



UNIVERSITE DE M'SILA

**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE
L'INFORMATIQUE**

Département des Mathématiques

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

RABIA KHALIL

SUJET

Factorisation des opérateurs multilinéaires

Soutenu publiquement le :

devant le jury composé de :

Mr. Abdelmoumen TIAIBA	MCA	Université de M'sila	Président
Mr. Khalil SAADI	Prof	Université de M'sila	Rapporteur
Mr. Maatougui BELAALA	MCB	Université de M'sila	Examineur
Mr. Abdelaziz BELAADA	MCB	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire: 2018/2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Je remercie en premier lieu Dieu qui m'a donné ce bien pour que nous venons ce jour et la force et la patience pour terminer ce travail.

*Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadreur **Saadi Khalil** qui a proposé et a dirigé ce travail.*

Je remercie les membres de jury de ce mémoire.

Enfin, je remercie tous les personnes qui m'ont aidé.

Table des matières

Notations générale	3
Introduction	4
1 Généralités et résultats préliminaires	6
1.1 Espaces de Banach	6
1.2 Opérateurs linéaires	7
1.3 Opérateurs multilinéaires et produit tensoriel	9
1.3.1 Opérateur adjoint	10
1.3.2 Produit tensoriel	10
1.3.3 Produit tensoriel et linéarisation	12
1.3.4 Produit tensoriel projectif	13
2 Factorisation des opérateurs multilinéaires faiblement compact	15
2.1 Opérateur linéaire faiblement compact	15
2.2 Opérateurs multilinéaires faiblement compact	17
2.3 Résultats de factorisation (cas linéaire)	18
2.4 Théorèmes et résultats de factorisation (cas multilinéaire)	20
2.4.1 Factorisation de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$	20
2.4.2 Factorisation de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$	22
3 Factorisation des opérateurs multilinéaires sommants	26
3.1 Généralité sur les opérateurs linéaires sommants	26
3.2 Opérateurs multilinéaires sommants, généralisation et factorisation	28

3.2.1	Opérateurs multilinéaires absolument p -sommants	28
3.2.2	Opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants	29
3.2.3	Opérateurs multilinéaires p -dominés	29
3.2.4	Opérateurs multilinéaires multi p -sommants	31
3.2.5	Opérateurs multilinéaires fortement p -sommants	31
3.2.6	Opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt	32
3.3	Les opérateurs Cohen fortement p -sommants	34
3.3.1	Cas linéaire	34
3.3.2	Cas multilinéaire	34
Bibliographie		39

Notations générale

- p^* : le conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
- $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$: le produit tensoriel projectif.
- $l_p^n(X)$: l'espace de suites finies fortement p -sommables.
- $l_p^{n,w}(X)$: l'espace de suites finies faiblement p -sommables.
- T^* : l'opérateur adjoint de T .
- \widetilde{T} : linéarisation de l'opérateur multilinéaire T .
- i_m : plongement canonique de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$.
- $\mathcal{L}(X; Y)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés.
- $\mathcal{W}(X; Y)$: classe des opérateurs linéaires faiblement compacts.
- $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires bornés.
- $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$: l'espace des formes multilinéaires bornées.
- $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$: classe des opérateurs multilinéaires faiblement compacts.
- $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$: classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un seul espace de Banach réflexif.
- $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y)$: classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par m espaces de Banach réflexifs.
- $\Pi_p(X; Y)$: l'espace des opérateurs linéaires sommants.
- $\mathcal{L}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires absolument p -sommants.
- $\mathcal{L}_{(p; p_1, \dots, p_m)}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants.
- $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires p -dominés.
- $\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires multi p -sommants.
- \rightarrow : flache de convergence.

Introduction

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on va étudier les résultats de factorisation des opérateurs multilinéaires. La factorisation des opérateurs joue un rôle indispensable dans l'étude des propriétés des opérateurs. Dans le cas linéaire, on note par exemple si un opérateur linéaire u se factorise par un espace réflexif, alors on conclut directement que cet opérateur u est faiblement compact. Un autre résultat annonce aussi qu'un espace de Banach X est réflexif si, et seulement si, l'opérateur identité

$$id_X : X \rightarrow X$$

se factorise par un espace réflexif. Dans le cas multilinéaire, deux types de factorisation sont envisagées, dans le premier type on factorise les opérateurs multilinéaires autour d'un seul espace de Banach et un opérateur faiblement compact, la classe de ces opérateurs sera notée $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$. Alors, T est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ s'il existe un espace de Banach G ; un opérateur linéaire $u \in \mathcal{W}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; G)$ tels que T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$. En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times & \dots & \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & & & & A \searrow & & u \uparrow \\ & & & & & & G \end{array}$$

Dans le deuxième type, on considère les opérateurs multilinéaires qui se factorisent de la façon suivante: on supposera qu'il existe des espaces de Banach G_j , des opérateurs linéaires faiblement compacts $u_j : X_j \longrightarrow G_j$ et un opérateur multilinéaire $A : G_1 \times \dots \times G_m \longrightarrow Y$ tels que $T = A(u_1, \dots, u_m)$. Cette classe d'opérateurs multilinéaires sera notée $\mathcal{L}(\mathcal{W})$. Plusieurs

résultats de factorisation correspondants à ces deux types seront établis notamment celle des espaces de Banach réflexifs.

La classe des opérateurs multilinéaires de type sommant, considéré comme un cas important qui possède plusieurs type de factorisation. Il existe donc beaucoup de classes qui généralisent la notion d'opérateur linéaire sommant, parmi ces classes il y en a qui vérifie le théorème de factorisation de Pietsch. La classe des opérateurs multilinéaires Cohen fortement sommant est parmi les classe qui généralisent le cas linéaire de Cohen, de plus cette classe possède une factorisation agréable. C'est à dire, T est Cohen fortement p -sommant s'il existe un espace de Banach G ; un opérateur $u \in \mathcal{D}_p(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; G)$ tels que T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Dans le premier chapitre; on rappelle les résultats qu'on a besoin dans la suite de ce mémoire. Commençons par donner la définition d'un espace de Banach ainsi que de Hilbert et quelques propriétés relatives à ces deux types d'espaces. On donne la définition des opérateurs linéaires et quelques propriétés. Ensuite, on étudie les opérateurs multilinéaires. On termine ce chapitre par mettre l'accent sur quelques notions; telles que: l'opérateur adjoint, le produit tensoriel, l'opérateur linéarisé et enfin le produit tensoriel projectif.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera la factorisation des opérateurs faiblement compacts. Commençons par le cas linéaire, puis le cas multilinéaire. On exposera les deux types de factorisation citées ci-dessus, ce que nous permettent de construire deux classes $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{W})$. On termine ce chapitre par un survol sur certaines caractérisations et la réflexivité de l'espace des opérateurs multilinéaires bornés $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des opérateurs multilinéaires sommants. Ces classes d'opérateurs sont: les opérateurs multilinéaires absolument p -sommant, les opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants, les opérateurs multilinéaires p -dominés, les opérateurs multilinéaires multi p -sommants, les opérateurs multilinéaires formtement p -sommants, les opérateurs multilinéaires de Hilbert schmidt et on termine par les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommant.

