

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Equation différentielle aux dérivées partielle

Par

Khanous Amina

Sujet

Solutions auto-similaires pour EDPs d'évolution fractionnaire

Devant le jury :

Mr. Arioua. Y	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Benhamidouche. N	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Bounab .N	Prof. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

*Je tiens à remercier mon promoteur: le professeur **Ben hmidouche. Noureddine** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.*

Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci

Solutions auto-similaires pour EDPs d'évolution fractionnaire

khanous amina

16 juillet 2019

Table des matières

1	Rappels de quelques notions fondamentales	3
1.1	Elements de calcul fractionnaire	3
1.1.1	L'intégrale fractionnaire	3
1.1.2	La dérivée fractionnaire	5
1.2	Les fonctions spéciales	7
1.3	La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires	8
1.3.1	Outils de base de la transformée de Laplace	8
1.3.2	La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L	9
1.3.3	La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo	10
1.3.4	Application de la transformée de Laplace paire sur la fonction de Wright	10
1.4	L'équation de diffusion fractionnaire	11
1.5	Les propriétés d'auto-similarité	11
2	Solutions invariantes par échelle pour équation de diffusion fractionnaire	13
2.1	Application des propriétés d'auto-similarité	14
2.2	Solutions invariantes par l'échelle	20
3	Solutions auto-similaires de problème aux limites sur \mathbb{R}^+ pour l'équation de diffusion fractionnaire :	33
3.1	Application de la méthode d'auto-similarité sur le problème aux limites pour l'équation de diffusion fractionnaire	34
3.1.1	Les propriétés d'auto-similarité	35
3.2	Recherche de la solution invariante par échelle	38
3.2.1	solution invariant par échelle de l'équation	44
4	Solutions auto-similaires de problème aux frontières mobiles pour l'équation de diffusion fractionnaire :	46
4.0.2	Recherche de la solution invariante par l'échelle de l'équation de diffusion fractionnaire	47
4.1	La solution invariante par l'échelle du problème	50
4.1.1	discussion de la solution :	56
	Conclusion	58

Introduction

La théorie de calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel est remonté au temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire est connu un plus large intérêt.

Le calcul fractionnaire a un champ d'application très vaste, par exemple : viscoélasticité, théorie de contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique,...

Le sujet principal de ce mémoire est de trouver les solutions auto-similaires d'une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire, en se basant sur les travaux de [25], [5], [23], [13].

Notre travail est réparti en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et des notions fondamentales qui seront utiles dans la suite de travail.

Le deuxième chapitre est consacré à la recherche de solutions auto-similaires de l'équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, D > 0, x \in \mathbb{R}, 1 \leq \alpha \leq 2.$$

La solution auto-similaire de cette équation sera donnée sous forme de la fonction de Wright en utilisant l'opérateur fractionnaire d'Erdelyi-Kober.

Le troisième chapitre consacré à rechercher la solution auto-similaire de problème de Cauchy aux limites, pour EDPF en utilisant la transformation de Laplace, on trouve la solution auto-similaire de ce problème en fonction de Wright.

Pour le quatrième chapitre on cherche la solution auto-similaire pour EDPF avec des conditions aux frontières mobiles.

Enfin on fait une discussion entre les solutions obtenues par la dérivée de Caputo

et la dérivée de Riemann-Liouville.

Chapitre 1

Rappels de quelques notions fondamentales

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions fondamentales, nécessaire pour la suite de notre travail.

1.1 Elements de calcul fractionnaire

1.1.1 L'intégrale fractionnaire

L'intégration fractionnaire généralise une formule due à Cauchy, qui exprime une intégration multiple à l'aide d'une seule intégration, mais avec un noyau bien choisi. L'itération $n - fois$ d'une fonction intégrable d'une fonction f est donnée par la formule suivante (voir[18]) :

$$\int_a^t dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Cette formule donne l'intégrale d'ordre entier n , sur l'intervalle $[0, t]$. L'ordre non entier la généralise. On remarque immédiatement que pour parler d'une intégrale d'ordre entier, ou non il faut préciser l'intervalle d'intégration.

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction, notons par $(I_{a+}^1 f)$ la primitive

de f s'annule en a .

$$\forall t \in [a, b] : (I_{a+}^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

L'itération de $(I_{a+}^1 f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a de plus[2]

$$\begin{aligned} (I_{a+}^1 f)^2(t) &= I_{a+}^1 f \circ I_{a+}^1 f \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(u) du \right) d\tau \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau \quad (a < \tau < u < t). \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ en note $(I_{a+}^1 f)^n$ la $n^{\text{ème}}$ itération de $I_{a+}^1 f$, une récurrence directe montre que

$$(I_{a+}^1 f)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Si on note $g = (I_{a+}^1 f)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant : $\forall 0 \leq k < n - 1 :$

$$g^{(k)}(a) = 0, \quad g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 1.1 (L'intégrale de Riemann-Liouville R-L)

L'intégrale fractionnaire de R-L.à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est définie par :

$$\forall t \in [a, b] : (I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a.$$

De même, on définit l'intégrale fractionnaire de (R-L) à droite d'ordre $\alpha > 0$ par :

$$\forall t \in [a, b] : (I_{b-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b.$$

1.1.2 La dérivée fractionnaire

Notons $D^n (n \in \mathbb{N})$ l'opérateur de dérivée d'ordre n et soit f une fonction n -fois dérivable, (voir [2]) remarquons que $D^n I^n f = Id$ et

$I^n D^n f \neq Id$ c-à-d que D^n est l'inverse à gauche pas à droite de l'intégrale d'ordre n . La dérivée d'ordre n est un opérateur locale, qui peut aussi être défini sans faire référence à une intégration. La dérivée d'ordre non entier est au contraire un opérateur non locale toujours défini en relation avec un intervalle.

La dérivée fractionnaire de Reimann-Liouville

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, \alpha > 0$ et $[\alpha]$ la partie entière de α . [2] en s'inspirant de la relation classique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_a^1$$

On peut définir une dérivée fractionnaire $0 \leq \alpha < 1$:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ I_a^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_a^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche

Définition 1.2 (La dérivée fractionnaire de R-L) [2]

Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire de R-L à gauche (resp -à droite) d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b] : (D_{a+}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \\ (\text{resp } (D_{b-}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{-d}{dt}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(t). \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.3 (La dérivée de Caputo)[2]

Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche (resp à droite) d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b] : ({}^c D_{a+}^\alpha f)(t) &= I_{a+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{resp } \forall t \in [a, b] : ({}^c D_{b-}^\alpha f)(t) &= I_{b-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D_{a+}^n f(t) = f^n(t) - f^n(a) \\ {}^c D_{b-}^n f(t) = (-1)^n (f^n(t) - f^n(b)) \end{array} \right.$$

Théorème 1.1 [2] Soient $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ possède $(n-1)$ dérivées en "a" et $D_{a+}^\alpha f$ existe, alors, la relation entre la dérivée de R-L et la dérivée de Caputo définie par :

$${}^c D_{b-}^n f(t) = D_{a+}^\alpha [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k].$$

Définition 1.4 (L'opérateur différentiel fractionnaire d'Erdelyi-kober)[7]

L'opérateur différentiel fractionnaire d'Erdelyi-Kober $p_\beta^{\tau, \alpha}$ d'ordre $\alpha > 0$ est donné par :

$$\begin{aligned} (p_\beta^{\tau, \alpha} g)(z) &= \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} \right) (k_\beta^{\tau+\alpha, n-\alpha} g)(z), \\ n &= \begin{cases} [\alpha] + 1, \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}. \end{aligned}$$

Définition 1.5 (L'opérateur d'intégrale fractionnaire d'Erdelyi- Kober)[7]

L'opérateur d'intégrale fractionnaire d'Erdelyi- Kober est donnée par :

$$(k_{\beta}^{\tau, \alpha} g)(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (u-1)^{\alpha-1} u^{-(\tau+\alpha)} g(zu^{\frac{1}{\beta}}) du, & \alpha > 0 \\ g(z), & \alpha = 0 \end{cases}$$

1.2 Les fonctions spéciales

Définition 1.6 (La fonction Gamma)(voir [2])

On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction définie :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0)$$

$$\text{avec : } (t^{z-1} = \exp((z-1) \ln t))$$

Exemples 1.1

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 \exp(-t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1.$$

Définition 1.7 (La fonction Béta)[2]

La fonction Béta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}). (\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Définition 1.8 (Mittag-Liffter)[2]

La fonction de Mittag-Liffter est définie par :

$$E_{\alpha, \beta} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Exemple 1.2

$$E_{1,1} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Définition 1.9 (La fonction de Wright)[2]

La fonction de Wright (W) est définie par :

$$W(z; \lambda, \mu) = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\lambda k + \mu)}, \quad \lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3

$$W(z; \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right).$$

Définition 1.10 (La fonction $M_\nu(z)$)[7]

Cette fonction est définie pour n'importe quel ordre $\nu \in (0, 1)$ et $\forall z \in \mathbb{C}$ par :

$$M_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\nu n + (1 - \nu))}, \quad 0 < \nu < 1 \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$M_{1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(-z^2/4)}.$$

Définition 1.11 (La fonction de Wright généralisée)

La fonction de Wright généralisée est donnée par :

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} ; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + A_i k)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + B_i k)} \frac{z^k}{k!}.$$

1.3 La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Dans cette section (voir [2]) nous donnons quelques outils de base, et des formules fondamentales de la transformée de Laplace pour les dérivées fractionnaires, Riemann-Liouville et de Caputo.

1.3.1 Outils de base de la transformée de Laplace

Rappelons quelque résultats fondamentaux de la transformée de Laplace.

La fonction $F(s)$ définie par :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) ds,$$

est la transformée de Laplace de $f(t)$ et la transformée inverse définie par :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) dt.$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$L\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

1.3.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L d'ordre $\alpha > 0$ laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ comme suit :

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t),$$

tel que la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha},$$

et donc, nous obtenons la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L suivant :

$$L\{I_0^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s),$$

et la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L

d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :

$$L\{D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_0^{\alpha-k-1} f(t)]|_{t=0} \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

1.3.3 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par :

$$L\{^c D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

1.3.4 Application de la transformée de Laplace paire sur la fonction de Wright

Dans le cas $\alpha > 0$, la fonction de Wright est une fonction entière d'ordre inférieur à 1 ([2]) et par conséquent, leur transformée de Laplace peut être obtenue par transformer leur expansion de Taylor terme par terme.

Alors,

$$\begin{aligned} W(\pm t; \alpha, \mu) \div L[W(\pm t; \alpha, \mu); s] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\pm t^K}{K! \Gamma(\alpha K + \mu)} dt \\ &= \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\pm 1^K}{K! \Gamma(\alpha K + \mu)} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^K dt \\ &= \frac{1}{s} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{(\pm s^{-1})^K}{\Gamma(\alpha K + \mu)} = \frac{1}{s} E_{\alpha, \mu}(\pm s^{-1}) \quad \alpha > 0, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

tel que :

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\pm z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)} \quad \alpha > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est la fonction de Mittag-Liffter généralisée.

1.4 L'équation de diffusion fractionnaire

L'équation de diffusion fractionnaire est une équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire (voir[7]) telque le coté à gauche

est la dérivée d'ordre α par apport au temps, et le coté à droit est la dérivée d'ordre β par apport à x :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \quad D > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \beta \leq 2.$$

Cette équation est obtenu en remplaçant la première dérivée ou la dérivée seconde par apport au temps (équation de diffusion ou équation d'onde, respectivement), par la dérivée générale d'ordre $\alpha \geq 1$, définie au sens de Riemann-Liouville.

L'équation de diffusion contient des cas particuliers :

1. $\alpha = 1, \beta = 2$ c'est l'équation de la chaleur.
2. $\alpha = 2, \beta = 2$ c'est l'équation des ondes.
3. $1 < \alpha < 2, \beta = 2$ c'est l'équation de la chaleur-onde.

1.5 Les propriétés d'auto-similarité

Dans ce méoire (voir [11]), nous allons appliquer la méthode d'auto-similarité à l'équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire.

D'abord, on donne quelques définitions sur la méthode d'auto-similarité.

Définition 1.12 [7]

Soit une famille à une paramètre de transformations d'échelle notée par T_λ , c'est une transformation de (x, t, u) sous la forme :

$$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{t} = \lambda^b t, \quad \bar{u} = u,$$

telle que b est un constant et λ un réel.

Définition 1.13 [7] .

Une fonction à valeur réel $\eta(x, t, u)$ est appelée un invariant de la famille à un paramètre T_λ de la transformation d'échelle tel que :

$$\eta(T_\lambda(x, t, u)) = \eta(x, t, u) \quad \forall \lambda \in I.$$

Sur le demi-espace $\{(x, t, u) : x > 0, t > 0\}$, les invariants des transformations d'échelle sont fournis par la fonction

$$\eta(x, t, u) = xt^{-\frac{1}{b}} \quad \text{et on a} \quad u(x, t) = v(z) \quad , \quad (z = xt^{-\frac{1}{b}}).$$

et cette transformation réduit l'EDPF à une EDOF.

Chapitre 2

Solutions invariantes par échelle pour équation de diffusion fractionnaire

Dans ce chapitre nous allons présenter la solution auto-similaire pour l'équation de diffusion fractionnaire, (étudiée en [7]) suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad D > 0 \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad (2.1)$$

avec :

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, & \alpha = n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(x, s) ds, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Selon les valeurs de α , ($\alpha = 1$) l'équation de diffusion, ($\alpha = 2$) l'équation d'onde et ($1 \leq \alpha \leq 2$) l'équation fractionnaire diffusion-onde.

