Chapitre I : Modèle analytique d'une machine synchrone à aimants sinusoïdaux

II.1.Introduction

Il existe plusieurs méthodes permet de déterminer la distribution de champ magnétique dans les machines à aimant comme les méthodes analytique et les méthodes numérique. Les méthodes analytiques sont des outils utiles pour l'évaluation de la performance électrique du moteur [13] il basée sur la résolution des équations aux dérives partielles de maxwell.

Dans ce chapitre, notre travail consiste à la présentation de modèle bidimensionnel base sur la résolution analytique des équations maxwell et utilisant la formulation en potentiel vecteur pour calculer les champs magnétique dus aux aimant.

II.2.Formulations des Équations de Maxwell

Le fonctionnement des machines électriques est basé essentiellement sur les phénomènes de distribution spatio-temporels du champ magnétique. L'analyse de ces phénomènes conduit à la résolution des équations de Maxwell dans un domaine tridimensionnel. En général, la modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents s'effectue à partir d'un modèle magnétostatique justifié par la nature des phénomènes électromagnétique. Celle-ci est traduite par les équations suivantes [14, 15, 16]:

- Équation de conservation de flux magnétique

$$div\left(\vec{B}\right) = 0 \tag{II.1}$$

- Les deux équations de couplage
  Équation de Maxwell – Faraday

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = -\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}} \tag{II.2}$$

  Équation de Maxwell – Ampère

$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{J} \tag{II.2}$$

- Propriétés des matériaux et des milieux

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{II.3}$$

Avec $\mu_0$représente la perméabilité magnétique du vide et μ_r représente la perméabilité relative du milieu considéré.

Les aimants magnétiquement rigides, actuellement employés dans les machines électriques, possèdent une caractéristique de désaimantation linéaire dans la zone normale d'utilisation **[16]**. Pour les milieux aimantés cette dernière équation est donnée par :

$$\vec{B} = \mu_0 \, \mu_r \vec{H} + \vec{M} \tag{II.4}$$

Où$\vec{B}$,$\vec{H}$, *J*, *E et* $\vec{M}$ désignent respectivement l'induction magnétique, l'excitation magnétique, la densité volumique de courant, le champ électrique et l'aimantation des aimants (induction rémanente en présence des aimants).

II.2.2. Formulation en potentiel vecteur magnétique

Une grandeur vectorielle $\vec{A}$ appelée potentiel vecteur magnétique. On dit que l'induction $\vec{B}$ dérivée de $\vec{A}$ et on définit ce dernier comme étant un vecteur satisfaisant la relation (II.5) :

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \tag{II.5}$$

L'utilisation de la formulation en potentiel vecteur magnétique et la combinaison des équations (II.1) à (II.5) (II.6) donnent l'équation générale de répartition du potentiel qui est décrite par l'expression suivante :

$$rot\left(\frac{1}{\mu} \, rot \, \vec{A}\right) = \vec{j} + rot\left(\frac{1}{\mu}\vec{M}\right) \tag{II.6}$$

On a

$$rot\left(\frac{1}{\mu} \, rot \, \vec{A}\right) = grad\left(div\left(\vec{A}\right)\right) - \Delta\left(\vec{A}\right)$$

Dont l'unicité est assurée en imposantdiv $\left(\vec{A}\right) = 0$, appelée la jauge de coulomb

Donc

$$\Delta\left(\vec{A}\right) = -\vec{j} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial M_r}{\partial \theta} - M_\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -\vec{j} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial M_r}{\partial \theta} - M_\theta\right) \tag{II.7}$$

OùM_r ,M_θ représentent respectivement les composantes radiale et tangentielle de l'aimantation.
À condition que les courants induits soient négligés dans la zone des aimants, l'équation (II.8) s'écrit en coordonnées polaire, de la façon suivante :

- Dans la région des aimants

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial M_r}{\partial \theta} - M_\theta\right) \tag{II.8}$$

- Dans l'entrefer

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}=0 \qquad \text{(II.9)}$$

Le calcul de champ revient donc à résoudre des équations aux dérivées partielles, du potentiel vecteur dans l'intervalle$[R_1, R_3]$.Le principe de la méthode de résolution consiste à rechercher les expressions analytiques du potentiel vecteur dans les différentes zones du domaine d'étude. Des conditions supplémentaires sur les limites du domaine d'étude doivent être alors satisfaites.

II.2.3. Hypothèses et modelé étude

Le modèle d'étude est bidimensionnel. Ceci simplifie considérablement le problème d'optimisation de cette structure. La machine étudiée est donc supposée suffisamment longue pour que les effets de l'extrémité puissent être négligés et que l'étude puisse être effectuée dans un plan radial [14] Le potentiel vecteur $\vec{A}$ et la densité de courant$\vec{J}_s$ n'auront dans ce qu'une seule composante dirigée suivant l'axe (Oz) de sorte que :

$$\vec{J}_s=\begin{bmatrix}0\\0\\J_s(x,y)\end{bmatrix},\vec{A}=\begin{bmatrix}0\\0\\A(x,y)\end{bmatrix},\vec{B}=rot(\vec{A})=\begin{bmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}\\\frac{\partial A_z}{\partial x}\\0\end{bmatrix} \qquad \text{(II.10)}$$

Les expressions des inductions radiales et tangentielle se déduisent par :

$$\begin{cases}B_r=\dfrac{\partial A(r,\theta)}{r\partial\theta}\\B_\theta=-\dfrac{\partial A(r,\theta)}{\partial r}\end{cases} \qquad \text{(II.11)}$$

Pour analyser les performances de la structure étudiée suivant l'objectif visé, nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Modèle bidimensionnel en coordonnées polaire.
- La perméabilité du fer statorique est supposée très grande $\mu_{fer}\longrightarrow\infty$
- Les courants de Foucault dans le fer sont négligés par suite du feuilletage des culasses.
- La caractéristique de désaimantation de l'aimant est supposée linéaire. Ce qui est le cas des aimants modernes utilisés dans les machines électriques.

- On suppose que la machine est suffisamment longue pour pouvoir négliger les effets de bout et on considère que le problème est invariant par translation suivant le plan d'étude. Ce qui ramène l'étude de la machine se résumer à l'étude de sa section axiale.

II.3. Modèle Analytique

Dans la modélisation adoptée, la perméabilité du fer est supposée infinie. En négligeant l'effet de la denture statorique, l'entrefer magnétique (région des aimants et l'entrefer mécanique) de la machine est considéré lisse. Sous ces conditions, le domaine d'étude, dans un système en coordonnées polaire (r, θ) , est réduit à deux zones concentriques :

- $[R_1, R_2]$: zone (I) contenant les aimants.
- $[R_2, R_3]$: zone (II) contenant l'entrefer mécanique.