Chapitre 1

Généralités et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on exposera la définition d'un espace de Banach et de Hilbert en donnant certaines exemples. Les espaces de Banach réflexifs sont aussi exposés dans cette partie. Ensuite, on étudiera les opérateurs linéaires bornés ainsi que les opérateurs multilinéaires bornés. On continue cette étude par donner la structure algébrique d'un produit tensoriel en donnant la définition du produit tensoriel projectif qu'on a besoin dans la suite. Pour plus de détail sur les résultats de ce chapitre, veuillez consulter [5], [7], [12], [14], [16] et [18].

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1.1 (*Espace de Banach*) *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, (i.e., tout suite de Cauchy de X est convergente dans X).*

Remarque 1.1.1 *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach. De plus, tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

Exemple 1.1.1 *Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R} et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'ensemble ℓ_p par*

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définit ℓ_∞ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Alors, l'espace ℓ_p est un Banach.

Définition 1.1.2 (*Espace de Hilbert*) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.

Théorème 1.1.1 (*L'espace ℓ_2*) L'espace ℓ_2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$

Proposition 1.1.1 (*Comparaison entre les espaces*) Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nous avons

$$\ell_p \subset \ell_q.$$

1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 Soit $u : X \rightarrow Y$ une application entre deux espace de Banach définis sur le même corps \mathbb{K} . Elle est linéaire si

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

- 1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x).$
- 2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$

Définition 1.2.2 L'application linéaire u est continue (borné) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues. On définit une norme des opérateurs $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(X; Y)$ par

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|,$$

On a également

$$\|u\| = \inf \{C : \text{vérifie l'inégalité précédente}\}.$$

Alors, la quantité $\|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X; Y)$. Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X; Y)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 1.2.3 (Dual topologique) Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^* , l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X , i.e.,

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

Notons ici que l'espace X^* est toujours complet pour la norme des opérateurs.

Exemple 1.2.1 Soit $1 < p < +\infty$. On a

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*},$$

avec p^* est le conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Définition 1.2.4 (Espace réflexif) Un espace de Banach X est dit réflexif si l'application canonique

$$\mathbf{J}_X : X \rightarrow X^{**},$$

est bijective. Autrement dit, X s'identifie isométriquement à X^{**} . Ça nous permettra d'associer à chaque élément x^{**} de X^{**} un unique vecteur x de X tel que

$$\forall x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = x^*(x).$$

On note que:

- Pour tout $1 < p < \infty$, l'espace L_p est réflexif. Il en est de même pour les petit ℓ_p avec $1 < p < \infty$. Par contre, les espaces c_0 (l'espace des suites convergent vers zéro (0)), $L_1, L_\infty, \ell_1, \ell_\infty$ ne sont pas réflexifs.
- Tout espace de dimension finie est réflexif.
- Tout espace de Hilbert est réflexif.

Proposition 1.2.1 1) Si X est réflexif et si Y est isomorphe à X , alors Y est réflexif.

2) Si X est réflexif, alors X^* est réflexif.

3) Tout sous espace fermé Y de X est réflexif.

Définition 1.2.5 (La topologie faible) On définit la topologie faible, notée $\sigma(X, X^*)$, sur un espace de Banach X comme étant la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les formes linéaires sur X .

Théorème 1.2.1 *Les sous espaces vectoriels fermés de X sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est de même plus généralement des parties fermées convexes.*

Théorème 1.2.2 *Si X est réflexif, toute suite bornée dans X admet une sous suite faiblement convergente.*

Définition 1.2.6 (La topologie \ast -faible) *Soient X un espace de Banach et X^* son dual. La topologie \ast -faible sur le dual X^* , notée $\sigma(X^*, X)$, c'est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications de la forme*

$$x : X^* \rightarrow \mathbb{R} : x^* \mapsto x^*(x); \text{ où } x \in X.$$

Noter que cette topologie est moins fine que la topologie faible de X^ .*

Définition 1.2.7 (Prédual) *L'espace de Banach X possède un prédual s'il existe un espace de Banach G tel que $X = G^*$, G s'appelle le prédual de X . Remarquons que tout espace de Banach X est prédual de son espace dual X^* .*

Théorème 1.2.3 (1) *L'espace X est réflexif si et seulement si son prédual est X^* .*

(2) *L'espace X est réflexif si et seulement si la topologie faible et \ast -faible dans X^* sont coïncides.*

1.3 Opérateurs multilinéaires et produit tensoriel

Définition 1.3.1 *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. Un opérateur*

$$T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y,$$

est dit multilinéaire ou m -linéaire s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \|x^1\| \dots \|x^m\|.$$

On note $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires bornée qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante vérifiant l'inégalité précédente. Elle peut s'exprimer aussi par

$$\|T\| = \sup_{\|x^j\| \leq 1, 1 \leq j \leq m} \|T(x^1, \dots, x^m)\|.$$

1.3.1 Opérateur adjoint

Pour tout opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$, on associe l'opérateur adjoint suivant

$$T^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m),$$

qui est définie par

$$y^* \longmapsto T^*(y^*) : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow \mathbb{R},$$

où

$$T^*(y^*)(x^1, \dots, x^m) = y^*(T(x^1, \dots, x^m)).$$

1.3.2 Produit tensoriel

Commençons par le cas de deux espaces, le cas général de n espaces est pareil. Soient X, Y deux espaces de Banach. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. On définit $x \otimes y$ comme étant une forme linéaire sur l'espace de formes bilinéaires $\mathcal{L}(X \times Y)$ comme suite

$$\forall T \in \mathcal{L}(X \times Y) : x \otimes y(T) = \langle T, x \otimes y \rangle = T(x, y).$$

On note $X \otimes Y$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. L'espace $X \otimes Y$ s'appelle espace de produit tensoriel algébrique de X et Y . On peut représenter cet espace sous la forme suivante

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, y_i \in Y \right\}.$$

D'après la définition de $X \otimes Y$ nous avons

$$X \otimes Y \subset \mathcal{L}(X \times Y)^*.$$

Nous allons voir certaines propriétés des éléments de $X \otimes Y$, commençons par établir la relation entre les opérations $+$ et \otimes .

Proposition 1.3.1 *Pour tous $x, x_1, x_2 \in X$ et $y, y_1, y_2 \in Y$ nous avons:*

- (i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.
- (ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

(iii) $\lambda(x \otimes y) = \lambda(x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iv) $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$.

