

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT PHYSIQUE
N° :Ph /TH/06/2020



DOMAINE : Sciences de la matière
FILIERE : Physique
OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par: ACHOUR Miyeda

BENAZZI Amira

Intitulé

**L'oscillateur de Dirac dans le modele
anti-Snyder**

Soutenu le 30 /06 /2020 devant le jury composé de:

BOUSSEHEL Mounir

Université de M'sila

Président

SABRI Youcef

Université de M'sila

Rapporteur

DEBBABI Mourad

Université de M'sila

Examineur

Année universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENTS

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr SABRI YUCEF**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait **Mr BOUSSEHEL MOUNIR** en étant président du jury et **Mr DEBBABI MOURAD** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A mes parents, en témoignage de ma gratitude pour leur écoute, leur soutien et leurs encouragements dans les moments difficiles, sans vous rien n'aurait été possible, merci pour votre soutien et votre amour. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

*A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : mon fiancé **ALI**, et bien sur A mes chères soeurs **ZAHRA** et **AYA** et mes chères frères.*

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

*A mon binôme **MEYADA** et toute sa famille.*

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues d'étude.

AMIRA

Table des matières

1	Introduction	6
2	Oscillateur de Dirac ordinaire	8
2.1	Notation :	8
2.2	Equation de Dirac	10
2.3	Solution de l'équation de Dirac pour une particule libre	12
3	Mécanique quantique dans le cadre de modele anti-Snyder	15
3.1	Le modele anti-Snyder	15
3.2	Représentation dans l'espace des impulsions	16
3.2.1	Généralisation à plusieurs dimensions	19
4	L'oscillateur Dirac à une dimension	21
4.1	Propriétés statistiques	24
5	Oscillateur de Dirac en 2-1 dimension	26
5.1	Les solutions de la mécanique quantique habituelle	26
5.2	Solution dans le modele anti-snyder	30
	Conclusion	35

Chapitre 1

Introduction

La naissance de la mécanique quantique peut être datée à la découverte de la radiation du corps noir survenue en 1900 par MaxPlanck. L'introduction de la constante de Planck \hbar nous permet de distinguer entre les phénomènes qui peuvent être traités classiquement et ceux qui peuvent être abordés avec la mécanique quantique.

Dans les dernières années, plusieurs modèles de la mécanique quantique basée sur des relations de commutation modifiées ont été étudiés par plusieurs physiciens. Cette modification de la relation de commutation implique une incertitude minimale sur la position conduisant à une longueur minimale ($\hbar\sqrt{\beta}$) [1],[2]. Il existe aussi des relations de commutations modifiées qui conduisent à une impulsion maximale ($\frac{1}{\sqrt{\beta}}$) [[3]–[10]]. Plusieurs modèles de la mécanique quantique en présence d'un paramètre d'impulsion maximal ont été également étudiés [[11]–[15]]. L'objectif principale de l'étude des modèles de mécanique quantique avec une relation de commutation modifiée est que le spectre d'énergie devient modifié en raison de la présence d'une longueur minimale ou d'une impulsion maximale qui peut être détecté dans des expériences à basse énergie.

L'oscillateur de Dirac dans une dimension a été étudié par la technique de la fonction de Green [25] et par l'approche des états cohérents [26]. En présence des longueurs minimales l'oscillateur de Dirac dans la représentation de l'espace des moments a été étudié dans [?] . D'autre part, l'oscillateur Dirac dans une dimension possède des applications physiques en physique des semi-conducteurs

L'oscillateur de Dirac [[16]–[21]] en présence d'un champ magnétique homogène est l'un des rares problèmes exactement résolubles en mécanique quantique relativiste [[22]]. Le résultat déduit de ce système est qu'à chaque fois que l'intensité du champ magnétique dépasse une valeur critique, on a une transition de phase de chiralité quantique [[23]–[25]]. Ce système a tiré beaucoup d'attention également en raison des applications possibles à la physique des matériaux récemment découverts comme le graphène [26-28], le germanène [29, 30] et le silicène [31-34]. On sait en effet que dans ces matériaux, aux points K, K' de la zone de Brillouin, les porteurs de charge sont décrits par une équation effective de Dirac à 2d.

Dans ce mémoire, nous allons attaquer la formulation mathématique du problème de l'oscillateur de Dirac à 1d et à 2d et ses conséquences en résolvant des équations fondamentales dans le cadre de la mécanique quantique relativiste dans le cadre du model anti-Snyder. Ce mémoire se décompose à une introduction , où on parle sur l'oscillateur de Dirac et le principe d'incertitude généralisé, et trois autres chapitres .

Le deuxième chapitre contient deux parties : Dans la première nous allons donner un rappel sur l'équation de Dirac et sa solution pour une particule libre et dans la deuxième partie, nous allons formuler la mécanique quantique basée sur le modèle anti-Snyder.

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier le problème d'oscillateur de Dirac à 1d dans le cadre du model anti-Snyder.

Dans le chapitre 4 nous allons chercher les solutions des fonctions d'ondes et le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac à 2d présence d'un champ magnétique dans le cadre du modèle anti-Snyder.

Chapitre 2

Oscillateur de Dirac ordinaire

2.1 Notation :

Pour passer de la mécanique quantique habituelle à la mécanique quantique relativiste, il suffit de remplacer la géométrie euclidienne par celle de Minkowski, ou bien on remplace la métrique par celle de Lorentz définie par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

En utilisant cette métrique, on peut définir la longueur du vecteur $dx = \{dx^\mu\}$ par $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Cette relation est souvent considérée comme la relation de définition du tenseur métrique. La forme contra-variante $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique est

$$g^{\mu\sigma} = (g^{-1})_{\mu\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

On remarque que, le tenseur métrique contra-variant et le tenseur métrique covariant sont identiques :

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (\text{Pour Lorentz métrique}). \quad (2.3)$$

À partir de maintenant, nous utiliserons le quadrivecteur contra-variantes

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, x, y, z\}. \quad (2.4)$$

Pour décrire les coordonnées de l'espace-temps. Le quadrivecteur covariants est donnée par

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \equiv \{ct, -x, -y, -z\}. \quad (2.5)$$

En utilisant la convention de sommation d'Einstein , nous obtenons le carré de la longueur de vecteur x^μ donné par

$$\begin{aligned} x.x &= x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Même chose pour la définition du 4-vecteur de moment , c-à-d :

$$p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}. \quad (2.7)$$

Et nous écrivons le produit scalaire en quatre dimensions (espace-temps) comme :

$$p_1.p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1 E_2}{c^2} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (2.8)$$

Ou également

$$x.p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.9)$$

Par analogie avec mécanique quantique habituelle, on peut écrire le 4-opérateur de moment par

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \\ &= i\hbar \nabla^\mu = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= i\hbar \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, -\nabla \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il se transforme en un 4-vecteur contra-variant, de sorte que

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \\ &\equiv -\hbar^2 \square = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $\Delta = \nabla^2$ et $\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$ représentent respectivement le Laplacien et le D'alembectien. En utilisant (2.4) et (2.10) on obtient la relation de commutation suivante :

$$[\hat{p}^\mu, x^\nu] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}, g^{\nu\sigma} x_\sigma \right] = i\hbar g^{\nu\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} = i\hbar g^{\nu\sigma} \delta_\sigma^\mu = i\hbar g^{\nu\mu} = i\hbar g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Le 4-potentiel du champ électromagnétique est donné par :

$$A^\mu = \{A_0, A\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (\text{contravariant}) \quad (2.13)$$

$$A_\mu = \{A_0, -A_x, -A_y, -A_z\} \quad (\text{covariant}) \quad (2.14)$$

A partir de A^μ , le tenseur de champ électromagnétique suit de la manière bien connue :

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.2 Equation de Dirac

En 1928, Dirac a trouvé une équation d'onde relativiste covariante, de la forme de Schrödinger et avec une densité de probabilité positive, donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (2.16)$$

À cette époque, il existait des doutes sur l'équation de Klein-Gordon, qui donnait des énergies négatives. Et comme l'interprétation de la densité de charge n'était pas connue à ce moment-là et aussi les mésons π^+ et π^- sous forme de particules de spin 0 chargées n'avaient pas encore été découverts, les énergies négative représentent un grand problème.