Dans le cas générale ($\alpha \notin \mathbb{N}$) on ne peut pas utiliser la règle de chaîne dans l'opération de la différentiation pour obtenir la solution auto-similaire de l'équation réduite du (2.1) comme le cas de l'équation différentielle aux dérivées partielle, ($\alpha = 1, 2$).

Alors, nous allons transformer l'équation (2.1)à une équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire, avec le nouveau variable indépendant $z = x/t^{\alpha/2}$.

La dérivée donc devient la dérivée d'Erdelyi-Kober, dépendant avec le paramètre α .

Pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, l'équation réduit correspondant à l'équation différentielle ordinaire est très connu dans la littérature [14].

Nous représentons aussi la solution générale de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire avec la dérivée d'Erdelyi-Kober, dans les termes de fonction de Wright et la fonction de Wright généralisée .

2.1 Application des propriétés d'auto-similarité

Dans cette partie nous allons appliquer les propriétés d'auto-similarité sur l'équation de diffusion alors, On a :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} ,$$

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial t^\alpha} = \lambda^{nb} \frac{\partial^n \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^n} \quad \text{pour } \alpha = n \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la substitution de variable nous obtenons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \bar{s}) ds, \\ &= \frac{\lambda^{nb}}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} \int_0^{\bar{t}/\lambda^b} (\bar{t}\lambda^{-b} - s)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \lambda^b s) ds, \end{aligned}$$

on multiplie et on devise sur $\lambda^{b(n-\alpha-1)}$

$$= \frac{\lambda^{nb}}{\Gamma(n - \alpha)} \lambda^{b(-n+\alpha+1)} \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} \int_0^{\bar{t}/\lambda^b} (\bar{t} - s\lambda^b)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \lambda^b s) ds,$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha b} \lambda^b}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} \int_0^{\bar{t}/\lambda^b} (\bar{t} - s\lambda^b)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \lambda^b s) ds,$$

on pose $\tau = \lambda^b s \implies d\tau = \lambda^b ds \implies ds = \lambda^{-b} d\tau$,

$$= \frac{\lambda^{\alpha b} \lambda^b}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} \int_0^{\bar{t}} (\bar{t} - \tau)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \tau) \lambda^{-b} d\tau,$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha b}}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial \bar{t}^n} \int_0^{\bar{t}} (\bar{t} - \tau)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{x}, \tau) d\tau,$$

il s'ensuit que :

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \lambda^{\alpha b} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial \bar{t}^\alpha} - D \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = 0.$$

Les conditions de similarité :

$$\lambda^{\alpha b} = \lambda^2 \implies \alpha b = 2 \implies b = \frac{2}{\alpha},$$

Théorème 2.1 [9]

Soit T_λ un paramètre de groupe de transformation d'échelle pour l'équation :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < \alpha < 2,$$

donnée sous la forme :

$$T_\lambda \circ (x, t, u) = (\lambda x, \lambda^b t, u)$$

alors ,

$b = \frac{2}{\alpha}$, et l'invariant de cette groupe T_λ est donnée par l'expression :

$$\eta(x, t) = x t^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Preuve. on a :

$$\eta(x, t, u) = (\lambda x, \lambda^b t, u)$$

en prend :

$$\lambda^b t = 1 \implies \lambda^b = 1/t \implies \lambda = t^{-\frac{1}{b}}$$

c'est à dire l'invariant de la transformation d'échelle T_λ pour l'équation (2.1) admet la forme :

$$\eta(x, t, u) = xt^{-1/b} = xt^{-\alpha/2}$$

comme dans le cas de EDP en utilise la transformation :

$$u(x, t) = v(z) \quad z = xt^{-\alpha/2}. \quad \blacksquare$$

Pour déterminer les solutions invariantes par échelle pour EDPF d'ordre (1). nous allons résoudre la dérivée partielle u_{xx} et la dérivée partielle d'ordre fractionnaire $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\alpha > 0$ dans les termes des dérivées de v , on trouve :

$$u_x = v'(z)t^{-\alpha/2}, u_{xx} = v''(z)t^{-\alpha}. \quad (2.2)$$

Dans les cas $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ la dérivée $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\alpha > 0$ Peut être exprimée en des termes de opérateur différentielle ordinaire linéaire, appliqué à v d'ordre 1 ou 2, respectivement. Dans le cas générale on a le théorème suivant :

Théorème 2.2 [25]

La dérivée partielle fractionnaire $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\alpha > 0$ de la fonction $u(x, t) = v(z)$, $z = xt^{-\alpha/2}$ est donnée par la relation :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\alpha} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z), \quad z > 0. \quad (2.3)$$

avec

$$(p_\beta^{\tau, \alpha} v)(z) = \prod_{j=0}^{\eta-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} \right) (K_\beta^{\tau+\alpha, \eta-\alpha} v)(z) \quad (2.4)$$

Preuve. soit $n - 1 < \alpha < n$, $n = 1, 2, \dots$ et $(z) = (x/t^{\alpha/2})$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} v(x\tau^{-\alpha/2}) d\tau \right), \quad (2.5)$$

en prend $\tau = tu^{-1} \implies d\tau = -tu^{-2} du \implies du = -t^{-1} u^2$,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-tu^{-1})^{n-\alpha-1} v(xt^{-\alpha/2} u^{\alpha/2}) \times (-tu^{-2}) du \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t -t(t-tu^{-1})^{n-\alpha-1} u^{-2} v(zu^{\alpha/2}) du \right) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t -t \times t^{n-\alpha-1} u^{-2} u^{-(n-\alpha-1)} (1-u)^{n-\alpha-1} v(zu^{\alpha/2}) du \right) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t -t^{n-\alpha} u^{\alpha-n-1} (1-u)^{n-\alpha-1} v(zu^{\alpha/2}) du \right) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t t^{n-\alpha} u^{\alpha-n-1} (u-1)^{n-\alpha-1} v(zu^{\alpha/2}) du \right).
\end{aligned}$$

si $\tau = tu^{-1} \implies \tau u = t \implies u = t/\tau$.

si $\tau = 0 \implies u = +\infty$.

si $\tau = t \implies u = 1$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{+\infty} (u-1)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n-1} v(zu^{\alpha/2}) du \right) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n} (t^{n-\alpha} (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z)).
\end{aligned}$$

On appliquons la relation :

$$\begin{aligned}
t \frac{\partial \phi(z)}{\partial t} &= t \frac{\partial \phi(xt^{-\alpha/2})}{\partial t} \\
&= tx \left(\frac{-\alpha}{2} \right) t^{\frac{-\alpha}{2}-1} \phi'(z) \\
&= \frac{-\alpha}{2} xt^{-\alpha/2} \phi'(z) \\
&= \frac{-\alpha}{2} z \phi'(z) \\
&= \frac{-\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \phi(z). \tag{2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial t^n} (t^{n-\alpha} (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z)) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{+\infty} (u-1)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n-1} v(zu^{\alpha/2}) du \right) \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (n-\alpha) t^{n-\alpha-1} \left(-\frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} v(z) \right) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{+\infty} (u-1)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n-1} v(zu^{\alpha/2}) du.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} t^{n-\alpha-1} \left(n - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z) \\
&= \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(n - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(n - \alpha - 1 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) t^{n-\alpha-2} (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z) \\
&= \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(n - \alpha - 2 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(n - \alpha - 1 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(n - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) t^{n-\alpha-2} (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= \frac{\partial^{n-n}}{\partial t^{n-n}} t^{n-\alpha-n} \left(n - \alpha - (n-1) - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \times \dots \times \left(n - \alpha - 2 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \\
&\quad \left(n - \alpha - 1 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \left(n - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z). \\
&= t^{-\alpha} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz} \right) \right) (k_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} v)(z) \\
&= t^{-\alpha} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z).
\end{aligned}$$

Dans le cas $\alpha = n = 1, 2, 3$ en utilise la relation (2.6) une autre fois , avec $(z = xt^{-n/2})$ on obtient :

$$\begin{aligned}
t \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z) &= \frac{-n}{2} z \frac{d}{dz} \Phi(z) \\
\frac{\partial^n}{\partial t^n} v(z) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (t^{n-n-1} t \frac{\partial}{\partial t} v(z)). \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (t^{-1} t \frac{\partial}{\partial t} v(z)). \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} (t^{-1} \frac{-n}{2} z \frac{d}{dz} v(z)).
\end{aligned}$$

De la même manière, on arrive :

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} v(z) &= t^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - n + j - \frac{n}{2} z \frac{d}{dz} \right) v(z). \\
&= t^{-n} (p_{2/\alpha}^{1-n, n} v)(z).
\end{aligned}$$

Maintenant, en remplace l'expression (2.2) et (2.3) dans l'EDPF (2.1) on trouve :

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = Du_{xx}$$

$$u_{xx} = t^{-\alpha} v''(z).$$

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = t^{-\alpha} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z).$$

alors (2.1) devient :

$$t^{-\alpha} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z) = Dt^{-\alpha} v''(z),$$

alors,

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z) = Dv''(z). \quad (2.7)$$

si $\alpha = 1$ on a :

$$\begin{aligned} (p_2^{0,1} v)(z) &= (1 - 1 + 0 - \frac{1}{2} z \frac{d}{dz}) v(z) \\ &= -\frac{1}{2} z \frac{d}{dz} v(z) \\ &= -\frac{1}{2} z v'(z). \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} z v'(z) = Dv''(z) \quad (\text{équation de diffusion}).$$

si $\alpha = 2 \implies n = 2$ ($\alpha = n = 2$)

$$\begin{aligned} (p_1^{-1,2} v)(z) &= \prod_{j=0}^1 (1 - 2 + j - \frac{1}{2} z \frac{d}{dz})(z) \\ &= (1 - 2 + 0 - z \frac{d}{dz})(1 - 2 + 1 - z \frac{d}{dz}) v(z). \\ &= (-1 - z \frac{d}{dz})(-z \frac{d}{dz}) v(z) \\ &= (1 + z \frac{d}{dz})(z \frac{d}{dz}) v(z) \end{aligned}$$

$$2z v'(z) + z^2 v''(z) = Dv''(z) \quad (\text{équation d'Ionde}).$$

■

Remarques 2.1

On a vu d'après la définition de l'opérateur différentiel fractionnaire d'Erdelyi-kober dans le cas $\alpha = n \in \mathbb{N}$, que l'équation (2.7) obtenu est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre $\max\{2, n\}$.

2.2 Solutions invariantes par l'échelle

Dans cette section nous présentons la forme exacte des solutions invariantes par échelle d'équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire (2.1).

L'équation (2.7) admet des structures différents, dans les cas $1 \leq \alpha < 2$, $\alpha = 2$, $\alpha > 0$ et $\alpha > 2$.

En commence par le premier cas : $1 \leq \alpha < 2$:

Lemme 2.1 [15] *La fonction de Wright généralisée $W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ est une fonction entière pour $0 < -\mu < \nu$ a, b sont des nombres complexes.*

Preuve. On utilise la formule inverse : [15]

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \Gamma(z) \quad z \in \mathbb{C}.$$

On peut représenter la fonction de Wright généralisée sous forme :

$$W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(a + \mu k)) \Gamma(1 - a - \mu k)}{\Gamma(b + \nu k)} z^k$$

puis on définit la série majorant :

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh(\pi \zeta(a))}{\pi} \left| \frac{\Gamma(1 - a - \mu k)}{\Gamma(b + \nu k)} \right| z^k.$$

On utilise la formule asymptotique :

$$\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)} = s^{a-b} [1 + O(s^{-1})], \quad |s| \rightarrow \infty, \quad |\arg s| < \pi,$$

on obtient les rayons de convergence de la série majorant :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(1-a-\mu k)}{\Gamma(b+\nu k)} \frac{\Gamma(b+\nu+\nu k)}{\Gamma(1-a-\mu-\mu k)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} (\nu k)^\nu (-\mu k)^\mu \\
&= \nu^\nu (-\mu)^\mu \lim_{k \rightarrow \infty} k^{\mu+\nu} = +\infty.
\end{aligned}$$

C.-à-d., la fonction de Wright généralisée admet une infinité des rayons de convergence. ■

Lemme 2.2 [29] Soit L_- la coupe dans le plan complexe ζ_- coïncidant avec le semi-axe réel négatif, [15], $\gamma(\varepsilon, \varphi)$ ($\varepsilon > 0, 0 < \varphi \leq \pi$) le contour avec l'arg ζ consistant les parties suivantes :

1. le rayon $\arg \zeta = -\varphi, \quad |\zeta| \geq \varepsilon;$
2. l'arc $-\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi, \quad |\zeta| = \varepsilon;$
3. ray $\arg \zeta = \varphi \quad |\zeta| \geq \varepsilon.$

Alors, la fonction de Wright généralisée $W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z)$ admet une représentation intégrale :

$$W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\varphi)} e^\zeta \zeta^{-a} E_{\nu,b}(z\zeta^{-\mu}) d\zeta. \quad (2.8)$$

$$\varepsilon > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi, -\mu < \nu < 0.$$

$$W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{z^k}{\Gamma(a + \mu k) \Gamma(b + \nu k)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^\zeta \zeta^{-a} \{E_{\nu,b}(z\zeta^{-\mu}) - \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(z\zeta^{-\mu})^k}{\Gamma(b + \nu k)}\} d\zeta, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi, 0 < -\mu < \nu, k_0 > \max\{-1, R((1-a)/(-\mu))\}.$$