Preuve. On va voir seulement (i), les autres sont immédiates. Soit $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ alors

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y(T) &= T(x_1 + x_2, y) \\ &= T(x_1, y) + T(x_2, y) \\ &= x_1 \otimes y(T) + x_2 \otimes y(T) \\ &= (x_1 \otimes y + x_2 \otimes y)(T), \end{aligned}$$

alors $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$. ■

La proposition suivante explique qu'est ce qu'un élément nul dans l'espace $X \otimes Y$.

Proposition 1.3.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach. Pour tout*

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y,$$

les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $u = 0$.
- (ii) $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) = 0$ pour tout $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$.
- (iii) $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i = 0$ pour tout $x^* \in X^*$.
- (iv) $\sum_{i=1}^n y^*(y_i) x_i = 0$ pour tout $y^* \in Y^*$.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) : Supposons que $u = 0$. Alors, pour tout $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ on a

$$u(T) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = 0.$$

Soient $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$, alors l'application

$$x^* \otimes y^* : X \times Y \rightarrow K$$

définie par $x^* \otimes y^*(x, y) = x^*(x) y^*(y)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(X \times Y)$. C'est-à-dire

$$u(x^* \otimes y^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) : Supposons que $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) = 0$ pour tout $x^* \in X^*, y^* \in Y^*$. Soit $x^* \in X^*$, alors

$$y^*\left(\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i\right) = 0 \text{ pour tout } y^* \in Y^*,$$

cela implique que $\sum_{i=1}^n x^*(x_i) y_i = 0$.

(iii) \Rightarrow (iv) : Même argument.

(iv) \Rightarrow (i) : Supposons que $\sum_{i=1}^n y^*(y_i) x_i = 0$ pour tout $y^* \in Y^*$. Soit $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$.

Soient E, F deux sous espaces vectoriels engendrés par $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_n\}$ respectivement. On note B la restriction de T à $E \times F$. On peut représenter B sous la forme suivante

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \psi_j(y),$$

où $\varphi_j \in E^*$ et $\psi_j \in F^*$. Par le théorème de Hahn Banach, on extend les formes linéaires φ_j et ψ_j en tout X et Y respectivement. Alors,

$$\begin{aligned} u(T) &= \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_i) \psi_j(y_i) \\ &= \sum_{j=1}^m \psi_j \left(\sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) y_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \psi_j(0) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $u(T) = 0$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ alors $u = 0$. ■

1.3.3 Produit tensoriel et linéarisation

Le but principal du produit tensoriel est de linéariser un opérateur multilinéaire. Autrement dit à tout opérateur multilinéaire on associe un opérateur linéaire défini sur le produit tensoriel $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$.

Proposition 1.3.3 *Soit $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire. Sa linéarisation $\tilde{T} : X_1 \otimes \dots \otimes X_m \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire bien défini.*

Preuve. Pour que la forme linéaire \tilde{T} soit bien définie il faut et il suffit que pour tout $u = 0$ on a $\tilde{T}(u) = 0$. Soit $u = \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_m^i = 0$. Soit $y^* \in Y^*$ la composée $y^* \circ T$ est forme bilinéaire sur $X_1 \times \dots \times X_m$. Donc

$$\begin{aligned} y^* \left(\sum_{i=1}^n T(x_1^i \otimes \dots \otimes x_m^i) \right) &= \sum_{i=1}^n y^* \circ T(x_1^i, \dots, x_m^i) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_m^i, y^* \circ T \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \tilde{T}(u) &= \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_m^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n T(x_1^i, \dots, x_m^i) = 0, \end{aligned}$$

alors \tilde{T} est bien définie. ■

1.3.4 Produit tensoriel projectif

Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de X_1, \dots, X_m

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_m = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m : n \in \mathbb{N}^*, x_i^j \in X_j \right\}.$$

C'est un espace vectoriel. On définit sur $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

On note $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces X_1, \dots, X_m i.e. ; le complété de $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = \dots = X_m = X$ on écrit simplement $\hat{\otimes}_\pi^m X$.

Proposition 1.3.4 *Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m, Y , on a l'identification isométrique*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = (X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*)^*.$$

Cas particulier. *Le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées*

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

Chapitre 2

Factorisation des opérateurs multilinéaires faiblement compact

L'objet de ce chapitre est d'étudier les opérateurs faiblement compact. Commençons par les opérateurs linéaires faiblement compact. Ensuite, on prendra la catégorie des opérateurs multilinéaires en donnant les propriétés essentiels de ces opérateurs puis on discutera la notion de faiblement compact pour cette catégorie d'opérateurs. On termine ce chapitre par étudier les résultats de factorisation les plus célèbres des opérateurs linéaires et multilinéaires. Pour le cas multilinéaires, deux types de factorisation sont exposés. Les résultats de ce chapitre sont tous trouvés dans les travaux de [3] et [10].

2.1 Opérateur linéaire faiblement compact

Le cas linéaire considéré comme une source d'inspiration pour les différents cas notamment le cas multilinéaire. On donne la définition des opérateurs linéaires faiblement compact puis quelques résultats de factorisation. Commençons la définition suivante:

Définition 2.1.1 (*Opérateur faiblement continu*) On dit qu'un opérateur linéaire entre espaces de Banach $u : X \longrightarrow Y$ est faiblement continu si pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , on a

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ implique } T(x_n) \xrightarrow{w} T(x).$$

Proposition 2.1.1 *Nous avons:*

- (1) *Une forme linéaire est continue si et seulement si elle est faiblement continue.*
- (2) *Tout opérateur linéaire continu est faiblement continu, la réciproque n'est pas vraie.*

Définition 2.1.2 (Opérateur faiblement compact) *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $u \in \mathcal{B}(X; Y)$ est dit faiblement compact si le sous ensemble $u(B_X)$ est relativement faiblement compact (i.e., $\overline{u(B_X)}$ est faiblement compact) dans Y . La collection de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de X dans Y sera notée $\mathcal{W}(X; Y)$, qui est un Banach pour la norme des opérateurs. Si $X = Y$ on écrit simplement $\mathcal{W}(X)$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire faiblement compact entre espaces de Banach. Alors u est continu.*

Preuve. Comme u est faiblement compact, alors $\overline{u(B_X)} = \overline{\{u(x) : x \in B_X\}}$ est faiblement compact. D'autre part,

$$\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\| \leq \sup_{y \in \overline{u(B_X)}} \|y\|,$$

comme l'application $y \mapsto y$ est faiblement continu sur Y , alors elle atteint son maximum sur $\overline{u(B_X)}$ (faiblement compact). Donc u est borné. ■

Proposition 2.1.3 (Propriété d'idéal) *Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{W}(X; Y)$. Soient G, Z deux autres espaces de Banach et $v \in \mathcal{B}(Y; G), w \in \mathcal{B}(Z; X)$. Alors*

$$v \circ u \circ w \text{ est faiblement compact.}$$

Théorème 2.1.1 *La famille des opérateurs linéaires faiblement compacts forme un idéal des opérateurs linéaires, i.e., pour tout X et Y des espaces de Banach on a:*

(1) *L'ensemble $\mathcal{W}(X; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{B}(X; Y)$ qui contient les opérateurs linéaires de rang finis.*

(2) *La classe $\mathcal{W}(X; Y)$ vérifie la propriété d'idéal.*

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait:

- (a) *$(\mathcal{W}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ est un espace normé (Banach)*
- (b) *$\|A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; A(x) = x\|_{\mathcal{W}} = 1$.*

(c) Si $u \in \mathcal{W}(X; Y)$, $v \in \mathcal{B}(E; X)$, $w \in \mathcal{B}(Y; F)$,

$$\|v \circ u \circ w\|_{\mathcal{W}} \leq \|v\| \|u\|_{\mathcal{M}} \|w\|.$$

Alors $(\mathcal{W}; \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.