Puisque l'équation (2.16) est linéaire dans la dérivée temporelle, il est naturel d'essayer de construire un Hamiltonien également linéaire par rapport aux dérivées spatiales. Par conséquent, l'équation (2.16) doit prendre la forme suivante

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi \equiv \hat{H}_f \psi. \quad (2.17)$$

Ou ψ est un vecteur donné par

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Les $\widehat{\alpha}_i$ et $\widehat{\beta}$ sont des matrices de dimensions $N \times N$ et

$$\widehat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\sigma}_i \\ \widehat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

où $\widehat{\sigma}_i$ sont les matrices 2×2 de Pauli et I est la matrice d'unités 2×2 . Donc on écrit ces matrices en détail comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\alpha}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pour trouver l'équation de la continuité, il suffit de multiplier (2.17) par ψ^\dagger par la gauche. Ce qui donne :

$$i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \widehat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \widehat{\beta} \psi \quad (2.21)$$

D'autre part la multiplication de l'équation conjuguée de (2.17) par ψ à droite nous donne

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \widehat{\alpha}_k \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \widehat{\beta} \psi \quad (2.22)$$

La soustraction de (2.22) de (2.21) donne :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^\dagger \widehat{\alpha}_k \psi) \quad (2.23)$$

Cette équation appelée l'équation de continuité et s'écrit comme suit

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (2.24)$$

avec

$$\varrho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i^* \psi_i \quad (2.25)$$

represente la densité définie positive et

$$j^k = c\psi^\dagger \widehat{\alpha}^k \psi \quad \text{ou} \quad j = c\psi^\dagger \widehat{\alpha} \psi \quad (2.26)$$

represente la densité de courant.

2.3 Solution de l'équation de Dirac pour une particule libre

Pour une particule libre ($V = 0$) l'équation de Dirac (2.17) s'écrit sous la forme

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_f \Psi = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0 c^2 \hat{\beta}) \Psi. \quad (2.27)$$

En remplaçant l'expression suivante

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp[-(i/\hbar)\varepsilon t] \quad (2.28)$$

dans l'équation (2.27), nous obtenons l'équation de Dirac pour le cas stationnaire

$$\varepsilon \Psi(\mathbf{x}) = \hat{H}_f \Psi(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Maintenant nous allons chercher la solution de (2.29) en mettant

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \text{ avec } \varphi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \text{ et } \chi = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

En utilisant la forme explicites des matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ (2.19), l'équation (2.29) devient

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{P} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où bien

$$\varepsilon \varphi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi + m_0 c^2 \varphi,$$

$$\varepsilon \chi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi - m_0 c^2 \chi. \quad (2.32)$$

Pour un moment \mathbf{p} , on définit les états :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{x}\right). \quad (2.33)$$

En remplaçant ces quantités dans l'équations (2.32), on obtient les équations de φ_0 et χ_0

$$(\varepsilon - m_0 c^2) I \varphi_0 - c \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 = 0, \quad (2.34)$$

$$-c \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\varepsilon + m_0 c^2) I \chi_0 = 0. \quad (2.35)$$

Ce système d'équations n'a pas de solution sauf pour que le déterminant s'annule. Ou bien

$$\det = \left| \begin{pmatrix} (\varepsilon - m_0 c^2)I & -c\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -c\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + m_0 c^2)I \end{pmatrix} \right| = 0. \quad (2.36)$$

En utilisant la relation

$$(\hat{\sigma} \cdot A)(\hat{\sigma} \cdot B) = A \cdot B I + i\hat{\sigma} \cdot (A \times B), \quad (2.37)$$

L'expression (2.36) devient

$$\begin{aligned} \det &= (\varepsilon^2 - m_0^2 c^4)I - c^2(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \\ &= (\varepsilon^2 - m_0^2 c^4 - c^2 \mathbf{p}^2)I = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon = \pm E_p, \quad E_p = +c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}. \quad (2.39)$$

Les deux signes, plus et moins, correspondent aux deux types de solutions de l'équation de Dirac et on dit la solution positive et la solution négative. De l'équation (2.34), pour ε fixé, on obtient

$$\chi_0 = \frac{c(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \varepsilon} \varphi_0. \quad (2.40)$$

Soit la notation suivante

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

avec U normalisé, ou bien

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1, \quad (2.42)$$

et aussi U_1 et U_2 sont des complexes. En utilisant (2.28) et (2.33), on obtient les deux solutions de Dirac, positive et négative pour un particule libre sous la forme

$$\Psi_{p\lambda}(x, t) = N \left(\begin{array}{c} U \\ \frac{c(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \lambda E_p} U \end{array} \right) \frac{\exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon t) / \hbar]}{\sqrt{2\pi \hbar^3}} \quad (2.43)$$

avec $\varepsilon = \lambda E_p$ et $\lambda = \pm 1$. Pour déterminer N , on applique la condition de normalisation suivante

$$\int \Psi_{\lambda p}^*(x, t) \Psi_{\lambda' p'}(x, t) d^3 x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p - p'). \quad (2.44)$$

Ce qui donne

$$N^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.37), on obtient

$$N^2 \left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{p}^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} \right) = 1 \quad (2.46)$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \Rightarrow N &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0^2 c^4 + c^2 p^2) + 2m_0 c^2 \lambda E_p + E_p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0^2 c^2 + \lambda E_p)^2}{2(m_0 c^2 + \lambda E_p) \lambda E_p}} = \sqrt{\frac{(m_0^2 c^2 + \lambda E_p)}{2 \lambda E_p}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Chapitre 3

Mécanique quantique dans le cadre de modele anti-Snyder

3.1 Le modele anti-Snyder

Dans le modele anti-Snyder, la relation de dispersion est donné par

$$p = \frac{\hbar}{\sqrt{\beta}} \tanh(\sqrt{\beta}k). \quad (3.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tanh y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{2y^5}{15} - \dots \quad (3.2)$$

au deuxième ordre en β , p s'écrit :

$$p = \hbar(k - \frac{\beta}{3}k^3 + \dots). \quad (3.3)$$

Supposant que le commutateur entre \hat{X} et \hat{k} garde la forme standard, c'est-à-dire $[\hat{X}, \hat{k}] = i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale

$$[\hat{X}, A(\hat{k})] = i\frac{\partial A}{\partial k}, \quad (3.4)$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$[\hat{X}, \hat{P}(k)] = i\frac{\partial \hat{P}}{\partial k}. \quad (3.5)$$

La relation (3.3) donne :

$$i\frac{\partial \hat{P}}{\partial k} = i\hbar(1 - \beta\hat{k}^2 + \dots), \quad (3.6)$$

or, on a :

$$\beta \hat{k}^2 \approx \frac{\beta \hat{P}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4). \quad (3.7)$$

ce qui donne la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 - \beta \hat{P}^2 + \dots). \quad (3.8)$$

Cette algèbre est appelé l'algèbre anti-Snyder.