Preuve. La formule (2.8) est obtenue par la substitution de la représentation (voir [16]) :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\varphi)} e^\zeta \zeta^{-s} d\zeta, \varepsilon > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi, s \in \mathbb{C} \quad (2.10)$$

pour $s = a + \mu k$ et le changement d'ordre de l'intégration et la sommation . La formule (2.9) est basée à la représentation :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^\zeta \zeta^{-s} d\zeta, R(s) < 1 \quad (2.11)$$

et l'intégration du $-\infty$ vers 0 puis du 0 vers $-\infty$. ■

Remarque 2.2 Dans le cas $\nu = b = 1$ la représentation (2.8) admet la forme :

$$\begin{aligned}
W_{(\mu,a),(1,1)}(z) &= W_{(\mu,a)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(a + \mu k)} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \varphi)} e^{\{\zeta + z\zeta^{-\mu}\}} \zeta^{-a} d\zeta \\
&\quad , \varepsilon > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi, -1 < \mu.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Cette formule est obtenue et utilisée par Wright, il prouvé que pour $-1 < \mu < -1/3$, la fonction $W_{(\mu,a)}(z)$ admet sur le demi-axe réel positive l'expansion asymptotique algébrique :

$$W_{(\mu,a)}(z) = \sum_{l=0}^{L-1} \frac{z^{(a-1-l)/(-\mu)}}{(-\mu)\Gamma(l+1)\Gamma(1+(a-l-1)/(-\mu))} + O(z^{(a-1-l)/(-\mu)}), \quad z \rightarrow +\infty, \quad L = 0, 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

Dans notre situation nous obtenons des résultats similaires :

Lemme 2.3 [7] Soit $0 < \nu/3 < -\mu < \nu \leq 2$, $L, p = 0, 1, 2, \dots$

alors,

$$\begin{aligned}
W_{(\mu,a)}(z) &= \sum_{l=0}^{L-1} \frac{z^{(a-1-l)/(-\mu)}}{(-\mu)\Gamma(l+1)\Gamma(b+\nu(a-l-1)/(-\mu))} \\
&\quad - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(b-\nu k)\Gamma(a-\mu k)} + O(z^{(a-1-l)/(-\mu)}) + O(z^{(-1-p)}), \quad z \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Preuve. On utilise la représentation intégrale (2.8) avec $\varepsilon > 0$ fixée et on note l'argument $z\zeta^{-\mu}$ de fonction de Wright par λ pour $z \rightarrow \infty$ $\zeta \in \gamma(\varepsilon, \varphi)$ alors, on a $|\lambda| \rightarrow +\infty$, $\arg(\lambda) = -\mu\varphi$ on choisissons φ tel que $-\mu\varphi \leq \min\{\pi, \pi\nu\}$.

Alors on peut utiliser la formule asymptotique de la fonction de Mittag-Liffter (voir [23])

$$\begin{aligned}
E_{\nu,b}(\lambda) &= \frac{1}{\nu} \lambda^{(1-b)/\nu} e^{\lambda^{1/\nu}} - \sum_{k=1}^p \frac{\lambda^{-k}}{\Gamma(b-\nu k)} \\
&\quad + O(|\lambda|^{-1-p}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

On substituant cette expression vers la représentation intégrale (2.8) et utilisant les formule (2.10),(2.12) nous obtenons l'expansion asymptotique de la fonction de

Wright généralisée dans les termes de fonction de Wright(2.12) :

$$W_{(\mu,a),(\nu,b)}(z) = \frac{z^{(1-b)/\nu}}{\nu} W_{\mu/\nu, a-\mu(b-1)/\nu}(z^{1/\nu})$$

$$- \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(a + \mu k)\Gamma(b + \nu k)} + O(z^{(-1-p)}), z \rightarrow +\infty.$$

Maintenant on utilise la formule (2.13) pour $-1 < \mu/\nu < -1/3$, on arrive à (2.14).

■

Théorème 2.3 [29]

Les solutions invariantes par échelle d'une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire dans le cas $1 \leq \alpha < 2$ s'écrivent sous la forme :

$$v(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z), \quad \text{avec}(z = xt^{-\alpha/2}) \quad (2.16)$$

et c_1, c_2 sont des constants réels telle que :

$$v_1(z) = W(-z/\sqrt{D}; -\frac{\alpha}{2}, 1),$$

$$v_2(z) = W(z/\sqrt{D}; -\frac{\alpha}{2}, 1). \quad (2.17)$$

avec la fonction de Wright :

$$W(z; \lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\lambda k + \mu)}.$$

Preuve.

On considère le cas $\alpha = 1$ alors, l'équation (2.7) est une EDO linéaire d'ordre 2 et admet deux solutions indépendants. Puisque les fonctions sont des fonctions entiers dans le plan complexe, pour $\alpha < 2$ nous avons immédiatement :

$$v_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{k! \Gamma(-\frac{\alpha}{2}k + 1)}$$

pour $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{k!\Gamma(-\frac{k}{2} + 1)} \\
v_1'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-k(Z^{k-1}/\sqrt{D}^k)}{k!\Gamma(-\frac{k}{2} + 1)} \\
v_1'(z) &= -\frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(-\frac{k}{2} + 1)}. \\
-\frac{1}{2}zv_1'(z) &= -\frac{1}{2}z\left(-\frac{1}{\sqrt{D}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(-\frac{k}{2} + 1)}. \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{(k-1)!(-\frac{k}{2})\Gamma(-\frac{k}{2})} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{k!\Gamma(-\frac{k}{2})}
\end{aligned}$$

et on a :

$$-\frac{1}{2}zv_1'(z) = Dv''_1(z).$$

La même chose pour v_2 .

$$-\frac{1}{2}zv_2'(z) = Dv''_2(z).$$

$$(10) + (11) \implies -\frac{1}{2}z(v'_1 + v'_2)(z) = D(v''_1 + v''_2)(z)$$

$$\implies -\frac{1}{2}zv'(z) = Dv''(z)$$

qui complète le preuve dans le cas $\alpha = 1$.

Dans le cas $1 < \alpha < 2$, après le changement de variable $v'' = y$, l'équation (2.7) prend la forme :

$$y(z) - \frac{1}{D}(L_\alpha y)(z) = c_1z + c_2 \quad z > 0, \quad D > 0 \quad (2.18)$$

c_1, c_2 constantes réels.

avec

$$(L_\alpha y)(z) = (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} I_{0+}^2 y)(z).$$

L'équation (2.18) est une équation integro-différentielle d'ordre $2 - \alpha > 0$ et elle admet une solution unique, le 2^{ème} partie est écrit sous la forme :

$$f(z) = c_1 z + c_2$$

c.-à-d. :l'équation (2.7) admet au plus deux solutions linéairement indépendantes, on montre que la fonction (2.17) satisfait l'équation (2.7).

Premièrement on a :

$$\begin{aligned} v_1'(z) &= -\frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^{k-1}}{(k-1)! \Gamma(-\frac{\alpha k}{2} + 1)} \\ v_1''(z) &= -\frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(-Z^{k-2}/\sqrt{D}^{k-1})}{(k-1)! \Gamma(-\frac{\alpha k}{2} + 1)} \\ v_1''(z) &= -\frac{1}{\sqrt{D}} \times -\frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-Z^{k-2}/\sqrt{D}^{k-2})}{(k-2)! \Gamma(-\frac{\alpha k}{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^{k-2}}{(k-2)! \Gamma(-\frac{\alpha k}{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{k! \Gamma(-\frac{\alpha(k+2)}{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Z/\sqrt{D})^k}{k! \Gamma(-\frac{\alpha k}{2} + 1 - \alpha)} \\ v_1''(z) &= W(-z/\sqrt{D}; \frac{-\alpha}{2}, 1 - \alpha) \end{aligned} \tag{2.19}$$

la même chose pour $v_2''(z)$.

$$v_2''(z) = W(z/\sqrt{D}; \frac{-\alpha}{2}, 1 - \alpha) . \tag{2.20}$$

■

Malheureusement, il est impossible d'appliquer l'opérateur $(p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha})$ terme par terme sur la série à cause de la divergence d'intégrale correspondant, alors on utilise une autre méthode basée à l'équation de Parseval (la transformé intégrale de

Mellin) et intégrale le plus connu (la représentation de fonction de Wright).

Lemme 2.4 [7]

Soient $v_1(z)$ et $v_2(z)$ sont définis par la relation (2.17), alors, la relation :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v_1)(z) = W(-z/\sqrt{D}; \frac{-\alpha}{2}, 1 - \alpha)$$

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v_2)(z) = W(z/\sqrt{D}; \frac{-\alpha}{2}, 1 - \alpha)$$

est valide pour $1 < \alpha < 2$

Preuve.

Dans le cas $1 < \alpha < 2$ le partie à gauche de l'équation (2.7), admet la forme :

si ($1 < \alpha < 2$ alors $n = 2$ parce que $n = [\alpha] + 1$)

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v)(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (k_{2/\alpha}^{1,n-\alpha} v)(z) \quad (2.21)$$

$$= \prod_{j=0}^{2-1} (1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (k_{2/\alpha}^{1,2-\alpha} v)(z)$$

$$= (1 - \alpha + 0 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (1 - \alpha + 1 - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (k_{2/\alpha}^{1,2-\alpha} v)(z)$$

$$= (1 - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (2 - \alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) (k_{2/\alpha}^{1,2-\alpha} v)(z)$$

$$\text{ou } (k_{2/\alpha}^{1,2-\alpha} v)(z) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_1^{+\infty} (t-1)^{1-\alpha} t^{\alpha-3} v(zt^{\alpha/2}) dt$$

c'est l'opérateur d'intégrale fractionnaire d'Erdelyi-kober.

Selon Wright (voir [8]) :

$$v_1(z) = \frac{e^{-Z}}{\sqrt{Z}} (A_0 + O(z^{-1})), \text{ pour } z \rightarrow +\infty \quad (2.22)$$

avec

$$z = (1 - \delta)(\delta^\delta z/\sqrt{D})^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad \delta = \frac{\alpha}{2}, \quad A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - \delta)^\delta}{\sqrt{\delta}},$$

$$v_2(z) = \frac{2}{\alpha} + O(z^{-\frac{2}{\alpha}}), \quad \text{pour } z \rightarrow +\infty \quad (2.23)$$

il résulte de ces deux relations et (2.21) que $p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}$ est bien définie sur les fonctions $v_1(z)$ et $v_2(z)$.

Pour obtenir leur effet sur la fonction $v_1(z)$ nous représentons l'opérateur (2.21) sous forme (voir [24], [22]) :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}v)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}s)}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}s)} v^*(s) z^{-s} ds, \quad (2.24)$$

$$\text{ou } v^*(s) = \int_0^\infty v(t) t^{s-1} dt$$

c'est la transformée intégrale de Mellin de la fonction $v(t)$ et,

$$L_{i\infty} = \{s \in \mathbb{C} : R(s) = \gamma > 0\}.$$

D'après l'utilisation des résultats de [16] on arrive à :

$$v_1^*(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}s)} (1/\sqrt{D})^{-s}, \quad (2.25)$$

alors on a :

$$\begin{aligned} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}v_1)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}s)}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}s)} v_1^*(s) z^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}s)}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}s)} (1/\sqrt{D})^{-s} z^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}s)} (z/\sqrt{D})^{-s} ds. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est un cas particulière de Fox-H-fonction (voir [22]). En le représentant comme une série, on obtient l'expression de notre lemme 1 pour la fonction $v_1(z)$.

Cette méthode ne pouvait pas être appliquée pour la fonction $v_2(z)$, puisque la transformée intégrale de Mellin de cette fonction n'existe pas alors, on utilise la représentation d'intégrale modifiée de fonction de Wright (voir[8]) qui admet la forme :

$$v_2(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{e^\tau}{\tau} (\exp\{z\tau^{\alpha/2}/\sqrt{D}\} - 1) d\tau.$$

Le contour L_- c'est la coupe dans le plan complexe coïncidant avec le semi-axe réel négative, maintenant on applique l'opérateur (2.21) et change l'ordre d'intégration, on a :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + (1-\alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz})(2-\alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz}) \quad (2.26)$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{e^\tau}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_1^\infty (t-1)^{1-\alpha} t^{\alpha-3} (\exp\{z\tau^{\alpha/2} t^{\alpha/2} / \sqrt{D}\} - 1) dt d\tau.$$

on utilise l'égalité de Parseval pour le transformée intégrale de Mellin (voir [16])

on a :

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_1^\infty (t-1)^{1-\alpha} t^{\alpha-3} \exp\{z\tau^{\alpha/2} t^{\alpha/2} / \sqrt{D}\} dt \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}s)\Gamma(-s)}{\Gamma(3-\alpha-\frac{\alpha}{2}s)} (-z\tau^{\alpha/2} / \sqrt{D})^s ds,$$

ou $\tau \in L_-$, $L_{i\infty} = \{s \in \mathbb{C} : 0 < R(s) = \gamma < 1\}$.

Le contour $L_{i\infty}$ dans la représentation dernière peut être transformée vers le contour $L_{+\infty}$, qui transporte de le point $-ai + \infty$, $a > 0$ a la point $bi + \infty$, $b > 0$.

On substitue la représentation (2.27) (avec le contour $L_{+\infty}$ en place de $L_{i\infty}$) dans (2.28) puis on utilise l'identité :

$$(1-\alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz})(2-\alpha - \frac{\alpha}{2} z \frac{d}{dz})z^s = (1-\alpha - \frac{\alpha}{2}s)(2-\alpha - \frac{\alpha}{2}s)z^s$$

on arrive à :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v_2)(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{e^\tau}{\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{+\infty}} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{2}s)} (-z\tau^{\alpha/2} / \sqrt{D})^s ds d\tau.$$

Après le changement d'ordre d'intégration dans la dernière formule, on utilise la représentation de fonction Gamma (voir [16]) :

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^\tau \tau^{-\beta} d\tau \quad R(\beta) < 1.$$

et la représentation obtenue par FOX H fonction comme une série alors, finalement on trouve :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} v_2)(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{+\infty}} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{2}s)} (-z/\sqrt{D})^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^\tau \tau^{-(1-\frac{\alpha}{2}s)} d\tau ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L+\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{2}s)} (-z/\sqrt{D})^s \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z/\sqrt{D})^k}{k!\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{2}k)} \\
&= W(z/\sqrt{D}; -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha).
\end{aligned}$$

Cette dernière relation complète notre preuve de lemme 1, l'expression du théorème 2.3 est résultat par la comparaison de la relation (2.1) et (2.2) et les résultats prouvés dans lemme 1. ■

Remarques 2.3 Dans le cas $\alpha = 1$ (équation de la chaleur), la solution auto-similaire (2.17) admet la forme :

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z/\sqrt{D})^k}{k!\Gamma(1-\frac{1}{2}k)} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z/\sqrt{D})^{2n+1}}{(2n+1)!\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \\
&= 1 - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z/(2\sqrt{D}))^{2n+1}}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})} \\
&= 1 - \pi \operatorname{erf}(z/(2\sqrt{D}))
\end{aligned}$$

qui se donne :

$$v_2(z) = 1 + \pi \operatorname{erf}(z/(2\sqrt{D})),$$

telle que erf est la fonction d'erreur qui est accord avec les résultats connus (voir [17]).