On peut caractériser les opérateurs linéaires faiblement compacts dans le résultat suivant.

Proposition 2.1.4 (Grantmacher cas linéaire) Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a) L'opérateur u est faiblement compact.
- b) L'opérateur $u^* : Y^* \rightarrow X^*$ est faiblement compact.
- c) Pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente dans Y .
- d) L'opérateur u^{**} est de valeurs dans Y , i.e., $u^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.

Proposition 2.1.5 L'espace $\mathcal{W}(X; Y)$ est injective et fermé dans $\mathcal{B}(X; Y)$, i.e.,

(1) Injective: pour tout $u \in \mathcal{B}(X; Y)$ et $i \in \mathcal{B}(Y; Y_0)$ un isométrie, alors,

$$i \circ u \in \mathcal{W}(X; Y_0) \iff u \in \mathcal{W}(X; Y)$$

(2) Fermé: pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}(X; Y)$ convergente en norme vers u , alors $u \in \mathcal{W}(X; Y)$.

2.2 Opérateurs multilinéaires faiblement compact

Nous sommes maintenant sur le point de donner la définition d'un opérateur multilinéaire faiblement compact.

Définition 2.2.1 Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. L'opérateur T est faiblement compact s'il envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact. Autrement dit si $T(B_{X_1} \times \dots \times B_{X_m})$ est relativement faiblement compact dans Y .

Notation. On notera $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme des opérateurs.

Lemme 2.2.1 Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est faiblement compact.
- (2) Pour toute suite bornée $(x_{i_j}^j) \in X_j$ (où $1 \leq j \leq m$), la suite $(T((x_{i_1}^1)_{i_1}, \dots, (x_{i_m}^m)_{i_m}))$ admet une sous suite faiblement convergente dans Y .

Proposition 2.2.1 (Propriété idéal) Soit $T \in \mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Soient $u \in \mathcal{B}(Y; Z)$ et $v_j \in \mathcal{B}(G_j; X_j)$ ($1 \leq j \leq m$), alors

- (1) L'opérateur $u \circ T \in \mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Z)$.
- (2) L'opérateur $T(v_1, \dots, v_m)$ est un élément de $\mathcal{W}(G_1, \dots, G_m; Y)$.

Corollaire 2.2.1 L'espace des opérateurs multilinéaires faiblement compact est un idéal de Banach des opérateurs multilinéaires.

Théorème 2.2.1 (Grantmacher m -linéaire) Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et

$$T^* \in \mathcal{B}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)),$$

son opérateur adjoint. Alors, (a) \Leftrightarrow (b) où

- (a) T est faiblement compact.
- (b) T^* est faiblement compact.

2.3 Résultats de factorisation (cas linéaire)

Théorème 2.3.1 Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (a) u est faiblement compact.
- (b) u se factorise autour un espace de Banach réflexif, i.e., $\exists G$ un espace de Banach réflexif et deux opérateurs linéaires bornés v, w tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v \quad \uparrow w & \\ & G & \end{array}$$

Corollaire 2.3.1 *Soit X un espace de Banach réflexif. Soient Y un espace de Banach et $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné, alors u est faiblement compact.*

Preuve. On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow id_X \quad \uparrow u & \\ & X & \end{array}$$

alors, u se factorise par un espace réflexif X . D'après le théorème précédent u est faiblement compact. ■

Remarque 2.3.1 *Dans le Corollaire précédent, si on suppose l'espace arrivé Y réflexif, on obtient un résultat pareil.*

Proposition 2.3.1 *Soit X un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (a) X est réflexif.
- (b) L'identité $id_X : X \rightarrow X$ est faiblement compact.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) : Clair d'après le Corollaire 2.3.1.

(b) \Rightarrow (a) : Supposons que id_X est faiblement compact. D'après le Théorème 2.3.1, il existe un espace réflexif G et deux opérateurs linéaires bornés v, w tels que

$$id_X = w \circ v,$$

le Corollaire 2.3.1 assure que v et w sont faiblement compact. Alors, $v(B_X)$ est relativement faiblement compact car v est faiblement compact. Comme w est aussi faiblement compact, $w \circ v(B_X)$ est relativement faiblement compact. Nous avons donc

$$id_X(B_X) = w \circ v(B_X) = B_X,$$

c'est à dire B_X est relativement compact donc $\overline{B_X}$ est faiblement compact. Par conséquent (Théorème de Kakutani) X est réflexif. ■

Corollaire 2.3.2 *Soit X un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) X est réflexif.

(b) Pour tout espace de Banach Y et tout opérateur linéaire borné $u : X \rightarrow Y$, u est faiblement compact.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) : Immédiate d'après le Corollaire 2.3.1.

(b) \Rightarrow (a) : On prend $Y = X$ et $u = id_X$, on trouve ce qu'on veut. ■

Notons ici qu'on peut remplacer dans l'énoncé du Corollaire précédent l'espace X par Y , on trouve même résultat.

2.4 Théorèmes et résultats de factorisation (cas multilinéaire)

Le Lemme suivant relie entre un opérateur multilinéaire et son opérateur linéarisé pour le concept de faiblement compact.

Lemme 2.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $\tilde{T} \in B(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ sa linéarisation. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) L'opérateur T est dans $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

(b) L'opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{W}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.

Preuve. (a) \Rightarrow (b) : Soit $T \in \mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$. On peut voir facilement que

$$(\tilde{T})^* = T^*,$$

alors, d'après le Théorème 2.2.1; $(\tilde{T})^*$ est faiblement compact et par la Proposition 2.1.4; \tilde{T} est faiblement compact.

(b) \Rightarrow (a) : Même argument. ■

2.4.1 Factorisation de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$

Le résultat qui suit donne le premier type de factorisation dans le cas multilinéaire, sa preuve est basé sur lemme précédent. L'opérateur multilinéaire T appartient à la classe

$\mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ s'il existe un espace de Banach G et $u \in \mathcal{W}(G; Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; G)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

En d'autre termes, on va montrer que la classe des opérateurs multilinéaires faiblement compact coïncide avec la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.

