



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse numérique et mathématique

Par

CHEHABA Nadia

Sujet

**Etude d'un modèle mathématique de la déformation
d'une membrane élastique**

Devant le jury :

Mostefa Nadir

Prof.

Univ. de M'sila

Président

Lakehali Blkacem

Prof.

Univ. de M'sila

Encadreur

Khirani Amina

Mcb.

Univ. de M'sila

Examinatrice

Promotion : 2018 / 2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۱۴۳۸ هـ

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Belkacem LAKEHALI** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de*

lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je tiens à remercier les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mon travail

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille en particulier mes parents, mes frères et mes soeurs sans oublier mes chères amies pour leur soutien tout au long de mes études.

Dédicaces

je dédie ce modeste travail.

A mes parents ma mère et mon père

A mes seours(Fatima, Soumia et Chahera)

A mes frères(Bachir Abdo et Mourad)

A toute la famille(chehaba).

A toute mes amies (Maria Meriem Bouchra Rahima Fayza

Alia Manel Widad et Soumia)

Sans oublier mon chère ami qui m'a toujours motivé et m'encouragé

en fin je dédie ce mémoire à

tous ceux qui me sont chers

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	2
1.1 Espaces normés	2
1.2 Suites de convergence	3
1.3 Suites de Cauchy	3
2 Rappels sur les Équations aux Dérivées Partielles	4
2.1 Introduction	4
2.2 Classification et caractéristique des <i>EDP</i> linéaires d'ordres 2	4
2.3 <i>EDP</i> elliptiques	5
3 Méthode des différence finies	7
3.1 Position du problème	7
3.1.1 Discrétisation du problème cas du problème 1D	8
3.1.2 Discrétisation du problème Cas du problème 2D	11
3.1.3 Erreur de troncature	15
3.2 Estimation de l'erreur	16
4 Application	17
4.1 La modélisation physique	18
4.2 Résolution mathématique	20
4.3 Modélisation numérique	26

Conclusion	28
Bibliographie	29

Introduction

Les modèles mathématiques des sciences et des techniques se présentent souvent sous la forme des équations aux dérivées partielles. Des conditions aux limites aux limites sont généralement requises pour compléter le modèle. Pour tirer une information pertinente sur le processus physique modélisé, il est essentiel de trouver la fonction satisfaisant l'une des équations aux dérivées partielles. Le problème dit: problème continu, est généralement, très difficile voire impossible. Alors, on fait recours aux méthodes numériques, par exemple Différence Finies, éléments finis,etc.

L'idée de base consiste à ne chercher que la valeur des fonctions inconnues en un grand nombre de points, il s'agit de la discrétisation au lieu de résoudre un problème continu. On résout un grand système d'équations algébriques qu'on appelle le problème discret.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Espaces normés

On appelle une norme sur l'espace $C[a, b]$ toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur $C[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^+

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \|x\|\end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in C[a, b], \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in C[a, b]$

tout espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, on dit que c'est un espace vectoriel normé
il existe plusieurs normes, mais la norme que je vais l'utiliser est:

Définition 1.1.1 *en doit donner la définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

car $[a, b]$ compact

Notation 1.1.1 Une norme naturelle sur l'espace des fonctions continues définit par

$$C([a, b]) = \{f : f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} / f: \text{continue}\}$$

Exemple 1.1.1 l'uniforme (ou sup-norme), qui est défini par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ qui vérifient quatre conditions:

- (i) $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \geq 0$
- (ii) $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0$ si et seulement si $f(x) = g(x)$
- (iii) $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a, b]} g(x) - f(x)$.
- (iv) $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)|$

On calcule l'espace entre deux fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ où $[a, b] = [0, 1]$.

on a $|h(x)| = |f(x) - g(x)| = |x - x^2|$, par le graphique de $|h(x)|$ donc $\sup_{x \in [0, 1]} |x - x^2| = \frac{1}{4}$

$(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vecteur normé.

1.2 Suites de convergence

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est convergence si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n > N : |u_n - l| \leq \varepsilon$$

1.3 Suites de Cauchy

On dit qu'une suite numérique u_n est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p, q, \forall N \geq p, q, \text{ on a } \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3.1 Toute suite converge est une suite de cauchy mais l'inverse est faux si toute cauchy est converge on dit alors que l'espace $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Dans ce mémoire, notre étude sera dans l'espace des fonctions continues $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

L'espace $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donc $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach pour voir plus de détails voir [1].

Chapitre 2

Rappels sur les Équations aux Dérivées Partielles

2.1 Introduction

Une équations aux dérivées partielles (e.d.p.) est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées partielles de cette fonction.

dans ce mémoire, on va étudier les EDP linéaires d'ordres 2.

2.2 Classification et caractéristique des *EDP* linéaires d'ordres 2

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (*EDP*) d'ordre 2 à deux variables (x et y) sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + d \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + e \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + fu = 0 \quad (2.2.1)$$

avec a, b, c, d, e, f des réels donnés .

