_1(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0, \quad \forall u_m \in V_{1,m} \tag{3.48}$$

Et d'après le Lemme (3.4), on a ;

$$\begin{aligned} |(DJ_\varepsilon(u_m(t)), u_m(t))_{V'_1 \times V_1}| &\leq \|DJ_\varepsilon(u_m(t))\|_{V'_1} \|u_m(t)\|_{V_1} \\ &\leq C(\varepsilon, \delta) \|u_m(t)\|_{V_1} \|u_m(t)\|_{V_1} \\ &\leq C \|u_m(t)\|_{V_1}^2, \forall u_m \in V_{1,m} \end{aligned}$$

D'où

$$|(DJ_\varepsilon(u_m(t)), u_m(t))_{V'_1 \times V_1}| \leq C \|u_m(t)\|_{V_1}^2, \forall u_m \in V_{1,m} \quad (3.49)$$

Et on a ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) u_m(t) d\Gamma \right| &\leq \int_{\Gamma_0} |(\sigma_1 - \sigma_0) u_m(t)| d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} \left| \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 u_{im}(t) \cos(\eta_i) \right) \times u_{im}(t) \right) u_m(t) \right| d\Gamma \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_0} |u_{im}(t)|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}} \right) \left(\int_{\Gamma_0} |u_m(t)|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Gamma_0} |u_m(t)|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)} \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)} \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)}, \forall u_m(t) \in V_{1m} \end{aligned}$$

Et d'après le lemme (3.3), on a ;

$$\|v/\Gamma_0\|_{L^3(\Gamma_0)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}}, \forall v \in V_1 \subset H^1(\Omega_0)$$

d'où il vient ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) u_m(t) d\Gamma \right| &\leq C \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)} \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)} \|u_m(t)\|_{L^3(\Gamma_0)} \\ &\leq C \left(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad \times \left(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\leq C \left(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right)^3, \forall u_m(t) \in V_{1m} \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) u_m(t) d\Gamma \right| &\leq C \left(\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\ &\leq c_4 \|u_m(t)\|_{V_1}^3, \\ \forall u_m(t) &\in V_1 \subset H^1(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Et comme on a ;

$$\begin{aligned} |(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_m(t)))_{\Omega_1}| &= \left| \int_{\Omega_1} \sigma_1 \varepsilon(\Phi_m(t)) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega_1} |\sigma_1 \varepsilon(\Phi_m(t))| dx \\ &\leq c \left(\int_{\Omega_1} |\sigma_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1} |\varepsilon(\Phi_m(t))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|\sigma_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|\varepsilon(\Phi_m(t))\|_{L^2(\Omega_1)^{2 \times 2}} \\ &\leq \frac{1}{2} c \|\sigma_1\|_{L^2(\Omega_1)} \left\| \nabla(\Phi_m(t)) + \nabla^T(\Phi_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega_1)^{2 \times 2}} \\ &\leq c \|\sigma_1\|_{L^2(\Omega_1)} \left(\left\| \nabla(\Phi_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega_1)^{2 \times 2}} + \left\| \nabla^T(\Phi_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega_1)^{2 \times 2}} \right) \\ &\leq c \|\sigma_1\|_{V_2} \|\Phi_m(t)\|_{V_2} \leq c \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \end{aligned}$$

où ;

$$L^2(\Omega)^{2 \times 2} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) / i, j = 1, 2 \right\}$$

D'où ;

$$|(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_m(t)))_{\Omega_1}| \leq c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \quad (3.51)$$

De même manière, et pour tout ;

$$\sigma_1 \in H_1 = \left\{ \sigma_1 \in L^2(\Omega_1)^{2 \times 2} / \text{Div}(\sigma_1) \in L^2(\Omega_1)^2 \right\}$$

il existe un élément noté ;

$$\sigma_1 \nu \in H'_{\Gamma_1} = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^2$$

donc ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} g \Phi_m(t) d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_{11}} g \Phi_m(t) d\Gamma \right| \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \|\Phi_m(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \forall \Phi_m(t) \in V_{2m} \end{aligned}$$

et comme on a ;

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

on trouve ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} g \Phi_m(t) d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_{11}} \sigma_1 \eta_1 \Phi_m(t) \right| \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\Phi_m(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \quad \forall \Phi_m(t) \in V_{2m} \end{aligned}$$

et d'après le théorème de trace (voir le Théorème (1.2)), on a ;

$$\text{l'injection } V_2 \subset (H^1(\Omega_1))^2 \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1) \text{ est continue,}$$

il résulte ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} g \Phi_m(t) d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_{11}} \sigma_1 \eta_1 \Phi_m(t) d\Gamma \right| \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\Phi_m(t)\|_{V_2}, \quad \forall \Phi_m(t) \in V_{2m} \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2, \quad \forall \Phi_m(t) \in V_{2m} \\ &\leq c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2, \quad \forall \Phi_m(t) \in V_{2m} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Moyennant de (3.45) à (3.52) dans (3.44), on obtient ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C_3 \|u_m(t)\|_{V_1}^2 + C \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \\ &\quad + C_4 \|u_m(t)\|_{V_1} \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \\ &+ c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \leq \frac{C_1}{2} \left(\|f_0(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \right) \\ &+ \frac{C_2}{2} \left(\|f_1(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \right), \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned}$$

d'où ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{2} \left(2C_3 + 2C + 2C_4 \|u_m(t)\|_{V_1} - C_1 \right) \|u_m(t)\|_{V_1}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2 \right) \|\Phi_m(t)\|_{V_2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(C_1 \|f_0(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(C_2 \|f_1(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right) \\ &\quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Et par intégration entre 0 et t de (3.53), on tire ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \int_0^t \left(2C_3 + 2Cte + 2C_4 \|u_m(s)\|_{V_1} - C_1\right) \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \\ & + \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2\right) \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds \\ & \leq C_1 \int_0^t \|f_0(s)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 ds + \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C_2 \int_0^t \|f_1(s)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 ds + \|\Phi_m(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2, \\ & \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned}$$

et on a ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \left(C_1 \int_0^t \|f_0(s)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 ds\right. \\ & + \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C_2 \int_0^t \|f_1(s)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 ds + \|\Phi_m(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2) \\ & \leq - \left(2C_3 + 2Cte + 2C_4 \|u_m(s)\|_{V_1} - C_1\right) \int_0^t \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \\ & \quad - \left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2\right) \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds \\ & \leq \left|2C_3 + 2C + 2C_4 \|u_m(s)\|_{V_1} - C_1\right| \int_0^t \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \\ & \quad + \left|\left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2\right)\right| \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds, \\ & \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 - \left|2C_3 + 2C + 2C_4 \|u_m(s)\|_{V_1} - C_1\right| \int_0^t \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \\ & + \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \left|\left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2\right)\right| \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds \\ & \leq C_1 \int_0^t \|f_0(s)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 ds + \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C_2 \int_0^t \|f_1(s)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 ds + \|\Phi_m(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2, \\ & \quad \forall (u_m, \Phi_m) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Moyennant $f_{0 \setminus \Omega_0} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0))$, $u_{m,0} \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$, $u_{m,0} \in V_{1,m}$ et $f_{1 \setminus \Omega_1} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$, $\Phi_{m,0} \rightarrow \Phi_0$ dans $L^2(\Omega_1)$, $\Phi_{m,0} \in V_{2,m}$, il résulte ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + C_1 \int_0^t \|f_0(s)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 ds \leq C, \\ & \|\Phi_m(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + C_2 \int_0^t \|f_1(s)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 ds \leq C \end{aligned}$$

On déduit que ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \int_0^t \left(2C_3 + 2C + 2C_4 \|u_m(s)\|_{V_1} - C_1\right) \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \leq C \\ & \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left(2c_5 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 + 2c_6 \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 - C_2\right) \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds \leq C \end{aligned}$$

On déduit donc, en particulier que ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \text{ (indépendante de } m) \\ & \int_0^t \|u_m(s)\|_{V_1}^2 ds \leq C \text{ (indépendante de } m) \\ & \|\Phi_m(t)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \text{ (indépendante de } m) \\ & \int_0^t \|\Phi_m(s)\|_{V_2}^2 ds \leq C \text{ (indépendante de } m) \end{aligned}$$

On déduit que $t_m = T$ s'expriment alors l'orsque $m \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} & u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) \\ & \Phi_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) \end{aligned}$$

c) Estimation a priori (II) : On va maintenant de montrer l'estimation suivant :

$$\begin{aligned} u'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_1), \\ \Phi'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_2) \end{aligned}$$

Soient P_m^1 le projecteur orthogonal de V_1 dans $V_{1,m}$;

$$\begin{cases} V_1 \longrightarrow V_{1,m} \\ h \longrightarrow P_m^1(h) = \sum_{i=1}^m (h, y_i)_{\Omega_0} y_i \end{cases}$$

Vérifie que ;

$$P_m^1 \text{ borné dans } \mathcal{L}(V_1, V_1)$$

i.e ;

$$\|P_m^1\|_{\mathcal{L}(V_1, V_1)} \leq 1$$

Car $\langle y_k \rangle$ est une base Préhilbertienne (avec $\|y_k\|_{V_1} = 1$) et par transposition, on a ;

$$P_m^1 = P_m^{1*} \in \mathcal{L}(V'_1, V'_1), \text{ et } \|P_m^1\|_{\mathcal{L}(V'_1, V'_1)} \leq 1$$

Et soient P_m^2 le projecteur orthogonal de V_2 dans $V_{2,m}$;

$$\begin{cases} V_2 \longrightarrow V_{2,m} \\ h \longrightarrow P_m^2(h) = \sum_{i=1}^m (h, z_i)_{\Omega_1} z_i \end{cases}$$

Vérifie que ;

$$P_m^2 \text{ borné dans } \mathcal{L}(V_2, V_2)$$

i.e ;

$$\|P_m^2\|_{\mathcal{L}(V_2, V_2)} \leq 1$$

Car $\langle z_k \rangle$ est une base Préhilbertienne (avec $\|z_k\|_{V_2} = 1$) et par transposition, on a ;

$$P_m^2 = P_m^{2*} \in \mathcal{L}(V'_2, V'_2), \text{ et } \|P_m^2\|_{\mathcal{L}(V'_2, V'_2)} \leq 1$$

Dans le problème (3.4)-(3.14) toutes les hypothèses du Théorème (1.1) sont satisfaites, (i.e ; V_1 et V_2 deux espaces de Hilbert , $a_{\Omega_0}(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V_1), et par conséquent il existe un opérateur ;

$$A_0 \in \mathcal{L}(V_1, V'_1)$$

telle que pour tous u, v dans V_1 , on a

$$a_{\Omega_0}(u, v) = \langle A_0(u), v \rangle_{V'_1 \times V_1}$$

Comme $u_m \in V_{1,m} = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$, on multiplie l'équation suivante

$$\begin{aligned} & (u'_m(t), y_k)_{\Omega_0} + b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) + a_{\Omega_0}(u_m(t), y_k) \\ & + (DJ_\varepsilon(u_m(t)), y_k)_{V'_1 \times V_1} - \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu y_k d\Gamma \\ & = (f_0, y_k)_{\Omega_0}, \forall y_k \in V_{1,m} \end{aligned} \quad (3.55)$$

par y_k et l'on somme sur k dans (3.55) et comme $\Phi_m \in V_{2,m} = \langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle$, on multiplie l'équation suivante ;

$$\begin{aligned} & (\Phi'_m(t), z_k)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 z_k d\Gamma \\ & = (f_1, z_k)_{\Omega_1}, \forall z_k \in V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.56)$$

par z_k et l'on somme en k dans (3.56), on tire

$$\begin{aligned} & P_m^1(u'_m(t)) + P_m^1(A_0(u_m(t))) + \sum_{k=1}^m (b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) y_k) \\ & + P_m^1(DJ_\varepsilon(u_m(t))) - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (y_k)^2 d\Gamma_0 \\ & = P_m^1(f_0(t)), \forall y_k \in V_{1,m} \end{aligned} \quad (3.57)$$

et

$$\begin{aligned} & P_m^2(\Phi'_m(t)) + \sum_{k=1}^m (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} z_k + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_{11}} g (z_k)^2 d\Gamma \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (z_k)^2 d\Gamma = P_m^2(f_1(t)), \forall z_k \in V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Comme on a

$$\begin{aligned} & si \ u_m \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) \\ & alors ; A_0(u_m) \in L^2(0, T, V'_1) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Et que

$$\begin{aligned} & si \ f_0 \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)), \text{ alors ;} \\ & P_m^1(f_0) \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Et grâce au Corollaire (1.4),