Remarques 2.4 La solution auto-similaire (2.17) peut être aussi utilisée dans le cas $\alpha = 2$ (équation des ondes).

Dans ce cas il faut que nous l'écrivions sous la forme :

$$u_1(z) = (v_1(z) + v_2(z))/2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z^2/\sqrt{D})^k}{\Gamma(1+2k)\Gamma(1-\alpha k)},$$

$$\begin{aligned}
u_2(z) &= D\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(v_1(z) + v_2(z))/2 \\
&= \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z^2/\sqrt{D})^k}{\Gamma(2+2k)\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \alpha k\right)}.
\end{aligned}$$

Utilisant la relation ($\alpha = 2$)

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \alpha k\right)} = \left(\frac{-\alpha}{2}\right)\left(\frac{-\alpha}{2} - 1\right) \times \dots \times \left(\frac{-\alpha}{2} - (2k - 1)\right) = (2k)!, k = 0, 1, 2, \dots$$

pour $\alpha = 2$, on arrive à :

$$\begin{aligned}
u_1(z) &= 1, \\
u_2(z) &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/D)^k (2k)!}{(1+2k)!} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/D)^k}{1+2k} = -\frac{\sqrt{D}}{2} \ln \frac{\sqrt{D} - z}{\sqrt{D} + z}, z < \sqrt{D}.
\end{aligned}$$

D'abord on considère le cas $2 < \alpha$:

Théorème 2.4 [29]

La solution auto-similaire de EDPF d'ordre 1 dans le cas $\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ admet la forme :

$$v(z) = \sum_{j=0}^{[\alpha]} c_j v_j(z), \quad c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq [\alpha], \quad (2.28)$$

$$v_j(z) = z^{-2+\frac{2}{\alpha}(1+j)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1), (2 - \frac{2}{\alpha}(1+j), 2) \\ (\alpha - j, \alpha) \end{matrix} ; Dz^{-2} \right], \quad (2.29)$$

ou

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) \dots (b_q, B_q) \end{matrix} ; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + A_i k)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + B_i k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.30)$$

c'est la fonction de Wright généralisée

Preuve. Après la substitution $(p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z) = y(z)$ l'équation (2.7) admet la forme :

$$y(z) - D(L_\alpha y)(z) = \sum_{j=0}^{[\alpha]} c_j z^{-4+\frac{2}{\alpha}(1+j)},$$

ou $c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq [\alpha]$ et

$$(L_\alpha y)(z) = \frac{d^2}{dz^2}(K_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} y)(z).$$

Cette dernière équation est une équation integro-différentielle de type (2) et d'ordre $\alpha - 2 < 0$ et elle admet une solution unique si le coté à droite admet la forme :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{[\alpha]} c_j z^{-4 + \frac{2}{\alpha}(1+j)}$$

(voir [28],[22]) C.-à-d., l'équation(2.7) admet au plus $[\alpha] + 1$ solutions linéairement indépendantes. On montre que $v_j(z), 0 \leq j \leq [\alpha]$ est un solution (voir [12]), la fonction de Wright généralisée est une fonction entiere alors on peut dériver la série correspondante terme par terme et on à :

$$v_j''(z) = (-2 - 2k + \frac{2}{\alpha}(1+j))(-3 - 2k + \frac{2}{\alpha}(1+j))z^{-4 + \frac{2}{\alpha}(1+j)} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{\infty} (Dz^{-2})^k \frac{\Gamma(2 - \frac{2}{\alpha}(1+j) + 2k)}{\Gamma(\alpha - j + \alpha k)} \\ & = z^{-4 + \frac{2}{\alpha}(1+j)} \sum_{k=0}^{\infty} (Dz^{-2})^k \frac{\Gamma(4 - \frac{2}{\alpha}(1+j) + 2k)}{\Gamma(\alpha - j + \alpha k)}. \end{aligned}$$

On peut aussi appliquer l'opérateur $p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha}$ terme par terme sur la série (2.29), on utilise la formule :

$$(p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} t^p)(z) = \frac{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}p)}{\Gamma(1 - \alpha - \frac{\alpha}{2}p)} \quad 1 - \frac{\alpha}{2}p > 0.$$

■

Preuve. on arrive à :

$$\begin{aligned} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v_j)(z) & = z^{-2 + \frac{2}{\alpha}(1+j)} \sum_{k=0}^{\infty} (Dz^{-2})^k \frac{\Gamma(2 - \frac{2}{\alpha}(1+j) + 2k)\Gamma(\alpha - j + \alpha k)}{\Gamma(\alpha - j + \alpha k)\Gamma(-j + \alpha k)} \\ & = z^{-2 + \frac{2}{\alpha}(1+j)} \sum_{k=0}^{\infty} (Dz^{-2})^k \frac{\Gamma(2 - \frac{2}{\alpha}(1+j) + 2k)}{\Gamma(-j + \alpha k)} \end{aligned}$$

$$= Dz^{-4+\frac{2}{\alpha}(1+j)} \sum_{k=0}^{\infty} (Dz^{-2})^k \frac{\Gamma(4 - \frac{2}{\alpha}(1+j) + 2k)}{\Gamma(\alpha - j + \alpha k)}$$

■

On comparant cette relation avec (2.31) on obtient l'expression de notre théorème 3 finalement on considère le cas des nombres naturels $\alpha > 2 = n \in \mathbb{N}$ on utilise exactement la même méthode de théorème 3 on à :

Théorème 2.5 [29]

La solution auto-similaire d'une EDPF ($2 < n \in \mathbb{N}$),

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = Du_{xx}, \quad t > 0, x > 0, D > 0.. \quad (z = x/t^{n/2}).$$

$$v(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j v_j(z), c_j \in \mathbb{R} \quad n \leq j \leq n-1 \quad (2.32)$$

$$v_j(z) = z^{-2+\frac{2}{n}(1+j)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1), (2 - \frac{2}{n}(1+j), 2) \\ (n-j, n) \end{matrix} ; Dz^{-2} \right] \quad 0 \leq j \leq n-2.$$

Remarques 2.5 Dans le cas $\alpha = n = 2$ on peut utiliser les résultats du théorème 2.4 pour $z > \sqrt{D}$ on à :

$$\begin{aligned} v_1(z) &= 1 \\ v_2(z) &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Dz^{-2})^k (2k)!}{\Gamma(2+2k)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{D}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Dz^{-1})^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{D}} \ln \frac{z - \sqrt{D}}{z + \sqrt{D}}. \end{aligned}$$

De cette relation avec la remarque on obtient la solution auto-similaire de l'équation des ondes

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right) = c_1 + c_2 \ln \left| \frac{x - \sqrt{Dt}}{x + \sqrt{Dt}} \right|$$

Chapitre 3

Solutions auto-similaires de problème aux limites sur \mathbb{R}^+ pour l'équation de diffusion fractionnaire :

Dans ce chapitre on va étudier les solutions invariantes par échelle de problème aux limites pour équation de diffusion fractionnaire d'ordre ($0 < \alpha \leq 2$) (voir [20]) suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = Du_{xx}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad D > 0 \quad (3.1)$$

en utilisant la méthode d'auto-similarité et la transformation de Laplace, la solution est donnée dans les termes de fonction de Wright dans le cas ($0 < \alpha < 1$) et dans les termes de fonction de Wright généralisée dans le cas ($1 < \alpha < 2$). L'équation réduite est donnée dans les termes de l'opérateur différentiel d'Erdelyi-Kober de type de Caputo modifié.

$u = u(x, t)$ et $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ est la dérivée au sens de Caputo est donnée sous forme :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} & \text{si } \alpha = n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau, & n-1 < \alpha < n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous référons à l'équation 3.1, l'équation de diffusion et l'équation d'onde dans les

cas ($0 < \alpha \leq 1$) et ($1 < \alpha \leq 2$), respectivement. La différence entre les deux cas est la formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u(x, t) \doteq s^\alpha \tilde{u}(x, s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} \frac{d^k}{dt^k} u(x, t)|_{t=0+}, \quad (3.3)$$

par conséquent les conditions aux limites de problème aux limites pour l'équation 3.1 admet la forme :

si $0 < \alpha \leq 1$

$$u(x, 0+) = u_0(x), \quad x > 0, \quad (3.4)$$

$$u(0+, t) = v_0(t), \quad u(+\infty, t) = v_1(t), \quad t > 0 \quad (3.5)$$

$1 < \alpha \leq 2$

$$u(x, 0+) = u_0(x), \quad u'(x, 0+) = u_1(x) \quad x > 0, \quad (3.6)$$

$$u(0+, t) = v_0(t), \quad u(+\infty, t) = v_1(t), \quad t > 0 \quad (3.7)$$

et le condition de compatibilité

$$u_0(+\infty) = v_1(0) \quad (3.8)$$

3.1 Application de la méthode d'auto-similarité sur le problème aux limites pour l'équation de diffusion fractionnaire

Dans ce partie (voir[21]) on va utiliser la méthode de similarité pour déterminer la solution invariante par échelle des problèmes aux limites $\{(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)\}$ et $\{(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)\}$. Premièrement, on trouve le groupe de transformation

par échelle de l'équation (3.1) puis, on détermine la forme invariante par échelle des conditions initiales et les conditions aux limites. On résoudre les problèmes aux limites obtenus en utilisant la transformation de Laplace dans les termes de fonction de Wright et fonction de Wright généralisée.

On trouve une équation integro-différentielle en la fonction auxiliaire $F(z, \alpha/2)$ avec $z = xt^{-\alpha/2}$.

3.1.1 Les propriétés d'auto-similarité

Dans le cas ($\alpha = 1$, équation de diffusion) et ($\alpha = 2$, équation d'onde) on a vu déjà les solutions auto-similaires dans cets cas, alors, on restrict notre discussion dans le cas $0 < \alpha < 2$ avec $\alpha \neq 1$.

Soit G un paramètre de groupe des transformation par échelle de (3.1), sous forme $G \circ (x, t, u) = (\lambda x, \lambda^b t, \lambda^c u)$,

se qui implique que si $u = f(x, t)$ est solution de (3.1) alors, la fonction $\bar{u} = \lambda^c f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-b}t)$, alors on a ($\bar{x} = \lambda^{-1}x, \bar{t} = \lambda^{-b}t$)

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \lambda^{c-2} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2}$$

et pour $n - 1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \tau^n} d\tau, \\ &= \frac{\lambda^{c-\alpha b}}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (\bar{t} - \bar{\tau})^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n f(\bar{x}, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}^n} d\bar{\tau} = \lambda^{c-\alpha b} \frac{\partial^\alpha f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^\alpha}. \end{aligned}$$

Utilisant les résultats obtenus on trouve :

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \lambda^{c-\alpha b} \frac{\partial^\alpha f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^\alpha} - D \lambda^{c-2} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2},$$

ce qui implique que si la fonction $u = f(x, t)$ est une solution de (3.1), alors, \bar{u} est aussi une solution de (3.1) si et seulement si

$$\alpha b = 1 \tag{3.9}$$

Théorème 3.1 [20] *L'invariant de groupe de transformation par échelle $G_0(x, t, u) = (\lambda x, \lambda^{2/\alpha} t, \lambda^c u)$ pour l'équation (3.1) est donné par l'expression suivante :*

$$z = xt^{-\alpha/2}, \quad v = t^{-\gamma} u \quad (3.10)$$

avec $\gamma = c\alpha/2$.

Maintenant, on recherche de la forme invariante par l'échelle des conditions initiales et les conditions aux limites de problème aux limites .

I. Le cas $0 < \alpha < 1$:

Soit $u = f(x, t)$ Solution de problème $\{(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)\}$. il faut que les fonctions $\bar{u} = \lambda^{2\gamma/\alpha} f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2/\alpha}t)$, $\lambda > 0$, soient aussi des solutions de cet problème. Alors,

$$\bar{u}(x, t) |_{t \rightarrow 0^+} = u_0(x), \quad x > 0,$$

mais on a aussi

$$\bar{u}(x, t) |_{t \rightarrow 0^+} = \lambda^{2\gamma/\alpha} f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2/\alpha}t) |_{t \rightarrow 0^+} = \lambda^{2\gamma/\alpha} u_0(\lambda^{-1}x).$$

Cettes relations impliquent que

$$\lambda^{2\gamma/\alpha} u_0(\lambda^{-1}x) = u_0(x).$$

on pose $\lambda = x$ on arrive à

$$u_0(x) = u_0(1)x^{2\gamma/\alpha} = c_1 x^{2\gamma/\alpha}, c_1 \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

et on a pour les conditions aux limites (3.5),

$$v_0(t) = t^\gamma v_0(1) = c_3 t^\gamma, \quad v_1(t) = t^\gamma v_1(1) = c_4 t^\gamma, \quad (3.12)$$

avec c_3, c_4 des constantes,

comparant la condition de compatibilité (3.8) avec les relations (3.11), (3.12), on

trouve deux possibilités

$$\gamma \neq 0, \quad c_1 = c_4 = 0, \quad (3.13)$$

$$\gamma = 0, \quad u_0(x) = c_1 = c_4 = v_1(t), \quad x > 0, t > 0, \quad (3.14)$$

cette deux relations avec (3.11), (3.12) nous donne la forme invariante par l'échelle de les conditions initiales et les conditions aux limites de problème aux limites pour l'équation (3.1).