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé a, b et c . On calcule le déterminant définit par:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

il y a trois formes de caractéristiques :

1. hyperboliques:

on dit que e *EDP* hyperbolique sur Ω si

$$\forall (x, y) \in \Omega \implies \Delta = b^2 - 4ac > 0.$$

2. paraboliques:

on dit que *EDP* parabolique sur Ω si

$$\forall (x, y) \in \Omega \implies \Delta = b^2 - 4ac = 0.$$

3. elliptiques:

on dit que *EDP* elliptique sur Ω si

$$\forall (x, y) \in \Omega \implies \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur *EDP* elliptiques.

2.3 EDP elliptiques

Les EDP elliptiques sont associées aux problèmes stationnaires. Les conditions initiales n'ont donc pas la même interprétation (elles deviennent des conditions limites). Une EDP elliptique type est l'équation de poisson :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{2.3.1}$$

Cette équation gouverne les flux incompressibles à potentiel.

Exemple 2.3.1 soit $x, y \in [0, 1]$ et les conditions aux bords suivent:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(x, 1) = \sin(x) e^{-\pi} \\ u(x, y) = u(1, y) = 0 \end{cases}$$

La solution est:

$$u(x, y) = \sin(\pi x) e^{-\pi y}$$

Du point de vue de la modélisation, En mécanique du solide, pour décrire la position d'équilibre d'une membrane élastique (en dimension $n = 2$), u désigne le déplacement f un champs de forces et les conditions aux limites décrivent un déplacement imposé sur la frontière du domaine $\partial\Omega$.

La principale caractéristique d'équation elliptique

Ce type d'équation elliptique est qu'une perturbation introduite en un point quelconque à l'intérieur du domaine de calcul influe sur la totalité du domaine. Ceci implique que pour résoudre un problème de type elliptique, il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine.

Théorème 2.3.1 (l'existence et l'unicité de solution EDP)

L'équation (2.3.1) sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ admet au plus une solution

Preuve. voir [2]. ■

Chapitre 3

Méthode des différence finies

La méthode des différence finies consiste à remplacer les dérivées partielles par combinaisons des valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini des points discrets ou noeuds du maillage.

- (a) Avantages: grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- (b) Inconvénients: limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

3.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné quelconque de \mathbb{R}^n et $\partial\Omega$ sa frontière.

On se propose de déterminer la solution $u(x, y)$ du problème classique de Poisson avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

avec Δ opérateur Laplacien défini dans \mathbb{R}^2 par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1.2)$$

$f(x, y)$ une fonction quelconque donnée. Il convient de noter de façon préalable que la régularité de la fonction f induit celle de la solution du problème précédent. Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 *Si la frontière $\partial\Omega$ est régulière et si f est une fonction m fois continûment différentiable, alors la solution $u(x, y)$ du problème de Poisson est $m + 2$ fois continûment différentiable.*

3.1.1 Discrétisation du problème cas du problème 1D

Considérons le cas du problème de Poisson monodimensionnel avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Soit une corde élastique de longueur unité, attachée en chacune de ses extrémités, on agit sur cette corde avec une force $f(x)$, perpendiculaire à la corde, dans le plan contenant la corde. On se propose de déterminer, $\forall x \in \Omega = [0, 1]$, le déplacement $u(x)$ de la corde soumise à la force $f(x)$, déplacement compatible avec les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. Sous l'hypothèse des petits déplacements, on montre que le problème d'élasticité précédent est modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

La discrétisation du problème précédent consiste à remplacer par une technique appropriée le problème continu par un système linéaire algébrique. L'approximation s'effectue en deux étapes successives.

La première consiste à discrétiser le domaine Ω ; pour cela, $n \geq 1$, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en $(n + 1)$ parties de longueur h , telles que $h = \frac{1}{n+1}$.

h est le pas de discrétisation. On considère alors le maillage par les $n + 2$ points $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n + 1$. Pour $j = 1, \dots, n$, on cherche une approximation de $u(x_j)$ aux points du maillage en considérant les n égalités suivantes:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x_j), j = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

La seconde étape consiste à discrétiser les opérateurs, à ce stade, on remplace les dérivées par des quotients différentiels faisant intervenir les valeurs de la fonction inconnue u aux points du maillage, pour cela, on suppose que la fonction u est quatre fois continûment différentiable, compte tenu du résultat de proposition précédent, on demande donc plus de régularité à la fonction $u(x)$, on considère les développements en série de Taylor limités à l'ordre 4 de $u(x_{j+1})$ et $u(x_{j-1})$, autour du point x_j , on a alors :

$$u(x_{j+1}) = u(x_j) + h \frac{du(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u(x_j)}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u(\tilde{x}_j)}{dx^4} \quad (3.1.5)$$

avec $x_j < \tilde{x}_j < x_{j+1}$

$$u(x_{j-1}) = u(x_j) - h \frac{du(x_j)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3u(x_j)}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4u(\hat{x}_j)}{dx^4} \quad (3.1.6)$$

avec $x_{j-1} < \hat{x}_j < x_j$

En additionnant (3.1.5) et (3.1.6), on obtient

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2} = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{d^4u(\hat{x}_j)}{dx^4} + \frac{d^4u(\tilde{x}_j)}{dx^4} \right) \quad (3.1.7)$$