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|. \quad (3.9)$$

Ce qui donne

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} \right\rangle \right| \quad (3.10)$$

Au premier ordre du paramètre β , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 - \beta \langle \hat{P}^2 \rangle) \quad (3.11)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen :

$$(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2 \quad (3.12)$$

on peut écrire :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{1 - \beta (\Delta P)^2 - \gamma\} \quad (3.13)$$

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2 \quad (3.14)$$

3.2 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs \hat{X} et \hat{P} , satisfaisant à la relation de commutation :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 - \beta P^2), \quad \beta > 0 \quad (3.15)$$

Dans l'espace des impulsions, où \hat{X} et \hat{P} agissent sur les fonctions $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs \hat{x} et \hat{p} , satisfaisant la relation de commutation canonique :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (3.16)$$

Alors on peut trouver une représentation de \hat{X} et \hat{P} qui vérifie la relation de commutation modifiée (3.15). La réalisation la plus simple s'écrit :

$$\hat{X} = (1 - \beta \hat{p}^2) \hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p} \quad (3.17)$$

où l'on a :

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad (3.18)$$

$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad (3.19)$$

Alors, \hat{X} et \hat{P} s'écrivent explicitement :

$$\hat{X} = i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{P} = \hat{p} \quad (3.20)$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (3.15).

Produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (3.20), est la préservation de la symétrie des opérateurs \hat{X} et \hat{P} , pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que \hat{P} n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur \hat{X} . En effet, la condition de symétrie s'écrit :

$$\left(\langle \psi | \hat{X} | \varphi \rangle \right) = \langle \psi | \left(\hat{X} | \varphi \rangle \right) \quad (3.21)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp \psi^*(p) \varphi(p) \quad (3.22)$$

Pour que l'opérateur \hat{X} soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{dp}{1 - \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p). \quad (3.23)$$

Le facteur $(1 - \beta p^2)^{-1}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur \hat{X} . En effet :

$$\langle \psi | \left(\hat{X} | \varphi \rangle \right) = i\hbar \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{dp}{1 - \beta p^2} \psi^*(p) (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) = i\hbar \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p). \quad (3.24)$$

En intégrant par parties et en tenant compte que $\psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles aux extrémités, on obtient :

$$\langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle) = -i\hbar \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p) \quad (3.25)$$

D'autre part on a :

$$\left(\langle \psi | \hat{X} \right) | \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{dp}{1 - \beta p^2} \left[i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \right]^* \varphi(p) = -i\hbar \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p) \quad (3.26)$$

Ceci montre bien que \hat{X} est symétrique par rapport au produit scalaire (4.1).

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient :

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{dp}{1 - \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1 \quad (3.27)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{dp}{1 - \beta p^2} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle \quad (3.28)$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation :

$$\langle p | p' \rangle = (1 - \beta p^2) \delta(p - p') \quad (3.29)$$

Fonctions propres de l'opérateur de position

Dans l'espace des impulsions, le problème des valeurs propres de l'opérateur \hat{X} s'écrit :

$$i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_x(p) = x \psi_x(p) \quad (3.30)$$

où $\psi_x(p) = \langle p | x \rangle$, $|x\rangle$ étant un vecteur propre de \hat{X} ayant une localisation infinie ($(\hat{X})_{|x} = 0$). Les fonctions $\psi_x(p)$ seront considérées alors comme des "fonctions propres formelles" de l'opérateur de position.

La solution de l'équation (3.30) est donnée par la formule suivante

$$\psi_x(p) = c \exp \left(-i \frac{x}{\hbar \sqrt{\beta}} \tanh^{-1} \sqrt{\beta} p \right) \quad (3.31)$$

3.2.1 Généralisation à plusieurs dimensions

Dans cette section nous allons étendre le formalisme étudié au cas à plusieurs dimensions ; le principe étant le même que dans le cas à une dimension, nous allons présenter les outils nécessaires sans démonstration.

Relation d'incertitude généralisée à N dimensions

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (??), préservant la symétrie rotationnelle, s'écrit :

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar (1 - \beta \hat{P}^2) \quad (3.32)$$

$$\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^N \hat{P}_i^2 \quad (3.33)$$

Si on impose

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \quad (3.34)$$

l'identité de Jacobi donne :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \frac{2\beta i\hbar}{1 - \beta \hat{P}^2} (\hat{P}_i \hat{X}_j - \hat{P}_j \hat{X}_i) \quad (3.35)$$

ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative.

La relation d'incertitude impliquée par (4.2) s'écrit :

$$(\Delta X_i) (\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left(1 - \beta \sum_{k=1}^N [(\Delta P_k)^2 + \langle p_k \rangle^2] \right) \quad (3.36)$$

N étant la dimension de l'espace.

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation (4.2) a la forme :

$$\hat{X}_i = i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \hat{P}_i = p_i \quad (3.37)$$

Les opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_j sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \frac{d^N p}{1 - \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (3.38)$$

Représentation du groupe de rotation

Les relations de commutation (4.3), (4.4) et (4.5) ne brisent pas la symétrie par rapport aux rotations. En effet, les générateurs de rotations peuvent encore s'exprimer en fonction des opérateurs de position et d'impulsion comme :

$$\hat{L}_{ij} = \frac{\hat{X}_i \hat{P}_j - \hat{X}_j \hat{P}_i}{1 - \beta \hat{P}^2} \quad (3.39)$$

Ainsi, il satisfaisant les relation de commutation :

$$[\hat{X}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{X}_j - \delta_{ij} \hat{X}_k) \quad (3.40)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{P}_j - \delta_{ij} \hat{P}_k) \quad (3.41)$$

$$[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}] = i\hbar (\delta_{ik} \hat{L}_{jl} + \delta_{jl} \hat{L}_{ik} - \delta_{il} \hat{L}_{jk} - \delta_{jk} \hat{L}_{il}) \quad (3.42)$$

Dans le cas particulier à trois dimensions, l'opérateur de moment angulaire modifié s'écrit :

$$\hat{L}_i = \frac{1}{1 - \beta \hat{P}^2} \varepsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k \quad (3.43)$$

Les relations de commutation habituelles entre les opérateurs de position, d'impulsion et de moment angulaire restent valables :

$$[\hat{X}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{X}_k \quad (3.44)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{P}_k \quad (3.45)$$

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (3.46)$$

La relation de commutation (4.5) peut s'écrire comme :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -i\hbar (2\beta - \beta' + \beta(2\beta + \beta')) \hat{P}^2 \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (3.47)$$

Chapitre 4

L'oscillateur Dirac à une dimension

L'équation stationnaire décrivant l'oscillateur Dirac à une dimension est donnée par

$$c\alpha(P - i\beta m\omega X)\Psi + \beta mc^2\Psi = E\Psi \quad (4.1)$$

où m est la masse au repos, ω est la fréquence de l'oscillateur et $\Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ est un spineur à deux composantes. cette équation (4.1) s'obtient en remplaçant P par $P - i\beta m\omega X$ dans l'équation de Dirac dans une dimension (??). En introduisant la représentation des matrices Dirac α et β (2.19), on obtient les équations simultanées suivantes

$$c(-iP + m\omega X)g = (E - mc^2)f \quad (4.2)$$

$$c(iP + m\omega X)f = (E + mc^2)g \quad (4.3)$$

En utilisant la définition des opérateurs de position et de moment dans l'espace des moment (3.20), nous obtenons le système des équations différentielles suivant

$$-ipg + i\hbar m\omega(1 - \beta p^2)\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{(E - mc^2)}{c}f \quad (4.4)$$

$$ipf + i\hbar m\omega(1 - \beta p^2)\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{(E + mc^2)}{c}g \quad (4.5)$$