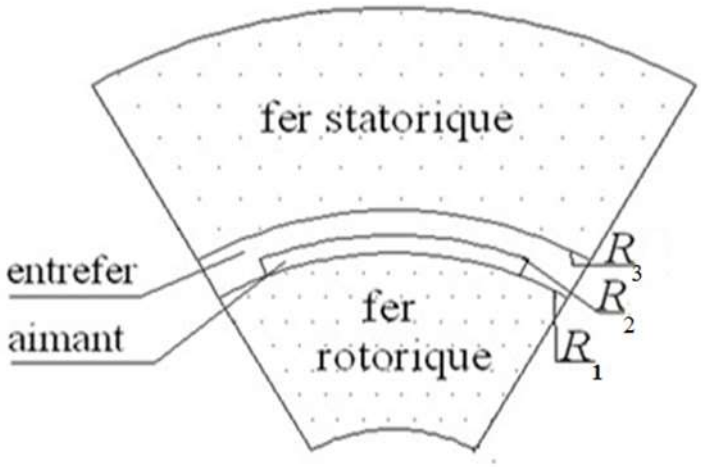


Fig. II. 1: présentation de Structure étudiée sur un pas polaire

Vu que les machines électriques sont constituées des matériaux différents et comme les lignes de champs sont continués à travers la machine, il est utile de définir les conditions de passage du champ entre les interfaces communes entre deux domaines différents.

- Condition de Continuité de la composante normale de l'induction magnétique :

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{B_2} = 0 \qquad \text{(II.12)}$$

- Condition de Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{n_2} \wedge \overrightarrow{H_2} = \vec{J}_s \qquad \text{(II.13)}$$

Avec

$\vec{J}_s$: Densité superficielle de courants

II.3.1. Modélisation des sources

II.3.1.1Modélisation des aimants permanents

Le rotor de la machine met en œuvre 2p pôles identiques symétriques constitués d'aimants sous forme de "tuiles fractionnées" ou non et portant une aimantation M.

Le vecteur d'aimantation s'exprime en coordonnées polaire comme suit :

$$\vec{M} = M_r \overrightarrow{a_r} + M_\theta \overrightarrow{a_\theta} \tag{II.14}$$

Les composantes radiales et tangentielles de l'aimantation elles sont exprimées par :

$$\begin{cases} M_r = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} M_{rn} \cos(np\theta) \\ M_\theta = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} M_{\theta n} \sin(np\theta) \end{cases} \tag{II.15}$$

Où p désigne le nombre de paires de pôles et où θ est l'écart angulaire relatif au centre d'un aimant, M_{rn} et $M_{\theta n}$ sont respectivement les amplitudes des harmoniques de rang n des composantes M_r et M_θ

- On obtient pour une aimantation sinusoïdale :

$$M_{rn} = \frac{4M\alpha_p \cos\left(np\frac{\pi}{2}\alpha_p\right)}{\pi[(np)^2 - 1]} \tag{II.16}$$

$$M_{\theta n} = \pm \frac{4Mn\ {\alpha_p}^2 \cos\left(np\frac{\pi}{2}\alpha_p\right)}{\pi[(np)^2 - 1]} \tag{II.17}$$

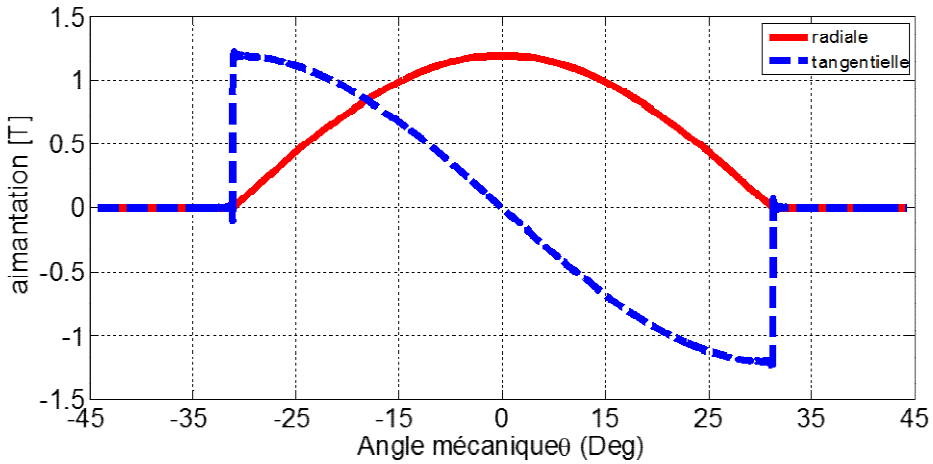


Fig. II. 2: Représentation spatiale de l'aimantation sinusoïdale

II.3.1.2. Modélisation des courantes de sources

a- Alimentation sinusoïdale

Pour une alimentation sinusoïdale, les courants triphasés sinusoïdaux d'amplitude I_m sont exprimés par :

$$\begin{cases} i_a = I_m \cos(\omega t) \\ i_b = I_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c = I_m \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \text{(II.18)}$$

Les densités superficielles équivalentes, définies dans le repère statorique au niveau du rayon d'alésageR_3, s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J_a(t,\theta_s) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty} J_n \cos(n\omega t + np\theta_s) \\ J_b(t,\theta_s) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty} J_n \cos\left(n\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + np\ {}_s\right) \\ J_c(t,\theta_s) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty} J_n \cos\left(n\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + np\ {}_s\right) \end{cases} \quad \text{(II.19)}$$

Avec

$$J_n = \frac{4\mathrm{pNI}_m}{\pi \mathrm{R}_3} k_{bn}$$

N étant le nombre de spires dans une encoche et k_{bn} le coefficient de bobinage de l'enroulement statorique exprimé par :

$$k_{bn} = k_{fn} k_{rn} k_{in} k_{dn} \quad \text{(II.20)}$$

Les différents coefficients sont exprimés ainsi :

- k_{fn} coefficient de filtrage :

$$k_{fn} = \frac{sin(npb_0/2)}{np\ {}_0/2}$$

Où b_0 représente l'Ouverture d'encoche.

- k_{dn} coefficient de distribution :

$$k_{dn} = \frac{sin(nqp\ \tau_d/2)}{q\ sin(nqp\ \tau_d/2)}$$

Où τ_d pas dentaire

- k_{rn} coefficient de raccourcissement :

$$k_{rn} = sin\left(\frac{np\beta}{2}\right)$$

βReprésentel'angle de raccourcissement

- k_{in} coefficient d'inclinaison

$$k_{in} = sin\left(\frac{n\gamma_i}{n\gamma_i}\right)$$

γ_i Représente l'angle de décalage horizontal de l'axe d'une encoche par rapport à l'axe de la machine.
La densité résultante équivalente au système de courants triphasés s'écrit alors comme suit :

$$J(\theta_s, t) = \frac{3}{2}\sum_{n=1.3.5...}^{\infty} J_n\, cos(v\omega t + np\theta_s) \qquad \text{(II.21)}$$

Avec : $\upsilon = \begin{cases} -1\ si\ n = 6m+1 \\ 1\ si\ n = 6m-1 \end{cases}$
Où seules les harmoniques n= $6m \pm 1$ sont non nulles.