On a alors la majoration d'erreur pour l'approximation du Laplacien:

Lemme 3.1.1 (précission de la méthode) Soit $u \in C^4([0, 1])$, une fonction quelconque et on pose :

$$M_4 = \sup \left(\left| \frac{d^4u(x)}{dx^4} \right|, 0 \leq x \leq 1 \right) \quad (3.1.8)$$

Alors, on a:

$$\left| \frac{d^2u(x_j)}{dx^2} - \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4 \quad (3.1.9)$$

Et le schéma numérique est précis à l'ordre 2. voir [4]

Ce qui fait intervenir la dérivée quatrième dans le schéma de discrétisation, or on ne connaît pas les points \hat{x}_j et \tilde{x}_j , ce qui rend l'expression précédente inopérante. Cependant, si le pas de discrétisation h est petit, compte tenu du résultat du lemme, on peut écrire, en négligeant le terme en h^2 :

$$\begin{cases} \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} = f(x_j), & 1 \leq j \leq n \\ u(x_0) = u(x_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

1. les conditions aux limites de type Neumann:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), x \in]0, 1[, \\ \frac{du(0)}{dx} = 0 \quad \frac{du(1)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3.1.14)$$

2. les conditions aux limites mêlées de type Dirichlet-Neumann:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), x \in]0, 1[\\ \frac{du(0)}{dx} = g \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Avec g donné du problème .

3. les conditions aux limites de type périodique:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + qu(x) = f(x), x \in]0, 1[, (q > 0) \\ \frac{du(0)}{dx} = \frac{du(1)}{dx}, \quad u(0) = u(1) \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Dans la suite, nous ne considérerons que les **conditions aux limites de Dirichlet homogènes**.

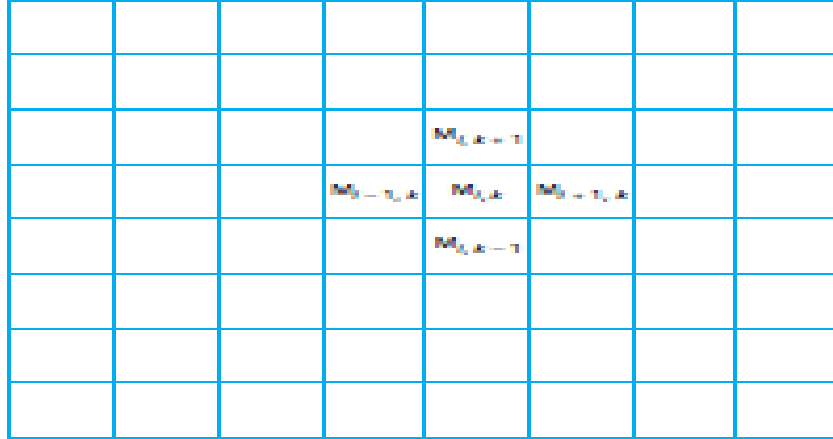
3.1.2 Discrétisation du problème Cas du problème 2D

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, correspondant au carré unité.

On souhaite discrétiser le problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes dans ce domaine Ω , c'est-à-dire : Ce problème modélise, par exemple, la situation d'une membrane élastique qui, au repos, occupe un domaine Ω du plan xOy . On suppose de plus que cette membrane est attachée le long de son contour $\partial\Omega$ et qu'elle est soumise à une force de densité par unité de surface, perpendiculaire au plan xOy . L'inconnue du problème est alors le déplacement $u(x, y)$.

La démarche de discrétisation sera exactement la même que celle vue au paragraphe 2, c'est-à-dire qu'elle se décomposera en deux étapes:

- discrétisation du domaine Ω .
- discrétisation des opérateurs définissant les équations du problème de Poisson. Pour discrétiser le domaine Ω , on discrétise chacun des intervalles fermés $[0, 1]$, de façon analogue à la technique étudiée au



maillage par differences finies

Paragraphe 2. Soit n un entier naturel et h le pas de discrétisation défini par $\frac{1}{n+1}$; on définit un réseau de points sur l'axe des abscisses ainsi que sur l'axe des ordonnées comme indiqué sur la figure 1; autrement dit, on définit les nombres réels $x_i = ih$ et $y_j = jh$ pour $i, j = 0, \dots, n + 1$. à partir de ces données, on définit la grille de points $M_{i,j}$ cette grille étant constituée par les droites d'équation $x = x_i$ et $y = y_j$, on peut écrire :

$$-\Delta u(M_{i,j}) = f(M_{i,j}) \tag{3.1.17}$$

Les valeurs de u , pour les points d'indices i et j nuls ou égaux à $n + 1$, étant nulles car correspondant aux conditions aux limites. Donc comme au paragraphe 2, au lieu de chercher $u(x, y)$ dans tout le domaine Ω , on va chercher une approximation de cette valeur aux points de grille contenus dans Ω .