Le remplacement de (4.5) en (4.4) nous donne l'équation différentielle de deuxième ordre suivante

$$\begin{aligned} & \left(m^2\omega^2\hbar^2(1 - \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}(1 - \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} - (1 + m\omega\hbar\beta)p^2 \right) f(p) \\ & = - \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + m\omega\hbar \right) f(p) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour solutionner cette équation, nous introduisons la nouvelle variable q définie par

$$q = \frac{1}{m\omega\hbar\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tanh}(p\sqrt{\beta}) \quad (4.7)$$

ou $p \in]-\frac{1}{m\omega\hbar\sqrt{\beta}}, \frac{1}{m\omega\hbar\sqrt{\beta}}[$ ce qui implique que $q \in]-\infty, +\infty[$. Dans ce cas l'équation (4.6) s'écrit sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{(1 + m\omega\hbar\beta)}{\beta} \tanh^2(m\omega\hbar\sqrt{\beta}q) + \varepsilon \right] f(q) = 0 \quad (4.8)$$

avec $\varepsilon = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + m\omega\hbar$

Posons $f(q) = v^\lambda h(u)$ où les variables u et v sont données par

$$u = \sinh(m\omega\hbar\sqrt{\beta}q), v = \cosh(m\omega\hbar\sqrt{\beta}q) \quad (4.9)$$

Alors (4.8) devient

$$(1 - u^2) h''(u) + (2\lambda + 1) u h'(u) + \left(\lambda(\lambda - 1) - \frac{1 + m\omega\hbar\beta}{(m\omega\hbar\beta)^2} \frac{u^2}{v^2} + \lambda + \frac{\varepsilon}{m^2\omega^2\hbar^2\beta} \right) h(u) = 0 \quad (4.10)$$

Pour réduire (4.10) à une classe d'équations différentielles connues, nous éliminons d'abord le terme proportionnel à $\frac{u^2}{v^2}$ en définissant

$$\lambda(\lambda - 1) - \frac{1 + m\omega\hbar\beta}{(m\omega\hbar\beta)^2} = 0 \quad (4.11)$$

Cela conduit aux expressions suivantes pour λ

$$\lambda_1 = \frac{-1}{m\omega\hbar\beta}, \lambda_2 = 1 + \frac{1}{m\omega\hbar\beta} \quad (4.12)$$

La solution associée à λ_2 est rejetée sauf puisque avec elle, l'équation n'accepte pas de solutions. Dans ce qui suit, nous fixons $\lambda_1 = \lambda$. Dans ce cas l'équation (4.10) s'écrit sous la forme

$$(1 - u^2) h_1''(u) - (2\lambda_+ + 1) u h_1'(u) + n(n + 2\lambda_+) h_1(u) = 0 \quad (4.13)$$

avec $\lambda_+ = -\lambda_1 - 1 = \frac{1}{m\omega\hbar\beta} - 1$ et

$$\frac{\varepsilon}{m^2\omega^2\hbar^2\beta} - \lambda_+ + 1 = n(n + 2\lambda_+) \quad (4.14)$$

n un entier non négatif. La solution de l'équation (4.13) est donnée en termes de polynômes de Gegenbauer

$$h(u) = N C_n^{\lambda_+}(u) \quad (4.15)$$

avec N une constante de normalisation. Ensuite, les fonctions propres de l'oscillateur Dirac unidimensionnel dans le modèle anti-snyder sont données par

$$f(p) = N v^{-1-\lambda_+} C_n^{-1-\lambda_+}(u) \quad (4.16)$$

et

$$g(p) = \frac{ic}{\sqrt{\beta}(E + mc^2)} \left(\frac{u}{v} + m\omega\hbar\beta v \frac{\partial}{\partial u} \right) f(u) \quad (4.17)$$

En utilisant la propriété des polynômes de Gegenbauer suivante

$$\frac{d}{du} C_n^\lambda(u) = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(u) \quad (4.18)$$

on obtient enfin

$$f_n(u) = N v^{-1-\lambda_+} C_n^{-1-\lambda_+}(u) \quad (4.19)$$

$$g_n(u) = \frac{icN}{\sqrt{\beta}(E + mc^2)} \left[(1 - (1 + \lambda_+) m\omega\hbar\beta) u v^{2-\lambda_+} C_n^{1-\lambda_+}(u) - 2(1 - \lambda_+) m\omega\hbar\beta v^{-\lambda_+} C_{n-1}^{2-\lambda_+}(u) \right] \quad (4.20)$$

Maintenant, on revient à l'ancienne variable p en utilisant les relations

$$u = \frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 - \beta p^2}}, v = \frac{1}{\sqrt{\beta p^2 - 1}} \quad (4.21)$$

on obtient

$$f_n(u) = N (\beta p^2 - 1)^{\frac{-1-\lambda_+}{2}} C_n^{-1-\lambda_+} \left(\frac{\sqrt{\beta} p}{\sqrt{1 - \beta p^2}} \right) \quad (4.22)$$

$$g_n(u) = \frac{icN}{\sqrt{\beta}(E + mc^2)} \left[(1 - (1 + \lambda_+) m\omega\hbar\beta) \sqrt{\beta} p \frac{(\beta p^2 - 1)^{\frac{\lambda_+}{2}-1}}{\sqrt{1 - \beta p^2}} C_n^{1-\lambda_+} \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 - \beta p^2}} \right) - 2(1 - \lambda_+) m\omega\hbar\beta (\beta p^2 - 1)^{\frac{\lambda_+}{2}} C_{n-1}^{2-\lambda_+} \left(\frac{p\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 - \beta p^2}} \right) \right] \quad (4.23)$$

Le spectre d'énergie est extrait de (4.14) ce qui conduit à

$$\varepsilon_n = m^2 \omega^2 \hbar^2 \beta (n^2 + (2n + 1) \lambda) \quad (4.24)$$

En utilisant l'expression de λ donnée par l'équation (4.12) et ε_n , nous obtenons

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + \beta \frac{\omega^2 \hbar^2 n^2}{c^2} + 2n \frac{\omega \hbar}{mc^2}}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

En se développant au premier ordre en β , on obtient

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\omega \hbar}{mc^2}} \left[1 \pm \frac{\beta \hbar^2 \omega^2}{2c^2} \frac{n^2}{1 + 2n \frac{\hbar \omega}{mc^2}} \right] \quad (4.26)$$

Le premier terme dans (4.26) est le spectre d'énergie de l'oscillateur Dirac unidimensionnel habituel et le second terme représente la correction apportée par le modèle anti-Snyder. Ici on note la dépendance à n^2 qui est une caractéristique du confinement dur. Ceci est une conséquence naturelle puisque notre problème d'origine est mappé au mouvement d'une particule ponctuelle près de la surface d'une sphère qui est par essence un mouvement dans des puits potentiels. Dans notre cas, les limites du puits sont placées à $\pm \frac{\pi}{2m\hbar\omega\sqrt{\beta}}$. Une autre propriété intéressante des niveaux d'énergie donnée par (4.25) est que l'espacement des niveaux d'énergie devient constant pour les grands n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta E_n| = \hbar\omega mc\sqrt{\beta} \quad (4.27)$$

4.1 Propriétés statistiques

La fonction de partition de l'oscillateur Dirac, à une température T , dans le cadre du modèle anti-Snyder est donnée par

$$Z_{\tilde{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\tilde{\beta}mc^2 \sqrt{1 - \frac{\beta\omega^2\hbar^2 n^2}{c^2} + \frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}\right) \quad (4.28)$$

Pour éviter toute confusion avec la notation, nous avons fixé $\tilde{\beta} = 1/kT$. Le calcul de la sommation sur n est effectué à l'aide de la formule d'Euler donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) \quad (4.29)$$

où B_{2p} sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}(0)$ sont des dérivées de la fonction $f(x)$ à $x=0$.