b- Alimentation non sinusoïdale

Les courants triphasés non sinusoïdaux d'amplitude I_k sont exprimés par :

$$\begin{cases} i_a(t) = \sum_{k=1.3.5...}^{\infty} I_k\, cos(k\omega t) \\ i_b(t) = \sum_{k=1.3.5...}^{\infty} I_k\, cos\left(k\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ i_c(t) = \sum_{k=1.3.5...}^{\infty} I_k\, cos\left(k\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{cases} \qquad \text{(II.22)}$$

Où I_k est l'amplitude de l'harmonique de temps d'ordre k

Pour une alimentation par des courants de forme d'onde rectangulaire 120°, ce courant s'exprime ainsi :

$$I_k = \frac{4I_m}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

Les densités superficielles équivalentes s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J_a(t, \theta_s) = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} J_{n,k}\, sin(k\omega t)\, cos(np\theta_s) \\ J_b(t, \theta_s) = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} J_{n,k}\, sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) cos\left(np\ _s - \frac{2\pi}{3}\right) \\ J_c(t, \theta_s) = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} J_{n,k}\, sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) cos\left(np\theta_s + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \qquad \text{(II.23)}$$

Avec

$$J_{n,k} = \frac{4\mathrm{pNI}_m}{\pi \mathrm{R}_3} k_{bn}$$

II.4. Détermination des potentiels vecteurs

À partir la résolution d'équation (II.10), on peut déterminer le vecteur potentiel dans les différentes parties de la machine.

II.4.1. Potentiel vecteur créé par les aimants

La résolution de ces équations différentielles se effectuée par une méthode analytique basée sur la séparation de variables, La structure géométrique et la disposition des aimants suggèrent des solutions qui prennent la même forme dans les zones (I) et (II).

- Dans l'entrefer mécanique (région I) :

$$\Delta AI(r,\theta) = 0 \tag{II.24}$$

Donc

$$\frac{d^2AI(r,\theta)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dAI(r,\theta)}{dr} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d^2AI(r,\theta)}{d\theta^2} = 0 \tag{II.25}$$

Ainsi, le potentiel vecteur $AI(r,\theta)$ est de la forme suivante :

$$AI(r,\theta) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} R_I(r)\, sin(np\theta) \tag{II.26}$$

En remplace l'équation (II.21) dans l'équation (II.20), l'équation (II.21) devient comme suit :

$$\frac{d^2R_I(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_I(r)}{dr} - \left(\frac{np}{r}\right)^2 \cdot R_I(r) = 0 \tag{II.27}$$

La solution générale de cette équation est :

$$R_I(r) = C_1(r)^{np} + C_2(r)^{-np} \tag{II.28}$$

Le vecteur potentiel créé dans l'entrefer, son expression est la suivante :

$$A_{er} = \sum_{n=1}^{\infty}(C_1(r)^{np} + C_2(r)^{-np})sin(np\theta) \tag{II.29}$$

- Dans les aimants (région II) :

$$\Delta AII(r,\theta) = -\frac{1}{r}(npM_{rn} - M_{\theta n}) \tag{II.30}$$

Donc

$$\frac{d^2AII(r,\theta)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dAII(r,\theta)}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2AII(r,\theta)}{d\theta^2}=-\frac{1}{r}(npM_{rn}-M_{\theta n}) \quad \text{(II.31)}$$

Ainsi, le potentiel vecteur $AII(r,\theta)$ est de la forme suivante :

$$AII(r,\theta)=\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} R_{II}(r)\,sin(np\theta) \quad \text{(II.32)}$$

En remplace l'équation (27) dans l'équation (26), l'équation (27) devienne comme suit :

$$\frac{d^2R_{II}(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_{II}(r)}{dr}-\left(\frac{np}{r}\right)^2\cdot R_{II}(r)+\frac{1}{r}(npM_{rn}-M_{\theta n})=0 \quad \text{(II.33)}$$

Dans ce cas la solution générale de l'équation (II.27) est composée de deux termes ; qui s'écrit comme suit :

$$\alpha_n(r)=\alpha_{hn}(r)+\psi_n(r) \quad \text{(II.34)}$$

Avec$\alpha_{hn}(r)$ exprime la solution homogène donnée par :

$$\alpha_{hn}(r)=C_3(r)^{np}+C_4(r)^{-np} \quad \text{(II.35)}$$

Et $\psi_n(r)$ exprime la solution avec second membre ; elle est donnée comme suit :

$$\psi_n(r)=\begin{cases}\dfrac{M_{\theta n}}{n^2p^2-1}r & si\ n^2p^2\neq 1\\ -\dfrac{1}{2}M_{\theta n}r\,ln(r) & si\ n^2p^2=1\end{cases} \quad \text{(II.36)}$$

Finalement, l'expression du vecteur potentiel crée dans la région des aimants devient :

$$AII(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_3(r)^{np}+C_4(r)^{-np}+\psi_n(r)]\,sin(np\theta) \quad \text{(II.37)}$$

Avec C_1, C_2, C_3, C_4 sont représentent les constantes d'intégrations liées à chaque harmonique d'espace de rang n.

Les conditions aux limites qui permettent de calculer ces différentes constantes sont :

- Au niveau de rayon d'alésage R_3

$$\frac{\partial AI}{\partial r} = 0 \tag{II.38}$$

$$C_1 = C_2 R_3^{-2np}$$

- Au niveau de rayonR_1

$$\frac{\partial AII}{\partial r} = 0 \tag{II.39}$$

$$C_3 = \frac{R_1^{-2np} C_4\, n^2p^2 - R_1^{-2np} C_4 - R_1^{-np+1} M_{rn} - R_1^{-np+1} M_{tn}\, n\, p}{n^2p^2 - 1}$$

- Au niveau de rayonR_2

$$\begin{cases} AI(R_2,\theta) = AII(R_2,\theta) \\ BI_\theta(R_2,\theta) = BII_\theta(R_2,\theta) + M_\theta \end{cases} \tag{II.40}$$

$$\begin{aligned} C_2 = -\frac{1}{2\,(n^2p^2-1)\left(-R_3^{2np} + R_1^{2np}\right)} \Big(& R_3^{2np}\big(-R_1^{2np} R_2^{-np+1} M_{rn}\, n\, p - R_1^{2np} R_2^{-np+1} M_{tn} n\, p \\ & + 2R_1^{np+1} M_{tn} np + R_2^{np+1} M_{rn} n\, p - R_2^{np+1} M_{tn} np - R_1^{2np} R_2^{-np+1} M_{rn} \\ & - R_1^{2np} R_2^{-np+1} M_{tn} + 2R_1^{np+1} M_{rn} - R_2^{np+1} M_{rn} + R_2^{np+1} M_{tn}\big)\Big) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} C_4 = -\frac{1}{2n^2p^2R_1^{2np} - R_1^{2np} - n^2p^2R_3^{2np} + R_3^{2np}} \big(& 2R_1^{np+1} R_3^{2n}\, M_{tn} np - R_1^{2np} R_2^{np+1} M_{tn} np \\ & - R_1^{2np} R_3^{2np} R_2^{-np+1} M_{rn} np + R_1^{2np} R_2^{np+1} M_{rn} np - R_1^{2np} R_3^{2n}\, R_2^{-np+1} M_{tn} np \\ & - R_1^{2np} R_2^{np+1} M_{rn} + R_1^{2np} R_2^{np+1} M_{tn} + 2R_1^{np+1} R_3^{2np} M_{rn} \\ & - R_1^{2np} R_3^{2np} R_2^{-np+1} M_{rn} - R_1^{2np} R_3^{2np} R_2^{-np+1} M_{tn}\big) \end{aligned}$$

II.5. Détermination des performances de la machine

Les inductions magnétique dus aux différents sources de champ seront déduites les relations (II.12) sachant que les expressions de potentiels vecteurs dus aux aimants dans les différents zone du domaine d'étude seront au préalable connues.