La solution $u(x, y)$ est quatre fois continûment différentiable par rapport à ses arguments. Comme précédemment, on obtient les schémas de discrétisation en combinant les développements limités d'une part de $u(M_{i+1,j})$ et $u(M_{i-1,j})$ et d'autre part de $u(M_{i,j+1})$ et $u(M_{i,j-1})$. Tous calculs effectués, on obtient les relations suivantes pour la discrétisation

des dérivées secondes en x et en y :

$$\frac{\partial^2 u(M_{i,j})}{\partial x^2} = \frac{u(M_{i+1,j}) - 2u(M_{i,j}) + u(M_{i-1,j}))}{h^2} - E(M_{i,j}) \quad (3.1.18)$$

avec $\widehat{M}_{i,j} \in |M_{i,j}, M_{i+1,j}|$, $\widetilde{M}_{i,j} \in |M_{i-1,j}, M_{i,j}|$ et

$$E(M_{i,j}) = \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u(\widehat{M}_{i,j})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\widetilde{M}_{i,j})}{\partial x^4} \right)$$

et

$$\frac{\partial^2 u(M_{i,j})}{\partial y^2} = \frac{u(M_{i,j+1}) - 2u(M_{i,j}) + u(M_{i,j-1}))}{h^2} - E(M_{i,j}) \quad (3.1.19)$$

On a alors la majoration d'erreur pour l'approximation du Laplacien:

Lemme 3.1.2 Soit $u \in C^4(\Omega)$ une fonction quelconque ; on pose :

$$M_4 = \sup \left(\left| \frac{d^4 u(M)}{dx^4} \right|, M \in \overline{\Omega} \right) + \sup \left(\left| \frac{d^4 u(M)}{dy^4} \right|, M \in \overline{\Omega} \right) \quad (3.1.20)$$

On a alors l'estimation suivante:

pour tout $i, j = 1, 2, \dots, n+1$

$$\left| \frac{u(M_{i+1,j}) + u(M_{i,j+1}) - 4u(M_{i,j}) + u(M_{i,j-1}) + u(M_{i-1,j}))}{h^2} - \Delta u(M_{i,j}) \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4 \quad (3.1.21)$$

pour plus détails voir [4]

Par conséquent, de la même façon qu'au paragraphe 2, le paramètre h étant supposé petit, on peut négliger les termes faisant intervenir les dérivées quatrièmes, ce qui permet d'en déduire le schéma d'approximation suivant pour résoudre le problème de Poisson dans le domaine Ω considéré :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j} \\ u_{0,j} = u_{i,0} = u_{n+1,j} = u_{i,n+1} = 0, \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Avec $f_{i,j} = f(M_{i,j})$, $0 \leq i, j \leq n+1$

Comme précédemment, cet ensemble de relations définit un système linéaire :

$$AU = F \quad (3.1.23)$$

Les composantes du vecteur F sont $h^2 f_{i,j}$, pour $i, j = 1, \dots, n$, auxquelles il convient d'ajouter les valeurs frontières dans le cas où celles-ci seraient différentes de zéro. Il convient de noter que le vecteur F possède une structure par blocs compatible avec celle du vecteur U et représentée ci-dessous :

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^t$$

3.1.3 Erreur de troncature

Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor. Par exemple, pour l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1.24)$$

On utilise un schéma explicite centré en espace :

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}) \quad (3.1.25)$$

En développant $u_{j,n+1}$ et $u_{j,n}$ par développement de Taylor, soustrayant les résultats et divisant le tout par Δt , on retrouve l'erreur de troncature sur le temps, $O(\Delta t)$. En suivant le même principe avec le terme sur l'espace, on trouve une erreur en $O(\Delta x^2)$. Au final:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}) + E.T \quad (3.1.26)$$

avec $E.T$ l'erreur de troncature. L'ordre de l'erreur de troncature est $O(\Delta t, \Delta x^2)$

Toute méthode numérique doit vérifier les 3 critères :

1. **Consistance:** Un schéma aux différences finies est consistant si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} E.T = 0$$

Des problèmes peuvent se poser si l'erreur de troncature varie comme $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Dans ce cas, on est obligé de raffiner de sorte que $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$

2. **Stabilité:** Ce concept s'applique aux problèmes d'évolution. Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature,...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant.