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

il vient

$$u_m \in L^4(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega_0))^2) = L^4(0, T, (L^2(\Omega_0))^2), \text{ où ; } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

Et d'après le lemme (4.2)., cités précédente, on a ;

$$\begin{aligned} & |\sum_{k=1}^m (b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) y_k)| \\ & \leq C \left(\|u_m\|_{(L^4(\Omega_0))^2}^2 \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)} \right) \|u_m\|_{V_1} \|y_k\|_{L^4(\Omega_0)^2} \|y_k\|_{V_1} \\ & \leq C \left(\|u_m\|_{V_1}^{\frac{1}{2}} \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)} \|u_m\|_{V_1} \|y_k\|_{L^4(\Omega_0)^2} \|y_k\|_{V_1} \\ & \leq C \|u_m\|_{V_1} \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)} \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)} \|u_m\|_{V_1} \|y_k\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|y_k\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|y_k\|_{V_1} \\ & \leq C \|u_m\|_{V_1}^2 \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \|y_k\|_{V_1}^{\frac{1}{2}} \|y_k\|_{V_1}^{\frac{1}{2}} \|y_k\|_{V_1} \\ & \leq C \|u_m\|_{V_1}^2 \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \|y_k\|_{V_1}^2 \end{aligned}$$

D'où ;

$$\left| \sum_{k=1}^m (b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) y_k) \right| \leq C \|u_m\|_{V_1}^2 \|u_m\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \|y_k\|_{V_1}^2$$

Il résulte ;

$$\sum_{k=1}^m (b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) y_k) \in L^2(0, T, V_1') \quad (3.61)$$

De même, et d'après le résultat (3.50) , on a ;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) (y_k)^2 d\Gamma_0 \right| &\leq C \left\| (y_k)^2 \right\|_{V_1}^3, \forall y_k \in V_{1,m} \\ &\leq C \left\| (y_k)^2 \right\|_{V_1} \left\| (y_k)^2 \right\|_{V_1}^2, \forall y_k \in V_{1,m} \\ &\leq C \|y_k\|_{V_1}^4, \forall y_k \in V_{1,m} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Et comme on a ;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_1} \sigma_1 \varepsilon(z_k) z_k dx \right|, \forall z_k \in V_{2m} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_1} |\sigma_1 \varepsilon(z_k) z_k| dx \leq \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_1} |\sigma_1 \varepsilon(z_k)| |z_k| dx \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^m \int_{\Omega_1} |\sigma_1 \varepsilon(z_k)| dx \right) \left(\sum_{k=1}^m |z_k| dx \right) \\ &\leq c \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|z_k\|_{V_2}^2 \|z_k\|_{V_2} \\ &\leq c \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|z_k\|_{V_2}^3, \forall z_k \in V_{2m} \end{aligned}$$

D'où ;

$$\left| \sum_{k=1}^m (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} z_k \right| \leq c \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|z_k\|_{V_2}^3, \forall z_k \in V_{2m} \quad (3.63)$$

Et d'après le résultat (3.52) , on a ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{11}} g(z_k)^2 d\gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_{11}} \sigma_1 \eta_1 z_k z_k \right| \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \left\| (z_k)^2 \right\|_{V_2}, \forall z_k \in V_{2m} \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \left\| (z_k)^2 \right\|_{V_2}^2, \forall z_k \in V_{2m} \\ &\leq C \|\sigma_1 \eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \|z_k\|_{V_2}^4, \forall z_k \in V_{2m} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Et que ;

$$\begin{aligned} \text{si } f_1 &\in L^2(0, T, L^2(\Omega_1)), \text{ alors ;} \\ P_m^2(f_1) &\in L^2(0, T, L^2(\Omega_1)) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Finalement, d'après les résultats précédente (3.60)-(3.61) dans (3.55), et les résultats précédente (3.63)-(3.64)-(3.65) dans (3.56) on obtient ;

$$\begin{aligned} u'_m(t) &= P_m^1(f_0(t)) - P_m^1(A_0(u_m(t))) - \sum_{k=1}^m (b_1(u_m(t), u_m(t), y_k) y_k) \\ &\quad - P_m^1(DJ_\varepsilon(u_m(t))) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_0} \sigma_0 \nu (y_k)^2 d\Gamma_0, \forall y_k \in V_{1,m} \end{aligned} \quad (3.66)$$

et ;

$$\begin{aligned} \Phi'_m(t) &= P_m^2(f_1(t)) - \sum_{k=1}^m (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} z_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_{11}} g(z_k)^2 d\Gamma - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_0} \sigma_1 \eta_1 (z_k)^2 d\Gamma, \forall z_k \in V_{2m} \end{aligned} \quad (3.67)$$

D'où ;

$$\begin{aligned} u'_m &\in L^2(0, T, V'_1), \\ \Phi'_m &\in L^2(0, T, V'_2) \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} u'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_1) \\ \Phi'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_2) \end{aligned} \quad (3.68)$$

d) Passage à la limite : Comme ;

$$\begin{aligned} u_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2), \\ \Phi_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) \end{aligned}$$

On peut extraire une sous suite u_μ et Φ_μ telle que ;

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V_1) \text{ faible, où } L^2(0, T, V_1) \subset L^1(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) \\ \Phi_\mu &\longrightarrow \Phi \text{ dans } L^2(0, T, V_2) \text{ faible, où } L^2(0, T, V_2) \subset L^1(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Puisque ;

$$\begin{aligned} L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) &= (L^1(0, T, (L^2(\Omega_0))^2))' \subset L^2(0, T, V'_1), \\ L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) &= (L^1(0, T, (L^2(\Omega_1))^2))' \subset L^2(0, T, V'_1) \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) \text{ faible*} \\ \Phi_\mu &\longrightarrow \Phi \text{ dans } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) \text{ faible*} \end{aligned} \quad (3.70)$$

De (3.69)-(3.70), il résulte ;

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V_1) \text{ faible} \\ \Phi_\mu &\longrightarrow \Phi \text{ dans } L^2(0, T, V_2) \text{ faible} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Et comme l'injection ;

$$\begin{aligned} V_1 &\subset H^1(\Omega_0) \longrightarrow L^2(\Omega_0) \text{ compacte} \\ V_2 &\subset H^1(\Omega_1) \longrightarrow L^2(\Omega_1) \text{ compacte} \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega_0))^2) = (L^2(Q_0))^2 \text{ fort et p.p dans } Q_0 \\ \Phi_\mu &\longrightarrow \Phi \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega_1))^2) = (L^2(Q_1))^2 \text{ fort et p.p dans } Q_1 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Comme ;

$$\begin{aligned} u'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_1) \\ \Phi'_m &\text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_2) \end{aligned}$$

alors ;

$$\begin{aligned} u'_\mu &\longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T, V'_1) \text{ faible} \\ \Phi'_\mu &\longrightarrow \Phi' \text{ dans } L^2(0, T, V'_2) \text{ faible} \end{aligned} \quad (3.73)$$

On déduit de (3.69) , (3.73) que ;

$$\begin{aligned} u_\mu(0) &\longrightarrow u(0) \text{ dans } V_1' \text{ faible} \\ \Phi_\mu(0) &\longrightarrow \Phi(0) \text{ dans } V_2' \text{ faible} \end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \text{ a un sens} \\ \Phi(0) &= \Phi_0 \text{ a un sens} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Et comme ;

$$u_m \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

et ;

$$u \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

Et d'après le lemme (4.2), de ;

$$u \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

on tire ;

$$u \in L^4(0, T, (L^q(\Omega_0))^2) \text{ où ; } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

De Lemme (1.1) , on a ;

$$(u_\mu) \cdot (u_\mu) \text{ est borné dans } L^2(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega_0))^2) = L^2(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

D'où

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \text{ est borné dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega_0))^2)$$

Donc, on peut supposer que

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \longrightarrow X_{i,j} \text{ dans } L^2(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega_0))^2) \text{ faible} \tag{3.75}$$

Par ailleurs (3.75) donne

$$(u_\mu)_i \longrightarrow u_i \text{ dans } L^2(Q_0) \text{ fort}$$

Et

$$(u_\mu)_j v \longrightarrow u_j v \text{ dans } L^2(Q_0) \text{ fort, } \forall v \in D(Q_0)$$

Donc ;

$$\int_0^T ((u_\mu)_i, (u_\mu)_j v)_\Omega ds \longrightarrow \int_0^T (u_i, u_j v)_\Omega ds, \forall v \in D(Q_0)$$

D'où ;

$$\int_{Q_0} (u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j v dx ds \longrightarrow \int_{Q_0} u_i u_j v dx ds, \forall v \in D(Q_0)$$

Donc ;

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \longrightarrow u_i u_j \text{ dans } D'(Q_0) \tag{3.76}$$

Moyennant (3.75) , (3.76) , on trouve

$$X_{i,j} = u_i u_j \quad (3.77)$$

Et comme on a ;

$$L^2(0, T) \hookrightarrow D'(0, T)$$

Par passage à la limite, on obtient que ;

$$b_1(u_\mu, u_\mu, y_k) \longrightarrow b_1(u, u, y_k) \text{ faible dans } L^2(0, T), \forall k \quad (3.78)$$

Donc ;

$$\int_0^T b_1(u_\mu, u_\mu, y_k) v ds \longrightarrow \int_0^T b_1(u, u, y_k) v ds, \forall v \in L^2(0, T), \forall k \quad (3.79)$$

Et comme ;

$$\begin{aligned} (u'_\mu, y_k)_{\Omega_0} &\longrightarrow (u', y_k)_{\Omega_0} \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \\ a_{\Omega_0}(u_\mu, y_k) &\longrightarrow a_{\Omega_0}(u, y_k) \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \\ (DJ_\varepsilon(u_\mu), y_k)_{V'_1 \times V_1} &\longrightarrow (DJ_\varepsilon(u), y_k)_{V'_1 \times V_1} \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \\ \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) y_k d\Gamma &\longrightarrow \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) y_k d\Gamma \text{ dans } D'(0, T), \forall k \end{aligned} \quad (3.80)$$

et ;

$$\begin{aligned} (\Phi'_\mu, z_k)_{\Omega_1} &\longrightarrow (\Phi', z_k)_{\Omega_1} \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \\ (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} &\longrightarrow (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \\ \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma &\longrightarrow \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma \text{ dans } D'(0, T), \forall k, \end{aligned} \quad (3.81)$$

Moyennant (3.78)-(3.79)-(3.80)-(3.81) de (3.41) , il découle ;

$$\begin{aligned} &(u', y_k)_{\Omega_0} + b_1(u, u, y_k) + a_{\Omega_0}(u, y_k) + (DJ_\varepsilon(u), y_k)_{V'_1 \times V_1} \\ &+ \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) y_k d\Gamma + (\Phi', z_k)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(z_k))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g z_k d\Gamma \\ &= (f_0, y_k)_{\Omega_0} + (f_1, z_k)_{\Omega_1}, \quad \forall (y_k, z_k) \in V_{1,m} \times V_{2,m} \end{aligned} \quad (3.82)$$

En tenant compte la densité de $V_{1,m}$ dans V_1 et la densité de $V_{2,m}$ dans V_2 , on conclut ;

$$\begin{aligned} &(u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ &+ (DJ_\varepsilon(u), v - u)_{V'_1 \times V_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0) (v - u) d\Gamma_0 \\ &+ (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g (\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &= (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \quad \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Et d'après (3.83), ce qui prouve l'existence d'une solution du problème (3.4)-(3.14).

□

3.3.2 Unicité

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses suivantes :*

$$f_{0 \setminus \Omega_0} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)), \quad f_{1 \setminus \Omega_1} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$$

$$u(0) = u_0 \in \left(L^2(\Omega_0) \right)^2, \quad w_0 \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, V_2),$$

$$\Phi(0) = w'(0) = w_1 \in \left(L^2(\Omega_1) \right)^2$$

la solution du problème variationnel (P.V) est unique.