Théorème 2.4.1 *Soit $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *T est faiblement compact.*

(b) *T appartient à la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.*

(c) *T se factorise par un espace réflexif, i.e. il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; G)$ tels que $T = u \circ A$.*

En d'autres termes

$$\mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Preuve. (a) \Rightarrow (b) : Soit $T \in \mathcal{W}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors nous avons

$$T = \tilde{T} \circ i_m,$$

d'après le Lemme précédent \tilde{T} est faiblement compact, c'est à dire T appartient à la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.

(b) \Rightarrow (c) : Supposons que T est dans la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$, alors T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$ avec u est linéaire faiblement compact. D'autre part, u se factorise par un espace réflexif, soit G . Alors nous avons

$$T = u \circ A = v \circ w \circ A,$$

ce qu'il confirme que T est vérifie (c).

(c) \Rightarrow (a) : Supposons que T vérifie la propriété (c), alors T se factorise par un espace réflexif G

$$T = u \circ A,$$

nous avons dans ce cas

$$\tilde{T} = u \circ \tilde{A},$$

c'est à dire \tilde{T} se factorise par un espace réflexif, par conséquent \tilde{T} est faiblement compact, donc T est faiblement compact par le Lemme précédent. ■

2.4.2 Factorisation de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$

Soit T un opérateur multilinéaire. Alors, T appartient à la classe $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y)$ s'ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$ ($1 \leq j \leq m$) et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_m; Y)$ tels que

$$T = A(u_1, \dots, u_m).$$

Proposition 2.4.1 *Soit \mathcal{W} l'idéal linéaire des opérateurs faiblement compact. Alors:*

- (a) *L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ est un multi-idéal*
- (b) *Si \mathcal{W} est un idéal de Banach, alors $(\mathcal{L}(\mathcal{W}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})})$ est un multi-idéal de Banach.*

Théorème 2.4.2 *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach réflexifs et Y un espace de Banach. Pour tout opérateur multilinéaire borné $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$ ($1 \leq j \leq m$) et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_m; Y)$ tels que*

$$T = A(u_1, \dots, u_m).$$

Preuve. Pour tout $1 \leq j \leq m$; l'espace X_j est réflexif, alors l'opérateur T_j est faiblement compact (définie sur un réflexif). Par la Proposition, on trouve ce qu'on veut.

■

Proposition 2.4.2 *Soit $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y)$.*
- (2) *Les opérateurs linéaires $T_j : X_j \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ définie par*

$$\begin{aligned} x_j &\longmapsto T_j(x_j) : X_1, \dots, X_m \longrightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto T_j(x_j)(x_1, \dots, x_m) = T(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

sont faiblement compacts.

Preuve. (1) \implies (2) : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y)$ Alors, T s'écrit sous la forme

$$T = A(u_1, \dots, u_m),$$

où $u_j \in \mathcal{W}(X_j; Y_j)$ et $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_m; Y)$. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \varphi &: G_j \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \cdot^{[j]}, X_m; Y) \\ \varphi(g^j)(x_1, \cdot^{[j]}, x_m) &= A(u_1(x^1), \dots, u_j(x^j), \dots, u_m(x^m)) \\ &= T(x_1, \dots, x_m) \\ &= T_j(x_j)(x_1, \cdot^{[j]}, x_m) \end{aligned}$$

Comme $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$ par la propriété d'idéal, on a

$$T_j \in \mathcal{W}(X_j; \mathcal{L}(X_1, \cdot^{[j]}, X_m; Y)).$$

(2) \implies (1) : Voir l'article [8, Théorème 4]. ■

Théorème 2.4.3 *Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Les espaces X_1, \dots, X_m sont réflexifs.*
- (b) *Pour tout espace de Banach Y on a*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Preuve. (a) \implies (b) Immédiate d'après le Théorème 2.4.2.

(b) \implies (a) Supposons que T est dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, \dots, X_m; Y)$. D'après la Proposition 2.4.2. on a pour tout $1 \leq j \leq m$

$$T_j \in \mathcal{W}(X_j; \mathcal{L}(X_1, \cdot^{[j]}, X_m; Y)).$$

Soient maintenant $1 \leq j \leq m$ et $id_{X_j} : X_j \longrightarrow X_j$ l'identité de X_j . On va montrer que id_{X_j} est faiblement compact. Pour $1 \leq k \leq m$ ($k \neq j$) on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. Posons

$$T = x_1^* \otimes \dots \otimes id_{X_j} \otimes \dots \otimes x_m^*.$$

Soit l'opérateur multilinéaire

$$v = x^1 \otimes \cdot^{[j]} \otimes x^m : \mathcal{L}(X_1, \cdot^{[j]}, X_m; X_j) \longrightarrow X_j,$$

définit par

$$v(\varphi) = x^1 \otimes \dots \otimes x^m(\varphi) = \varphi(x^1, \dots, x^m).$$

Il est facile de voir que

$$id_{X_j} = v \circ T_j.$$

En effet, pour tout x^j de X_j on a

$$\begin{aligned} id_{X_j}(x^j) &= v \circ T_j(x^j) = v(T_j(x^j)) \\ &= T_j(x^j)(x^1, \dots, x^m) = T(x_1, \dots, x_m) \\ &= x_1^*(x^1) \otimes \dots \otimes id_{X_j}(x^j) \otimes \dots \otimes x_m^*(x^m) \\ &= x^j. \end{aligned}$$

Par la propriété d'idéal, id_{X_j} est réflexif, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 2.4.1 *En général, la composition d'un multilinéaire borné avec des opérateurs linéaires faiblement compacts n'est pas un multilinéaire faiblement compact. Prenons l'exemple suivant. Soit $X_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces réflexifs. Pour tout $1 \leq j \leq m$, l'identité id_{X_j} est faiblement compact. On définit l'opérateur*

$$A : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m,$$

par

$$A(x_1, \dots, x_m) = x_1 \otimes \dots \otimes x_m$$

Posons $T = A(id_{X_1}, \dots, id_{X_m})$. Si T est faiblement compact, il en est de même pour sa linéarisation \tilde{T}

$$\tilde{T} = \tilde{A} \circ id_{X_1} \otimes \dots \otimes id_{X_m} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m,$$

qui n'est autre que l'identité de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$. En effet, soit $u \in X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$ alors

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \circ id_{X_1} \otimes \dots \otimes id_{X_m} \left(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right) &= \sum_{i=1}^n A(id_{X_1}, \dots, id_{X_m})(x_i^1, \dots, x_i^m) \\
 &= \sum_{i=1}^n A(x_i^1, \dots, x_i^m) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible, car en général le produit projectif des espaces réflexifs n'est pas un espace réflexif.