II.5.1. Induction magnétique

On donne, ci-dessous, les expressions des composantes de l'induction due aux aimants au niveau de l'entrefer de la machine nécessaires pour la détermination du couple électromagnétique.

$$B_{ar}(r,\theta) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty} B_{rn}(r) \cdot cos(np\theta) \quad \text{(II.41)}$$

$$B_{a\theta}(r,\theta) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{\infty} B_{\theta n}(r) \cdot sin(np\theta) \quad \text{(II.42)}$$

Avec

$$B_{rn}(r) = \frac{np}{r}[C_1(r)^{np} + C_2(r)^{-np}] \quad \text{(II.43)}$$

$$B_{\theta n}(r) = -\frac{np}{r}[C_1(r)^{np} + C_2(r)^{-np}] \quad \text{(II.44)}$$

Ces expressions sont valables dans la zone définies par $R_1 \leq r \leq R_3$

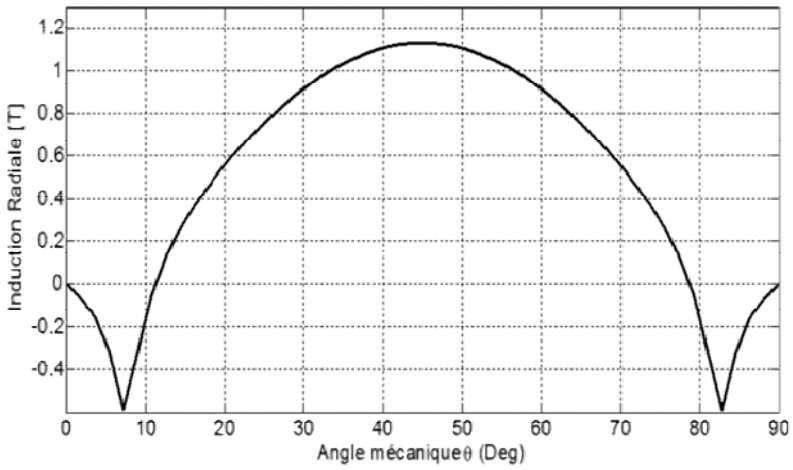


Fig. II. 3: forme d'onde d'induction tangentielle calculée pour α_p=5/6

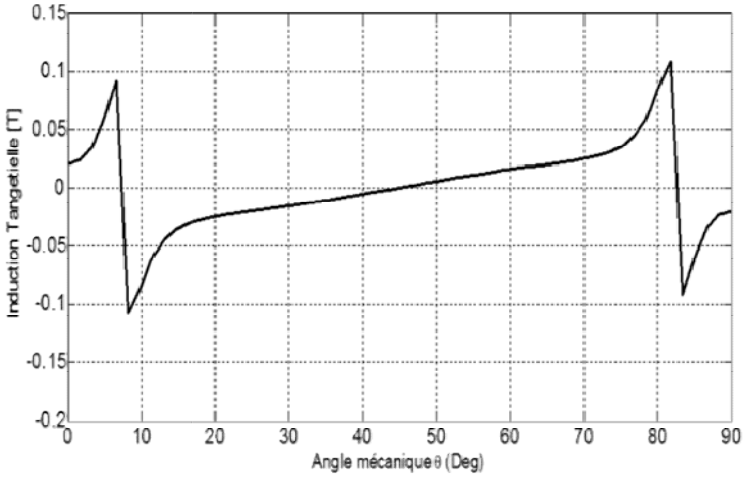


Fig. II. 4: forme d'onde d'induction radiale calculée pour α_p=5/6

II.5.2. Expression de la force électromotrice

Pour calculer la force électromotrice induite dans une phase statorique, on détermine dans un premier temps, le flux embrassé par les conducteurs de cette phase. L'invariance, par Translation suivant l'axe Oz du système étudie, permet d'exprimer le flux produit par les aimants sous la forme suivant [18] :

$$\Phi(wt) = l_u \int_0^{2\pi} AI(R_3,\theta)C(\theta',t)R_3\, d\theta \qquad \text{(II.45)}$$

Avec

Les fonctions Aet C désignent respectivement le potentiel vecteur créé par les aimants et la densité des conducteurs de la phase considérée. L'expression de C est donnée[18], par l'expression suivante :

$$C(\acute{\theta}) = \sum_{i=1} C_n \cos(np\acute{\theta}) \tag{II.46}$$

Avec

$$C_n = \frac{4pN\ _{bn}}{\pi}$$

L'expression du flux par phase après intégration devient :

$$\Phi(\omega t) = \pi L_u \sum C_n \left[C_1 (R_3)^{np} + C_2 (R_3)^{-np}\right] sin(np\theta_0 + n\omega t) \tag{II.47}$$

L'expression de la FEM induit est :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi L_u n\omega \sum C_n \left[C_1 (R_3)^{np} + C_2 (R_3)^{-np}\right] cos(np\theta_0 + n\omega t) \tag{II.48}$$

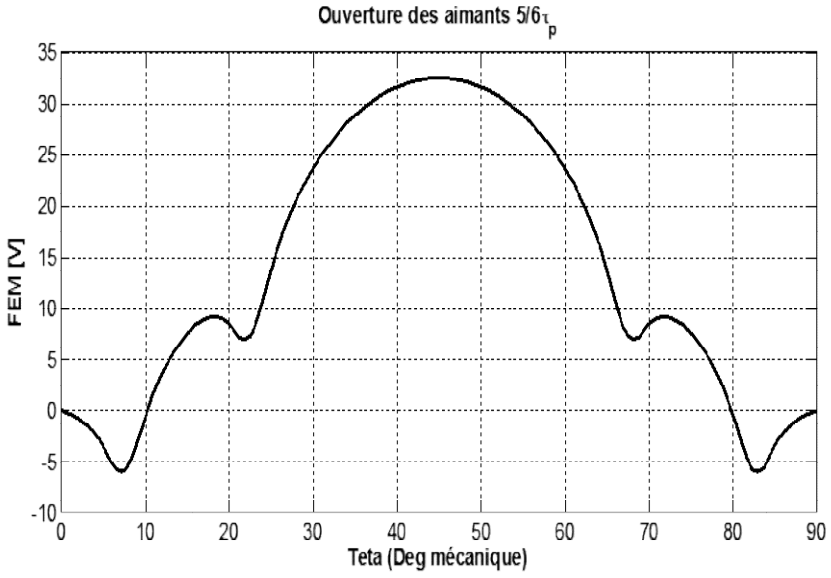


Fig. II. 5: la force électromotrice calculée analytiquement pour α_p= 5/6

II.5.3. Détermination des expressions des couples

Le couple d'interaction développé par le type de machines étudiées est calculé en utilisant les moments des forces de Laplace s'exerçant sur la densité de courants placée au niveau du rayon d'alésage. Ce couple est exprimé par la relation suivante [18]:

$$\Gamma(\theta) = 2pR_3^2\, l_u \int_{\frac{-\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} j_s\, B_\theta\, d\theta \qquad \text{(II.49)}$$