3. **Convergence:** soit $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ telle que $0 \leq \mu \leq 1$ et $u \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$

$$\sup_{i=0, \dots, N} |u(t_j, x_i) - u_{j,i}| \leq \frac{t_j}{2} (\Delta t + \Delta x) \|u\|_{C^2([0,1] \times [0,1])}$$

pour $j = 0, 1, \dots, N + 1$ et

$$\|u\|_{C^2([0,1] \times [0,1])} = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times [0,1]} |\partial_{t,x}^2 u(t, x)|$$

Preuve. voir [2]. ■

3.2 Estimation de l'erreur

Soit $u \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$ et $U = (u_{i,j} : i, j = 0, 1, 2, \dots, N + 1)$ la solution de problème poisson et la discrétisation

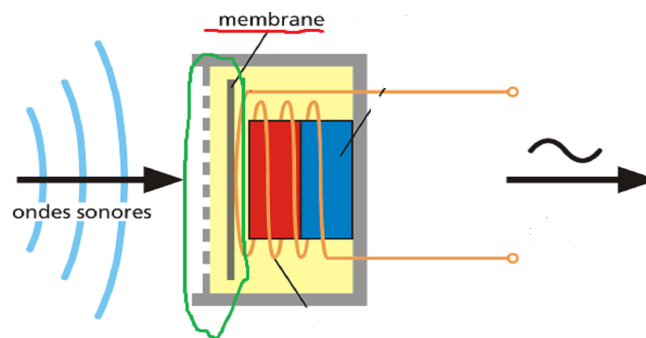
$$\sup |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \left(\|\partial_x^4 u\|_{C([0,1]^2)} + \|\partial_y^4 u\|_{C([0,1]^2)} \right). \quad (3.2.1)$$

voir détails [2]

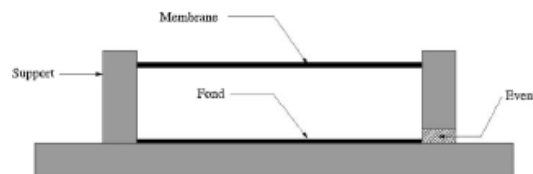
Chapitre 4

Application

On va étudier dans ce chapitre la déformation de la membrane, d'un microphone par une voix



Pour simplifier le traitement de ce problème, on va considérer une membrane de forme carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ et de faible épaisseur, selon le dispositif représenté sur la figure



La capteur de pression (vue laterale)

Pour se faire, notre étude a été décomposée en trois parties: une modélisation physique, une résolution mathématique et une modélisation numérique.

1. La modélisation physique définit les différents paramètres et les conditions initiales de l'étude.
2. La résolution mathématique vise à trouver les solutions de notre problème posé grâce à la modélisation physique. Pour arriver au résultat voulu, il existe une résolution implicite ou approchée
3. La modélisation numérique consiste à représenter les solutions approchées de la modélisation. Elle permet d'avoir une vue graphique de l'objet étudié.

4.1 La modélisation physique

La membrane se déforme sous l'effet de la différence de pression entre la cavité et l'extérieur, ainsi seules les variations de la pression extérieure (acoustique) déforment la membrane.

Pour une variation connue de la pression acoustique f , la déformation de la membrane u est solution d'une équation aux dérivées partielles, dont l'opérateur différentiel dépend du modèle choisi. On va traiter le cas d'une membrane « très tendue »:

$$-c\Delta u = f \tag{4.1.1}$$

Dans ces équations Δ représente l'opérateur de Laplace en $2D$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.1.2}$$

Les coefficients c est de constante associée à de grandeur physique que l'on précisera en fonction du matériau composant la membrane.

Pour toute variation de pression f admissible (c'est-à-dire physique), l'équation (4.1.1) admet une solution u . L'unicité de la solution est obtenue en imposant des conditions sur u , qui correspondent à l'approche réaliste du problème. Dans notre cas, la membrane est fixée au support tout au long de son bord, ce qui revient à dire que la déformation u est nulle au bord.

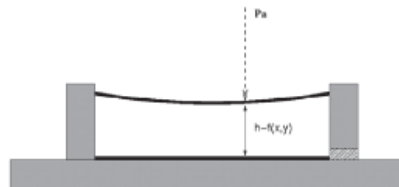
$$u |_{\partial\Omega} = 0.$$

Cette condition est suffisante pour garantir l'unicité de la solution de l'équation (4.1.1) puisque l'opérateur différentiel associé est d'ordre 2.

T : la tension mécanique de la membrane.