Chapitre 3

Factorisation des opérateurs multilinéaires sommants

Ce chapitre est consacré à étudier les différentes classes d'opérateurs multilinéaires sommants. Notre objective est d'examiner chaque classe pour savoir si elle vérifie le théorème de factorisation. Dans le cas linéaire, la définition d'un opérateur linéaire p -sommant a été introduite par Grothendieck [9] pour $p = 1$, et généralisée pour tout p par Pietsch en 1967 [15]. Ce dernier a démontré que cette classe d'opérateurs possède une factorisation intéressante connue par son nom. Dans le cas multilinéaire, toutes les résultats de factorisation sont basés sur ce théorème de factorisation de Pietsch.

3.1 Généralité sur les opérateurs linéaires sommants

Soit X un espace de Banach. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $l_p^n(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^n(X)} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et $l_p^{n, \omega}(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^{n, \omega}(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où X^* est le dual (topologique) de X . La boule unité fermée de X est notée B_X (si p est infini on prend le sup).

Définition 3.1.1 (Cas linéaire) Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{B}(X; Y)$. On dira que u est p -sommant pour $p \in [1, \infty[$, s'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

On note $\Pi_p(X; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires p -sommants de X dans Y muni de la norme

$$\pi_p(u) = \inf\{C \text{ vérifiant (3.1)}\}.$$

Remarque 3.1.1 L'opérateur u est p -sommant s'il transforme toute suite faiblement p -sommable en une suite fortement p -sommable; si $p = \infty$, c'est simplement la continuité.

Exemple 3.1.1 Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p < \infty$.

(1) L'opérateur de multiplication défini par

$$\begin{aligned} u_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \cdot \varphi \end{aligned}$$

avec $\varphi \in L_p(\mu)$, est p -sommant et $\pi_p(u) = \|\varphi\|_p$.

(2) L'injection canonique

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est p -sommante et $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Théorème 3.1.1 (Factorisation de Pietsch [5]) Soient $p \in [1, \infty[$ et $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p -sommant. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\lambda(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ telle que cette formule est vérifiée, alors u est p -sommant et $\pi_p(u) \leq C$.

La factorisation proprement dite de Pietsch est

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{u} \\ i_X(X) & \xrightarrow{k_p} & S \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

où \tilde{u} est un opérateur linéaire borné, k_p est la restriction de J_p , $K = B_{X^*}$ et S est la fermeture de $k_p \circ i_X(X)$ dans $L_p(\mu)$. Dans ce cas, $\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|$.

Remarque 3.1.2 (Cas particulier) Si $p = 2$, l'opérateur \tilde{u} peut s'étendre à $L_2(\mu)$ tout entier, c'est à dire u se factorise par un espace de Hilbert. En effet, soit P la projection de $L_2(\mu)$ sur S , donc

$$\bar{u} := \tilde{u} \circ P \text{ et } u = \bar{u} J_2 i_X : X \xrightarrow{J_2 i_X} L_2(\mu) \xrightarrow{\bar{u}} Y,$$

avec la remarque que $J_2 i_X$ est 2-sommant.

3.2 Opérateurs multilinéaires sommants, généralisation et factorisation

La généralisation des opérateurs linéaires p -sommants au cas multilinéaire a été initiée par Pietsch en 1983. Il a introduit deux définitions: opérateurs multilinéaires absolument p -sommants et p -dominés. Les autres classes sont introduit par d'autre chercheurs.

3.2.1 Opérateurs multilinéaires absolument p -sommants

Définition 3.2.1 ([16]) Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument p -sommant ($1 \leq p < \infty$) s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$),

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{i=1}^n \right\|_{l_p^n \omega(X_j)}. \quad (3.3)$$

On note $\mathcal{L}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m -linéaires absolument p -sommants muni de la norme $\|T\|_p = \inf \{C : C \text{ vérifie (3.3)}\}$.

Remarque 3.2.1 Les opérateurs absolument p -sommants ne vérifient pas le théorème de factorisation.

3.2.2 Opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants

Définition 3.2.2 Soient $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty[$ avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$, $(j = 1, \dots, m)$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{i=1}^n \right\|_{l_{p_j}^{n, w}(X_j)}. \quad (3.4)$$

La classe des opérateurs m -linéaires absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{L}_{(p; p_1, \dots, p_m)}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{(p; p_1, \dots, p_m)} = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.4)}\}.$$

Théorème 3.2.1 (Théorème de factorisation) Soient $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty[$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommant s'ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in \Pi_{p_j}(X_j; G_j)$ ($1 \leq j \leq m$) et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_m; Y)$ tels que

$$T = A(u_1, \dots, u_m).$$

3.2.3 Opérateurs multilinéaires p -dominés

Définition 3.2.3 ([16]) Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ un opérateur m -linéaire borné. On dira que T est p -dominé ($1 \leq p < \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$ ($1 \leq j \leq m$), on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^{n, \omega}(X_j)}. \quad (3.5)$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m -linéaires p -dominés de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y . C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.5)}\}.$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y)$. Soulignons que $\mathcal{L}_d^p(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_{(\frac{p}{m}; p, \dots, p)}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 3.2.2 Soient $1 \leq p < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) L'opérateur T est p -dominé.

(2) Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ_j sur $K_j = B_{X_j^*}$ ($1 \leq j \leq m$) telles que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^p d\mu_j(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.6)$$

pour tout $x^j \in X_j$. De plus, on a

$$\delta_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.6)}\}$$

(3) Pour tout $1 \leq j \leq m$, il existe des probabilités de Radon μ_j sur $B_{X_j^*}$ et $\bar{T} \in \mathcal{L}(S_1, \dots, S_m; Y)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times \dots \times & X_m & & \xrightarrow{T} & & Y \\ \downarrow i_{X_1} & & \downarrow i_{X_m} & & & & \bar{T} \uparrow \\ i_{X_1}(X_1) & \times \dots \times & i_{X_m}(X_m) & \xrightarrow{(k_1, \dots, k_m)} & S_1 & \times \dots \times & S_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C(K_1) & \times \dots \times & C(K_m) & \xrightarrow{(k_1, \dots, k_m)} & L_p(\mu_1) & \times \dots \times & L_p(\mu_m) \end{array}$$

où $k_j : C(K_j) \longrightarrow L_p(\mu_j)$ est l'injection canonique, $i_{X_j} : X_j \longrightarrow C(K_j)$ est l'isométrie canonique, S_j est la fermeture de l'espace $k_j(i_{X_j}(X_j))$ dans $L_p(\mu_j)$ et $\|\bar{T}\| = \delta_p(T)$.

Remarque 3.2.2 (1) Si T est p -dominé, alors il existe des opérateurs linéaires p -sommants u_j ($1 \leq j \leq m$) et A un opérateur multilinéaire tels que $T = A \circ (u_1, \dots, u_m)$.

(2) Si $u_j \in \Pi_p(X_j; G_j)$ ($1 \leq j \leq m$), l'opérateur multilinéaire $T \circ (u_1, \dots, u_m)$ est p -dominé.