Pour une alimentation par courants sinusoïdaux, l'expression du couple est :

$$\Gamma(\theta) = \frac{3}{2}\,\pi p l_u R_3 \sum_{m=1}^{3} J_n n[C_1(R_3)^{np} + C_2(R_3)^{-np}]\, cos((n+\upsilon)\omega t + np\theta_0) \qquad \text{(II.50)}$$

$$\upsilon = \begin{cases} -1\ si\ n = 6m+1 \\ 1\ si\ n = 6m-1 \end{cases}$$

On peut aussi calculer ce couple à partir de l'expression suivante :

$$\Gamma(\theta) = \frac{p}{\omega} \sum_{m=1}^{3} e_m(\theta)\, i_m(\theta) \qquad \text{(II.51)}$$

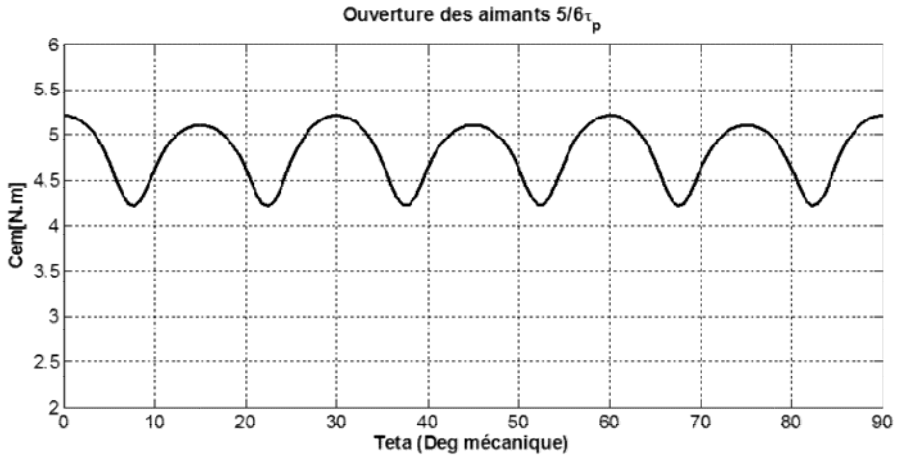


Fig. II. 6:le couple électromagnétique calculée analytiquement pour α_p= 5/6

II.7. Transformation conformes des encoches

L'effet d'encochage du stator sur les inductions radiales et tangentielles est introduit via une fonction perméance relative complexe issue d'une transformation conforme analytique de Schwarz-Christoffel d'un modèle avec une seule encoche de profondeur infinie[19.20]

Ce modèle permet d'exploiter les équations (II.42) et (II.43) pour déterminer les inductions radiales et tangentielles dans le cas avec encoches statoriques. Avec $B_k = B_r + jB_\theta$, l'induction complexe dans la structure réelle est donnée par :

$$B_s = B_k \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)^* \tag{II.52}$$

Avec

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \lambda = \frac{k}{s}\frac{w-1}{(w-a)^{\frac{1}{2}}(w-b)^{\frac{1}{2}}} \tag{II.53}$$

Ces deux expressions (II.52) et (II.53) sont issues de plusieurs transformations conformes analytiques qui permettent de passer du plan S (r, θ) dont les coordonnées sont données par l'équation complexe en coordonnées polaires (Fig. II.7) :

$$s = re^{j\theta} \tag{II.54}$$

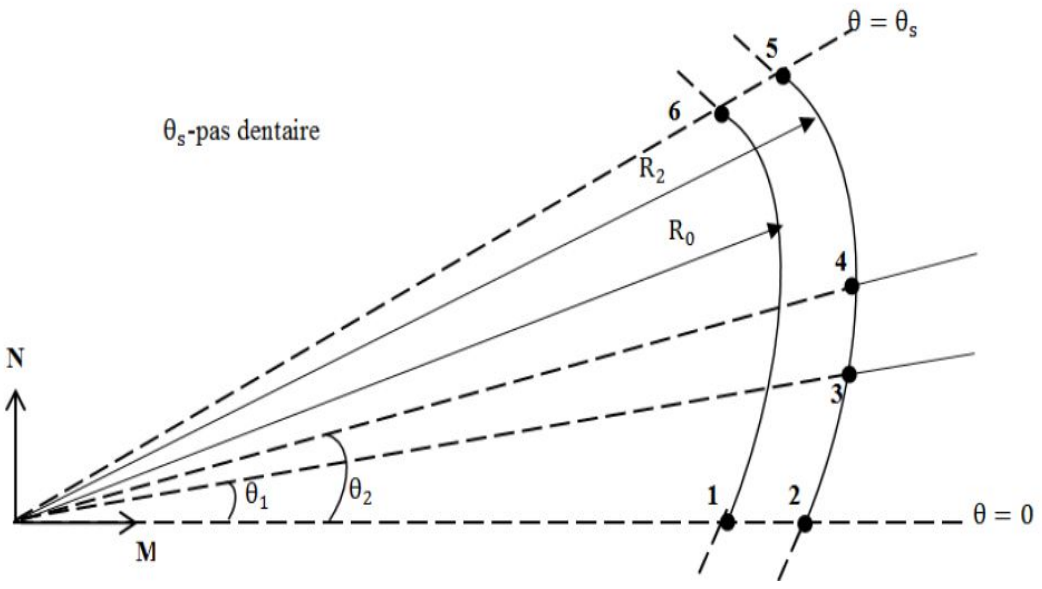


Fig. II. 7: Modèle d'une seule encoche de profondeur infinie dans le plan S

La première transformation conforme qui permet de transformer le plan S en coordonnées polaires au plan Z en coordonnées cartésiennes (Fig. II.8)