II. Le cas $1 < \alpha < 2$:

Du les relations (3.11) et (3.12) et la restrictions (3.13) et (3.14) on déduit les autres conditions initiales invariantes par l'échelle, alors, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = u_1(x)$$

et ($\bar{t} = \lambda^{-2/\alpha} t$)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial t} \lambda^{-2\gamma/\alpha} f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2/\alpha}t) \\ &= \lambda^{2\gamma/\alpha - 2/\alpha} \lim_{\bar{t} \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} f(\lambda^{-1}x, \bar{t}) = \lambda^{2\gamma/\alpha - 2/\alpha} u_1(\lambda^{-1}x). \end{aligned}$$

Du cettess deux relations on a :

$$u_1(x) = \lambda^{2\gamma/\alpha - 2/\alpha} u_1(\lambda^{-1}x).$$

En pose $\lambda = x$, alors :

$$u_1(x) = u_1(1)x^{(2/\alpha)(\gamma-1)} = c_2 x^{(2/\alpha)(\gamma-1)}, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Combinant cette formule avec les relations (3.11), (3.12) et restrictions (3.13), (3.14), on obtient la forme invariante par l'échelle des conditions initiales et les conditions aux limites de le problème aux limites $\{(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)\}$.

3.2 Recherche de la solution invariante par échelle

Utilisant la méthode de transformation de Laplace on trouve la forme exacte de solution auto-similaire de problème aux limites $\{(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)\}$ et $\{(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)\}$ (voir[20]). Comme nous avons vu que les solutions sont existées seulement pour les conditions initiales et les conditions aux limites de la forme (3.11), (3.12), (3.15) avec la restriction (3.13), (3.14). Maintenant on considère cettes cas, combinant les relations (3.13) et (3.14) avec le cas **I** et le cas **II**.

I. $0 < \alpha < 1$,

les conditions initiales et les conditions aux limites (3.4), (3.5) sont données sous forme les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, 0+) &= u_0(x) = 0, & x > 0, \\ u(0+, t) &= v_0(t) = c_3 t^\gamma, & u(+\infty, t) = v_1(t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

dans ce cas on utilise la formule de solution de problème aux limites $\{(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)\}$ citée dans [5], par mainardi qui est sous forme :

$$u(x, t) = \int_0^t G_s(x, t - \tau; 2/\alpha) v_0(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

ou $G_s(x, t - \tau; 2/\alpha)$ est la fonction de Green, elle est donnée par :

$$G_s(x, t - \tau; 2/\alpha) = F(z/\sqrt{D}; \alpha/2)/t. \quad (3.17)$$

Ici $z = xt^{-\alpha/2}$ c'est le variable invariant par l'échelle (3.10) pour l'équation (3.1) et la fonction auxilliaire $F(z; \beta)$ est une cas particulier de fonction de Wright

$$F(z; \beta) = W_{-\beta, 0}(-z). \quad (3.18)$$

L'intégrale de (3.16) avec, $v_0(\tau)=c_3\tau^\gamma$ est convergent, si $\gamma > -1$. Pour obtenir leur

valeur on le considère comme une convolution de Laplace des fonctions

$$f(t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{D}}t^{-\alpha/2}; \alpha/2\right)/t \quad \text{et} \quad g(t) = c_3\tau^\gamma.$$

Combinant la transformée de Laplace pair

$$F(t^{-\beta}; \beta)/t \div \exp(-s^\beta), \quad 0 < \beta < 1, \quad (*)$$

avec l'expression

$$g(t) \div c_3\Gamma(1 + \gamma)s^{-1-\gamma},$$

on arrive à la transformée de Laplace de la solution $u(x,t)$:

$$u(x,t) \div c_3\Gamma(1 + \gamma)s^{-1-\gamma}e^{(-x/\sqrt{D})s^{\alpha/2}}.$$

On a $\alpha/2 > 0$, on transforme le contour d'intégration dans la formule inverse de Laplace complexe vers (Hankel path) H_a on trouve

$$u(x,t) \div c_3\Gamma(1 + \gamma)\frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{st} s^{-1-\gamma} e^{(-x/\sqrt{D})s^{\alpha/2}} ds.$$

Comparant cette formule avec (voir[20])

$$W_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \exp\{u + zu^{-\rho}\} u^{-\mu} du, \quad \rho > -1, \quad (3.19)$$

on obtient la solution auto-similaire de problème {(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)} sous forme :

$$u(x,t) = c_3\Gamma(1 + \gamma)t^\gamma W_{-\alpha/2, 1+\gamma}\left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}}\right), \quad \gamma > -1.$$

I₂. $0 < \alpha < 1$ les conditions initiales et les conditions aux limites (3.4), (3.5) sont données comme :

$$\begin{aligned} u(x, 0+) &= u_0(x) = 0, & x > 0, \\ u(0+, t) &= v_0(t) = c_3, & u(+\infty, t) = v_1(t) = c_1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas on applique la transformation de Laplace sur l'équation (3.1) et on utilise la formule (3.3), on trouve la transformée de Laplace de la solution $\tilde{u}(x, t)$ de problème aux limites qui satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante (voir[20]) :

$$s^\alpha \tilde{u}(x, s) = D \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, s) + c_1 s^{\alpha-1} \quad (3.20)$$

avec les conditions aux limites :

$$\tilde{u}(0+, s) = c_3/s, \quad \tilde{u}(+\infty, s) = c_1/s. \quad (3.21)$$

La solution de problème (3.20), (3.21) admet la forme :

$$\tilde{u}(x, s) = \frac{c_3 - c_1}{s} e^{(-x/\sqrt{D})s^{\alpha/2}} + \frac{c_1}{s}.$$

On applique la transformation inverse de Laplace , et on utilise (3.19) on trouve :

$$u(x, t) = (c_3 - c_1) W_{-\alpha/2, 1+\gamma} \left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}} \right) + c_1.$$

Les résultats précédents sont déjà démontrés le théorème suivant :

Théorème 3.2 [20] *Les solutions auto-similaire de problème aux limites {(3.1), (3.4), (3.5), (3.8)} pour l'équation de diffusion fractionnaire avec les transformations invariants par l'échelle $(\lambda x, \lambda^{2/\alpha} t, \lambda^{2\gamma/\alpha} u)$ admet la forme :*

$$u(x, t) = c_3 \Gamma(1 + \gamma) t^\gamma W_{-\alpha/2, 1+\gamma} \left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}} \right), \quad (3.22)$$

dans le cas $\gamma \neq 0, \quad \gamma > -1$

et

$$u(x, t) = (c_3 - c_1) W_{-\alpha/2, 1} \left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}} \right) + c_1, \quad (3.23)$$

dans le cas $\gamma = 0$.

La solution auto-similaire de problème {(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)} dans le cas $1 < \alpha < 2$ pour l'équation des ondes fractionnaire est existée si et seulement si les conditions initiales et les conditions aux limites (3.6), (3.7) sont sous forme \mathbf{II}_1

II₂ :

II₁. $\gamma \neq 0$:

$$u(x, 0+) = u_0(x) = 0, \quad u'(x, 0+) = u_1(x) = c_2 x^{(2/\alpha)(\gamma-1)}, \quad x > 0,$$

$$u(0+, t) = v_0(t) = c_3 t^\gamma, \quad u(+\infty, t) = v_1(t) = 0, \quad t > 0,$$

II₂. $\gamma = 0$:

$$u(x, 0+) = u_0(x) = c_1, \quad u'(x, 0+) = u_1(x) = c_2 x^{-(2/\alpha)}, \quad x > 0,$$

$$u(0+, t) = v_0(t) = c_3, \quad u(+\infty, t) = v_1(t) = c_1, \quad t > 0.$$

On résoudre le problème {(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)} dans le cas le plus générale, qui contient les deux cas **II₁, II₂** :

$$u(x, 0+) = u_0(x) = c, \quad u'(x, 0+) = u_1(x) = Bx^\beta, \quad x > 0, \quad (3.24)$$

$$-2 < \beta < 0, \quad \beta \neq -1, \quad x > 0$$

$$u(0+, t) = v_0(t), \quad u(+\infty, t) = v_1(t) = c, \quad t > 0. \quad (3.25)$$

avec c, β sont constantes réels, pour la simplicité on suppose qu'il existe $\tilde{v}_0(s)$ la transformée de Laplace de la fonction $v_0(t)$.

On applique la transformation de Laplace sur l'équation (3.1) et les conditions aux limites (3.25). Utilisant la formule (3.3) on obtient la transformée de Laplace $\tilde{u}(x, s)$ de la solution d'équation différentielle ordinaire [20] :

$$s^\alpha \tilde{u}(x, s) = D \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, s) + cs^{\alpha-1} + Bx^\beta s^{\alpha-2}, \quad (3.26)$$

avec les conditions aux limites :

$$\tilde{u}(0+, s) = v_0(s), \quad \tilde{u}(+\infty, s) = c/s, \quad (3.27)$$

on peut directement vérifier que la fonction :

$$\tilde{u}_p(x, s) = \frac{c}{s} - \frac{B}{D}\Gamma(1 + \beta)x^{2+\beta}s^{\alpha-2}E_{2,3+\beta}(s^\alpha x^2/D), \quad (3.28)$$

est une solution particulière de l'équation (3.26).

La solution générale de l'équation (3.26) admet la forme :

$$\tilde{u}(x, s) = c_1(s)e^{-xs^{\alpha/2}/\sqrt{D}} + c_2(s)e^{xs^{\alpha/2}/\sqrt{D}} + \tilde{u}_p(x, s) \quad (3.29)$$

avec $c_1(s), c_2(s)$ des fonctions arbitraires. On applique la formule asymptotique de Mittag-Liffter [29] on trouve

$$\tilde{u}_p(x, s) = \frac{c}{s} - \frac{B}{D}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}s^{-2-\alpha\beta/2}e^{xs^{\alpha/2}/\sqrt{D}} + O(x^\beta), x \rightarrow +\infty,$$

du les conditions aux limites et la dernière formule on peut prendre la forme des fonctions $c_1(s), c_2(s)$ dans (3.29) :

$$\begin{aligned} c_1(s) &= \tilde{v}_0(s) - \frac{c}{s} - \frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}s^{-2-\alpha\beta/2}, \\ c_2(s) &= \frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}s^{-2-\alpha\beta/2}. \end{aligned}$$

Maintenant, on arrive à la transformée de Laplace $\tilde{u}(x, s)$ de la solution sous forme :

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{u}_1(x, s) + \tilde{u}_2(x, s), \quad (3.30)$$

ou

$$\tilde{u}_1(x, s) = (\tilde{v}_0(s) - \frac{c}{s} - \frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}s^{-2-\alpha\beta/2})e^{-xs^{\alpha/2}/\sqrt{D}} + \frac{c}{s},$$

$$\tilde{u}_2(x, s) = -\frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}s^{-2-\alpha\beta/2}e^{xs^{\alpha/2}/\sqrt{D}} - \frac{B}{D}\Gamma(1 + \beta)x^{2+\beta}s^{\alpha-2}E_{2,3+\beta}(s^\alpha x^2/D).$$

Pour obtenir $u_1(x, t)$ du $\tilde{u}_1(x, s)$ on applique la convolution de Laplace et les

mêmes considération dans les cas \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 on trouve

$$u_1(x, t) = \int_0^t G_s(x, t - \tau; \alpha/2)v_0(\tau)d\tau - cW_{-\alpha/2,1}\left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}}\right) - \frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}t^{1+\alpha\beta/2}W_{-\alpha/2,2+\alpha\beta/2}\left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}}\right) + c, \quad (3.31)$$

pour trouver $u_2(x, t)$ on applique la transformée inverse de $\tilde{u}_2(x, s)$, on utilise la formule asymptotique de la fonction de Mittag-Liffter [13] on obtient :

$$\tilde{u}_2(x, s) = O(s^{-2}), \quad |s| \rightarrow \infty, \quad |\arg(s)| < \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Du cette formule on a la fonction $\tilde{u}_2(x, s)$ est analytique dans le plan complexe s^- avec la coupe à longue de le semi-axe réel négative nous guide à transformer le contour du la formule invèrse de Laplace complexe vers le contour $\gamma(\varepsilon; \varphi)$, ($0 < \varepsilon, \pi/2 < \varphi < (2/\alpha)\pi/2$). (2.8), alors on a :

$$u_2(x, t) = \int_{\gamma(\varepsilon; \varphi)} e^{ts}\tilde{u}_2(x, s)ds$$

on utilise la relation :

$$W_{\rho, \mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} \exp\{u + zu^{-\rho}\}u^{-\mu}du, \rho > -1$$

avec le contour $\gamma(\varepsilon; \varphi)$, ($0 < \varepsilon, \pi/2 < \varphi < (2/\alpha)\pi/2$) au lieu de (Hankel path) et la représentation (2.8) on obtient :

$$u_2(x, t) = \frac{B}{2}\Gamma(1 + \beta)D^{\beta/2}t^{1+\alpha\beta/2}W_{-\alpha/2,2+\alpha\beta/2}\left(\frac{-xt^{-\alpha/2}}{\sqrt{D}}\right) - \frac{B}{D}\Gamma(1 + \beta)x^{\beta+2}t^{1-\alpha}W_{(-\alpha,2-\alpha),(2,3+\beta)}\left(\frac{x^2t^{-\alpha}}{D}\right). \quad (3.32)$$