3.2.4 Opérateurs multilinéaires multi p -sommants

Une autre définition a été introduite indépendamment par Mario C. Matos [13] (sous la terminologie: opérateur multilinéaire fully sommant) et par Bombal, Peréz-Garcia and Villanueva [2], suite à la question de Pietsch sur les cas des opérateurs absolument $(p; p_1, \dots, p_m)$ -sommants qui coïncident avec les opérateurs multilinéaires de Hilbert Schmidt (qui seront introduits plus loin).

Définition 3.2.4 ([13]) *Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p -sommant ($1 \leq p < \infty$), s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, \dots, x_{i_m}^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$),*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_{i_j}^j \right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_p^{n_j} \omega(X_j)}. \quad (3.7)$$

On note $\Pi_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, l'espace de Banach des opérateurs m -linéaires multi p -sommants, muni de la norme

$$\pi_p^m(T) = \inf \{C : C \text{ vérifie (3.7)}\}.$$

Remarque 3.2.3 *Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogue du théorème de factorisation de Pietsch.*

3.2.5 Opérateurs multilinéaires fortement p -sommants

Définition 3.2.5 ([6]) *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$)*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}} \left(\sum_{i=1}^n |\Phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.8)$$

La classe des opérateurs m -linéaires fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{L}_{ss}^p(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}_{ss}^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (3.8) soit vérifiée.

Théorème 3.2.3 ([6]) *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(1) L'opérateur T est fortement p -sommant.

(2) Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}$ (muni de sa topologie $*$ -faible) et une constante positive $C > 0$ telle que pour tout (x^1, \dots, x^m) dans $X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)}} |\Phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\Phi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note que l'espace $\mathcal{L}_{ss}^p(X_1, \dots, X_m; Y)$ forme un multi-idéal de Banach. On a aussi

$$\Pi_p \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_{ss}^p(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Proposition 3.2.1 Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors,

(1) Si \tilde{T} est p -sommant, alors T est fortement p -sommant.

(2) Théorème de Grothendieck multilinéaire: si les X_j sont des espaces \mathcal{L}_1 et Y est un espace de Hilbert, on a pour tout $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_{ss}^p(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Preuve. (1) Facile à voir.

(2) On note que $X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m$ est un espace \mathcal{L}_1 ; d'après le petit théorème de Grothendieck, \tilde{T} est p -sommant, puis on conclut par (1). ■

3.2.6 Opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

La définition des opérateurs de Hilbert Schmidt a été introduite par Dwyer [11], et étudiée par plusieurs auteurs notamment Pietsch dans [16]. L'idée a été inspirée de la norme de Hilbert Schmidt d'un opérateur linéaire T sur un Hilbert H , qui est la somme des $\|T(e_j)\|^2$ où (e_j) est une base orthonormale de H .

Définition 3.2.6 Soient H_1, \dots, H_m, H des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times \dots \times H_m \rightarrow H$ est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{e_{i_1} \in I_1, \dots, e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})\|^2 < \infty,$$

où $(e_{i_j})_{i_j \in I_j}$ est une base orthonormale de l'espace H_j ($1 \leq j \leq m$). Noter que cette quantité ne dépend pas du choix de la base orthonormale. La norme de Hilbert-Schmidt de T est

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{e_{i_1} \in I_1, \dots, e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme dans le cas linéaire, l'espace des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; H),$$

est un espace de Hilbert dont la norme $\|\cdot\|_{HS}$ est induite du produit scalaire suivant

$$\langle T, S \rangle = \sum_{e_{i_1} \in I_1, \dots, e_{i_m} \in I_m} \left\langle T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}), \overline{S(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})} \right\rangle.$$

Définition 3.2.7 (Produit tensoriel de Hilbert) On peut munir le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$ du produit scalaire défini par

$$\forall h = (h_1 \otimes \dots \otimes h_m), k = (k_1 \otimes \dots \otimes k_m) \in H_1 \otimes \dots \otimes H_m : \langle h, k \rangle = \prod_{j=1}^m \langle h_j, k_j \rangle.$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme correspondante et $H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m$ l'espace de Hilbert complété. Rappelons que cette norme est raisonnable et vérifie

$$\varepsilon(v) \leq \|v\|_2 \leq \pi(v),$$

pour tout $v \in H_1 \otimes \dots \otimes H_m$ où ε est la norme tensoriel injective sur $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$. Soit $(e_{k_j})_{k_j \in I_j}$ une base orthonormale de H_j ($1 \leq j \leq m$), on peut voir sans difficulté que le système

$$\{e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_m}\}_{\substack{k_j \in I_j \\ 1 \leq j \leq m}},$$

forme une base orthonormale de $H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m$. La proposition suivante devient donc immédiate.

Proposition 3.2.2 ([13, Proposition 5.10]) Soient H_1, \dots, H_m, H des espaces de Hilbert.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{HS}(H_1, \dots, H_m; H)$.
- (2) L'opérateur \widetilde{T}_2 est dans $\mathcal{L}_{HS}(H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m; H)$, (\widetilde{T}_2 est l'extension de \widetilde{T} sur l'espace $H_1 \widehat{\otimes}_2 \dots \widehat{\otimes}_2 H_m$).

Remarque 3.2.4 Dans le cas $m = 1$, toutes les définitions précédentes coïncident avec la définition des opérateurs linéaires p -sommants.

3.3 Les opérateurs Cohen fortement p -sommants

3.3.1 Cas linéaire

Soit $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire entre espaces de Banach, u est fortement p -sommant ($1 < p \leq \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^n |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}. \quad (3.9)$$

La plus petite constante C , notée $d_p(u)$, telle que l'inégalité (3.9) a lieu, définit la norme fortement p -sommante sur l'espace de Banach $\mathcal{D}_p(X; Y)$ des opérateurs Cohen fortement p -sommants de X dans Y . Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{D}_1(X; Y)$ coïncide avec $\mathcal{B}(X; Y)$, l'espace des opérateurs bornés de X dans Y .

Le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs linéaires fortement p -sommants est donné comme suit. Pour la démonstration, on applique directement le théorème de Pietsch sur les opérateurs adjoints car ils sont p^* -sommants. Voir [4], pour plus de détails.

Théorème 3.3.1 (Factorisation de Pietsch) *Soient $p \in]1, \infty]$ et p^* son conjugué, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Soit $u : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire fortement p -sommant. Alors, il existe une probabilité de radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $y^* \in Y^*$ on a*

$$|\langle u(x), y^* \rangle| \leq d_p(u) \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.10)$$

*Inversement, s'il existe une probabilité de radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ et $C > 0$ telle que la formule (3.10) est vérifiée, alors u est fortement p -sommant et $d_p(u) \leq C$.*

3.3.2 Cas multilinéaire

La version multilinéaire a été introduite par Achour et Mezrag dans [1]. Elle conserve la plupart des propriétés des opérateurs linéaires notamment le théorème de factorisation de Pietsch.