$$z = ln(s) \tag{II.55}$$

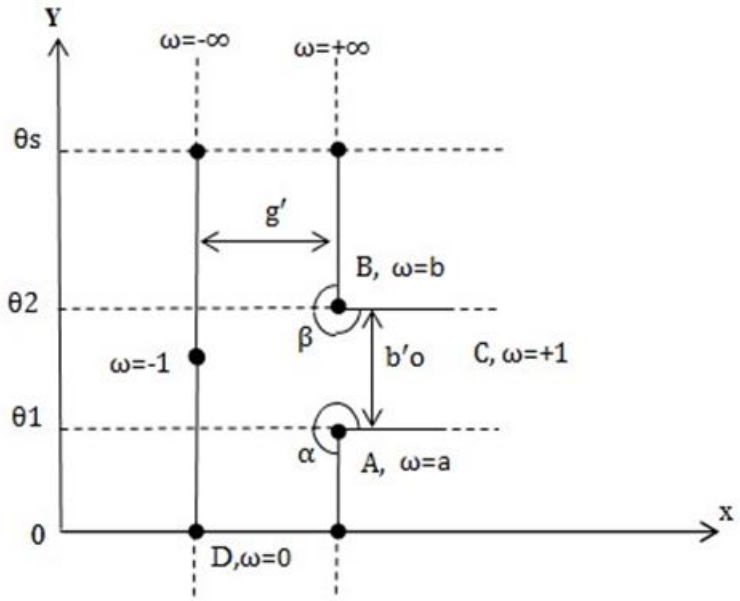


Fig. II. 8: Représentation de l'ouverture de l'encoche dans le plan Z

La deuxième transformation conforme complexe, qui est une transformation de Schwarz- Christoffel qui permet de transformer le pas dentaire du plan Z en un demi- plan infini et positif W (Fig. II.9), est :

$$z = j\frac{g'}{\pi}\left[ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right| - ln\left|\frac{b+p}{b-p}\right| - 2\frac{b-1}{\sqrt{b}}tan^{-1}\frac{p}{\sqrt{b}}\right] + C \tag{II.56}$$

Ou

$$p = \sqrt{\frac{w-b}{w-a}} \tag{II.57}$$

$$c = ln\, R_2 + j\theta_2 \tag{II.58}$$

$$g' = ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) \tag{II.59}$$

$$b = \left[\frac{b'_0}{2g'} + \sqrt{\left(\frac{b'_0}{2g'}\right)^2 + 1}\right]^2 \quad \text{(II.60)}$$

$$a = \frac{1}{b} \quad et \quad b'_\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad \text{(II.61)}$$

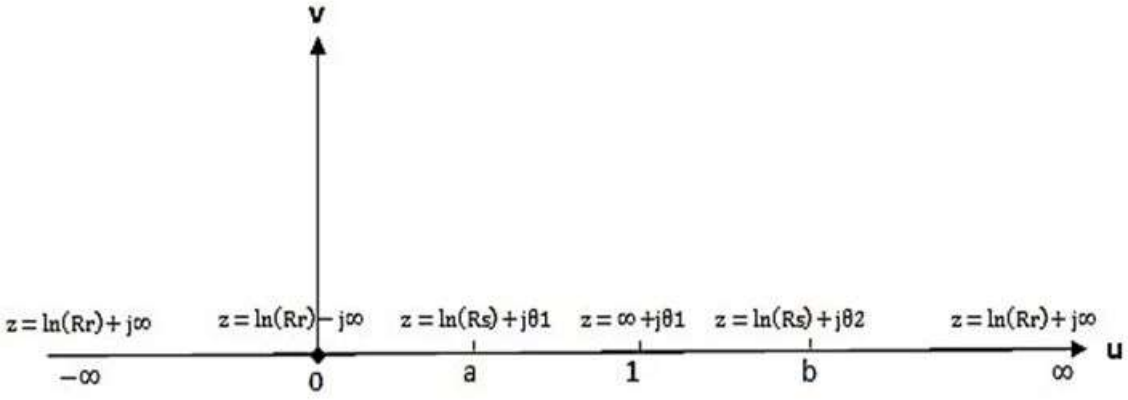


Fig. II. 9: Représentation de l'ouverture de l'encoche dans le plan W

La troisième transformation conforme qui permet de passer du plan W au plan T, qui représente deux plans infinis (Fig. II.10), est :

$$t = j\frac{g'}{\pi} ln\,\omega + ln\,R_2 + j\frac{\theta_s}{2} \quad \text{(II.62)}$$

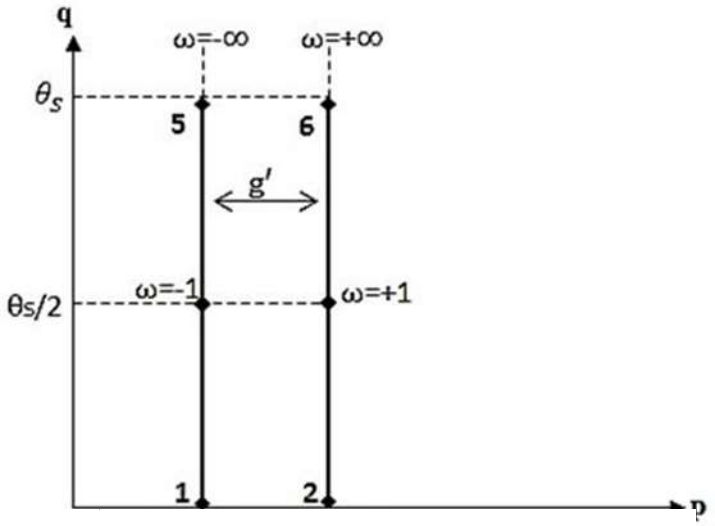


Fig. II. 10: Représentation de l'ouverture de l'encoche dans le plan T

La dernière transformation permet de transformer le plan T au plan K (Fig. II.11), en coordonnées polaires par utilisation :

$$k = R_2\, e^{j\left(\frac{g}{\pi} ln\, \omega + \frac{\theta_s}{2}\right)} \tag{II.63}$$

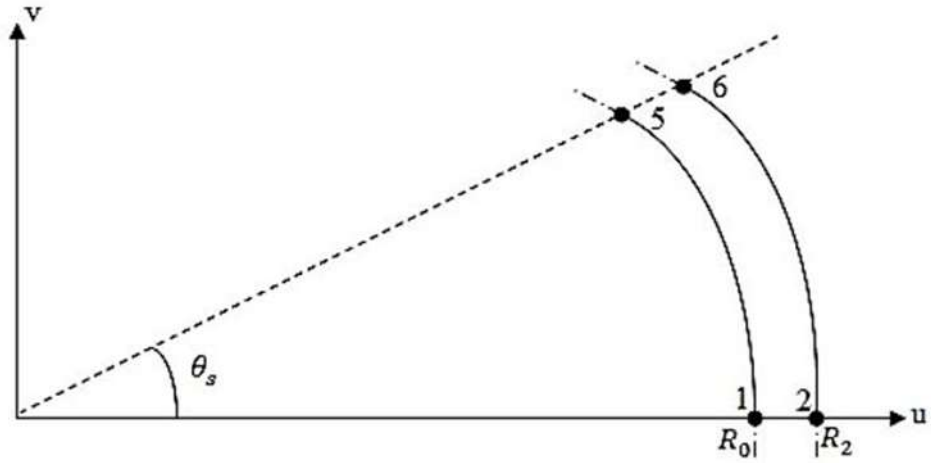


Fig. II. 11: Modèle d'une seule encoche dans le plan K

Les parties réelle et imaginaire de la perméance relative λ, issues de l'équation (*II.*53), sont :

$$\lambda_a = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda_{an}\, cos(nQ_s\, \theta) \tag{II.64}$$

$$\lambda_b = \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda_{bn}\, sin(nQ_s\, \theta) \tag{II.65}$$