En fixant $\gamma = \tilde{\beta}mc^2$ et $y = \sqrt{1 - \frac{\beta\omega^2\hbar^2 n^2}{c^2} + \frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}$, l'intégrale sur x dans (4.29) est alors donnée par

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1 - \beta m^2 c^2}} \int_1^{\infty} dy y \left(1 + \frac{\beta m^2 c^2}{1 - \beta m^2 c^2} y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma y} \quad (4.30)$$

En utilisant la série de puissance de la racine carrée, l'intégrale peut être évaluée avec le résultat

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1 + \beta m^2 c^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\beta m^2 c^2}{1 + \beta m^2 c^2}\right) \left(\frac{{}_n\Gamma(2n+2)}{\gamma^{2n+2}} - \frac{e^{-\gamma}}{(2n+2)} \Phi(1, 2n+2; \gamma) \right) \quad (4.31)$$

Dans le régime à haute température $\gamma < 1$, les contributions des premier et troisième termes en (4.29) et celle du deuxième terme de (4.31) sont négligeables par rapport au terme $\frac{1}{\gamma^{2n+2}}$.

Ensuite, nous obtenons

$$Z_{\tilde{\beta}} \simeq \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\left(\tilde{\beta}mc^2\right)^2 \sqrt{1 + \beta m^2 c^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \alpha^n \quad (4.32)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{\left(\tilde{\beta}mc^2\right)^2} \left(\frac{\beta m^2 c^2}{1 + \beta m^2 c^2} \right) \quad (4.33)$$

À ce stade, nous montrons que pour l'expansion à haute température, α est un petit paramètre.

En ne retenant ensuite que les termes de premier ordre dans le paramètre de déformation β , on obtient

$$Z_{\tilde{\beta}} = \frac{(kT)^2}{\hbar\omega mc^2} + \frac{3\beta (kT)^4}{\hbar\omega mc^4} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{mc^2}{kT} \right)^2 \right) \quad (4.34)$$

En utilisant le fait que $\left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{mc^2}{kT} \right)^2 \right) \approx 1$, nous obtenons enfin l'expansion à haute température de la fonction de partition

$$Z_{\tilde{\beta}} = \frac{(kT)^2}{\hbar\omega mc^2} + \frac{3\beta (kT)^4}{\hbar\omega mc^4} \quad (4.35)$$

Le premier terme est la fonction de partition de l'oscillateur Dirac habituel tandis que le second terme est la contribution provenant de la perturbation de l'espace anti-Snyder.

Chapitre 5

Oscillateur de Dirac en 2-1 dimension

5.1 Les solutions de la mécanique quantique habituelle

En absence des champs exterieur

L'oscillateur Dirac bidimensionnel est decrit par l'équation de Dirac suivante

$$\left\{ c\alpha_x \left(\hat{p}_x - im_0\omega\hat{\beta}\hat{x} \right) + c\alpha_y \left(\hat{p}_y - im_0\omega\hat{\beta}\hat{y} \right) + \hat{\beta}m_0c^2 \right\} \psi_D = E\psi_D \quad (5.1)$$

avec $\psi_D = (\psi_1\psi_2)^T$. En utilisant la représentation des matrices Dirac, l'équation (5.1) devient

$$\begin{pmatrix} m_0c^2 & c\hat{p}_- \\ c\hat{p}_+ & -m_0c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

ou bien

$$m_0c^2\psi_1 + c\hat{p}_-\psi_2 = E\psi_1 \quad (5.3)$$

$$c\hat{p}_+\psi_1 - m_0c^2\psi_2 = E\psi_2 \quad (5.4)$$

avec

$$\hat{p}_- = \hat{p}_x - i\hat{p}_y + im_0\omega(\hat{x} - i\hat{y}) \quad (5.5)$$

$$\hat{p}_+ = \hat{p}_x + i\hat{p}_y - im_0\omega(\hat{x} + i\hat{y}) \quad (5.6)$$

En combinant les équations (5.3) et (5.4), nous obtenons l'équation de spineur ψ_1

$$\left\{ c^2\hat{p}_-\hat{p}_+ - (E^2 - m_0^2c^4) \right\} \psi_1 = 0 \quad (5.7)$$

Nous allons chercher la solution de cette équation dans l'espace des moments où les opérateurs de position et de moment sont définis par

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} \quad (5.8)$$

$$\hat{p}_x = p_x, \hat{p}_y = p_y \quad (5.9)$$

Dans les coordonnées polaires, ces opérateurs sont définis par

$$p_x = p \cos \theta, p_y = p \sin \theta, p^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (5.10)$$

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (5.11)$$

$$\hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (5.12)$$

En remplaçant ces dernières expressions dans les expressions (5.5) et (5.6), on obtient

$$\hat{p}_- = e^{-i\theta} \left\{ p + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (5.13)$$

$$\hat{p}_+ = e^{i\theta} \left\{ p - \lambda \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (5.14)$$

où $\lambda = m_0 \omega \hbar$. A l'aide de ces expressions, on peut calculer le terme $\hat{p}_- \hat{p}_+$ apparaît dans l'équation (5.7)

$$\hat{p}_- \hat{p}_+ = p^2 - 2\lambda - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{\lambda^2}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\lambda^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} + 2i\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.15)$$

ce qui donne l'équation différentielle pour ψ_1

$$\left\{ p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2i\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} - 2\lambda - \zeta \right\} \psi_1 = 0 \quad (5.16)$$

avec

$$\zeta = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \quad (5.17)$$

On peut écrire la fonction du spineur comme suit

$$\psi_1(p, \theta) = f(p) e^{im\theta} \quad (5.18)$$

Dans ce cas l'équation (5.16) se transforme à une équation différentielle de deuxième ordre avec une seule variable

$$\left(\frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{m^2}{p^2} f(p) \right) + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0 \quad (5.19)$$

avec

$$\kappa^2 = \frac{2\lambda(m+1) + \zeta}{\lambda^2}, k^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (5.20)$$

Pour solutionner cette équation, nous introduisons le changement de fonction suivant

$$f(p) = p^m e^{-\frac{k}{2}p^2} F(p) \quad (5.21)$$

dans l'équation différentielle (5.19). Ce qui donne

$$F'' + \left(\frac{2m+1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(m+1) - \kappa^2] F = 0. \quad (5.22)$$

En utilisant, au lieu de p , la variable $t = kp^2$, cette dernière équation devient une équation de Kummer

$$t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{m+1-t\} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left\{ m+1 - \frac{\kappa^2}{4k} \right\} F = 0 \quad (5.23)$$

dont la solution est la fonction hypergéométrique confluyente

$$F = c_{n,m} {}_1F_1(-n; m+1; t) \quad (5.24)$$

avec

$$a = -n = \frac{1}{2}(m+1) - \frac{\kappa^2}{4k} \quad (5.25)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

En remplaçant (5.24) en (5.21) puis en (5.18), on obtient la solution du spineur

$$\psi_1(p, \theta) = c_{n,m} p^m e_1^{-\frac{k}{2}p^2} {}_1F_1(-n; |m|+1; kp^2) e^{im\theta} \quad (5.26)$$

En utilisant l'équation (??), on obtient La fonction d'onde associée totale définie par

$$\psi_{n,m}(p, \theta) = \left(\frac{1}{\frac{c\hat{p}_+}{E+m_0c^2}} \right) \psi_1 \quad (5.27)$$