Démonstration. Soient (u_1, Φ_1) et (u_2, Φ_2) deux solutions différentes du problème (P.V), vérifiant ;

$$\begin{aligned} u_k &\in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2), \quad k = 1, 2 \\ \Phi_k &\in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2), \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

On a ;

$$\begin{aligned} &(u'_1, v - u)_{\Omega_0} + b_1(u_1, u_1, v - u) + a_{\Omega_0}(u_1, v - u) \\ &+ (DJ_\varepsilon(u_1), v - u)_{V'_1 \times V_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u) d\Gamma \\ &+ (\Phi'_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &= (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \quad \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

et ;

$$\begin{aligned} &(u'_2, v - u)_{\Omega_0} + b_1(u_2, u_2, v - u) + a_{\Omega_0}(u_2, v - u) \\ &+ (DJ_\varepsilon(u_2), v - u)_{V'_1 \times V_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u) d\Gamma_0 \\ &+ (\Phi'_2, \varphi - \Phi)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ &= (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \quad \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

avec les conditions ;

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \\ \Phi_1(0) &= \Phi_2(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \end{aligned}$$

où ;

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v / v \in (H^1(\Omega_0))^2, \operatorname{div} v = 0 \text{ sur } \Omega_0\} \\ V_2 &= \{v / v \in (H^1(\Omega_1))^2, v = 0 \text{ sur } \Gamma_{12}\} \\ &\text{or que} \\ V &= \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_0\} \end{aligned}$$

En posant $U = u_1 - u_2$, $W = \Phi_1 - \Phi_2$, pour tout $(v, \varphi) \in V_1 \times V_2$, on a ;

$$\begin{aligned} &(U', v - u)_{\Omega_0} + a_{\Omega_0}(U, v - u) + b_1(u_1, u_1, v - u) \\ &- b_1(u_2, u_2, v - u) + (DJ_\varepsilon(u_1), v - u)_{V'_1 \times V_1} \\ &- (DJ_\varepsilon(u_2), v - u)_{V'_1 \times V_1} + (W'(t), \varphi - \Phi)_{\Omega_1} = 0, \\ &\quad \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

D'autre part, de la trilinearité de la fonction $b_1(u, u, v)$, il résulte ;

$$\begin{aligned} b_1(u_2, u_2, v - u) &= b_1(u_2, u_2 - u_1 + u_1, v - u) \\ &= b_1(u_2, (u_2 - u_1), v - u) + b_1(u_2, u_1, v - u) \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} b_1(u_1, u_1, v - u) - b_1(u_2, u_2, v - u) &= b_1(u_1, u_1, v - u) \\ &\quad - b_1(u_2, (u_2 - u_1), v - u) - b_1(u_2, u_1, v - u) \end{aligned}$$

où ;

$$\begin{aligned} &b_1(u_1, u_1, v - u) - b_1(u_2, u_2, v - u) \\ &= b_1(u_1 - u_2, u_1, v - u) - b_1(u_2, (u_2 - u_1), v - u) \end{aligned}$$

d'où il vient ;

$$\begin{aligned} &b_1(u_1, u_1, v - u) - b_1(u_2, u_2, v - u) \\ &= b_1(U, u_1, v - u) - b_1(u_2, -U, v - u) \end{aligned}$$

on déduire que ;

$$\begin{aligned} &b_1(u_1, u_1, v - u) - b_1(u_2, u_2, v - u) \\ &= b_1(U, u_1, v - u) + b_1(-(u_1 - u_2), U, v - u) \\ &\quad + b_1(u_1, U, v - u) = b_1(U, u_1, v - u) \\ &\quad - b_1(U, U, v - u) + b_1(u_1, U, v - u) \end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned} b_1(u_1, u_1, v - u) - b_1(u_2, u_2, v - u) &= b_1(U, u_1, v - u) \\ &\quad - b_1(U, U, v - u) + b_1(u_1, U, v - u), \forall v \in V_1 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Moyennant (3.87) de (3.86), il découle ;

$$\begin{aligned} &(U', v - u)_{\Omega_0} + a_{\Omega_0}(U, v - u) + b_1(U, u_1, v - u) \\ &\quad - b_1(U, U, v - u) + b_1(u_1, U, v - u) \\ &\quad + (DJ_\varepsilon(u_1 - u_2), v - u)_{V'_1 \times V_1} \\ &\quad + (W'(t), \varphi - \Phi)_{\Omega_1} = 0, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Et grâce au Théorème (3.1). , on a :

$$\begin{aligned} u'_k &\in L^2(0, T, V'_1), \quad k = 1, 2 \\ \Phi'_k &\in L^2(0, T, V'_2), \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} U' &\in L^2(0, T, V'_1) \\ W' &\in L^2(0, T, V'_2) \end{aligned}$$

Pour $(v - u) = U(t)$, $(\varphi - \Phi) = W(t)$, (3.88) devient ;

$$\begin{aligned} &(U', U)_{\Omega_0} + a_{\Omega_0}(U, U) + b_1(U, u_1, U) - b_1(U, U, U) \\ &\quad + b_1(u_1, U, U) + (DJ_\varepsilon(U), U)_{V'_1 \times V_1} + (W'(t), W)_{\Omega_1} = 0, \\ &\quad \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.89)$$

et d'après le lemme (3.2) on a ;

$$\begin{aligned} b_1(U, U, U) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \\ b_1(u_1, U, U) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{1i} U_j U_j \eta_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.90)$$

On déduit que ;

$$\begin{aligned} (U', U)_{\Omega_0} + a_{\Omega_0}(U, U) + b_1(U, u_1, U) \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{1i} U_j U_j \eta_i d\Gamma + (DJ_\varepsilon(U), U)_{V_1' \times V_1} \\ + (W'(t), W)_{\Omega_1} = 0, \quad \forall (U, W) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Comme $U \in L^2(0, T, V_1)$, $U' \in L^2(0, T, V_1')$ et $W \in L^2(0, T, V_2)$, $W' \in L^2(0, T, V_2')$, on a ;

$$\begin{aligned} (U', U)_{\Omega_0} &= \int_{\Omega_0} U' U dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} |U(t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} |U(t)|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|_{V_1}^2, \quad \forall U \in V_1 \end{aligned} \quad (3.92)$$

et ;

$$\begin{aligned} (W'(t), W(t))_{\Omega_1} &= \int_{\Omega_1} W' W dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} |W(t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} |W(t)|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{V_2}^2, \quad \forall W \in V_2 \end{aligned} \quad (3.93)$$

Et d'après la continuité de la forme $a_{\Omega_0}(u, v)$ sur V_1 et comme la norme sur V_1 est équivalente à la norme sur $H^1(\Omega_0)$, il résulte ;

$$|a_{\Omega_0}(U(t), U(t))| = \|U(t)\|_{V_1} \|U(t)\|_{V_1} = \|U(t)\|_{V_1}^2, \quad \forall U \in V_1 \quad (3.94)$$

et d'après (3.49) on a ;

$$|(DJ_\varepsilon(U(t)), U(t))_{V_1' \times V_1}| \leq C \|U(t)\|_{V_1}^2, \quad \forall U \in V_1 \quad (3.95)$$

D'après (3.92)-(3.95) de (3.91), on a ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|_{V_1}^2 + \|U(t)\|_{V_1}^2 \\ &+ C \|U(t)\|_{V_1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{V_2}^2 \\ &\leq -b_1(U, u_1, U) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{1i} U_j U_j \eta_i d\Gamma \\ &\leq |-b_1(U, u_1, U)| + \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{1i} U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| \\ &\quad \forall (U, W) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

D'après le lemme (3.2), on a ;

$$\begin{aligned} &|b(U(t), u_1(t), U(t))| \\ &\leq C_1 \|U(t)\|_{V_1}^{\frac{1}{2}} \|U(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|U(t)\|_{V_1}^{\frac{1}{2}} \|U(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{2}} \|u_1(t)\|_{V_1} \\ &\leq C_2 \|U(t)\|_{V_1}^2 \|u_1(t)\|_{V_1}, \quad \forall U, u_1 \in V_1 \end{aligned}$$

d'où ;

$$|b_1(U(t), u_1(t), U(t))| \leq C_2 \|U(t)\|_{V_1}^2 \|u_1(t)\|_{V_1}, \forall U, u_1 \in V_1 \quad (3.97)$$

et grâce à le lemme (3.3) et l'inégalité de Hôlder, on a ;

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| \leq C \sum_{i,j=1}^2 \left(\int_{\Gamma_0} |U_i|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Gamma_0} |U_j|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Gamma_0} |U_j|^3 d\Gamma \right)^{\frac{1}{3}}, \forall U \in V_1$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| \leq C \|U\|_{L^3(\Gamma_0)} \|U\|_{L^3(\Gamma_0)} \|U\|_{L^3(\Gamma_0)}, \forall U \in V_1$$

Et d'après le lemme (3.3), on a ;

$$\|v/\Gamma_0\|_{L^3(\Gamma_0)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}}, \forall v \in V_1 \subset H^1(\Omega_0)$$

d'où $\forall U \in V_1 \subset H^1(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0)$ il vient ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} U_i U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| &\leq C \left(\|U\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|U\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\ &\leq C \|U\|_{V_1}^3, \forall U \in V_1 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Et par la même méthode, on déduire que ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{1i} U_j U_j \eta_i d\Gamma \right| &\leq C \|u_1\|_{L^3(\Gamma_0)} \|U\|_{L^3(\Gamma_0)} \|U\|_{L^3(\Gamma_0)}, \forall u_1, U \in V_1 \\ &\leq C \left(\|u_1\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|u_1\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|U\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|U\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \left(\|U\|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \|U\|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\leq C \|u_1\|_{V_1} \|U\|_{V_1}^2, \forall u_1, U \in V_1 \subset H^1(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \end{aligned}$$

Moyennant à (3.97)- (3.98)-(3.99) de (3.96) donne ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|_{V_1}^2 + C \|U(t)\|_{V_1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{V_2}^2 \\ &\leq C_2 \|U(t)\|_{V_1}^2 \|u_1(t)\|_{V_1} + C \|U(t)\|_{V_1}^3 + C \|u_1(t)\|_{V_1} \|U(t)\|_{V_1}^2 \\ &\leq C_3 \|U(t)\|_{V_1}^2 \|u_1(t)\|_{V_1} + C \|U(t)\|_{V_1}^3 \\ &\quad \forall (U, W) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Et par intégration entre 0 et " t " de (3.99), on obtient ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|U(t)\|_{V_1}^2 - \frac{1}{2} \|U(0)\|_{V_1}^2 \\ &+ \int_0^t \left(C - C_3 \|u_1(s)\|_{V_1} + C \|U(s)\|_{V_1} \right) \|U(s)\|_{V_1}^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \|W(t)\|_{V_2}^2 - \frac{1}{2} \|W(0)\|_{V_2}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

il résulte ;

$$\begin{aligned}
& \|U(t)\|_{V_1}^2 + \|W(t)\|_{V_2}^2 \leq \|U(0)\|_{V_1}^2 + \|W(0)\|_{V_2}^2 \\
& + \int_0^t \left(C - C_3 \|u_1(s)\|_{V_1} + C \|U(s)\|_{V_1} \right) \|U(s)\|_{V_1}^2 ds \\
& \leq \left(\|U(0)\|_{V_1}^2 + \|W(0)\|_{V_2}^2 \right) \\
& + \int_0^t \left[\left(C - C_3 \|u_1(s)\|_{V_1} + C \|U(s)\|_{V_1} \right) \|U(s)\|_{V_1}^2 \right] ds \\
& \leq \int_0^t \left(C - C_3 \|u_1(s)\|_{V_1} + C \|U(s)\|_{V_1} \right) \left(\|U(s)\|_{V_1}^2 + \|W(s)\|_{V_2}^2 \right) ds \\
& \leq \max_{t \in [0, T]} \left(C - C_3 \|u_1(t)\|_{V_1} + C \|U(t)\|_{V_1} \right) \int_0^t \left(\|U(s)\|_{V_1}^2 + \|W(s)\|_{V_2}^2 \right) ds
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
U &= u_1 - u_2 \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0))^2), \\
u_1 &\in L^2(0, T, V_1) \subset L^1(0, T, V_1), \\
W &= \Phi_1 - \Phi_2 \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1))^2)
\end{aligned}$$

et d'après le lemme de Gronwall (voir Lemme (1.4)), on obtient ;

$$U(t) = 0 \text{ et } W(t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \text{ et } \Phi_1 = \Phi_2 \quad (3.100)$$