Définition 3.3.1 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et X_j, Y des espaces de Banach ($1 \leq j \leq m$). Un opérateur m -linéaire $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ est Cohen fortement p -sommant, $1 < p \leq \infty$, s'il*

existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}. \quad (3.11)$$

La classe des opérateurs m -linéaires Cohen fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (3.11)}\}.$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Théorème 3.3.2 ([1]) Soit $1 < p \leq \infty$. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et T^* son adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur multilinéaire T est Cohen fortement p -sommant.
- (2) Il existe une probabilité de Radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ telle que, pour tout $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ et tout $y^* \in Y^*$

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{X_j} \|y^*\|_{L_{p^*(\mu)}}. \quad (3.12)$$

- (3) L'opérateur adjoint T^* est p^* -sommant. De plus

$$d_p^m(T) = \pi_{p^*}(T^*) = \inf \{C \text{ vérifiant (3.12)}\}.$$

Lemme 3.3.1 ([17]) Soit $1 < p \leq \infty$. Soit $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire et $\tilde{T} : X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$ sa linéarisation. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'opérateur T appartient à $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$.
- (2) L'opérateur \tilde{T} appartient à $\mathcal{D}_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.

Preuve. Tout d'abord, on remarque que l'opérateur adjoint de \tilde{T} est T^* . D'après le Théorème 3.3.2, $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, si et seulement si, $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m))$, donc, d'après la propriété résultats linéaires (RL)/(c) de [4], si et seulement si,

$$\tilde{T} \in \mathcal{D}_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Un des principaux résultats de cette partie est le théorème suivant.

Théorème 3.3.3 ([17]) *Pour tout X_1, \dots, X_m, Y espaces de Banach on a*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y). \quad (3.13)$$

Preuve. Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$, alors il existe un espace de Banach Z , un opérateur linéaire $u \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

Alors, u^* est p^* -sommant, donc pour tout $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ et $y^* \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} |\langle u \circ A(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &= |\langle A(x^1, \dots, x^m), u^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|A\| \prod_{j=1}^m \|x^j\| \|y^*\|_{L_{p^*}(\mu)}, \end{aligned}$$

et par conséquent, $T = u \circ A$ appartient à $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Pour l'inclusion inverse, soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$. D'après le Lemme 3.3.1, \tilde{T} est dans $\mathcal{D}_p^m(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. Comme $T = \tilde{T} \circ i_m$, où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, donc T appartient à $\mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 3.3.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *L'espace Y est de dimension finie.*
- (2) *Pour tous espaces de Banach X_1, \dots, X_m ,*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y).$$

- (3) *L'identité $id_Y \in \mathcal{D}_p(Y; Y)$.*

Preuve. (1) \Rightarrow (2) Facile.

(2) \Rightarrow (3) Comme $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ pour tout X_1, \dots, X_m , on a

$$id_Y \in \mathcal{D}_p(Y; Y).$$

(3) \Rightarrow (1) L'opérateur id_{Y^*} est alors p^* -sommant, ce qui entraîne que $id_{Y^*} = id_{Y^*} \circ id_{Y^*}$ est compact (par composition de deux opérateurs faiblement compacts et complètement continus). Alors id_Y est aussi compact, donc Y est de dimension finie. ■

Corollaire 3.3.2 *Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommants sont faiblement compacts.*

Preuve. Dans le cas linéaire, pour tout $p > 1$ $\mathcal{D}_p(X; Y) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{W}}(X; Y)$, d'où le résultat.

■

Corollaire 3.3.3 *Soient X_1, \dots, X_m des espaces de Banach et Y un espace de Banach réflexif. Alors, les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommants de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y sont compacts.*

Preuve. D'après le Théorème 3.3.3, il existe un espace de Banach Z , un opérateur linéaire $u \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

Il est bien connu qu'un opérateur p -sommant défini sur un espace réflexif est compact. Par conséquent, un opérateur fortement p -sommant est compact quand son espace arrivé est réflexif, i.e., u est compact. Nous pouvons conclure que T est compact. ■

Bibliographie

- [1] D. Achour and L. Mezrag. On the Cohen strongly p -summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327 (1) (2007), 550-563.
- [2] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva. Multilinear extensions of Grothendieck's theorem. Quart. J. Math. 55 (2004), 441-450.
- [3] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda. On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139–1155.
- [4] J. S. Cohen. Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973), 177-200.
- [5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, (1995).
- [6] Verónica Dimant. Strongly p -summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 182–193.
- [7] A. Defant, K. Floret. Tensor Norms and Operator Ideals. North-Holland (1993). 121.
- [8] M. Gonzalez and J. M. Gutierrez. *Injective factorization of holomorphic mappings*. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 6, 1715–1721.
- [9] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. SaoPaulo 8, 1–79 (1956).
- [10] D. Pérez-García and I. Villanueva, A composition theorem for multiple summing operators. Monatsh. Math. 146 (2005), 257-261.

- [11] T. A. W. Dwyer III. Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidtholomorphy type. *Bull. Amer. Math. Soc.* 77, 725–730 (1971).
- [12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces, I and II*. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [13] M. C. Matos. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings. *Collect. Math.* 54,111–136 (2003).
- [14] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces*. Math. Studies, Vol. 120.
- [15] A. Pietsch. Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.* 28, 333–353(1967). 45.
- [16] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics*, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.
- [17] Saadi khalil. *Les opérateurs multi p -sommant et leurs applications*. Thèse Doctorat, Batna, Algérie 2010.
- [18] A. C. Zaanen. *Introduction to operator theory in Riesz space*. Springer-Verlag. (1997).

Résumé

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on va étudier les résultats de factorisation des opérateurs multilinéaires, nous avons inclus des définitions et des résultats de base, en suite, nous avons étudié deux types de factorisation, le premier type factorisation de type $W \circ L$, et dans le deuxième type, factorisation de type $L(W)$, et à la fin de ce travail, est on va examiner chaque classe pour savoir si elle vérifie le théorème de factorisation avec des preuves et quelques résultats.

ملخص

في هذه المذكرة المتعلقة بطور الماستر تخصص تحليل دالي. قمنا بدراسة نتائج تحليل المؤثرات المتعددة الخطية، حيث في البداية أدرجنا المفاهيم والنتائج الأساسية، ثم تطرقنا لدراسة نوعين من العوامل، النوع الأول $W \circ L$ ، والنوع الثاني $L(W)$ ، وانهيينا العمل بفحص كل فئة لمعرفة ما إذا كانت تحقق نظرية العوامل، مع البراهين وبعض النتائج الأساسية.

Abstract

In this memory of Master option functional analysis, we will study the results of factorization of the multilinear operators, we have included definitions and basic results, we have studied two types of factorization, the first kind factorization type $W \circ L$, and in the second type, factorization of type $L(W)$, and at the end of this work, is to examine each class to know if it verifies the factorization theorem with some proofs and some results.