Il facile de deduire l'expression du spectre d'énergie à partir de l'expression (5.25)

$$E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} n} \quad (5.28)$$

En présence d'un champ magnétique uniforme

Maintenant, en présence d'un champ magnétique uniforme, $\vec{B} = (0, 0, B)$, l'équation de Dirac s'écrit

$$\left\{ c\alpha_x \left[\left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{\beta}\hat{x} \right] + c\alpha_y \left[\left(\hat{p}_y + \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{\beta}\hat{y} \right] + \hat{\beta}m_0c^2 \right\} \psi_D = \epsilon\psi_D \quad (5.29)$$

où le vecteur potentiel est choisi comme

$$\vec{A} = \left(-\frac{B.y}{2}, \frac{B.x}{2}, 0 \right) \quad (5.30)$$

en utilisant la définition des matrices de Dirac, on écrit

$$\begin{pmatrix} m_0c^2 & c\tilde{p}_- \\ c\tilde{p}_+ & -m_0c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \bar{E} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

avec

$$\tilde{p}_- = \left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) + im_0\omega\hat{x} - i \left(\hat{p}_y - \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) + m_0\omega\hat{y} \quad (5.32)$$

$$\tilde{p}_+ = \left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{x} + i \left(\hat{p}_y - \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) + m_0\omega\hat{y} \quad (5.33)$$

ou

$$\tilde{p}_- = \hat{p}_x - i\hat{p}_y + im_0\tilde{\omega} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad (5.34)$$

$$\tilde{p}_+ = \hat{p}_x + i\hat{p}_y - im_0\tilde{\omega} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad (5.35)$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{\omega_c}{2}, \omega_c = \frac{|e|B}{m_0c^2} \quad (5.36)$$

où ω_c est une fréquence cyclotron. On remarque que l'équation de l'oscillateur de Dirac en (2 + 1) dimensions en présence d'un champ magnétique peut être réduit à la solution de celle-ci en absence de champ magnétique mais avec une fréquence angulaire réduite $\tilde{\omega}$, et ainsi, le seul rôle d'un champ magnétique consiste à réduire la fréquence angulaire, et toute la dynamique reste inchangée. Ensuite, et en utilisant la même méthode que celle décrite ci-dessus, les solutions propres sont

$$(\psi_1)_{n,m}(p, \theta) = c_{n,m} p^m e^{-\frac{k}{2}p^2} F_1(-n; |m| + 1; kp^2) e^{im\theta} \quad (5.37)$$

Le spectre d'énergie correspondant à ces solutions est donné par

$$\bar{E}_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \tilde{\omega}}{m_0 c^2} n} \quad (5.38)$$

La fonction propre totale correspondante est donnée par

$$\psi_{n,m}(p, \theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c\hat{p}_+}{\bar{E} + m_0 c^2} \end{pmatrix} \psi_1 \quad (5.39)$$

L'équation concernant la valeur propre est en bon accord avec celle obtenue dans la littérature.

5.2 Solution dans le modele anti-snyder

Solution en absence d'un champ extérieur

Dans ce cas, l'équation (5.2) devient

$$\begin{pmatrix} m_0 c^2 & c\hat{P}_- \\ c\hat{P}_+ & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

ce qui donne le system d'équation suivant

$$m_0 c^2 \psi_1 + c\hat{P}_- \psi_2 = E \psi_1 \quad (5.41)$$

$$c\hat{P}_+ \psi_1 - m_0 c^2 \psi_2 = E \psi_2 \quad (5.42)$$

la combinaison entre ces deux equations nous donne

$$\hat{P}_- \hat{P}_+ \psi_1 = \varepsilon^2 \psi_1 \quad (5.43)$$

$$\hat{P}_+ \hat{P}_- \psi_2 = \varepsilon^2 \psi_2 \quad (5.44)$$

avec

$$\hat{P}_- = \hat{p}_x - i\hat{p}_y + \lambda (1 - \beta p^2) \left(\frac{\partial}{\partial p_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \quad (5.45)$$

$$\hat{P}_+ = \hat{p}_x + i\hat{p}_y - \lambda (1 - \beta p^2) \left(\frac{\partial}{\partial p_x} + i \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \quad (5.46)$$

En utilisant la même démarche suivi dans la solution dans le cas habituel, on écrit les expressions (5.45) et (5.46) dans les coordonnées polaires comme suit

$$\hat{P}_- = e^{-i\theta} \left\{ p + \lambda (1 - \beta p^2) \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (5.47)$$

$$\hat{P}_+ = e^{i\theta} \left\{ p - \lambda (1 - \beta p^2) \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (5.48)$$

On remarque que le moment angulaire de l'opérateur L_z , dans le modele anti-snyder, est défini par

$$\hat{L}_z = \frac{\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x}{1 - \beta p^2} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.49)$$

et satisfait les relations de commutations suivantes avec \hat{P}_\pm

$$\left[\hat{P}_\pm, \hat{L}_z \right] = \pm \hbar \hat{P}_\pm \quad (5.50)$$

Dans ce cas on peut montrer facilement que l'opérateur the moment angulaire totale \hat{J}_z commute avec l'hamiltonien de notre système (l'équation (5.40)). Ce qui montre que dans le modele anti-Snyder, nous avons un moment angulaire total conservé. Ces remarques nous permet d'ecrire les fonctions d'onde sous forme de multiplication d'une partie radiale et une partie angulaire

$$\psi_1 = U_m^{(1)} e^{im\varphi} \quad (5.51)$$

$$\psi_2 = U_{m+1}^{(2)} e^{i(m+1)\varphi} \quad (5.52)$$

En remplaçant ces fonctions dans les équations (5.43) et (5.44), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 U_m^{(1)}(p) &= \left(p^2 + 2\lambda (1 - \beta p^2) \left(m + \beta\lambda \left(p \frac{\partial}{\partial p} - m \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 (1 - \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{m^2}{p^2} \right) \right) U_m^{(1)}(p), \end{aligned} \quad (5.53)$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 U_m^{(2)}(p) &= \left(p^2 + 2\lambda (1 - \beta p^2) \left(m + 1 + \beta\lambda \left(p \frac{\partial}{\partial p} + m + 1 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 (1 - \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{(m+1)^2}{p^2} \right) \right) U_m^{(2)}(p). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ces deux équations peuvent être écrit sous la forme suivante

$$\left\{ -f(p) \frac{d^2}{dp^2} + g(p) \frac{d}{dp} + h_i(p) \right\} U_m^{(i)}(p) = \frac{\varepsilon^2}{\beta\lambda^2} U_m^{(i)}(p) \quad (5.55)$$

où

$$f(p) = \frac{(1 - \beta p^2)^2}{\beta} \quad (5.56)$$

$$g(p) = (1 - \beta p^2) \left(2p - \frac{1 - \beta p^2}{\beta p} \right) \quad (5.57)$$

$$h_1(p) = \frac{p^2}{\beta \lambda^2} + 2(m + 1 + m\beta\lambda) \frac{(1 - \beta p^2)}{\beta \lambda} + \frac{(1 - \beta p^2)^2 m^2}{\beta p^2} \quad (5.58)$$

$$h_2(p) = \frac{p^2}{\beta \lambda^2} + 2(m + m\beta\lambda + \beta\lambda) \frac{(1 - \beta p^2)}{\beta \lambda} + \frac{(1 - \beta p^2)^2 (m + 1)^2}{\beta p^2} \quad (5.59)$$

Pour solutionner cette équation, nous allons transformer l'équation (5.55) à une équation de type Schroedinger. Pour cela nous introduisons les transformations suivante

$$U_m^{(i)}(p) = \rho(p) \varphi_m^{(i)}(p), q = \int \frac{1}{\sqrt{f(p)}} dp \quad (5.60)$$

où

$$\rho(p) = e^{\int \chi(p) dp}, \chi(p) = \frac{2g + f'}{4g} = -\frac{1}{2p} \quad (5.61)$$

ce qui donne

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tanh(q), \quad \rho(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (5.62)$$

Sous ces transformations, l'équation (5.55) devient

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + V_i(q) \right) \varphi_m^{(i)}(p) = \xi \varphi_m^{(i)}(p) \quad (5.63)$$

avec

$$k^2 = \frac{\varepsilon^2 - \frac{1}{\beta}}{4\beta^2\lambda^2} \quad (5.64)$$

et

$$V_1(p) = \frac{(2 + \beta\lambda + 2m\beta\lambda)(2 + 3\beta\lambda + 2m\beta\lambda)}{4\beta^2\lambda^2} \frac{1}{\sinh^2(q)} + \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\cosh^2(q)} \quad (5.65)$$

$$V_2(p) = \frac{(2 - \beta\lambda + 2m\beta\lambda)(2 + \beta\lambda + 2m\beta\lambda)}{4\beta^2\lambda^2} \frac{1}{\sinh^2(q)} + \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\cosh^2(q)} \quad (5.66)$$