D'où ;

$$(u_1, \Phi_1) = (u_2, \Phi_2) \quad (3.101)$$

Et d'après (3.101) ce qui prouve l'unicité de la solution du problème (3.4)-(3.14). $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat de convergence :

Convergence :

Problem 3.5 (Problème (P_ε)). *Supposons que les hypothèses (3.36), (3.37) suivantes ;*

$$f_{0 \setminus \Omega_0} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)), \quad f_{1 \setminus \Omega_1} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0 \in \left(L^2(\Omega_0) \right)^2, \quad w_0 \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, V_2),$$

$$\Phi_\varepsilon(0) = w'(0) = w_1 \in \left(L^2(\Omega_1) \right)^2$$

sont satisfaites. Trouver le champ des vitesses $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ solution de l'inéquation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l}
(u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\
+ g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u_\varepsilon)|) dx + (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} \\
+ (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} + \left(\int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u_\varepsilon) d\Gamma \right) + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\
\geq (f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \\
v = \varphi \text{ sur } \Gamma_0 \\
u_\varepsilon(0) = u_0 \text{ sur } \Omega_0 \times (0, T) \\
\Phi_\varepsilon(0) = w'(0) = w_1 \text{ sur } \Omega_1 \times (0, T) \\
u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial t} = w' \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T)
\end{array} \right.$$

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses suivantes ;*

$$f_0|_{\Omega_0} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_0)), \quad f_1|_{\Omega_1} \in L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \in \left(L^2(\Omega_0) \right)^2, \quad w_0 \in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, V_2), \\ \Phi(0) &= w'(0) = w_1 \in \left(L^2(\Omega_1) \right)^2 \end{aligned}$$

la solution $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ du problème (P_ε) converge vers la solution (u, Φ) du problème (3.2) dans l'espace ;

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_0) \right)^2), \\ u' &\in L^2(0, T, V_1') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi &\in L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, \left(L^2(\Omega_1) \right)^2), \\ \Phi' &\in L^2(0, T, V_2') \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise à cet effet un raisonnement de monotonie : Soit $v \in V_1$ et $\varphi \in V_2$, posons l'expression :

$$X_\varepsilon = \int_0^T \left[\begin{aligned} &(u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\ &+ a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} \\ &+ \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u_\varepsilon) d\Gamma + (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} \\ &+ (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ &- (f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} - (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} \end{aligned} \right] dt$$

et que

$$X = \int_0^T \left[\begin{aligned} &(u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ &+ g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx + (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} \\ &+ (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma - (f_0, v - u)_{\Omega_0} - (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1} \end{aligned} \right] dt$$

Nous montrons d'abord la monotonie de la fonction $DJ_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

On a par définition que $DJ_\varepsilon(v)$: représente la différentielle au sens de Gâteaux de $J_\varepsilon(v)$ au point v , i.e ;

$$\begin{aligned} (DJ_\varepsilon(v), w) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(v + \lambda w) - J_\varepsilon(v)}{\lambda} \\ &= \left[\frac{d}{d\lambda} (J_\varepsilon(v + \lambda w)) \right]_{\lambda=0}, \quad \forall w \in V_1, \lambda > 0 \end{aligned}$$

et

$$J_\varepsilon(v) = \frac{g}{1 + \varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx, \quad \forall v \in V_1$$

Pour tout $u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2} \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2))$ et $u_{\varepsilon_1} \neq u_{\varepsilon_2}$, nous montrons que ;

$$\begin{aligned} & (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \geq 0, \\ & \forall u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2} \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2)) \end{aligned}$$

On a ;

$$\begin{aligned} & (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ &= (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ & \quad - (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1})}{\lambda} - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times \begin{pmatrix} [J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1})] \\ - [J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.102)$$

et comme pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $v \rightarrow J_\varepsilon(v)$ de $V_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et différentiable sur V_1 , on a ;

$$J_\varepsilon(\mu) - J_\varepsilon(\xi) - J'_\varepsilon(\zeta) \times (\mu - \zeta) \geq 0, \forall \mu$$

donc ;

$$\begin{aligned} & J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) \geq (J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) \times \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})), \\ & J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}) \geq (J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}) \times \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})), \\ & \forall u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2} \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2)) \end{aligned} \quad (3.103)$$

moyennant de (3.103) dans (3.102), on obtient ;

$$\begin{aligned} & (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ &= (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ & \quad - (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1})}{\lambda} - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times \begin{pmatrix} [J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_1})] \\ - [J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2} + \lambda(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})) - J_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})] \end{pmatrix} \\ &\geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \begin{pmatrix} J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) \times (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \\ - J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}) \times (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \end{pmatrix} \\ &\geq (J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})) \times (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \\ &\geq \left(\frac{J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - J'_\varepsilon(u_{\varepsilon_2})}{u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}} \right) (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})^2, u_{\varepsilon_1} \neq u_{\varepsilon_2} \\ &\geq (J''_\varepsilon(\rho)) (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})^2 \geq 0, \forall u_{\varepsilon_1} < \rho < u_{\varepsilon_2}, J''_\varepsilon(\rho) \geq 0 \\ & \forall u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2} \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2)) \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} & (DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_1}) - DJ_\varepsilon(u_{\varepsilon_2}), (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))_{V_1' \times V_1} \geq 0, \\ & \forall u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2} \in L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2)) \end{aligned} \quad (3.104)$$

D'où la monotonie de la fonction $DJ_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

2. Comme la fonction $DJ_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est monotone donc ;

$$X_\varepsilon \geq 0, \forall \varepsilon > 0$$

et que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) dt \geq \int_0^T a_{\Omega_0}(u, v - u) dt, \forall v \in V_1$$

et que la forme $v \rightarrow b_1(u, v, w)$ est continue sur $V_1 \times V_1 \times V_1$, donc $X_\varepsilon \rightarrow X$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Nous montrons aussi que ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} = g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx, \forall v \in V_1$$

donc ;

$$\begin{aligned} (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(v - u_\varepsilon)) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\lambda}, \forall v \in V_1 \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times [J_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(v - u_\varepsilon)) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times [J_\varepsilon((1 - \lambda)u_\varepsilon + \lambda v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)] \\ &\quad \text{et comme } J_\varepsilon(\cdot) \text{ est convexe} \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times [(1 - \lambda)J_\varepsilon(u_\varepsilon) + \lambda J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)] \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times [(1 - \lambda - 1)J_\varepsilon(u_\varepsilon) + \lambda J_\varepsilon(v)] \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times [(-\lambda)J_\varepsilon(u_\varepsilon) + \lambda J_\varepsilon(v)] \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \times \lambda [J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon)] \\ &\leq J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon), \forall v \in V_1, \forall \varepsilon > 0 \\ &\leq \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx - \frac{g}{1+\varepsilon} \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u_\varepsilon)|^{1+\varepsilon} dx, \forall v \in V_1, \forall \varepsilon > 0 \\ &\leq \frac{g}{1+\varepsilon} \left(\int_{\Omega_0} |\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} dx - \int_{\Omega_0} |\varepsilon(u_\varepsilon)|^{1+\varepsilon} dx \right), \forall v \in V_1, \forall \varepsilon > 0 \\ &\leq \frac{g}{1+\varepsilon} \left(\int_{\Omega_0} [|\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} - |\varepsilon(u_\varepsilon)|^{1+\varepsilon}] dx \right), \forall v \in V_1, \forall \varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{3.105}$$

et par passage à la limite, on trouve, $\forall v \in V_1, \forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g}{1+\varepsilon} \left(\int_{\Omega_0} [|\varepsilon(v)|^{1+\varepsilon} - |\varepsilon(u_\varepsilon)|^{1+\varepsilon}] dx \right) \\ &\leq g \int_{\Omega_0} [|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|] dx, \forall v \in V_1 \end{aligned}$$

donc ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} \leq g \int_{\Omega_0} [|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|] dx, \forall v \in V_1$$

i.e ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} \leq g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx, \forall v \in V_1$$

on remplace v par $(-v)$, on trouve ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V_1' \times V_1} - \left(g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx \right) \right) = 0, \forall v \in V_1 \tag{3.106}$$

4. Soit la solution (u, Φ) du problème (3.2) et $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ la solution du problème (P_ε) , on a

$$\begin{aligned} & (u', v - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, v - u) + a_{\Omega_0}(u, v - u) \\ & + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(v)| - |\varepsilon(u)|) dx + (\Phi', \varphi - \Phi)_{\Omega_1} \\ & + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi) d\Gamma \\ & \geq (f_0, v - u)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

et

$$\begin{aligned} & (u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \\ & + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_{V'_1 \times V_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(v - u_\varepsilon) d\Gamma \\ & + (\Phi'_\varepsilon, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\varphi - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_{11}} g(\varphi - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ & = (f_0, v - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \varphi - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.108)$$

Par conséquent, la solution $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ du problème (P_ε) converge faiblement dans l'espace $(L^2(0, T, V_1) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_0)^2))) \times L^2(0, T, V_2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_1)^2))$ vers la solution (u, Φ) du problème (3.2). D'autre part, si on choisit $(v = \frac{u_\varepsilon + u}{2}, \varphi = \frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2})$ comme une fonction test dans (3.107) et dans (3.108), on obtient le système;

$$\begin{aligned} & (u', \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u)_{\Omega_0} + b_1(u, u, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u) + a_{\Omega_0}(u, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u) \\ & + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(\frac{u_\varepsilon + u}{2})| - |\varepsilon(u)|) dx + (\Phi', \frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi)_{\Omega_1} \\ & + (\sigma_1, \varepsilon(\frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi))_{\Omega_1} + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(\frac{u_\varepsilon + u}{2} - u) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{11}} g(\frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi) d\Gamma \\ & \geq (f_0, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u)_{\Omega_0} + (f_1, \frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (u_k, \Phi_k) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.109)$$

et ;

$$\begin{aligned} & (u'_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon) \\ & + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon) \\ & + (DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon)_{V'_1 \times V_1} \\ & + \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(\frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon) d\Gamma \\ & + (\Phi'_\varepsilon, \frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1} + (\sigma_1, \varepsilon(\frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi_\varepsilon))_{\Omega_1} \\ & + \int_{\Gamma_{11}} g(\frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi_\varepsilon) d\Gamma \\ & \geq (f_0, \frac{u_\varepsilon + u}{2} - u_\varepsilon)_{\Omega_0} + (f_1, \frac{\Phi_\varepsilon + \Phi}{2} - \Phi_\varepsilon)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.110)$$

C-à-d ;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u', u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} + \frac{1}{2}b_1(u, u, u_\varepsilon - u) + \frac{1}{2}a_{\Omega_0}(u, u_\varepsilon - u) \\ & + g \int_{\Omega_0} (|\varepsilon(\frac{u_\varepsilon + u}{2})| - |\varepsilon(u)|) dx + \frac{1}{2}(\Phi', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} \\ & - \frac{1}{2}(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (\sigma_1 - \sigma_0)(u_\varepsilon - u) d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{11}} g(\Phi_\varepsilon - \Phi) d\gamma \\ & \geq \frac{1}{2}(f_0, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} + \frac{1}{2}(f_1, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (u_k, \Phi_k) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(-u'_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} - \frac{1}{2}b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \\
& + \frac{1}{2}a_{\Omega_0}(-u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - \frac{1}{2}(DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V'_1 \times V_1} \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\sigma_1 - \sigma_0)(u_\varepsilon - u) d\Gamma + \frac{1}{2}(-\Phi'_\varepsilon, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} \\
& - \frac{1}{2}(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{11}}g(\Phi_\varepsilon - \Phi) d\Gamma \\
& \geq -\frac{1}{2}(f_0, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} - \frac{1}{2}(f_1, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (v, \varphi) \in V_1 \times V_2
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Après l'addition des inégalités (3.111) et (3.112), on obtient ;