Comme une conséquente, on trouve la solution de problème {(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)}avec les conditions initiales et les conditions aux limites (3.24), (3.25) sous forme :

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

ce qui prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3 [20] La solution auto-similaire de problème de aux limites {(3.1), (3.6), (3.7), (3.8)} pour l'équation des ondes fractionnaire avec la transformation par l'échelle $(\lambda x, \lambda^{2/\alpha} t, \lambda^{2\gamma/\alpha} u)$ admet la forme :

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \left(c_3 - \frac{c_2 D^{(\gamma-1)/\alpha}}{2} \Gamma(1 + 2(\gamma - 1)/\alpha) \right) t^\gamma W_{-\alpha/2, 1+\gamma} \left(\frac{-z}{\sqrt{D}} \right) \\
& + c_2 \Gamma(1 + 2(\gamma - 1)/\alpha) t^\gamma \left(\frac{D^{(\gamma-1)/\alpha}}{2} W_{-\alpha/2, 1+\gamma} \left(\frac{z}{\sqrt{D}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{z^{2+2(\gamma-1)/\alpha}}{D} W_{(-\alpha, 2-\alpha), (2, 3+2(\gamma-1)/\alpha)} \left(\frac{z^2}{D} \right) \right).
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans le cas $1-\alpha < \gamma < 1$, $\gamma \neq 1 - \alpha/2$, $\gamma \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & (c_3 - c_1 - c_2 - \Gamma(1 - 2/\alpha) D^{-1/\alpha}/2) W_{-\alpha/2, 1} \left(\frac{-z}{\sqrt{D}} \right) + c_1 \\
& + c_2 \Gamma(1 - 2/\alpha) \left(\frac{D^{-1/\alpha}}{2} W_{-\alpha/2, 1} \left(\frac{z}{\sqrt{D}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{z^{2-2/\alpha}}{D} W_{(-\alpha, 2-\alpha), (2, 3-2/\alpha)} \left(\frac{z^2}{D} \right) \right).
\end{aligned} \quad (3.34)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

3.2.1 solution invariant par échelle de l'équation

la solution auto-similaire de l'équation (3.1) est donnée sous forme [20] :

$$u(x, t) = t^\gamma v(z), \quad z = xt^{-\alpha/2}. \quad (3.35)$$

La substitution (3.35) réduit l'équation intégr-différentielle partielle(3.1) à une équation intégr-différentielle ordinaire avec la fonction inconnu $v(z)$.

Nous allons calculer la dérivée u_{xx} et la dérivée $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$, $\alpha > 0$ dans les termes de la dérivée de v ,

on trouve

$$\begin{aligned}
t^{\gamma-\alpha} (p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z) &= D t^{-\gamma\alpha} v''(z), \\
(p_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} v)(z) &= D v''(z).
\end{aligned} \quad (3.36)$$

si $\alpha = 1$

$$Dv''(z) + 2zv'(z) - \gamma v(z) = 0. \quad (3.37)$$

si $\alpha = 2$

$$(z^2 - D)v''(z) - 2(\gamma - 1)zv'(z) + \gamma(\gamma - 1)v(z) = 0 \quad (3.38)$$

les théorèmes précédents donnent la solution auto-similaire dans le cas générale $0 < \alpha < 2$.dans les cas particuliers ($\gamma = 0, c_1 = 0, c_3 = 1, 0 < \alpha < 1$) et ($\gamma = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1, 1 < \alpha < 2$) la solution de l'équation (3.1) admet la forme [20] :

$$v(y) = W_{-\alpha/2,1}(-z/\sqrt{D}) = \int_0^t G(x, t - \tau; \alpha/2)d\tau, \quad (3.39)$$

ou la fonction de Green est donnée par (3.17) dans les termes de la fonction auxilliaire $F(z; \alpha/2), z = xt^{-\alpha/2}$.

La différentiation de (3.39) donne :

$$-\frac{\alpha}{2}zv'(z) = F(z; \alpha/2). \quad (3.40)$$

$$v'(z) = -\frac{2}{\alpha}z^{-1}F(z; \alpha/2).$$

Dans le cas $0 < \alpha < 1$

$$(K_{2/\alpha}^{0,1-\alpha}F)(z) = -\frac{2}{\alpha} \frac{d}{dz}(z^{-1}F(z; \alpha/2)).$$

Dans le cas $1 < \alpha < 2$ on obtient une équation très difficile :

$$(K_{2/\alpha}^{-1,2-\alpha}(1 - \frac{\alpha}{2}u \frac{d}{du}))(z) = -\frac{2}{\alpha} \frac{d}{dz}(z^{-1}F(z; \alpha/2)).$$

Chapitre 4

Solutions auto-similaires de problème aux frontières mobiles pour l'équation de diffusion fractionnaire :

Dans ce chapitre (en se referant à [25]), nous allons chercher :

La solution auto-similaire de l'équation de diffusion d'ordre fractionnaire suivant :

$${}_0^c D_t^\alpha U(X, T) = d_0 D_X^\beta U(X, T) \quad 0 < \alpha \leq \beta \leq 2.$$

avec des conditions aux limites mobiles.

La dérivée de Caputo par apport à t et deux types des dérivées fractionnaire par apport à x Sont considérés à la résolution.

Et nous allons donner le variable auto-similaire et la forme des solutions correspondant à les conditions aux limites mobile.

Une comparaison entre les solutions correspondantes aux deux types des dérivées fractionnaire.

4.0.2 Recherche de la solution invariante par l'échelle de l'équation de diffusion fractionnaire

L'équation de diffusion fractionnaire est définie par :

$${}_0^c D_t^\alpha U(X, T) = d_0 D_X^\beta U(X, T) \quad 0 < \alpha \leq \beta \leq 2. \quad (4.1)$$

tel que ${}_0^c D_T^\alpha$ est la dérivée de caputo et D_X^β la dérivée par rapport à x , d et la coefficient diffusive.

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont donnée par :

$$U(0, T) = 0, \quad (4.2)$$

$$U(s(T), T) = U_s, \quad (4.3)$$

$$(U_0 - U_s) {}_0^c D_T^\alpha s(T) = d_0 D_X^{\beta-1} U(X, t) \Big|_{X=s(T)}, \quad (4.4)$$

$$s(0) = 0, \quad (4.5)$$

ou U_0 et U_s sont la concentration initiale de la solution distribue dans la matrice polymère à la solubilité de solution, (4.3) et la concentration de la solution dans le front de diffusion, respectivement, $s(t)$ est la position de front de diffusion qui transport par apport au temps (4.4) est le condition de conservation de masse généralisée, et (4.5) la condition initiale de $s(t)$.

On note par R l'échelle de la transformation,

$$x = \frac{X}{R}, \quad t = \left(\frac{d}{R^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} T, \quad u = \frac{U}{U_s}, \quad S(t) = \frac{s}{R},$$

on peut obtenir l'équation dominante et les conditions initiales et les conditions aux limites dans un forme non-dimensionnelle :

$${}_0^c D_t^\alpha u(x, t) = {}_0 D_x^\beta u(x, t), \quad (0 \leq x \leq s(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 < \beta \leq 2) \quad (4.6)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (4.7)$$

$$u(s(t), t) = 1, \quad (4.8)$$

$$\eta_0^c D_t^\alpha s(t) =_0 D_t^{\beta-1} u(x, t) \Big|_{x=s(t)}, \quad (4.9)$$

$$s(0) = 0, \quad (4.10)$$

ou $\eta = \frac{U_0 - U_s}{U_s}$ est une constante plus large de 0.

Du les résultats [5] on peut voir que dans un forme fermée il ya quelques solutions pour le problème aux limites.

Avec l'aide de méthode de groupe liée [29], on peut déterminer le variable de similarité z et l'équation satisfait par les solutions auto-similaires.

Utilisant la définition concèrnant de la méthode de groupe liée [29], on a le théorème suivant :

Théorème 4.1 [29] *Les transformations de similarité de l'équation (4.6), (4.10) sont invariant et données par :*

$$z = x/t^{-\alpha/\beta}, \quad u(x, t) = v(z) \quad \text{et} \quad s(t) = pt^{\alpha/\beta}, \quad (4.11)$$

p est un constant on va le déterminer.

Preuve. On pose :

$$\bar{x} = \lambda^a x, \quad \bar{t} = \lambda^b t, \quad \bar{u} = \lambda^c u, \quad \bar{s} = \lambda^d s, \quad (4.12)$$

et après quelques calculassions on à les résultats suivants :

$${}_0^c D_t^\alpha u(x, t) = \lambda^{b\alpha - c} {}_0^c D_{\bar{t}}^\alpha \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.13)$$

$${}^{RL}D_x^\beta u(x, t) = \lambda^{\beta a - c} {}^{RL}D_{\bar{x}}^\beta \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.14)$$

$${}_0^c D_x^\beta u(x, t) = \lambda^{\beta a - c} {}_0^c D_{\bar{x}}^\beta \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}). \quad (4.15)$$

par conséquent les conditions aux limites (4.7),(4.10) sont changées à :

$$\lambda^c \bar{u}(\lambda^{-d} \bar{s}, \lambda^{-b} \bar{t}) = 1,$$

$$\eta \lambda_0^{b\alpha - dc} D_{\bar{t}}^\alpha \bar{s} = \lambda_0^{-c + (\beta - 1)a} D_{\bar{x}}^{\beta - 1} \bar{u}(\bar{s}, \bar{t}).$$

Cette relations impliquent que pour conserver l'invariant des transformations par l'échelle il faut que les relations suivantes soient réaliser :

$$\left\{ \begin{array}{l} b\alpha - c = a\beta - c, \\ c = 0, \\ c + (\beta - 1)a = -d + b\alpha, \\ a = d. \end{array} \right. , \quad (4.16)$$

du relation (4.16) on obtient $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Considérons la méthode de groupe liée, le variable de similarité peut être obtenu.

On note que :

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = 1, \quad c. - \grave{a} - d., \quad \lambda^c \bar{u}(\lambda^d s, \lambda^b t) = 1$$

soit $\lambda^c = t^{-1}$, nous avons $u(s(t)t^{-\frac{\alpha}{\beta}}, 1) = 1$ ce qui implique que $s(t) \sim t^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ c.-à-d. $s(t) = pt^{\frac{\alpha}{\beta}}$. ■

Théorème 4.2 [25] La dérivée de Caputo ${}_0^c D_t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) de la fonction $u(x, t) = v(z)$, $z = xt^{-\alpha/\beta}$ est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha v(z) &= t^{-\alpha} (p_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} v(z)) \\ &= t^{-\alpha} K_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} \left(-\frac{\alpha}{\beta} \frac{d}{dz} v(z) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

tel que ${}_p P_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} v(z)$ est l'opérateur d'Erdelyi-Kober et

$$K_{\delta}^{\tau,\alpha} g(h) = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} h^{\delta\tau} \int_y^{\infty} (f^{\delta} - h^{\delta})^{\alpha-1} f^{-\delta(\tau+\alpha-1)} g(f) df, \quad \alpha > 0. \quad (4.18)$$

Preuve. On utilise le nouveau variable $f = x/s^{\alpha/\beta}$ alors, on à :

$$\begin{aligned} {}_c D_t^{\alpha} v(z) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{dv\left(\frac{x}{s^{\alpha/\beta}}\right)}{ds} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\infty}^z \left(t - \left(\frac{x}{f}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{-\alpha} \frac{dv(f)}{df} df \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\infty}^z \left(f^{\frac{\beta}{\alpha}} - z^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{-\alpha} f^{\beta} \frac{dv(f)}{df} df. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'équation (4.19) est exactement l'expression de type de Caputo modifier de l'opérateur d'Erdelyi-Kober ■

Remarque 4.1 Pour que la preuve soit facile on donne une autre forme à la relation(4.17)

$${}_p P_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} v(z) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} \frac{dv\left(zs^{\frac{-\alpha}{\beta}}\right)}{ds} ds. \quad (4.20)$$

Dans cette relation le variable utilisée est $s = \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Théorème 4.3 [25] La forme réduite de l'équation (4.6) est donnée par :

$${}_p P_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} v(z) = {}_0 D_z^{\beta} v(z), \quad (21) \quad (4.21)$$

et les conditions devient :

$$v(0) = 0, \quad v(p) = 1, \quad \eta p \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha\right)} = {}_0 D_z^{\beta-1} v(z) |_{z=p}. \quad (4.22)$$

4.1 La solution invariante par l'échelle du problème

La solution auto-similaire d'équation (4.6) dans quelques cas est donnée comme la dérivée par apport au temps au sense de R-L (voir [9]), la dérivée par apport à x au sense de R-L (voir [29]) et la dérivée par apport au temps au sense de Caputo.

On considère deux cas sont en recherche sont :

le cas 1 la dérivée par apport au temps et la dérivée par apport à x au sense de Caputo,

le cas 2 la dérivée par apport au temps et la dérivée par apport à x au sense de Caputo,et R-L.

Théorème 4.4 [25] Pour le cas 1 la solution auto similaire de l'équation (4.21) est sous forme :

$$v(z) = c_1 z W_{(-\alpha, 1 - \frac{\alpha}{\beta})(\beta, 2)}(z^\beta), \quad (4.23)$$

$$\text{ou } W_{(\mu, a)(\nu, b)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)^k}{\Gamma(a + \mu k) \Gamma(b + \nu k)} \quad \nu, \mu \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}. \quad (4.24)$$

Dans la suite on considère $-1 < \mu < 0$ $\nu > 0$.

Preuve. La convergence de la solution (4.23) est donnée dans [29].