On remarque que les potentiels (5.65) et (5.66) sont de type Poschl-Teller II et ont la forme

$$V_i(p) = \frac{A_i(A_i + 1)}{\sinh^2(q\lambda)} + \frac{B_i(B_i - 1)}{\cosh^2(q)} \quad (5.67)$$

avec

$$A_1(A_1 + 1) = \frac{(2 + \beta\lambda + 2m\beta\lambda)(2 + 3\beta\lambda + 2m\beta\lambda)}{4\beta^2\lambda^2} \quad (5.68)$$

$$B_1(B_1 - 1) = m^2 - \frac{1}{4} \quad (5.69)$$

et

$$A_2(A_2 + 1) = \frac{(2 - \beta\lambda + 2m\beta\lambda)(2 + \beta\lambda + 2m\beta\lambda)}{4\beta^2\lambda^2} \quad (5.70)$$

$$B_2(B_2 - 1) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{3}{2}\right) \quad (5.71)$$

Le systeme d'équations (5.63) est solvable et ses solutions sont données par

$$\varphi_n^{(i)}(p) = N (\cosh(2q) - 1)^{\frac{B_i}{2}} \cdot (\cosh(2q) + 1)^{\frac{A_i}{2}} \cdot {}_1F_2\left(n, B_i - A_i + n, B_i + \frac{1}{2}, \frac{1 - \cosh(2q)}{2}\right) \quad (5.72)$$

où ${}_1F_2\left(n, B_i - A_i + n, B_i + \frac{1}{2}, \frac{1 - \cosh(2q)}{2}\right)$ est la fonction hypergeometrique et N est une constante de normalisation. Pour assurer la condition de normalisation de la fonction $\varphi_n^{(i)}(p)$, il faut ajouter la condition $A_i \succ B_i \succ 0$.

Le spectre d'énergie est donné par

$$k_n = (A_i - B_i - 2n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \prec \frac{A_i - B_i}{2} \quad (5.73)$$

Les solutions de systeme d'équations (5.68, 5.69, 5.70, 5.71) sont données par

$$A_1 = \left(\frac{1}{\beta\lambda} + m + \frac{1}{2}\right), \quad B_1 = m + \frac{1}{2} \quad (5.74)$$

$$A_2 = \frac{1}{\beta\lambda} + m - \frac{1}{2}, \quad B_2 = m + \frac{3}{2} \quad (5.75)$$

En remplaçant ces resultats dans (5.72), on obtient les fonction d'ondes suivantes

$$\varphi_n^{(1)}(p) = N (\cosh(2q) - 1)^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \cdot (\cosh(2q) + 1)^{\frac{\frac{1}{\beta\lambda} + m + \frac{1}{2}}{2}} \cdot {}_1F_2 \left(n, -\frac{1}{\beta\lambda} + n, m + 1, \frac{1 - \cosh(2q)}{2} \right) \quad (5.76)$$

$$\varphi_n^{(2)}(p) = N (\cosh(2q) - 1)^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \cdot (\cosh(2q) + 1)^{\frac{\frac{1}{\beta\lambda} + m - \frac{1}{2}}{2}} \cdot {}_1F_2 \left(n, 2 - \frac{1}{\beta\lambda} + n, m + 2, \frac{1 - \cosh(2q)}{2} \right) \quad (5.77)$$

En remplaçant ses fonctions en (5.60) puis en (5.51) et (5.52), on obtient les spineurs de l'oscillateur de Diarc dans le modele anti-Snyder

$$\varphi_n^{(1)}(p) = N \cdot \beta^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{p^m}{(1 - \beta p^2)^{\frac{1}{2\beta\lambda} + m + \frac{1}{2}}} \cdot {}_1F_2 \left(n, -\frac{1}{\beta\lambda} + n, m + 1, -\frac{\beta p^2}{1 - \beta p^2} \right) \quad (5.78)$$

$$\varphi_n^{(2)}(p) = N \cdot \beta^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \cdot \frac{p^{m+1}}{(1 - \beta p^2)^{\frac{1}{2\beta\lambda} + m + \frac{1}{2}}} \cdot {}_1F_2 \left(n, 2 - \frac{1}{\beta\lambda} + n, m + 2, -\frac{\beta p^2}{1 - \beta p^2} \right) \quad (5.79)$$

Solution en presence d'un champ magnetique uniforme

En présence d'un champ magnétique uniforme, l'équation (??) devient

$$\left\{ c\alpha_x \left[\left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{\beta}\hat{x} \right] + c\alpha_y \left[\left(\hat{p}_y - \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{\beta}\hat{y} \right] + \hat{\beta}m_0c^2 \right\} \psi_D = \bar{\epsilon}\psi_D \quad (5.80)$$

et par conséquent, l'équation (5.2) prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} m_0c^2 & c\tilde{P}_- \\ c\tilde{P}_+ & -m_0c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\tilde{p}_- = \left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) + im_0\omega\hat{x} - i \left(\hat{p}_y - \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) + m_0\omega\hat{y} \quad (5.81)$$

$$\tilde{p}_+ = \left(\hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) - im_0\omega\hat{x} + i \left(\hat{p}_y - \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) + m_0\omega\hat{y} \quad (5.82)$$

ou

$$\tilde{p}_- = \hat{p}_x - i\hat{p}_y + im_0\tilde{\omega}(\hat{x} - i\hat{y}) \quad (5.83)$$

$$\tilde{p}_+ = \hat{p}_x + i\hat{p}_y - im_0\tilde{\omega}(\hat{x} + i\hat{y}) \quad (5.84)$$

avec

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{\omega_c}{2}, \omega_c = \frac{|e|B}{m_0c^2} \quad (5.85)$$

où ω_c est une fréquence cyclotron. Ainsi, comme dans le cas ci-dessus, l'oscillateur Dirac (2 + 1) dans un champ magnétique peut être mappé sur celui-ci en l'absence de champ magnétique avec une fréquence angulaire réduite $\tilde{\omega}$. C-à-d, les fonction d'ondes s'obtiennent en remplaçant ω par $\tilde{\omega}$ dans les expressions (5.78) et (??) et sont données par

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(p) &= N \cdot \beta^{\frac{m}{2} + \frac{1}{4}} \frac{p^m}{(1 - \beta p^2)^{\frac{1}{2\beta m \tilde{\omega} \hbar} + m + \frac{1}{2}}} \cdot {}_1F_2 \left(n, -\frac{1}{\beta m \tilde{\omega} \hbar} + n, m + 1, -\frac{\beta p^2}{1 - \beta p^2} \right) \\ \varphi_n^{(2)}(p) &= N \cdot \beta^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \frac{p^{m+1}}{(1 - \beta p^2)^{\frac{1}{2\beta m \tilde{\omega} \hbar} + m + \frac{1}{2}}} \cdot {}_1F_2 \left(n, 2 - \frac{1}{\beta m \tilde{\omega} \hbar} + n, m + 2, -\frac{\beta p^2}{1 - \beta p^2} \right) \end{aligned}$$

Même chose pour le spectre d'énergie qui s'obtient en remplaçant ω par $\tilde{\omega}$ dans les expressions (5.73), (5.74) et (5.75)

$$k_n = \frac{\varepsilon^2 - \frac{1}{\beta}}{4\beta (m\tilde{\omega}\hbar)^2} = (A_i - B_i - 2n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots < \frac{A_i - B_i}{2} \quad (5.86)$$

Les solutions de systme d'équations (5.68, 5.69, 5.70, 5.71) sont données par

$$A_1 = \left(\frac{1}{\beta m \tilde{\omega} \hbar} + m + \frac{1}{2} \right), \quad B_1 = m + \frac{1}{2} \quad (5.87)$$

$$A_2 = \frac{1}{\beta m \tilde{\omega} \hbar} + m - \frac{1}{2}, \quad B_2 = m + \frac{3}{2} \quad (5.88)$$

Comme décrit ci-dessus, le premier terme est le spectre d'énergie de l'oscillateur Dirac bidimensionnel habituel et le second terme représente la correction due à la présence de la longueur minimale.