$$\begin{aligned}
& (u' - u'_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} - b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) + b_1(u, u, u_\varepsilon - u) \\
& + a_{\Omega_0}(u, u_\varepsilon - u) + a_{\Omega_0}(-u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \\
& + 2 \left(g \int_{\Omega_0} \left(\left| \varepsilon \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) \right| - |\varepsilon(u)| \right) dx \right) \\
& + \left(-(DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V'_1 \times V_1} \right) \\
& + (\Phi', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} + (-\Phi'_\varepsilon, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} \\
& - (\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} - (\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} \\
& + \left(\left(\int_{\Gamma_0}(\sigma_1 - \sigma_0)(u_\varepsilon - u) d\Gamma \right) \right) \\
& + \left(-\int_{\Gamma_0}(\sigma_1 - \sigma_0)(u_\varepsilon - u) d\Gamma \right) \\
& + \left(\int_{\Gamma_{11}}g(\Phi_\varepsilon - \Phi) d\Gamma \right) + \left(-\int_{\Gamma_{11}}g(\Phi_\varepsilon - \Phi) d\Gamma \right) \\
& \geq (f_0, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} - (f_0, u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} \\
& + (f_1, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} - (f_1, \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1}, \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned}
& -((u_\varepsilon - u)', u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} - [b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - b_1(u, u, u_\varepsilon - u)] - [a_{\Omega_0}(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u)] \\
& + \left[2 \left(g \int_{\Omega_0} \left(\left| \varepsilon \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) \right| - |\varepsilon(u)| \right) dx \right) - \left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V'_1 \times V_1} \right) \right] \\
& - \left[((\Phi_\varepsilon - \Phi)', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} \right] - [2(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1}] \geq 0, \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Et comme on a ;

$$\begin{aligned}
& -((u_\varepsilon - u)', u_\varepsilon - u)_{\Omega_0} \\
& = -\int_{\Omega_0} (u_\varepsilon - u)'(u_\varepsilon - u) dx = -\int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|(u_\varepsilon - u)(t)|^2 \right) dx \\
& = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_0} |(u_\varepsilon - u)(t)|^2 dx \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2
\end{aligned} \tag{3.114}$$

et comme la forme b_1 est trilinéaire sur $V_1 \times V_1 \times V_1$, et d'après la démonstration de l'unicité de ce problème que ;

$$\begin{aligned}
& b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - b_1(u, u, u_\varepsilon - u) \\
& = b_1((u_\varepsilon - u), u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u)) - b_1((u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)) \\
& + b_1(u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)), \forall u_\varepsilon \in V_1
\end{aligned} \tag{3.115}$$

et d'après le lemme (3.2) on a ;

$$\begin{aligned}
& b_1((u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} (u_\varepsilon - u)_i (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma, \forall u_\varepsilon, u \in V_1, \\
& \quad b_1(u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{\varepsilon i} (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma, \\
& \quad \forall u_\varepsilon, u \in V_1
\end{aligned} \tag{3.116}$$

on déduire que ;

$$\begin{aligned}
& b_1(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) - b_1(u, u, u_\varepsilon - u) \\
&= b_1((u_\varepsilon - u), u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u)) \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} (u_\varepsilon - u)_i (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{\varepsilon i} (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma, \forall u_\varepsilon, u \in V_1
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Et comme on a ;

$$2 \left(g \int_{\Omega_0} \left(\left| \varepsilon \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) \right| - |\varepsilon(u)| \right) dx \right) = 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right), \forall u_\varepsilon, u \in V_1 \tag{3.118}$$

Moyennant de (3.114) à (3.118) dans (3.113), on obtient ;

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 - b_1((u_\varepsilon - u), u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u)) \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} (u_\varepsilon - u)_i (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{\varepsilon i} (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \\
& \quad - a_{\Omega_0}(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \\
& - \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\
& \quad - ((\Phi_\varepsilon - \Phi)', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} - 2(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} \geq 0, \\
& \quad \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned} \tag{3.119}$$

On multiplier l'inéquation (3.119) par -1 , on obtient ;

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + b_1((u_\varepsilon - u), u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u)) \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} (u_\varepsilon - u)_i (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{\varepsilon i} (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \\
& \quad + a_{\Omega_0}(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \\
& - \left[2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) - \left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) \right] \\
& \quad + ((\Phi_\varepsilon - \Phi)', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} + 2(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1} \\
& \leq 0, \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Et comme on a ;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2, \forall (u_\varepsilon - u) \in V_1 \tag{3.121}$$

Et d'après le lemme (3.2), on a ;

$$|b_1((u_\varepsilon - u), u_\varepsilon, (u_\varepsilon - u))| \leq C_2 \| (u_\varepsilon - u) \|_{V_1}^2 \| u_\varepsilon(t) \|_{V_1}, \forall u_\varepsilon, u \in V_1 \quad (3.122)$$

et grâce à le lemme (3.3), l'inégalité de Hôlder et le fait que $\forall u_\varepsilon, u \in V_1 \subset H^1(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0)$, on a ;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} (u_\varepsilon - u)_i (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \right| \\ & \leq C \left(\| (u_\varepsilon - u) \|_{H^1(\Omega_0)}^{\frac{2}{3}} \| (u_\varepsilon - u) \|_{L^2(\Omega_0)}^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\ & \leq C_3 \| (u_\varepsilon - u) \|_{V_1}^3, \forall u_\varepsilon, u \in V \end{aligned} \quad (3.123)$$

et par la même méthode, on déduire que ;

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_0} u_{\varepsilon i} (u_\varepsilon - u)_j (u_\varepsilon - u)_j \eta_i d\Gamma \right| \\ & \leq C_4 \| u_\varepsilon \|_{V_1} \| (u_\varepsilon - u) \|_{V_1}^2, \forall u_\varepsilon, u \in V_1 \end{aligned} \quad (3.124)$$

Et d'après la continuité de la forme $a_{\Omega_0}(u, v)$ sur V_1 et comme la norme sur V_1 est équivalente à la norme sur $H^1(\Omega_0)$, il résulte ;

$$\begin{aligned} & |a_{\Omega_0}(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u)| \\ & = \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1} \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1} \\ & = \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2, \forall u_\varepsilon, u \in V_1 \end{aligned} \quad (3.125)$$

Et on a par définition que ;

$$\begin{aligned} & \left| ((\Phi_\varepsilon - \Phi)', \Phi_\varepsilon - \Phi)_{\Omega_1} \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2, \forall \Phi_\varepsilon, \Phi \in V_2 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Et par démonstration précédente on a ;

$$\begin{aligned} & |2(\sigma_1, \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi))_{\Omega_1}| = 2 \left| \int_{\Omega_1} \sigma_1 \varepsilon(\Phi_\varepsilon - \Phi) dx \right| \\ & \leq 2c_6 \| \sigma_1 \|_{V_2}^2 \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2, \forall \Phi_\varepsilon, \Phi \in V_2 \end{aligned} \quad (3.127)$$

Moyennant de (3.121) à (3.127) dans (3.120) , on obtient ;

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 + C_2 \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 \\ & + C_3 \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^3 + C_4 \| u_\varepsilon \|_{V_1} \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 \\ & + \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 - \left[\left((D J_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2 + 2c_6 \| \sigma_1 \|_{V_2}^2 \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2 \leq 0 \\ & \quad \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Et par intégration entre 0 et " t " de (3.128) , on obtient ;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2 - \frac{1}{2} \|(u_\varepsilon - u)(0)\|_{V_1}^2 \\
& + \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\
& + \int_0^t \left(C_2 + C_3 \|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1} + C_4 \|u_\varepsilon(s)\|_{V_1} + 1 \right) \|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1}^2 ds \\
& + \frac{1}{2} \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(t)\|_{V_2}^2 - \frac{1}{2} \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(0)\|_{V_2}^2 \\
& + \int_0^t 2c_6 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(s)\|_{V_2}^2 ds \\
& \leq 0, \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2 + \frac{1}{2} \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(t)\|_{V_2}^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|(u_\varepsilon - u)(0)\|_{V_1}^2 + \frac{1}{2} \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(0)\|_{V_2}^2 \\
& + \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\
& + \max_{t \in]0, T[} \left(\begin{array}{c} -C_2 - C_3 \|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1} \\ -C_4 \|u_\varepsilon(s)\|_{V_1} - 1, -2c_6 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \end{array} \right) \\
& \times \int_0^t \left(\|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(s)\|_{V_2}^2 \right) ds, \\
& \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned}
& \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(t)\|_{V_2}^2 \\
& \leq \|(u_\varepsilon - u)(0)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(0)\|_{V_2}^2 \\
& + 2 \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\
& + \max_{t \in]0, T[} \left(\begin{array}{c} -2C_2 - 2C_3 \|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1} \\ -2C_4 \|u_\varepsilon(s)\|_{V_1} - 2, \\ -2c_6 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \end{array} \right) \\
& \times \int_0^t \left(\|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(s)\|_{V_2}^2 \right) ds, \\
& \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

Moyennant $u(0) = u_0$ et $u_\varepsilon(0) = u_0$, dans $L^2(\Omega_0)$, $u_\varepsilon \in V_1$ et que $\Phi(0) = w'(0) = w_1$ et $\Phi_\varepsilon(0) = w'(0) = w_1$ dans $(L^2(\Omega_1))^2$, $\Phi_\varepsilon(0) \in V_2$, il résulte ;

$$\begin{aligned}
& \|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(t)\|_{V_2}^2 \\
& \leq 2 \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] \\
& + \max_{t \in]0, T[} \left(\begin{array}{c} -2C_2 - 2C_3 \|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1} \\ -2C_4 \|u_\varepsilon(s)\|_{V_1} - 2, -2c_6 \|\sigma_1\|_{V_2}^2 \end{array} \right) \\
& \times \int_0^t \left(\|(u_\varepsilon - u)(s)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(s)\|_{V_2}^2 \right) ds, \\
& \forall (u, \Phi), (u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \in V_1 \times V_2
\end{aligned}$$

Et de (3.106) et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left((DJ_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u)_{V_1' \times V_1} \right) - 2 \left(J \left(\frac{u_\varepsilon + u}{2} \right) - J(u) \right) \right] = 0, \forall u, u_\varepsilon \in V_1$$

Et d'après le lemme de Gronwall (voir Lemme (1.4)), on obtient

$$\|(u_\varepsilon - u)(t)\|_{V_1}^2 + \|(\Phi_\varepsilon - \Phi)(t)\|_{V_2}^2 \leq 0$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 + \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2 \right] = 0 \quad (3.129)$$

i.e ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| (u_\varepsilon - u)(t) \|_{V_1}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| (\Phi_\varepsilon - \Phi)(t) \|_{V_2}^2 = 0 \quad (3.130)$$

D'où la solution $(u_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)$ du problème (P_ε) converge vers la solution (u, Φ) du problème (3.2).

□

CHAPITRE 4

PROBLÈME D'ÉVOLUTION POUR L'ÉQUATION DE NAVIER-STOCKES PERTURBÉE PAR LE TERME NON LINÉAIRE $|U|^\rho U$ AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET-HOMOGÈNE

Résumé

Dans ce chapitre, nous considérons un problème d'évolution pour les équations de Navier–Stokes perturbés par le terme non linéaire $|u|^\rho u$. Nous associons à ce problème des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et des conditions initiales. Pour $n = 2$ en utilisant quelque résultats mathématiques, nous démontrons l'unicité de la solution, tout en utilisant aussi la formulation variationnelle et les techniques de Faedo-Galarkin, ainsi que la méthode de compacité, on démontre que le problème considéré possède au moins une solution variationnelle.

4.1 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) occupé par un fluide incompressible qui se déplace, (en supposant que la notion l'écoulement de fluide a un sens dans $\mathbb{R}^n$), de frontière Γ régulière (i.e. de classe C^1), on désigne par u un vecteur $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, où $\forall i$, $u_i : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$. On pose que $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, où T est un réel fini.

Le problème considéré dans ce paragraphe consiste à chercher la vitesse

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} : u : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n,$$

et une fonction scalaire

$$P : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}, \quad P \geq 0$$

vérifiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + |u|^\rho u = f - \text{grad } p, (\nu > 0), \quad \rho > -1 \quad (4.1)$$

$$\text{div } u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.2)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \quad (4.3)$$

$$u_i(x, 0) = u_{0_i}(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.4)$$

4.1.1 Quelques résultats :

Dans ce chapitre, on utilise quelques lemmes qui interviennent dans la suite de ce travail tout en commençant par :

Lemme 4.1. *La forme bilinéaire $a(u, v)$ est symétrique, continue et coercive sur $V \times V$ et la forme trilinéaire $b(u, v, w)$ est continue sur $V \times V \times V$.*

Lemme 4.2. *Soit $v \in V$, et P une fonction scalaire ;*

$$(\text{grad } P, v)_\Omega = 0, \quad P \in D'(\Omega)$$

avec $\text{grad } P = (\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n})$, $\text{div } P = \sum_{i=1}^n (D_i P)$, où $D_i P = \frac{\partial P}{\partial x_i}$.