Il ya deux propriétés importants de la dérivée de Caputo dans la preuve sont :

$${}_0^c D_z^\nu z^\mu = \frac{\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma(1 + \mu - \nu)} z^{\mu - \nu}, \quad \mu > 1 + [\nu], \quad (4.25)$$

$${}_0^c D_z^\nu z^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, n < \nu. \quad (4.26)$$

Premièrement on applique l'opérateur ${}_0^c D_z^\beta$ à la solution terme par terme et on utilise les deux propriétés (4.25),(4.26).

$$\begin{aligned} & {}_0^c D_z^\beta \{c_1 z W_{(-\alpha, 1 - \frac{\alpha}{\beta})(\beta, 2)}(z^\beta)\} \\ &= {}_0^c D_z^\beta \left\{ c_1 \frac{z}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{\beta})} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k + 1}}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{\beta} - \alpha k) \Gamma(2 + \beta k)} \right\} \\ &= c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{\beta k + 1 - \beta}}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{\beta} - \alpha k) \Gamma(2 + \beta k - \beta)} \\ &= c_1 z W_{(-\alpha, 1 - \frac{\alpha}{\beta})(\beta, 2)}(z^\beta). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Considérons la définition de la représentation de la série de fonction de Wright généralisée,

$\frac{dv(zs^{-\frac{\alpha}{\beta}})}{ds}$ peut être obtenue sous forme de série,

$$\begin{aligned} \frac{dv(zs^{-\frac{\alpha}{\beta}})}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k+1} s^{-\frac{\alpha}{\beta}(\beta k+1)}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha k)\Gamma(2 + \beta k)} \right] \\ &= c_1 z s^{-1-\frac{\alpha}{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k} s^{-\alpha k}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha k)\Gamma(2 + \beta k)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tout d'abord, on ne peut pas appliquer l'intégrale $\int_0^1 (1-s)^{-\alpha} ds$ terme par terme sur la série (4.28) à cause de la divergence de l'intégrale correspondant.

Dans (voir [29]) la représentation intégrale de la fonction de Wright généralisée est utilisée quand l'opérateur d'Erdelyi -Kober est appliqué sur la et la fonction FOX-H est aussi utilisée comme une étape intermédiaire pour démontrer la convergence de l'intégrale.

Dans notre preuve la représentation de type modifiée de Caputo de l'opérateur d'Erdelyi -Kober (4.20) est Elle est considérée et la fonction FOX-H est utilisée comme dans (voir [29]).

Accord de la définition de fonction FOX-H (voir [1]) la série (4.26) s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k} s^{-\alpha k}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha k)\Gamma(2 + \beta k)} &= H_{2,2}^{1,1} \left[-z^{\beta} s^{-\alpha} \left| \begin{array}{l} (0, 1)(-\frac{\alpha}{\beta}, \alpha) \\ (0, 1)(-1, \beta) \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1 + \varsigma)}{\Gamma(2 + \beta\varsigma)\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\varsigma)} (-z^{\beta} s^{-\alpha})^{\varsigma} d\varsigma, \end{aligned} \quad (4.29)$$

ou L est le contour séparant les pôles de $\Gamma(-\varsigma)$ et $\Gamma(1 + \varsigma)$ c-à-d $\{0, 1, 2, \dots\} = \{-1, -2, \dots\}$.

On choisissons L comme une ligne du $a - i\infty$ vers $a + i\infty$ et $-1 < \alpha < -\frac{1}{\beta}$ est valide.

Alors on a :

$$\begin{aligned} *p_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha} v(z) &= \frac{c_1 z}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1 + \varsigma)}{\Gamma(2 + \beta\varsigma)\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\varsigma)} (-z^{\beta} s^{-\alpha})^{\varsigma} d\varsigma ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Notant que $Re(-\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\varsigma) > 0$ et la définition de fonction Béta [6]

$$\beta(a, b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad Re(a), Re(b) > 0, \quad (4.31)$$

on peut changer l'ordre de l'intégration. Par conséquent (4.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{c_1 z}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1+\varsigma)}{\Gamma(2+\beta\varsigma)\Gamma(-\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\varsigma)} (-z^\beta)^\varsigma \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{-\alpha\varsigma-\frac{\alpha}{\beta}-1} ds d\varsigma \\ = \frac{c_1 z}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1+\varsigma)}{\Gamma(2+\beta\varsigma)\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\varsigma)} (-z^\beta)^\varsigma d\varsigma \\ = c_1 z H_{2,2}^{1,1} \left[-z^\beta \left| \begin{array}{c} (0, 1)(1-\alpha-\frac{\alpha}{\beta}, \alpha) \\ (0, 1)(-1, \beta) \end{array} \right. \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

On prend l'expansion de la fonction FOX-H (voir [26])

$$H_{p,q}^{m,m}(z) = \sum_{h=l}^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^m \Gamma(b_j - B_j \frac{b_h+k}{B_h}) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j + A_j \frac{b_h+k}{B_h})}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j + B_j \frac{b_h+k}{B_h}) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - A_j \frac{b_h+k}{B_h})} \frac{(-1)^k z^{(b_h+k)/B_h}}{k! B_h},$$

(4.32) peut être écrit sous forme :

$$\begin{aligned} c_1 z H_{2,2}^{1,1} \left[-z^\beta \left| \begin{array}{c} (0, 1)(1-\alpha-\frac{\alpha}{\beta}, \alpha) \\ (0, 1)(-1, \beta) \end{array} \right. \right] \\ = c_1 z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1-\alpha-\frac{\alpha}{\beta}-\alpha k)\Gamma(2+\beta k)} \frac{(-1)^k (-z^\beta)^k}{k!} \\ = c_1 z W_{(-\alpha, 1-\frac{\alpha}{\beta}-\alpha)(\beta, 2)}(z^\beta). \end{aligned} \quad (4.33)$$

On comparant (4.33) avec (4.27) on peut obtenir le résultats . ■

Remarque 4.2 Actuellement il n'ya pas une méthode efficace pour résoudre cette problème.

Tout d'abord, il reste deux méthode peuvent être considérer, la première est la méthode de transformation de Mellin utilisée par Wyss [26], cette méthode demande

de résoudre une équation qu'il une travaille difficile. Le deuxième méthode consiste à rechercher la solution sous forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{bk}$.

Considérons les conditions initiales et les conditions aux limites et les propriétés de la dérivée fractionnaire (4.26) .D'abord on, considère la continuité analytique de la fonction Béta pour le plan complexe entier.

Pour obtenir les valeurs d, a_k, b_k et la vérité de convergence et la validité de la série, alors on choisissons le seconde méthode pour simplifie.

Du théorème 4.4 on a :

Théorème 4.5 [25] *Comme dans le cas 2 la solution auto-similaire de l'équation (4.21) est donnée par :*

$$v(z) = c_2 z^{\beta-1} W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)(\beta, \beta)}(z^\beta). \quad (4.34)$$

Preuve. Appliquant l'opérateur ${}^{RL}D_z^\beta$ à la solution (??) terme par terme on a :

$${}^{RL}D_z^\beta \{c_2 z^{\beta-1} W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)(\beta, \beta)}(z^\beta)\} = c_2 z^{\beta-1} W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - 2\alpha)(\beta, \beta)}(z^\beta), \quad (4.35)$$

considérons la définition de la représentation de la fonction de Wright généralisée $\frac{dv(zs^{-\frac{\alpha}{\beta}})}{ds}$ peut être obtenue sous forme d'une série :

$$\begin{aligned} \frac{dv(zs^{-\frac{\alpha}{\beta}})}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k + \beta - 1} s^{-\frac{\alpha}{\beta}(\beta k + \beta - 1)}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha - \alpha k) \Gamma(\beta + \beta k)} \right] \\ &= c_2 z^{\beta-1} s^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\beta k} s^{-\alpha k}}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha - \alpha k) \Gamma(\beta + \beta k)} \\ &= c_2 z^{\beta-1} s^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1} H_{2,2}^{1,1} \left[-z^\beta s^{-\alpha} \left| \begin{array}{l} (0, 1)(-\alpha + \frac{\alpha}{\beta}, \alpha) \\ (0, 1)(1 - \beta, \beta) \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{c_2 z^{\beta-1} s^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1}}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma) \Gamma(1 + \varsigma)}{\Gamma(\beta + \beta \varsigma) \Gamma(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha - \alpha \varsigma)} (-z^\beta s^{-\alpha})^\varsigma d\varsigma. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ou L est le contour qui sépare les pôles de $\Gamma(-\varsigma), \Gamma(1 + \varsigma)$ c.-à-d. $\{0, 1, 2, \dots\}$ et $\{-1, -2, \dots\}$ ici on choisissons L comme une ligne du $b - i\infty$ vers $b + i\infty$ avec le

condition $-1 < b < \frac{1}{\beta} - 1$ est valide , Alors on a :

$$\begin{aligned} {}_0^*P_{\beta/\alpha}^{0,1-\alpha}v(z) &= \frac{c_2 z^{\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\frac{\alpha}{\beta}-\alpha-1} \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1+\varsigma)}{\Gamma(\beta+\beta\varsigma)\Gamma(\frac{\alpha}{\beta}-\alpha-\alpha\varsigma)} (-z^\beta s^{-\alpha})^\varsigma d\varsigma ds. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Notons que $Re(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha - \alpha\varsigma) > 0$ et la définition de fonction *Béta* on peut changer l'ordre de l'intégration.

Par conséquent ,(4.37) devient :

$$\begin{aligned} \frac{c_2 z^{\beta-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1+\varsigma)}{\Gamma(\beta+\beta\varsigma)\Gamma(\frac{\alpha}{\beta}-\alpha-\alpha\varsigma)} (-z^\beta s^{-\alpha})^\varsigma \cdot \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{-\alpha\varsigma+\frac{\alpha}{\beta}-\alpha-1} ds d\varsigma \\ = \frac{c_2 z^{\beta-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-\varsigma)\Gamma(1+\varsigma)}{\Gamma(\beta+\beta\varsigma)\Gamma(1-2\alpha+\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\varsigma)} (-z^\beta)^\varsigma d\varsigma \cdot \beta \\ = c_2 z^{\beta-1} H_{2,2}^{1,1} \left[-z^\beta \left| \begin{array}{c} (0,1)(1-2\alpha+\frac{\alpha}{\beta},\alpha) \\ (0,1)(1-\beta,\beta) \end{array} \right. \right] \\ = c_2 z^{\beta-1} W_{(-\alpha,1+\frac{\alpha}{\beta}-2\alpha)(\beta,\beta)}(z^\beta). \end{aligned} \quad (4.38)$$

On comparant (4.38) avec (4.35) on obtient le résultats. ■

Remarque 4.3 La propriété de la dérivée de R-L utilisée est :

$${}_0^{RL}D_z^\nu z^{\nu-j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, [\nu] + 1. \quad (4.39)$$

Combinant (4.23) avec (4.34) avec les conditions aux limites (4.22),on peut trouver l'équation satisfait par les canstantes c_1, c_2 et p .

Théorème 4.6 [25] Dans le cas 1 on a :

$$\eta p^2 \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta}-\alpha)} W_{(-\alpha,1-\frac{\alpha}{\beta})(\beta,2)}(p^\beta) = p^{2-\beta} W_{(-\alpha,1-\frac{\alpha}{\beta})(\beta,3-\beta)}(p^\beta) \quad (4.40)$$

et

$$c_1 = \frac{1}{p W_{(-\alpha,1-\frac{\alpha}{\beta})(\beta,2)}(p^\beta)}, \quad (4.41)$$

dans le cas 2 on a :

$$\eta p^\beta \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{\beta})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)} W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)(\beta, \beta)}(p^\beta) = W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)(\beta, 1)}(p^\beta) \quad (4.42)$$

et

$$c_2 = \frac{1}{p^{\beta-1} W_{(-\alpha, 1 + \frac{\alpha}{\beta} - \alpha)(\beta, \beta)}(p^\beta)}. \quad (4.43)$$

Table 1 : les valeur de P dans des cas differents.

(α, β)	$\eta = 1.5$		$\eta = 3.5$		$\eta = 7$		$\eta = 10$	
	cas 1	cas 2	cas 1	cas 2	cas 1	cas 2	cas 1	cas 2
(0.75,1.75)	1.0210	0.9350	0.6430	05840	0.4370	0.3950	0.3570	0.3230
(0.5,1.75)	1.0110	0.9300	0.6130	0.5580	0.4100	0.3710	0.3340	0.3020
(1,2)	1.0520	1.0520	0.7240	0.7240	0.5230	0.5230	0.4410	0.4410
(1.1,1.75)	1.0690	0.9660	0.6860	0.6180	0.4700	0.4140	0.3860	0.3480
(1,1.5)	1.0250	0.8790	0.6000	0.5130	0.3830	0.3270	0.3030	0.2590

4.1.1 discussion de la solution :

Dans le cas $\alpha = 1, \beta = 2$ l'équation dominante générée une équation de diffusion ordinaire.

Utilisant la formule de fonction de Gamma $\Gamma(\frac{1}{2} - n) = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!}$, on a

$$z W_{(-\alpha, 1 - \frac{\alpha}{\beta})(\beta, 2)}(p^\beta) = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2}\right).$$

p est un paramètre important pour décrire le caractère du modèle car sa valeur, il indique la vitesse de changement de la limite mobile qui implique la vitesse du processus de diffusion. Les valeurs de p dans différent cas sont énumérées dans le tableau 1.

En comparant la valeur de p correspondant à deux types d'opérateurs fractionnaire, nous pouvons voir que le processus

de diffusion décrit par Caputo est beaucoup plus rapide que celui par la dérivée de Rieman -Liouville.

Cependant, tous les dérivées fractionnaires ne peuvent pas décrire le processus de super-diffusion (ou plus rapide que la diffusion ordinaire).