La dépendance à n^2 est une signature de l'emprisonnement dur. Pour de grandes valeurs de n , on obtient

$$\bar{\varepsilon}_n = \hbar \Omega n, \quad \Omega = m_0 c \tilde{\omega}$$

qui peut être considéré comme un oscillateur harmonique non relativiste.alisée.

Conclusion

L'objet central de ce mémoire était la dérivation des fonctions d'ondes et le spectre d'énergie de l'oscillateur à 1D et 2D de Dirac dans le cadre du modèle anti-Snyder.

Le deuxième chapitre contient deux parties. Dans la première partie, on a donné un rappel sur l'équation de Dirac puis on a dérivé sa solution pour le cas d'une particule libre.

Dans le troisième chapitre nous avons donné la formulation de la mécanique quantique dans le cadre du modèle anti-Snyder. Ce principe stipule à utiliser une relation de dispersion modifiée ce qui conduit à une relation de commutation et une relation d'incertitude modifiée et aussi à l'existence d'une impulsion maximale.

Dans le chapitre 3, en utilisant la représentation de l'espace des impulsions, nous avons résolu exactement l'équation de Dirac pour l'oscillateur de Dirac à une dimension dans le cadre du modèle anti-Snyder. Ensuite, nous avons obtenus les valeurs propres et les fonctions propres. Contrairement à l'oscillateur Dirac habituel à une dimension, les niveaux d'énergie sont dépendants de n^2 comme les niveaux d'énergie d'une particule confinée dans un potentiel de puits. L'oscillateur Dirac dans le modèle anti-Snyder dans un bain thermique est également étudié. Dans le régime à hautes températures, l'énergie moyenne et la capacité thermique sont plus fortes que celles de l'oscillateur de Dirac ordinaire, en raison de la présence de l'impulsion maximale,

Dans le chapitre 4, nous avons résolu exactement l'équation de Dirac pour l'oscillateur de Dirac en deux dimensions en présence d'un champ magnétique externe dans le cadre du modèle anti-Snyder. Les solutions propres sont obtenues en utilisant la méthode du potentiel de POSCHLLER pour résoudre une équation de Dirac bidimensionnelle dans un champ magnétique. Les niveaux d'énergie, montrent une dépendance à n^2 qui décrit un confinement dur. Pour de grandes valeurs de n , nos calculs deviennent comme un oscillateur harmonique non relativiste.

Bibliographie

- [1] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys.Rev.D52, 1108 (1995), arXiv :hep-th/9412167 [hep-th].
- [2] A. Kempf, J.Phys.A30, 2093 (1997), arXiv :hep-th/9604045 [hep-th].
- [3] J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.Lett.88, 190403(2002), arXiv :hep-th/0112090 [hep-th].
- [4] J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.D67, 044017(2003), arXiv :gr-qc/0207085 [gr-qc].
- [5] J. Cortes and J. Gamboa, Phys.Rev.D71, 065015 (2005),arXiv :hep-th/0405285 [hep-th].
- [6] G. Amelino-Camelia, Phys.Lett.B510, 255 (2001),arXiv :hep-th/0012238 [hep-th].
- [7] S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, Phys.Lett.B690,407 (2010), arXiv :1005.3368 [hep-th].
- [8] P. Pedram, Phys.Lett.B702, 295 (2011).
- [9] M. Maggiore, Phys.Lett.B319, 83 (1993), arXiv :hep-th/9309034 [hep-th].
- [10] M. V. Battisti, Phys.Rev.D79, 083506 (2009).
- [11] S.Mignemi,Phys.Rev.D84,025021(2011),arXiv :1104.0490 [hep-th].
- [12] C.-L. Ching, R. R. Parwani, and K. Singh, Phys.Rev.D86, 084053 (2012), arXiv :1204.1642 [hep-th].
- [13] C. L. Ching and W. K. Ng, Mod.Phys.Lett.A29, 1450080(2014), arXiv :1311.3734 [hep-th].
- [14] C. L. Ching and W. K. Ng, Phys.Rev.D88, 084009(2013).
- [15] C.-L. Ching and R. R. Parwani, Mod.Phys.Lett.A28,1350061 (2013).
- [16] D. Ito, K. Mori, and E. Carriere, Nuovo Cimento A51,1119 (1967).
- [17] P. Cook, Lett. Nuovo Cim.1S2, 419 (1971).
- [18] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, Journal of Physics A :Mathematical and General22, L817 (1989).
- [19] J. Benitez, R. Martinez y Romero, H. Nunez-Yepe, andA. Salas-Brito, Phys.Rev.Lett.64, 1643 (1990).
- [20] P. Rozmej and R. Arvieu, J.Phys.A32, 5367 (1999),arXiv :quant-ph/9903073 [quant-ph].

- [21] E. Sadurni, J. M. Torres, and T. H. Seligman, *J.Phys.*43, 285204 (2010), arXiv :0902.1476 [quant-ph].
- [22] B. P. Mandal and S. Verma, *Phys.Lett.A*374, 1021(2010), arXiv :0907.4544 [hep-th].
- [23] C. Quimbay and P. Strange, (2013), arXiv :1312.5251[quant-ph].
- [24] Y.-L. Hou, Z.-G. Yuan, L.-B. Kong, Z.-W. Long, and J. Jing, *International Journal of Theoretical Physics*53,3787 (2014).
- [25] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.*99, 123602 (2007).

Abstrac:

In this thesis we determine the energy Eigen values, eigen functions and the high temperature thermodynamic properties of the Dirac oscillator in one dimension within the Anti-Snyder modified uncertainty relation characterized by a momentum cut-off ($P_{max} = 1/\sqrt{\beta}$), where β is the deformation parameter of the modified commutation relation $[X, P] = i(1 - \beta p^2)$. Also we obtain exact solutions of the (2+1) dimensional Dirac oscillator in a homogeneous magnetic field within the Anti-Snyder modified uncertainty.

Resumé:

Dans ce mémoire nous déterminons les valeurs propres d'énergie, les fonctions propres et les propriétés thermodynamiques à haute température de l'oscillateur de Dirac à une dimension dans le model anti-Snyder caractérisé par un cut off d'impulsion ($P_{max} = 1 / \sqrt{\beta}$), où β est le paramètre de déformation de la relation de commutation modifiée $[X, P] = i (1 - \beta P^2)$. Nous obtenons également les solutions exactes de l'oscillateur de Dirac à (2 + 1) dans un champ magnétique homogène au sein de modèle anti-Snyder.

المخلص

في هذه المذكرة قمنا بحساب القيم الذاتية للطاقة ولدوال و كذلك الخصائص الديناميكية حرارية لهزاز Dirac في بُعد واحد وذلك وفق نموذج Anti-Snyder التي تتميز ب ($P_{max} = 1 / \sqrt{\beta}$) ، حيث β هي معامل التشوه لعلاقة . كما حصلنا على الحلول الدقيقة لهزاز ديراك في البعد 2 في مجال مغناطيسي متجانس ضمن النموذج Anti-Snyde.