Lemme 4.3. Si $v \in V$, alors on a ;

$$b(v, v, v) = 0, \forall v \in V$$

Lemme 4.4. Si $n = 2$, il existe une constante $C(\Omega)$ telle que ;

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_V^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V$$

Lemme 4.5. Pour $n = 2$, si $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$, alors ;

$$\sum_{i=1}^n u_i D_i u \in L^2(0, T, V').$$

Lemme 4.6 (Théorème (1.1)). Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), a une forme bilinéaire continue sur H , alors il existe un opérateur A linéaire continue de H dans H' , telle que

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_{H' \times H}, \forall (u, v) \in H^2$$

Lemme 4.7 (Lemme (1.2)). Pour $u \in V$, la forme linéaire

$$v \rightarrow b(u, u, v)$$

est continue sur

$$V_s = \text{adhérence de } \{\varphi/\varphi \in (D(\Omega))^n, \text{div } \varphi = 0\}$$

On a

$$b(u, u, v) = (g(u), v)_\Omega, g(u) \in V_s', \text{ avec } \|g(u)\|_V \leq C \|u\|_{(L^p(\Omega))^n}^2,$$

où :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad p < q, \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad \text{avec } s = \frac{n}{2}$$

Lemme 4.8. Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(\Theta)$, $1 < q < \infty$, telles que ;

$$\|g_\mu\|_{L^q(\Theta)} \leq c, \quad g_\mu \rightarrow g \quad \text{p.p. dans } \Theta$$

alors ;

$$g_\mu \rightarrow g \quad \text{dans } L^q \text{ faible}$$

4.1.2 Formulation faible

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude variationnelle du problème considéré en basant sur des résultats d'analyse fonctionnelle très importants. En démontre à la fin de ce paragraphe que le problème considéré est équivalent à un problème variationnel qui nous permet d'étudier l'existence et l'unicité de la solution.

On introduit les notations suivantes ;

$$\begin{aligned}\nabla P &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right) \\ a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\ b(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^n (u_i(D_i v_j), w_j)_{\Omega} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i(D_i v_j) w_j dx\end{aligned}$$

pour tout $u, v, w \in V$, où V désigne le sous espace de $(H^1(\Omega))^n$ défini par ;

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ p.p, } \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses ;*

$$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q), \quad (4.5)$$

$$u_0 \in (L^2(\Omega))^2, \quad (4.6)$$

le problème (4.1)-(4.4) est équivalent au problème variationnel (P.V) suivant ;

$$(P.V) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap (L^p(\Omega))^n \text{ et } P \in D'(\Omega) \text{ tels que ;} \\ (u', v)_{\Omega} + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (|u|^{\rho} u, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega}, \\ \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^n, p = \rho + 2, \rho > -1 \\ u(x, 0) = u(0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Où

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ p.p, } \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

Démonstration. Soit u est une solution du problème (4.1)-(4.4) , on multiplie l'équation (4.1) par $v \in H^1(\Omega)$ (i.e.on utilise le produit scalaire) et on intègre sur Ω , il vient ;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u' v dx - \nu \int_{\Omega} (\Delta u) v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (u_i D_i u) v dx + \int_{\Omega} |u|^{\rho} u v dx \\ = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} p) v dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

En utilisant la formule de Green, on voit que

$$\nu \int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \nu \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma, \forall u \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ et } \forall v \in C^1(\bar{\Omega}) \quad (4.8)$$

Pour $v = 0$ sur Γ , de (4.7), on tire que ;

$$\int_{\Omega} u' v dx - \nu \int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} u' v dx + \nu a(u, v), \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (4.9)$$

D'après le Lemme (4.2)., on a ;

$$\begin{aligned} (\text{grad } p, v)_\Omega &= \int_\Omega (\text{grad } p) v dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n (D_i p) v_{i(x)} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (D_i p) v_{i(x)} dx \\ &= \sum_{i=1}^n (D_i p, v_i)_\Omega = - \sum_{i=1}^n (p, D_i v_i)_\Omega = - (p, \text{div } v). \end{aligned} \quad (4.10)$$

et d'après le Lemme (4.2)., on a ;

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n (u_i (D_i v_j), w_j)_\Omega = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i (D_i v_j) w_j dx$$

Moyennant (4.9) , (4.10), il découle ;

$$\begin{aligned} (u', v)_\Omega + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (|u|^\rho u, v)_\Omega \\ = (f, v)_\Omega - (p, \text{div } v), \forall u, v \in (H^1(\Omega))^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour $v = 0$ sur Σ , $\text{div } v = 0$, de (4.11), on tire que ;

$$(P.V) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \cap (L^p(\Omega))^n, P \in D'(\Omega) \\ \text{tels que, pour } v \in V \cap (L^p(\Omega))^n : \\ (u', v)_\Omega + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (|u|^\rho u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \rho > -1 \\ u(x, 0) = u(0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où ;

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ p.p, } \text{div } v = 0\}$$

Réciproquement : Soit u une solution du problème variationnel (P.V), on a

$$(u', v)_\Omega + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (|u|^\rho u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^n$$

En utilisant la formule de Green ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega u' v dx + \nu \int_\Omega (-\Delta u) v dx + \nu \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_i D_i u) v dx \\ + \int_\Omega |u|^\rho u v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^n \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Pour $v = \varphi \in D(\Omega)$, (4.13) devient ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega u' \varphi dx + \nu \int_\Omega (-\Delta u) \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_i D_i u) \varphi dx + \int_\Omega |u|^\rho u \varphi dx \\ = \int_\Omega f \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.14)$$

En posant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + |u|^\rho u - f = S$$

De (4.14), on conclut

$$(S, \varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in D(\Omega) \quad (4.15)$$

D'après le théorème de dualité de Rham (voir Théorème (1.5)), de (4.14) il résulte

$$S = -\text{grad } (p), p \in D'(\Omega)$$

Et par conséquent les équations (4.2) , (4.3) et (4.4) sont vérifiées, donc u est une solution forte du problème (4.1)- (4.4). $\square$

4.2 Existence et Unicité

Dans cette sous section, on fait appel au résultats des lemmes (4.1)-(4.4), dans ce chapitre.

4.2.1 Existence

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (4.5) , (4.6) suivants ;*

$$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q)$$

$$u_0 \in ((L^2(\Omega))^n$$

le problème (P.V) admet au moins une solution u pour T fini quelconque, vérifie ;

$$u \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

$$u' \in L^2(0, T, V' + L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

Démonstration. La démonstration du théorème se décompose en trois étapes :

- a** Solutions approchées (on construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin)
- b** Estimations apriori (on établit, sur ces solutions approchées des estimations à apriori)
- c** Passage à la limite (en utilisant la propriété de compacité)

□

Démonstration. **a)** Solutions approchées :

Soit l'espace $(H^s(\Omega))^n$, $s = \frac{n}{2}$, muni du produit scalaire ;

$$(u, v)_s = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in H^s(\Omega) \quad (4.16)$$

Avec cette notation, on a le problème spectrale ;

$$((w, v))_s = \lambda(w, v), \quad \forall v \in V_s = \text{adhérence de } \{\varphi / \varphi \in (D(\Omega))^n, \text{div } \varphi = 0\} \text{ dans } (H^s(\Omega))^n$$

Et

$$\|u\|_s = ((u, u)_s)^{\frac{1}{2}}$$

qui admet une suite des solutions non nulles sont des vecteurs propres w_j associées aux valeurs propres λ_j ;

$$((w_j, v))_s = \lambda_j (w_j, v), \quad \forall v \in V_s, \quad \lambda_j > 0 \quad (4.17)$$

Avec ;

$$V_s \subset V_1 = V \subset L^2(\Omega) \text{ et } V_1 \rightarrow (L^2(\Omega))^n \text{ est compacte}$$

Puisque ;

$$(H_0^1(\Omega))^n \rightarrow (L^2(\Omega))^n \text{ est compacte}$$

Et que

$$V_s \subset V \subset L^2(\Omega) \subset V' \subset V'_s$$

où ;

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^n, \quad v = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ p.p, } \operatorname{div} v = 0\}$$

Comme l'espace $V \cap (L^p(\Omega))^n$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$, (car ; V est séparable et l'espace $L^p(\Omega)$ avec $p = \rho + 2$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$), il existe une base Préhilbertienne $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, des fonctions ayant les propriétés suivantes :

1. $[w_1, w_2, \dots, w_m]$ une base ortho-normale, i.e, $\|w_k\| = 1, \forall k$, et $(w_i, w_j) = 0, \forall i, j, i \neq j, \forall j, w_j \in V$;
2. La famille $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est linéairement indépendante ;
3. l'espace V_m engendré par $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est dense dans $V \cap (L^p(\Omega))^n$, avec $p = \rho + 2$.
comme base spéciale dans la méthode de Faedo-Galerkin :

On définit $u_m(t)$ solution « approchées » d'ordre "m" par ;

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_{m,k}(t) w_k$$

D'après (4.12), on a pour tout $v \in V_m$

$$(u'_m(t), v)_\Omega + \nu a(u_m(t), v) + b(u_m(t), u_m(t), v) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad (4.18)$$

De (4.18), en remplaçant v par $w_k, \forall k = 1, \dots, m$, on obtient ;

$$(u'_m(t), w_k)_\Omega + \nu a(u_m(t), w_k) + b(u_m(t), u_m(t), w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k)_\Omega = (f, w_k)_\Omega \quad (4.19)$$

Comme $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est linéairement indépendante, la matrice associe des systèmes (4.19) est inversible et d'après les arguments standards des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires nous concluons que le système (4.19) admet au moins une solution u_m dans V_m ,

$$\begin{aligned} u_m(0) &\longrightarrow u_{m,0}, \quad u_m(0) \in \{w_1, w_2, \dots, w_m\}, \\ u_{m,0} &\longrightarrow u_0 \text{ dans } V_m \cap (L^p(\Omega))^n \cap ((L^2(\Omega))^n, \quad p = \rho + 2. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'une suite $(u_m)_m$ des solutions du problème (4.1)-(4.4).

b) Estimations a priori (I) :

Comme $u_m \in V_m = \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$, on multiplie l'équation (4.19) par $\lambda_{m,k}(t)$ et l'on somme en k dans (4.19), on obtient ;

$$(u'_m(t), u_m(t))_\Omega + \nu a(u_m(t), u_m(t)) + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Omega = (f, u_m(t))_\Omega \quad (4.20)$$

On va vérifier que ;

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) \text{ et } p = \rho + 2. \quad (4.21)$$

De (4.12), on a pour tout $u_m \in V_m$ la formulation variationnelle ;

$$(u'_m, u_m) + \nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) + (|u_m|^\rho u_m, u_m)_\Omega = (f, u_m)_\Omega$$

Relativement à cette formulation on a ;

$$(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.22)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} |(f(t), u_m(t))_\Omega| &\leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\nu} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\nu}} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\nu} \|u_m(t)\|_V \end{aligned}$$

Moyennant de l'Inégalité de Young, il résulte ;

$$|(f(t), u_m(t))_\Omega| \leq \frac{1}{2} \frac{C_0}{\nu} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \nu \|u_m(t)\|_V^2 \quad (4.23)$$

Aussi, et d'après le Lemme (4.1), on a ;

$$|\nu a(u_m(t), u_m(t))| \leq \nu \|u_m(t)\|_V \|u_m(t)\|_V = \nu \|u_m(t)\|_V^2 \quad (4.24)$$

Et comme on a ;

$$b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0, \quad \forall u_m \in V_m \quad (4.25)$$

De (4.20) , on déduit que ;

$$(u'_m(t), u_m(t))_\Omega + \nu a(u_m(t), u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Omega = (f, u_m(t))_\Omega \quad (4.26)$$

Et comme le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} |(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Omega| &= \left| \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) u_m(t) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2} dx = \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

Et comme ;

$$u_m \in V_m \text{ et } V_m \text{ dense dans } V \cap (L^p(\Omega))^n, \text{ avec } p = \rho + 2, \rho > -1$$

On tire que ;

$$|(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Omega| \leq \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \quad (4.27)$$

Et par intégration entre 0 et t de (4.20) et on utilisant les inégalités (4.22) , (4.23) , (4.24) , (4.27), on tire que ;

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_V^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \\ & \leq \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_0}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