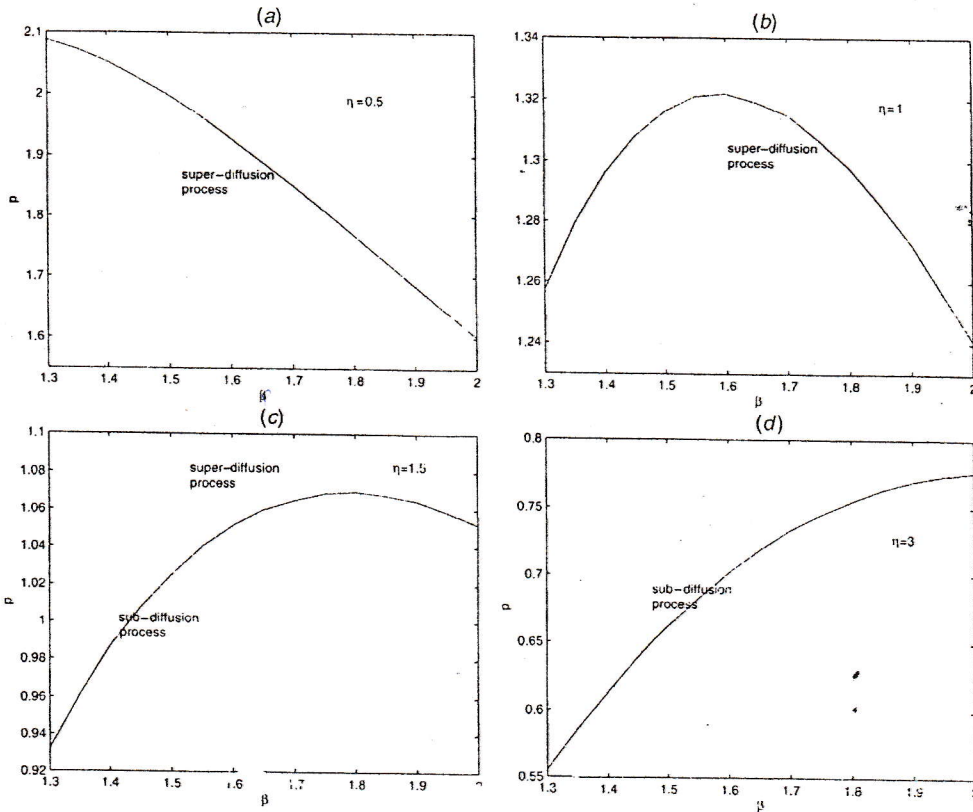


Figure 1. p versus β when the space-fractional derivative is the Caputo one. The bigger p , the faster the diffusion process.

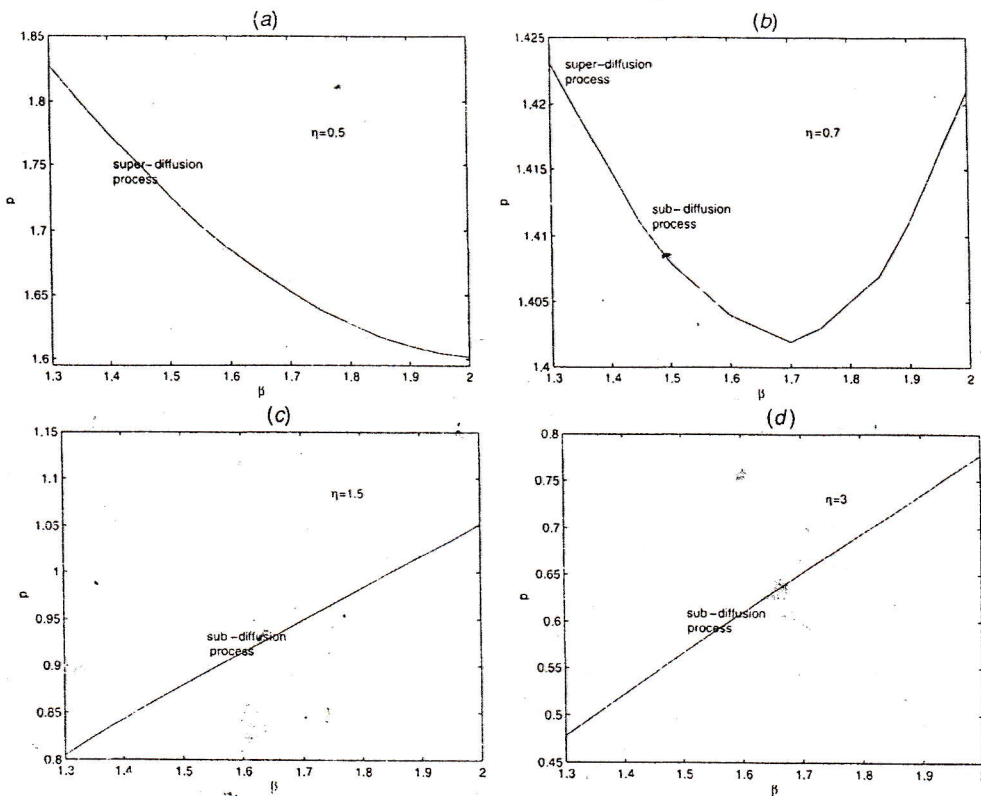


Figure 2. p versus β when the space-fractional derivative is the Riemann-Liouville one. The bigger p , the faster the diffusion process.

Afin de montrer l'influence d'ordre de la dérivée fractionnaire d'espace, nous définissons $\alpha = 1$. À partir des deux figures (1) et (2), nous pouvons voir que, pour un petit η , p est le plus grand dans les cas $\beta < 2$ que dans le cas $\beta = 2$.

Cela signifie que les dérivées de Caputo et de Rieman-Liouville décrivent le processus de super-diffusion.

Dans ce cas, η est plus grand et p est plus petit, c.-à-d. le processus de diffusion est plus lent.

Pour un plus grand η les deux dérivées ne peuvent pas décrire le processus de super-diffusion, alors que, dans certains cas, les deux opérateurs peuvent décrire conditionnellement le processus de super-diffusion.

Les équations de diffusion fractionnaire spatial sont principalement utilisées pour décrire les processus de super-diffusion.

Cependant, avec une analyse brève des solutions, nous avons démontré que les dérivées fractionnaires de Caputo et de Rieman-Liouville ne peuvent pas toujours faire l'affaire.

Par conséquent, lorsqu'on utilise ces deux dérivées pour décrire les diffusions anormales, le chargement initial doit être pris en compte.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons recherché les solutions auto-similaires d'équations différentielles aux dérivées partielle d'ordre fractionnaire temporelle et spatiale selon les valeurs de paramètre fractionnaire α , et β et nous avons trouvé les solutions invariantes par échelle de plusieurs type de problèmes.

Le premier problème abordé de Cauchy pour équations différentielles aux dérivées partielle d'ordre fractionnaire temporelle , ont a démontré l'existence de la solution auto similaire.

Le deuxième problème traité est aux limites pour équations aux dérivées partielle d'ordre fractionnaire temporelle , ont a démontré également l'existence de la solution auto similaire.

enfin le troisième problème étudié est aux frontières mobiles pour l'équation de diffusion fractionnaire de type général, en utilisant les dérivées fractionnaire au sens de Caputo et R-Liouville.

Les solutions trouvées sont données dans les termes de fonction de Wright et Wright généralisée.

Bibliographie

- [1] A M. Mathai, R K . Saxena, The H Function with Applications in Statistics an Other Disciplines (New Delhi :Wiley Eastern Ltd), 1978 .
- [2] A. Yacine, Cours d'Equation Différentielle Fractionnaire, Département de Mathématiques Université de Msila, 2016-2017.
- [3] B. Bland,. The theory of linear Viscoelastisity, Pergamon , Oxford, 1960.
- [4] C. Marck. Elastisità e Dissipazione, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [5] C. Jefry, Free end Moving Boundary Problems, Oxford, Clarendon, 1987.
- [6] D. Ziane, Etude D'existence et de Stabilité de la Solution d'Equation Différentielle Fractionnaire, Université d'Oran 2012.
- [7] E. Bign, Yuri. L, Invariance of a Partial Differential of Fractional Ordre Under The Lie Group of Scaling Transformations, Free univercity of Berlin Animallee 2-6 ,D14195 Berlin.
- [8] E. M. Wright, The generalised Bessel Function of Ordre Greater Than One, Quart. J. Math, Oxford ser. 11 (1940), 36-38.
- [9] E. Buckwar, Y. Luchko, Invariance of Partial Differential Equation of Fractional Order Under the Lie groupe of scaling transformations, J.Math, Appl, Anal, 227 81697, 1998.
- [10] F. M. Fractional Calculus, Some Basic Problème in Continuum and Statical Mechanics, Departement of Physics, University of Bologna, Via Irnerio 46, I-40126, Bologna, Italy.
- [11] G. R, Yuri. L, Mainardi. F, Fractional Calculus and Applied Analysis, Analytical Properties and Application of the Wright Function, Université de Berlin VOL. 2 No 4 (1999) .

- [12] H. M. Srivastava, K. C. Gupta, and S. P. Goyal, "The H-Functions of One and Two Variables with Applications ", South Asian Publ , India , 1982.
- [13] M. M. Djrbashian, Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in Complex Domain, Birkhauser, Basel, 1993.
- [14] N. H Ibragimov (ed), "CRC Handbook of Lie Groupe Analysis of Diffrential Equations", Vol 3 CRC Press ,Boka Raton,1996.
- [15] N. H Ibragimov (ed),"CRC Handbook of Lie Groupe Analysis of Differential Equations", Vol 1 simmetry, Exact solution and conservations lows, Boka Raton, 1996.
- [16] O. I. Marichev, Handbook of Integral Transforms of Highter Transcedental Functions, theory and algorithmic table.Ellis Horwood (1983).
- [17] P. J. Olver, "Applications of Lie Groupes to Differential Equations", Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg ,tokyo, 1986 .
- [18] R. Hadjr, Thèse de Problème aux Limites pour Equation Différentielle Fractionnaire, Université Abou Beker Belkaid,en 2014-2015.
- [19] R. Gorenflo. Yuri luchko. Mainardi, Analytical Properties and Applications of the Wright Function, First Mathematical Institue,Free University of Berlin, Ar-nimalee 3, D-14195 Berlin, Germany.
- [20] R. Gorenflo.Yuri luchko. Mainardi, F 2000 Wright Function as Scale Invariant Solution of the Diffusion-Wave Equation, J, Comp, Appl, Math , 118 175-91.
- [21] R. Gorenflo et al . The Wright Function as Scale Invariant Solution, Journal of Computational and Applied Mathematics, 118, 175-191, 2000.
- [22] S. B. Yakubovich and Yu. F. Luchko, "Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions", Kluwer Acad. Publ .Dordrecht, Bosten, London , 1994.
- [23] S.Blair, G. W. Survey of General and Applied Rheology, Pittman, London, 1994.
- [24] V. Kiryakova, "Generalised Fractional Calculus and Application ", Pitman Research Notes in Math. Vol. 301, longman, Harlow, 1994.
- [25] X. Li⁽¹⁾, M. Xu⁽¹⁾, S.Wang⁽²⁾, Scale-Invariant Solution to Partial Differential Equation of Fractional Order with a Moving Boundary Condition,

⁽¹⁾Institute of Applied Mathematics , School of Mathematics and System Science, Shandong University ,Jinan 250100, People of China,⁽²⁾ Department of Mathematics and Engineering Science,Peking University, Beijing 100871, People's Republic of China, 18 October 2007 .

- [26] W. Wyss, The Fractional Diffusion Equation, J. Math. phys, 27 2782-5, 1986.
- [27] Y. Fujita, Integrodifferential Equation Wich Interpolates the Heat and the Wave Equations , Osaka J . Math . 27 (1990) ,309-321, 797-804 .
- [28] Y. Fujita. Luchko and S. P. Yakubovich, Operational Methode of Solution of Some Classes of Integro-Differential Dquations , Differ, Uraven, 30 (1994).
- [29] Y. Luchko, R. Gorenflo, Scale Invariant Solutions of a Partial Differential Equation of Fractional Order, Fract. Calc, Appl, Anal, 227 81-97, 1998.

ملخص :

تهدف هذه الدراسة الى ايجاد الحل المشابه لمعادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية (زمنية وفضائية) عن طريق معالجة عدة مشاكل من أجل معادلة الانتشار من درجة كسرية منها مشكل كوشي على الأعداد الحقيقية ومشكل حدودي على الأعداد الحقيقية الموجبة ومشكل على حدود متحركة. توصلت الدراسة الى تحويل المعادلة التفاضلية ذات مشتقات جزئية من درجة كسرية إلى معادلة التفاضلية عادية من درجة كسرية بدلالة دالة ورايت (Function wright).

الكلمات المفتاحية : معادلة الانتشار من درجة كسرية -الحل المشابه - دالة ورايت - معادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية

Abstract : .

This study is to find a solution similar to differential equation with partial derivatives (time and space) we determine group of scaling transformations for fractional partial differential equation. For its group-invariant solutions an ordinary differential equation of fractional order with the new independent variable (z) is derived.

The solution of fractional diffusion equation is given in terms of Wright functions.

The derivatives then are the well-known right- and left-hand sided Erdelyi-Kober derivatives depending on α And The solution of fractional diffusion equation is given in terms of the generalized Wright functions.

Key Words: partial differential equation of fractional order, scale invariant solutions, Erdelyi-Kober operators, generalized Wright function .

Résumé : Dans ce travail on a étudié l'existence de solutions auto-similaires Pour l'équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire de diffusion temporelle et spatiale. ont a abordés Trois types de problèmes ,Problème de Cauchy sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^+ , problème aux frontières mobiles ; Cela nous permet de transformer l'EDPF à des EDFs, en termes de fonction de Wright.

Les mots clé : Equation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire , équation de diffusion fractionnaire, équations différentielle d'ordre fractionnaire, solutions auto similaire.