Alors le coefficient c est défini par la relation:

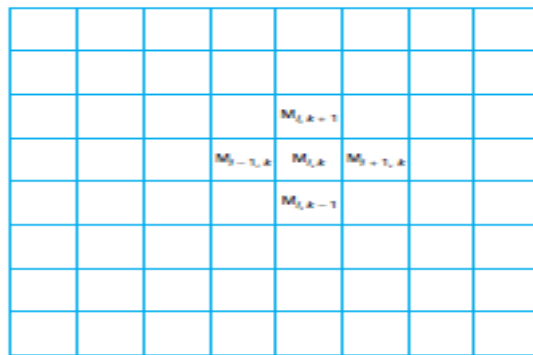
$$c = T$$



la déformation de la
membrane

4.2 Résolution mathématique

On peut résoudre le modèle mathématique par une méthode approchée. Cette méthode consiste à construire un ensemble des points $M_{i,j}$ pour $i, j = 1, 2, 3, \dots$, sur la membrane, disposés selon une grille carré comprenant n points le long des coordonnées axiales (voir la figure 4) puis à calculer les valeurs $u_{i,j} \approx u(M_{i,j})$, approximations aux points $M_{i,j}$ de la grille des valeurs de la solution u de l'équation (4.1.1) avec conditions au bord. Ces valeurs sont calculées à partir d'une approximation de l'opérateur différentiel.



maillage par differences finies

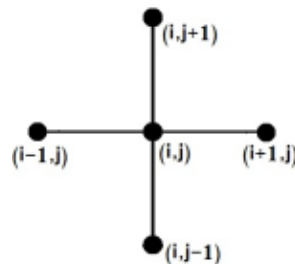


figure5 points

On sait traiter le cas de l'opérateur de Laplace dans carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

avec un pas de maillage en x et y constants $h = 1/(N + 1)$. Pour cela, on utilise le schéma à 5 points (voir la figure5 points) qui s'écrit en tout point $M_{i,j}$ de la grille. Cette manière de procéder utilise la méthode des différences finies.

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2 \partial^2 u}{2 \partial x^2}(x_i, y_j) + h^2 O(h, y_j) \quad (4.2.1)$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2 \partial^2 u}{2 \partial x^2}(x_i, y_j) + h^2 O(h, y_j) \quad (4.2.2)$$

En additionnant les équations (4.2.1) et (4.2.2) et en négligeant les restes, on obtient :

$$\frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)] \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \quad (4.2.3)$$

Par analogie, considérons un accroissement local en y .

$$u(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2 \partial^2 u}{2 \partial y^2}(x_i, y_j) + h^2 O(x_i, h) \quad (4.2.4)$$

$$u(x_i, y_{j-1}) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2 \partial^2 u}{2 \partial y^2}(x_i, y_j) + h^2 O(x_i, h) \quad (4.2.5)$$

En additionnant les équations (4.2.4) et (4.2.5) et en négligeant les restes, on obtient :

$$\frac{1}{h^2} [u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})] \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \quad (4.2.6)$$

on obtient finalement

$$\begin{cases} -c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \\ \text{et} \\ \Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (4.2.7)$$

$$-c \left(\frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)] + \frac{1}{h^2} [u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})] \right) = f_{i,j} \quad (4.2.8)$$

Avec $c = 1$, on obtient des équations linéaires sous la forme :

$$(-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}) = h^2 f_{i,j} \quad (4.2.9)$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, N - 1$. Représentons ces équations linéaires sous forme matricielle, c'est-à-dire $AU = b$ où A est la matrice des coefficients des équations linéaires, U est un vecteur des points de la grilles et b

On obtient alors une matrice carrée tridiagonale par blocs de dimension $(N - 1)^2$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} G & -I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -I & G & -I & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & -I & G & -I \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I & G \end{pmatrix}$$

Avec I bloc de la matrice identité de dimension $(N - 1)$ et G est un bloc de dimension $(N - 1)$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 4 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 4 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.2.1 pour résoudre le problème de Poisson dans le domaine Ω considéré:

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \\ u_{0,j} = u_{i,0} = u_{N+1,j} = u_{i,N+1} = 0 \end{cases}$$

Pour $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$, on pose $N = 4$, $h = \frac{1}{4}$ et $f = 16$. on aura :

$$\begin{cases} -u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = 1 \\ u_{0,j} = u_{i,0} = u_{5,j} = u_{i,5} = 0 \end{cases}$$

Pour $i, j = 1, 2, 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 i, j = 1, 1 & \quad -u_{0,1} - u_{1,0} + 4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} = 1 \\
 i, j = 2, 1 & \quad -u_{1,1} - u_{2,0} + 4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{2,2} = 1 \\
 i, j = 3, 1 & \quad -u_{2,1} - u_{3,0} + 4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{3,2} = 1 \\
 i, j = 1, 2 & \quad -u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,1} - u_{1,3} + 4u_{1,2} = 1 \\
 i, j = 2, 2 & \quad -u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,1} - u_{2,3} + 4u_{2,2} = 1 \\
 i, j = 3, 2 & \quad -u_{4,2} - u_{2,2} - u_{3,1} - u_{3,3} + 4u_{3,2} = 1 \\
 i, j = 1, 3 & \quad -u_{2,3} - u_{0,3} - u_{1,2} - u_{1,4} + 4u_{1,3} = 1 \\
 i, j = 2, 3 & \quad -u_{3,3} - u_{1,3} - u_{2,2} - u_{2,4} + 4u_{2,3} = 1 \\
 i, j = 3, 3 & \quad -u_{4,3} - u_{2,3} - u_{3,2} - u_{3,4} + 4u_{3,3} = 1
 \end{aligned}$$