Moyennant $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q)$, $u_{0m} \longrightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$, $u_{m,0} \in V$, il résulte ;

$$\|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_0}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \text{Constante} = C_4$$

On déduit que ;

$$\|u_m(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq \text{Constante} = C_4$$

On déduit, en particulier que ;

$$\|u_m(t)\|_V \leq \text{Constante (indépendante de } m)$$

Et par conséquent ;

$$\int_0^t \|u_m(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq \text{Constante (indépendante de } m)$$

On déduit que $t_m = T$ s'expriment alors ;

$$\begin{aligned} & \text{Lorsque } m \rightarrow +\infty, u_m \text{ demeure dans un borné de} \\ & L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n), \text{ et } p = \rho + 2, \rho > -1 \end{aligned}$$

c) Estimation a priori (II) :

On va maintenant montrer l'estimation suivant ;

$$\begin{aligned} & u'_m \text{ demeure dans un borné de} \\ & L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n), \\ & \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ et } p = \rho + 2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Soient P_m le projecteur orthogonal de $V \cap (L^p(\Omega))^n$ dans V_m ;

$$\begin{aligned} & V \cap (L^p(\Omega))^n \longrightarrow V_m \\ & h \longrightarrow P_m(h) = \sum_{i=1}^m (h, w_i)_\Omega w_i \end{aligned}$$

Vérifie que ;

$$P_m \text{ borné dans } \mathcal{L}(V \cap (L^p(\Omega))^n, V \cap (L^p(\Omega))^n)$$

i.e ;

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V \cap (L^p(\Omega))^n, V \cap (L^p(\Omega))^n)} \leq 1$$

Car $\langle w_k \rangle$ est une base préhilbertienne (avec $\|w_k\|_{V \cap (L^p(\Omega))} = 1$) et par transposition, on a ;

$$P_m = P_m^* \in \mathcal{L}(V' + L^{p'}(\Omega)), \text{ et } \|P_m\|_{\mathcal{L}(V' + L^{p'}(\Omega))} \leq 1$$

Dans le problème (4.1)-(4.4) (de même $(P.V)$), toutes les hypothèses du théorème, (voir Théorème (1.1)), sont vérifiées et par conséquent il existe un opérateur ;

$$A \in \mathcal{L}(V \cap (L^p(\Omega))^n, V' + L^{p'}(\Omega))$$

telle que pour tous u, v dans V , on a ;

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_{V' + L^{p'}(\Omega) \times V \cap (L^p(\Omega))^n}$$

d'où de (4.19) , on tire que ;

$$\begin{aligned} (u'_m(t), w_k)_\Omega + \nu \langle A(u_m(t)), w_k \rangle_{V' \times V} + b(u_m(t), u_m(t), w_k) \\ + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k)_\Omega = (f, w_k)_\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

On multiplie (4.29) par w_k et l'on somme sur k , on obtient ;

$$\begin{aligned} P_m(u'_m(t)) + \nu P_m(A(u_m(t))) + \sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k) w_k) \\ + \sum_{k=1}^m (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k)_\Omega w_k = P_m(f(t)) \end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned} P_m(u'_m(t)) + \nu P_m(A(u_m(t))) + \sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k) w_k) \\ + P_m(|u_m(t)|^\rho u_m(t)) = P_m(f(t)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

D'après le Lemme (4.6), de

$$\begin{aligned} \text{si } u_m \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) \text{ et } p = \rho + 2 \\ \text{alors, } A(u_m) \in L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Et que

$$\begin{aligned} \text{si } f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q), \text{ alors,} \\ P_m(f) \in L^2(Q) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Grâce au Lemme (1.1), pour $n = 2$, de

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

il vient ;

$$u_m \in L^4(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega))^n) = L^4(0, T, (L^2(\Omega))^n), \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Et grâce aux lemmes (4.4) et (4.5), cités précédentes on a ;

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k), w_k)| &= |-\sum_{k=1}^m (b(u_m(t), w_k, u_m(t)), w_k)| \\
&\leq C \|u_m\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|w_k\|_{L^2(\Omega)} \|w_k\|_V \\
&\leq C \left(\left(\|u_m\|_V^{\frac{1}{2}} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \|w_k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w_k\|_V \\
&\leq C \|u_m\|_V \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \|w_k\|_{L^2(\Omega)} \|w_k\|_V \\
&\leq C \|u_m\|_V \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \|w_k\|_V^2
\end{aligned}$$

D'où ;

$$\left| \sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k) w_k) \right| \leq C \|u_m\|_V \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \|w_k\|_V \|w_k\|_V \leq C$$

Il résulte ;

$$\sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k) w_k) \in L^2(0, T, V' + L^{P'}(\Omega)) \quad (4.33)$$

Comme $u_m \in V_m$ et V_m dense dans $V \cap (L^p(\Omega))^n$, avec $p = \rho + 2$, et d'après l'application :

$$\begin{cases} L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p'}(\Omega), \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ et } p = \rho + 2, \rho > -1 \\ f \longrightarrow |f|^\rho f \end{cases}$$

Alors ;

$$|u_m|^\rho u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T, (L^{p'}(\Omega))^n)$$

Car ;

$$|(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))_\Omega| \leq \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$$

Et comme on a ;

$$L^\infty(0, T, (L^{p'}(\Omega))^n) \subset L^2(0, T; (L^{p'}(\Omega))^n),$$

On tire que ;

$$|u_m|^\rho u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; (L^{p'}(\Omega))^n) \quad (4.34)$$

Finalement, d'après les résultats précédente (4.31)-(4.34) dans (4.30), on obtient ;

$$u'_m \in L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

D'où ;

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

d) Passage à la limite :

Comme ;

$$\begin{aligned}
u_m &\text{ demeure dans un borné de } \\
L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) &\cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) \text{ et } p = \rho + 2, \rho > -1
\end{aligned}$$

On peut extraire une sous suite u_μ telle que ;

$$\begin{aligned} u_\mu &\longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \text{ faible,} \\ \text{où } L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) &\subset L^1(0, T, (L^2(\Omega))^n) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Puisque ;

$$L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) = (L^1(0, T, (L^2(\Omega))^n))' \subset L^2(0, T, V' + (L^{p'}(\Omega))^n)$$

il vient ;

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) \text{ faible*} \quad (4.36)$$

Et en particulier ;

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \text{ faible*} \quad (4.37)$$

De (4.35) , (4.37) , il résulte ;

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \text{ faible} \quad (4.38)$$

Et comme l'injection ;

$$V \cap (L^p(\Omega))^n \subset H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \text{ compacte}$$

Donc ;

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n) = (L^2(Q))^n \text{ fort et p.p dans } Q \quad (4.39)$$

Comme ;

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

alors ;

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)) \text{ faible} \quad (4.40)$$

On déduit de (4.35) , (4.40) que ;

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) \text{ dans } V' + L^{p'}(\Omega) \text{ faible}$$

D'où ;

$$u(0) = u_0 \text{ a un sens} \quad (4.41)$$

Et comme ;

$$u_m \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n) \text{ et } p = \rho + 2, \rho > -1$$

Et comme ;

$$u \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

Et d'après le lemme (4.4)., de ;

$$u \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

on tire que ;

$$u \in L^4(0, T, (L^q(\Omega))^n), \text{ où, } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Et d'après le Lemme (4.7), on a ;

$$(u_\mu) \cdot (u_\mu) \text{ est borné dans } L^2(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega))^n) = L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

D'où ;

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \text{ est borné dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n) \quad (4.42)$$

Donc, on peut supposer que

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \longrightarrow X_{i,j} \text{ dans } L^2(0, T, (L^{\frac{q}{2}}(\Omega))^n) \text{ faiblement} \quad (4.43)$$

Par ailleurs (4.39) donne ;

$$(u_\mu)_i \longrightarrow u_i \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}$$

Et

$$(u_\mu)_j \varphi \longrightarrow u_j \varphi \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort, } \forall \varphi \in D(Q)$$

Donc ;

$$\int_0^T ((u_\mu)_i, (u_\mu)_j \varphi)_\Omega ds \longrightarrow \int_0^T (u_i, u_j \varphi)_\Omega ds, \forall \varphi \in D(Q)$$

D'où ;

$$\int_Q (u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \cdot \varphi(x) dx ds \longrightarrow \int_Q u_i u_j \varphi(x) dx ds, \forall \varphi \in D(Q)$$

Donc ;

$$(u_\mu)_i \cdot (u_\mu)_j \longrightarrow u_i u_j \text{ dans } D'(Q) \quad (4.44)$$

Moyennant (4.43) , (4.44) , on trouve que ;

$$X_{i,j} = u_i u_j \quad (4.45)$$

Et comme ;

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n)$$

Donc, il existe $\omega \in L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n)$, telle que ;

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightarrow \omega \text{ dans } L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n) \text{ faible } *$$

Et par conséquence ;

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow \omega = g \text{ p.p dans } \Theta = \Omega \times]0, T[\subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$$

Pour cela, on applique le Lemme (4.8) avec ;

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \text{ avec } q = p' = \frac{\rho + 2}{\rho + 1}, \text{ et } p = \rho + 2, \rho > 0, \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1,$$

On voit que ;

$$|u_m|^\rho u_m \in L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n)$$

i.e ;

$$\|g_\mu\|_{L^{P'}(Q)} = \left(\int_Q \| |u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) \|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C$$

Alors ;

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow \omega = g \text{ dans } (L^{P'}(\Omega))^n \text{ faible} \quad (4.46)$$

Et d'après (4.39) ;

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n) = (L^2(Q))^n \text{ fort et presque partout dans } Q$$

Et par suite ;

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow g = |u|^\rho u \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n) = (L^2(Q))^n \text{ fort et p.p dans } Q$$

Et comme on a ;

$$L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n) \subset (L^{P'}(Q))^n \subset D'(Q)$$

On déduire que ;

$$\omega = g = |u|^\rho u \text{ dans } D'(Q)$$

C'est à dire qu'on a l'estimation suivante ;

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow |u|^\rho u \text{ dans } L^\infty(0, T, (L^{P'}(\Omega))^n) \text{ faible *} \quad (4.47)$$

Et comme on a ;

$$L^2(0, T) \hookrightarrow D'(0, T)$$

Par passage à la limite, on obtient que ;

$$b(u_\mu, u_\mu, w_k) \longrightarrow b(u, u, w_k) \text{ faible dans } L^2(0, T), \forall k \quad (4.48)$$

Donc ;

$$\int_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_k) \varphi ds \longrightarrow \int_0^T b(u, u, w_k) \varphi ds, \forall \varphi \in L^2(0, T), \forall k \quad (4.49)$$

Et comme ;

$$\begin{cases} (u'_\mu, w_k)_\Omega \longrightarrow (u', w_k)_\Omega \text{ dans } D'(0, T), \forall k \\ a(u_\mu, w_k) \longrightarrow a(u, w_k) \text{ dans } D'(0, T), \forall k \end{cases} \quad (4.50)$$

Moyennant (4.47)-(4.50), de (4.19) il découle

$$(u', w_k)_\Omega + \nu a(u, w_k) + b(u, u, w_k) + (|u|^\rho u, w_k)_\Omega = (f, w_k)_\Omega, \forall k = 1, \dots, m,$$

En tenant compte la densité de V_m dans $V \cap (L^p(\Omega))^n$, on conclut que

$$(u', v)_\Omega + \nu a(u, v) + b(u, u, v) + (|u|^\rho u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^n$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution du problème (4.1)-(4.4).

□

4.2.2 Unicité

Théorème 4.2. *Si la dimension $n = 2$, et sous les hyphothèses suivants ;*

$$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

$$u_0 \in \left((L^2(\Omega))^2 \right),$$

$$p = \rho + 2, \text{ avec } \rho \text{ fini quelconque,}$$

la solution du problème variationnel $(P.V)$, si elle existe, est unique.