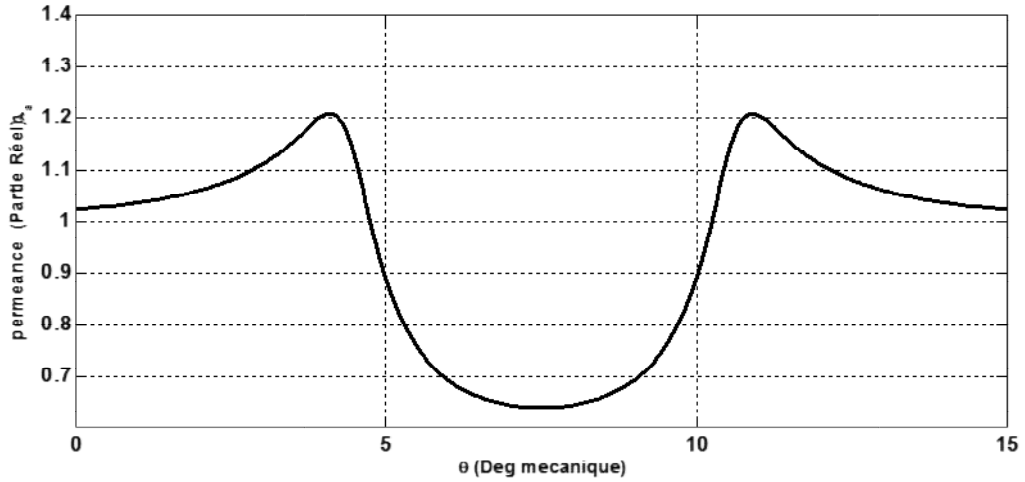


Fig. II. 14 : partie réelle de la perméance relative complexe calculées pour un pas dentaire

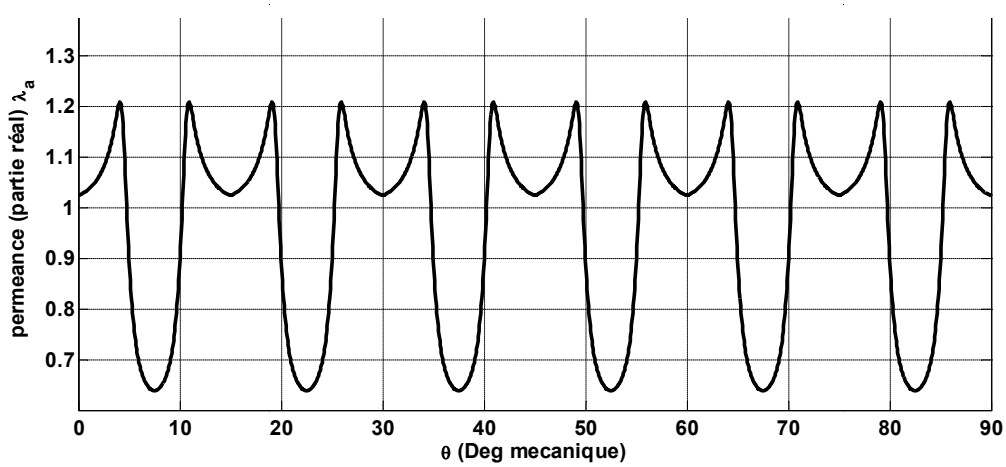


Fig. II. 13: partie réelle de la perméance relative complexe calculées pour un pas polaire

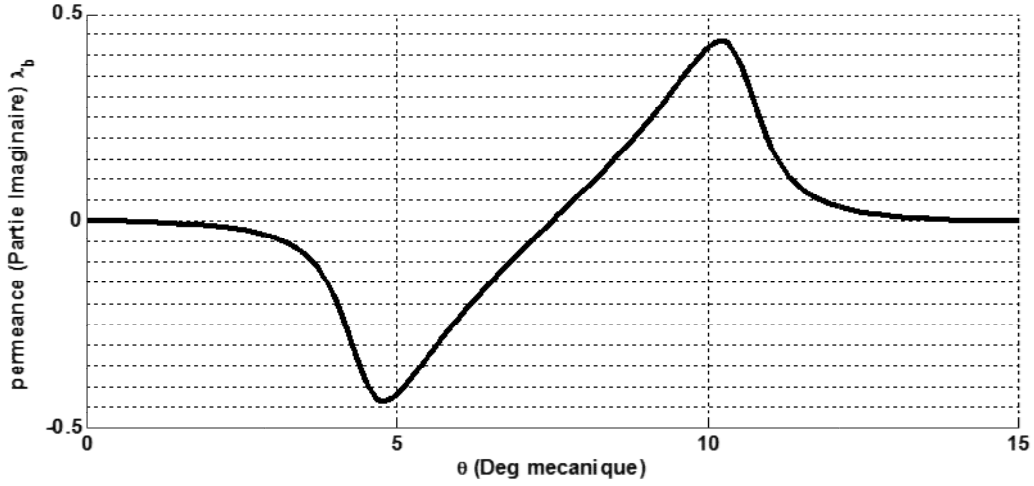


Fig. II. 12: partie imaginaire de la perméance relative complexe calculées pour un pas dentaire

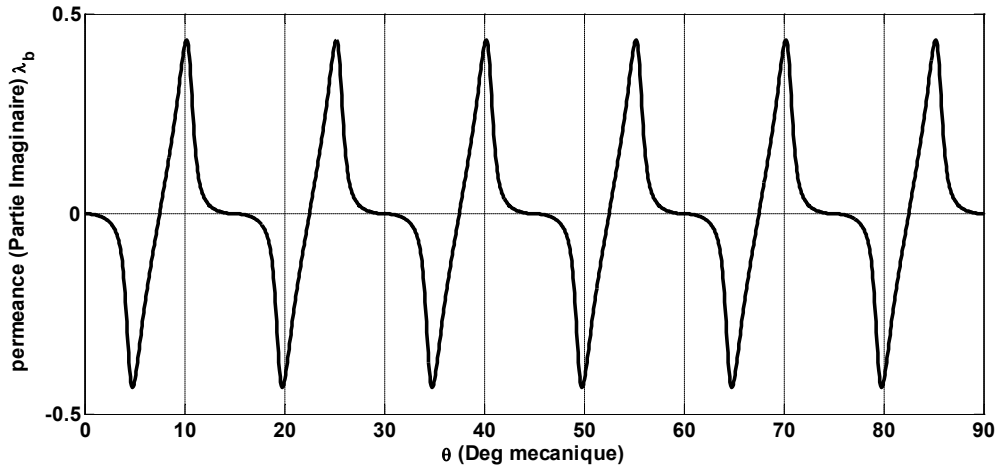


Fig. II. 15: partie imaginaire de la perméance relative complexe calculées pour un pas polaire