Les termes aux frontières de la membrane sont nuls (condutions aux limites). On obtient le système matricielle suivant :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit que le système précédent se compose par une matrice tridiagonale par blocs de dimension $9 = (N - 1)^2$

On résout le système matricielle précédent utilisant MATLAB

U=

0.6875
0.8750
0.6875
0.8750

1.1250

0.8750

0.6875

0.8750

0.6875

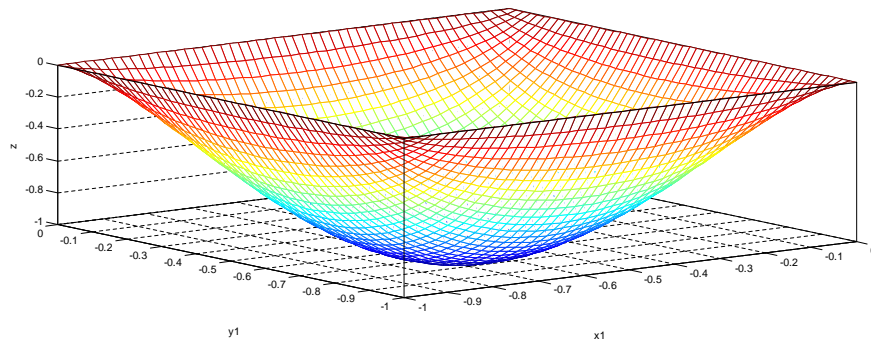
Annexe

```

function poisson_2d
N=50;
h=1/N;
L=(N-1)^2;
e= ones(N-1,1);
E= ones(L,1);
X= spdiags([-e,4*e,-e],[-1,0,1],N-1,N-1);
A = sparse(L,L);
for j = 1:(N-1):L
    A(j:j+N-2,j:j+N-2) = X;
end
A= A+spdiags([-E,-E],[-N+1,N-1],L,L);
A=full(A);
for j = 1:N-1
for m = 1:N-1
b(j+(m-1)*(N-1),1) = h^2*f([j,m]*h);
end
end
U=A\b;
show(U,N,h)
function val = f(x)
val =1;
function show(U,N,h)
z = zeros(N+1,N+1);

```

```
z(2:N,2:N)=-reshape(U,N-1,N-1)';  
x1=-1:h:0;  
y1=-1:h:0;  
mesh(x1,y1,z);  
axis([-1,0,-1,0,-1,.0])  
xlabel('x1')  
ylabel('y1')  
zlabel('z')
```