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions différentes du problème $(P.V)$, vérifiant ;

$$u_k \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^2), \text{ et } p = \rho + 2, \ k = 1, 2$$

On a ;

$$(u'_1, v)_\Omega + \nu a(u_1, v) + b(u_1, u_1, v) + (|u_1|^\rho u_1, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^2, \quad (4.51)$$

$$(u'_2, v)_\Omega + \nu a(u_2, v) + b(u_2, u_2, v) + (|u_2|^\rho u_2, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \quad (4.52)$$

Avec les conditions ;

$$\begin{cases} u_1 = 0, \ u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0 \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

où ;

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^2 / v = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\text{ p.p, } \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

En posant $w = u_1 - u_2$, pour tout $v \in V \cap (L^p(\Omega))^2$, on a ;

$$\begin{aligned} (w', v)_\Omega + \nu a(w, v) + b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) \\ + (|u_1|^\rho u_1, v)_\Omega - (|u_2|^\rho u_2, v)_\Omega = 0, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

D'autre part, de la trilinearité de la fonction $b(u, u, v)$, il résulte ;

$$b(u_2, u_2, v) = b(u_2, u_2 - u_1 + u_1, v) = b(u_2, (u_2 - u_1), v) + b(u_2, u_1, v)$$

Donc ;

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(u_1, u_1, v) - b(u_2, (u_2 - u_1), v) - b(u_2, u_1, v)$$

Ou encore ;

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(u_1 - u_2, u_1, v) - b(u_2, (u_2 - u_1), v)$$

D'où il vient ;

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(w, u_1, v) - b(u_2, -w, v)$$

On en déduit ;

$$\begin{aligned} b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) &= b(w, u_1, v) + b(-(u_1 - u_2), w, v) + b(u_1, w, v) \\ &= b(w, u_1, v) - b(w, w, v) + b(u_1, w, v) \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) &= b(w, u_1, v) - b(w, w, v) + b(u_1, w, v), \\ \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Moyennant (4.54) de (4.53) il découle ;

$$\begin{aligned} (w', v)_\Omega + \nu a(w, v) + b(w, u_1, v) - b(w, w, v) + b(u_1, w, v) \\ + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, v)_\Omega = 0, \forall v \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Grâce au Théorème (4.1) , on a ;

$$u'_k \in L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega)), \quad k = 1, 2$$

Donc ;

$$w' \in L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega))$$

Pour $v = w(t)$, (4.55) devient ;

$$\begin{aligned} (w', w)_\Omega + \nu a(w, w) + b(w, u_1, w) - b(w, w, w) + b(u_1, w, w) \\ + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega = 0, \forall w \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Et d'après le Lemme (4.3), on a ;

$$b(w, w, w) = b(u_1, w, w) = 0, \forall w(t) \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \quad (4.57)$$

On déduit ;

$$\begin{aligned} (w', w)_\Omega + \nu a(w, w) + b(w, u_1, w) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega = 0, \\ \forall w \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Comme $w \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2)$, $w' \in L^2(0, T, V' + L^{p'}(\Omega))$, on a ;

$$(w', w)_\Omega = \int_\Omega w' w dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |w(t)|^2 dx$$

Donc ;

$$(w', w)_\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall w \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \quad (4.59)$$

Et d'après le Lemme (4.1), et comme la norme sur V est équivalente à la norme sur $H^1(\Omega)$, il résulte ;

$$|a(w(t), w(t))| = \|w\|_V \|w\|_V = \|w\|_V^2, \forall w \in V \cap (L^p(\Omega))^2 \quad (4.60)$$

D'après (4.59) , (4.60) , on a ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|w\|_V^2 &= -(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega - b(w, u_1, w) \\ &= b(w, w, u_1) - (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega \end{aligned} \quad (4.61)$$

En utilisant la valeur absolue de (4.61) , on tire que ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|w\|_V^2 &\leq |b(w, w, u_1)| + |(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega|, \\ \forall w &\in V \cap (L^p(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

On a

$$\begin{aligned} |(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega| &= \left| \int_\Omega (|u_1(x)|^\rho u_1(x) - |u_2(x)|^\rho u_2(x)) w dx \right| \\ &\leq (\rho + 1) \int_\Omega \sup(|u_1|^\rho, |u_2|^\rho) |w| |w| dx \end{aligned}$$

Ce qui est majoré d'après l'inégalité de Hölder, par ;

$$\begin{aligned} &|(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega| \\ &\leq C \left[\| |u_1|^\rho \|_{L^\infty(\Omega)} + \| |u_2|^\rho \|_{L^\infty(\Omega)} \right] \|w\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Et d'après le théorème de plongement de Sobolev, on a ;

$$V \subset H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \text{ si } n = 2.$$

On a donc ;

$$|(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega| \leq C [\| |u_1|^\rho \|_V + \| |u_2|^\rho \|_V] \|w\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

Et comme ;

$$u_1, u_2 \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2)$$

On a finalement ;

$$|(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega| \leq C \|w\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu \|w\|_V^2.$$

Donc ;

$$|(|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)_\Omega| \leq \nu \|w\|_V^2 \quad (4.63)$$

D'après l'inégalité (4.62) , on a ;

$$|b(u, v, u)| \leq C \|u\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V$$

Et

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|v\|_V^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in V, \quad (\text{pour } n = 2)$$

et par conséquent,

$$|b(u, v, u)| \leq C \|u\|_V \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

Il résulte que,

$$\begin{aligned} |b(w, u_1, w)| &\leq C_1 \|w(s)\|_V \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u_1(s)\|_V \\ &\leq C_2 \|w(s)\|_V^2 \|u_1(s)\|_V \end{aligned}$$

D'où ;

$$|b(w, u_1, w)| \leq C_2 \|w(s)\|_V^2 \|u_1(s)\|_V \quad (4.64)$$

Moyennant à l'inégalité (4.63) et (4.64) de (4.62) donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|w\|_V^2 \leq C_2 \|w(s)\|_V^2 \|u_1(s)\|_V + \nu \|w\|_V^2 \quad (4.65)$$

Et par intégration en t de (4.65)

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|_V^2 - \frac{1}{2} \|w(0)\|_V^2 \leq C_2 \int_0^t \|u_1(\rho)\|_V \|w(\rho)\|_V^2 d\rho \quad (4.66)$$

car $w(0) = 0$, il résulte ;

$$\|w(t)\|_V^2 \leq C_3 \int_0^t \|u_1(\rho)\|_V \|w(\rho)\|_V^2 d\rho \quad (4.67)$$

Et comme

$$w = u_1 - u_2 \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^2) \text{ et } p = \rho + 2.$$

Et

$$u_1 \in L^2(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2) \subset L^1(0, T, V \cap (L^p(\Omega))^2) \text{ et } p = \rho + 2.$$

Et d'après le lemme de Gronwall (voir lemme (1.4)), on obtient

$$\|w(t)\|_V^2 = 0$$

Ce qui prouve l'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.4). □

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de trois problèmes aux limites non linéaire, le premier problème est un problème gouverné par une équation de Petrovsky avec un source term et dissipatif générale. le deuxième problème est un problème aux limites de la valeur initial concernant l'écoulement transitoire de fluide de Bingham dans un domaine élastique bidimensionnel. le troisième problème est un problème d'évolution pour les équations de Navier-Stokes perturbés par le terme non linéaire $|u|^\rho u$ dans les conditions aux limites de Dirichlet-homogène. On a utilisé la formule de Green (où la formule de Green pour élasticité) pour obtenir la formulation variationnelle (où l'inéquation de la formulation variationnelle), et on utilise aussi les techniques où les hopothèses de régularisation pour avoir l'équation de la formulation variationnelle de quelque problème. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même. On a montré l'existence et l'unicité de la solution pour les trois problèmes et l'existence globale, blows up pour le dernier problème, et ceci par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle.

Travaux perspectives

1. Existence globale, une théorème de régularité et la stabilité d'une solution pour un problème aux limites non linéaire d'évolution pour l'équation de Navier-Stokes perturbée par le terme non linéaire $|u|^\rho u$ dans les conditions aux limites de Dirichlet-homogènes (cas $n = 2$).
2. Ecoulement transitoire de fluide de Bingham dans un domaine perturbés par une équation hyperbolique bidimensionnel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Amroun, N.E., Benaïssa, A., Global existence and energy decay of solution to a petrovsky equation with general dissipation and source term. Georgian Mathematical Journal, 13(3) :397–410, 2006.
- [3] Bingham.C., Fluidity and Plasticity., McGraw-Hill, 215-218, (1922).
- [4] Bird.R. B., Armstrong. R. C., Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. Wiley, (1977).
- [5] Bird. R.B., Dai .G., Yarusso. B.J., The Rheology and Flow of Viscoplastic Materials. Rev. Chem. Eng. 1983, 1, 1–70.
- [6] Bingham. E.C., An investigation of the laws of plastic flow. Bull. Bur. Stand. 1916, 13, 309-353.
- [7] Chen. Y.L., Zhu. K.Q., Couette-Poiseuille flow of Bingham fluids between two porous parallel plates with slip conditions. J. Non-Newton. Fluid Mech. 2008, 153, 1–11.
- [8] Chenand, W., Zhou, Y., Global nonexistence for a semilinear petrovsky equation. Non-linear Analysis, 70, 2009.
- [9] Dunford. N., Schwartz .J.T., Linear operators, v3, Interscience, (1958).
- [10] Duvaut . G., J.L.Lions., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).
- [11] Darby. R. Melson J., How to Predict the Friction Factor for Flow of Bingham Plastics. Chem. Eng. 1981, 28, 59–61.
- [12] Dautry, R., Lions, J., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, volume 3. Masson, Paris, 1985.
- [13] Georgiev, V., Todorova, G., Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Differential Equations, 109(2) :295–308, 1994.

- [14] Guesmia, A., Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de petrovsky. Bell. Belg. Math. Soc, 5 :583–594, 1998.
- [15] Haim. B., Analyse fonctionnelle-Théorie et applications, Masson, Paris, (1983).
- [16] Kolmogorov.S., Fomine., Eléments de la théorie des fonctions et l'analyse fonctionnelle, Editions Mir, Masson, (1974).
- [17] Kaddour. M and F. Messelmi., *Global existence and blow-up of a Petrovsky equation with general nonlinear dissipative and source terms. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math, 1 : 213–234, 2023,*
- [18] Lions, J. L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1966.
- [19] Lions, J. L., Magenes, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1, 2. Dunod, Paris, 1968.
- [20] Lions, Jaques-Louis, Magenes, E., Problèmes aux limites non homogène et applications, Vol.1, Dunod, Paris (1968).
- [21] Lions, Jaques-Louis, Magenes, E., Problèmes aux limites non homogène et applications, Vol.2, Dunod , Paris , (1968).
- [22] Liu. K.F., Mei. C.C., Slow Spreading of a Sheet of Bingham Fluid on an Inclined Plane. J. Fluid Mech. 2006, 207, 505–529.
- [23] Li, G., Sun, Y., Liu, W., Global existence and blow-up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping. Appl. Anal, 91(3) :575–586, 2012.
- [24] Min. T., Yoo. J.Y.,Choi. H., Laminar Convective Heat Transfer of a Bingham Plastic in a Circular Pipe. II. Numerical Approach-Hydro-Dynamically Developing Flow and Simultaneously Developing Flow. Int. J. Heat Mass Transf. 1997, 40, 3689–3701.
- [25] Messaoudi, S.A., Global existence and nonexistence in a system of petrovsky. J Math Anal Appl, 265(2) :296–308, 2002.
- [26] Odroyjd.G., A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid. Proc. Camb. Phil. Soc. 43, 10Ck105
- [27] Piskin, E., Polat, N., on the decay of solutions for a nonlinear petrovskyequation. Mathematical Sciences Letters, 3(1) :43–47, 2014.
- [28] Parvin. A., Dola. T.A., Alam. M.M., Unsteady MHD Viscous Incompressible Bingham Fluid Flow with Hall Current. Model. Meas. Control B 2015, 84, 38–48.
- [29] Raviart .P.A.Thomas, J .M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivée partielles, Masson, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, (1983).
- [30] Rees. D.A.S., Bassom. A.P., Unsteady thermal boundary layer flows of a Bingham fluid in a porous medium following a sudden change in surface heat flux. Int. J. Heat Mass Transf. 2016, 93, 1100–1106.
- [31] Simon. J., Equation de Navier-Stokes, Cours de D.E.A 1994–1995.

- [32] Sreekala. L., Kesavareddy. E., Effects on unsteady MHD flow of a Non-Newtonian fluid through a Porous Medium with uniform suction and injection. IOSR J. Mech. Civ. Eng. 2014, 11, 55–64.
- [33] Wu, S.T., Tsai, L.Y., On global solutions and blow-up of solutions for a nonlinearly damped petrovsky system. Taiwanese J. Math, 19(2A) :545–558, 2009.