A partir des équations (II.42), (*II.*43), (*II.*53), (*II.*64), (*II.*65), les inductions radiales et tangentielles dans l'entrefer avec stator encoché s'en déduisent par :

$$B_{sr} = Re\ (B_k \lambda^*) = B_r \lambda_a + B_\theta \lambda_b \tag{II.66}$$

$$B_{s\theta} = Im\ (B_K \lambda^*) = B_\theta \lambda_a - B_r \lambda_b \tag{II.67}$$

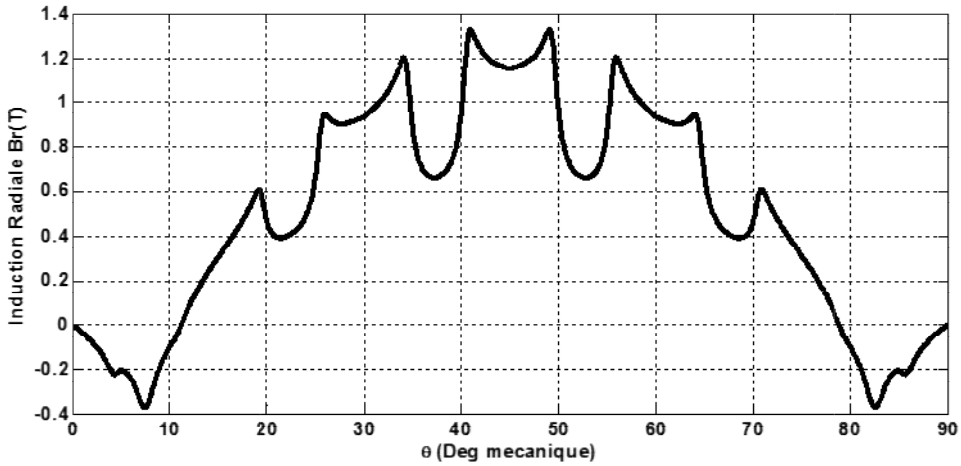


Fig. II. 16: la forme d'onde d'induction radiale calculée avec stator encoché

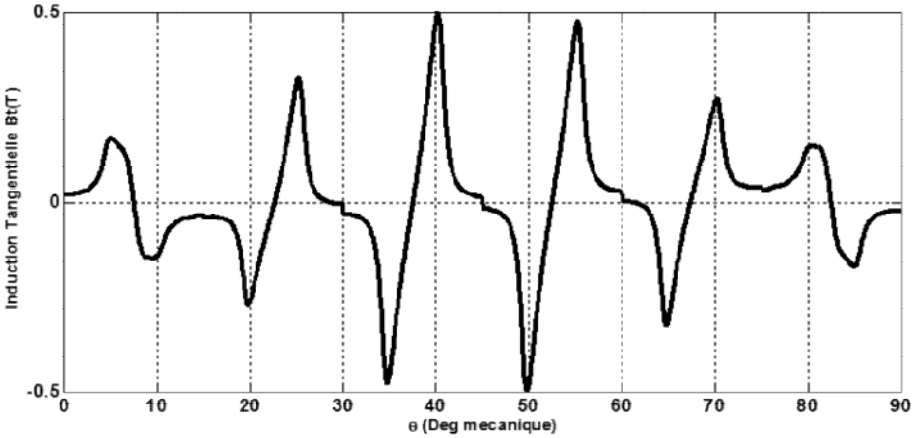


Fig. II. 17: la forme d'onde d'induction tangentielle calculée avec stator encoché

II.8. Calcul de couple détente

Le couple de détente est un couple pulsatoire du à l'interaction de la denture statorique avec les aimants rotoriques. Le couple de détente est calculé en considèrent le moment des forces de Laplace s'exerçant sur l'ensemble de dents de la machine. D'après les calculs développés par [19.20], on a l'expression suivante du couple de détente par encoche :

$$T_{encoche}=\frac{l_a}{2\mu_0}\int_a^b |B_K|^2 \left|\frac{g'}{\pi}k^2\frac{w-1}{(w-a)^{\frac{1}{2}}(w-b)^{\frac{1}{2}}}\right| dw \qquad \text{(II.68)}$$

L'expression du couple de détente total développé par la machine étudiée est :

$$T_c = \sum_{k=1}^{Q_s} T_{encoche} \qquad \text{(II.69)}$$

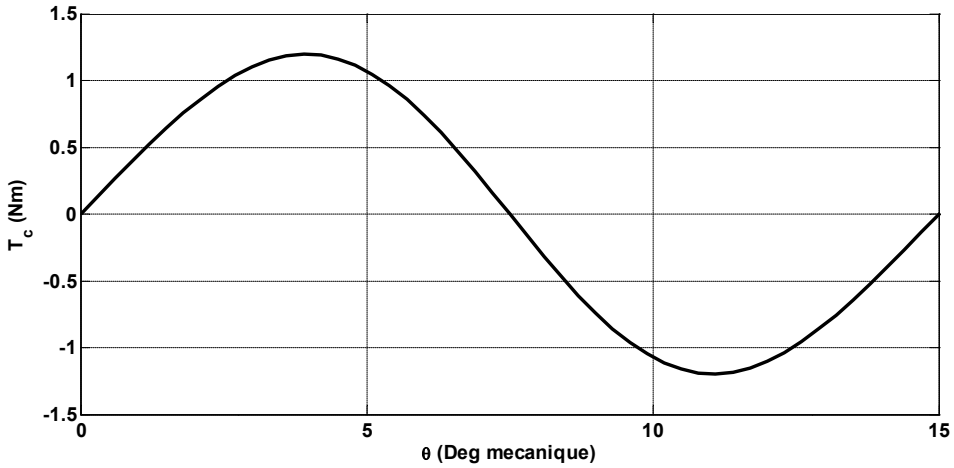


Fig. II. 18: la forme d'onde du couple de détente

II.9.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développés un modèle analytique basé sur la résolution des équations de Maxwell pour déterminer les inductions radiales et tangentielles dues aux aimants permanents aimantés sinusoïdalement en considèrent le stator lisse.

La forme du force électromotrice et couple d'interaction est affectée par la forme de l'alimentation et du sens de l'aimantation de l'inducteur. En effet, pour une alimentation sinusoïdale.

L'effet des encoches du stator sur la forme d'onde et l'amplitude des inductions radiale et tangentielle est introduit par une fonction perméance relative complexe issue de quatre transformations conformes analytiques dont la deuxième est issue de l'intégrale de Schwarz-Christoffel. Le couplage entre les deux modèles permet de déterminer avec une précision appréciable le couple de détente que ce soit par rapport à la forme d'onde ou à l'amplitude qui est très sensible aux formes d'ondes et amplitudes des inductions radiales et tangentielles.