4.3 Modélisation numérique

la déformation de la membrane se change commue suit

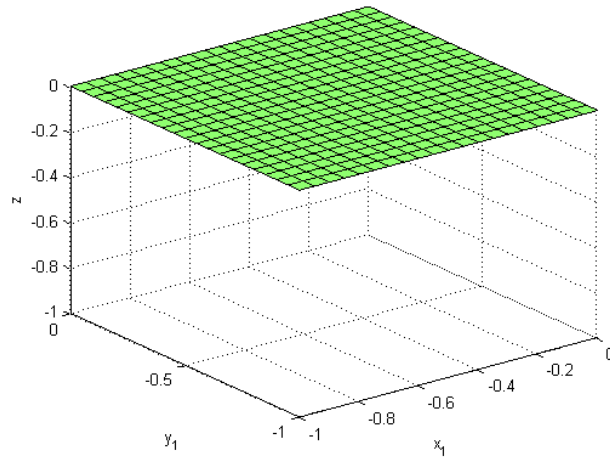


Figure1

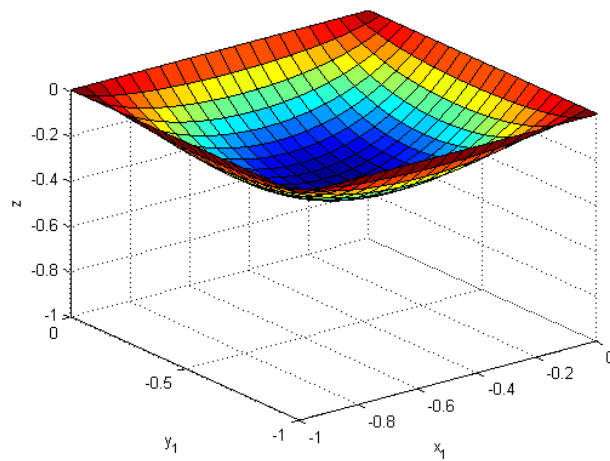


figure2

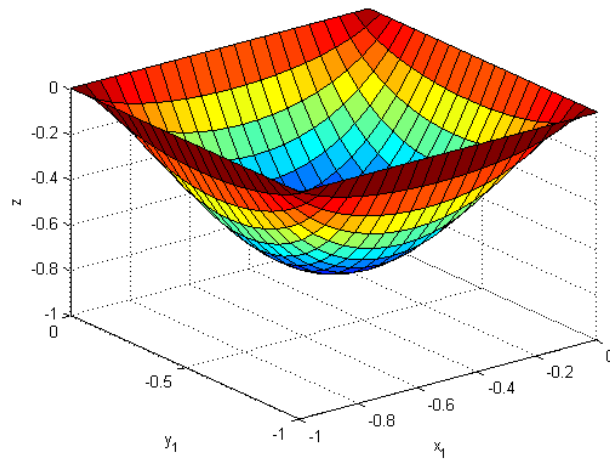


figure3

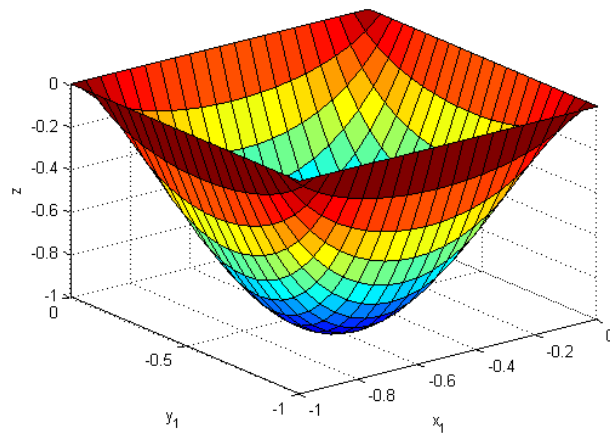


figure4

En remaque Plus qu'on augmente la pression la membrane du microphone se déformation plus

conclusion

L'objectif de ce travail est de montrer la procédure à suivre pour analyser un phénomène physique, avec une méthode simple et efficace (DF). On a vu la démarche et les étapes qu'il faut prendre pour passer d'un modèle mathématique à un modèle numérique. Pour cela, on a pris comme exemple l'équation de Poisson, et pour montrer les résultats, on a utilisé l'équation du transfert de la chaleur. Dans la vraie vie, l'étape la plus difficile ce n'est pas le traitement et l'analyse numérique, mais c'est de comprendre le phénomène physique et de le traduire en formulation mathématique. C'est d'établir le bilan énergétique. Une fois que tous est modélisé physiquement et mathématiquement, le reste ce n'est que des applications d'algorithmes pour résoudre des matrices en général de moyenne et grandes tailles. Ce travail constitue une bonne base pour l'analyse des phénomènes physiques qui traitent des équations aux dérivées partielles en 2D. Dans plusieurs secteurs et branches, que ce soit dans le cadre pédagogique ou industriel. Dans le prochain travail, on va passer en 3D. Avec la même procédure et démarche et là on va voir l'efficacité de l'algorithme de THOMATS, et surtout les limites de capacité des ordinateurs séquentiels.

Bibliographie

- [1] Yves CAUMEL, "Cour d'analyse fonctionnelle et complexe", Cépaduès-Éditions, 2009.
- [2] Soren BARTELS, "Numerical Approximation of Partial Differential Equations",
springer
- [3] M.NADIR. "cour espace de Bannach", université de M'sila Algérie 2004.
- [4] Pierre SPITERI. "Méthode des différences finies pour les EDP stationnaires", Techniques
de l'Ingénieur, 2014.
- [5] Florian MÉHATS" Equations aux dérivées partielles elliptiques", IRMAR, Université
de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex. Version du 19 janvier 2015.
- [6] Ionut DANAILA, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber, Marie Postel, "introduction au
calcul scientifique par la pratique 12 projets résolus avec MATLAB". © Dunod Paris,
2005
- [7] Pr. Abbès AZZI, "methodes numériques appliquees aux calculs des ecoulements et du
transfert de chaleur", BP.1505, El-Mnaouar, 31000, Oran, Algérie, 2011.

Abstract:

The main purpose of this thesis is to modelize the deformation of a membrane of a microphone by partial differential equation elliptic type .this DPE can be solved by Finite Difference .A numerical exemples is presented to tested the result .

Key words :

DPE, Eliptic ,finite Difference, banach

Resumé :

Dans ce mémoire, on a modéliser la déformation d'une membrane d'un microphone par une EDP de type elliptique. On a trité cette EDP par la méthode des différences finies. Un exemple numérique a été presenter pour tester les resultats .

Mots clés :

EDP, Elliptique, Différences finies, Banach .

الخلاصة

هدفنا من هذه المذكرة هو دراسة تشوه غشاء طبلة ميكروفون تحت تأثير الضغط الصوتي .

أخضعنا هذه التجربة لنموذج رياضي (المعادلة التفاضلية للمشتقات الجزئية من نوع بيبضاوي)، ثم قمنا بتقريب الحل الدقيق بطريقة الفوارق المنتهية وقد قدمنا مثال علي ذلك .

الكلمات المفتاحية :

المعادلة التفاضلية للمشتقات الجزئية، بيبضاوية، الفوارق المنتهية، بناخ.