

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA



كلية التكنولوجيا
FACULTE DE TECHNOLOGIE
قسم الإلكترونيك
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIE
FILIERE : Electronique
OPTION : Contrôle Industriel

THEME

**FILTRAGE DU SIGNAL ELECTROCARDIOGRAMME PAR LA
DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERS (SVD)**

Proposé et dirigé par : Mr. Ouali Mohammed Assam

Réalisé par : MENDJEHI Abd el fetah

N° D'ordre: 2016/CI 09/89/385

PROMOTION: JUIN 2016

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

A ma mère,

A mon père,

A mes frères et sœurs,

A toute ma famille,

A tous mes amis,

A tous ceux que j'aime

Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma reconnaissance.

REMERCIEMENTS

En premier lieu je tiens à remercier Le Bon Dieu Tout-Puissant et Miséricordieux de la bonne santé, de la volonté et de la patience qu'il m'a accordé tout au long de mes études.

Je remercie très sincèrement M. DUALI MOHAMMED ASSAM, le promoteur de ce travail, pour ces conseils pertinents, ces orientations judicieuses, sa patience et diligence et pour ces suggestions qui ont grandement facilité ce travail, ainsi que pour le temps qu'il a consacré pour évaluer et critiquer ce travail et la confiance qu'il m'a accordé tout au long de réalisation de ce projet.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury qui ont bien voulu consacrer de leur temps à l'examen de ce travail.

SOMMAIRE

DEDICACE.....	I
REMERCIEMENTS.....	II
SOMMAIRE.....	III
INTRODUCTION GENERALE.....	1

CHAPITRE I : Anatomie du Cœur et l'Electrocardiogramme

Introduction	3
I.1 Concepts de base.....	3
I.1.1 Le cœur humain	3
I.1.2 Réseau vasculaire et circulation du sang	4
I.1.3 Physiologie mécanique	5
I.1.4 Les cellules musculaires cardiaques	7
I.1.5 Fonctionnement électrique.....	7
I.1.6 Le potentiel d'action.....	8
I.1.7 Propagation de l'influx électrique à l'intérieur du cœur	9
I.2 l'Electrocardiogramme	10
I.2.1 Définition	10
I.2.2 Ondes et Intervalles de L'ECG	10
I.2.3 Dérivations cardiaques.....	12
I.2.3.1 Dérivations sur le plan frontal.....	12
I.2.3.2 Dérivations sur le plan horizontal (précordiales).....	13
I.2.4 L'axe électrique du cœur	14
I.2.5 Le Vectocardiogramme.....	15
I.3 Conclusion	16

Chapitre II : Méthodes et Techniques Algébriques

Introduction	17
II.1 Systèmes d'équations	17

II.2 Multiplication des matrices	19
II.2.1 Méthode 1	19
II.2.2 Méthode 2	20
II.2.3 Méthode 3	20
II.3 Inverse d'une matrice	20
II.4 transposé d'une matrice	21
II.5 Espace vectoriel	21
II.5.1 Espace des colonnes d'une matrice	23
II.5.2 Espace Nul d'une matrice	23
II.5.3 Rang d'une matrice	23
II.5.4 Indépendance	24
II.5.5 Générations d'un espace "Span"	24
II.5.6 Base	25
II.5.7 Dimension	25
II.6 quatre espaces fondamentaux	25
II.7 Matrices de rang unitaire	26
II.8 Projection	27
II.9 Méthodes des moindres carrées	27
II.10 orthogonalité	29
II.11 Valeurs et vecteurs propres	30
II.12 Matrices symétriques	31
II.13 Matrices symétrique définies positives	32
II.14 Décomposition en valeurs singulières SVD	32
II.15 Inverses généralisés	34
II.15.1 Inverse ordinaire (bilatérale)	34
II.15.2 Inverse gauche	34
II.15.3 Inverse droite	35
II.15.4 Pseudo inverse	36
II.16 Conclusion	38

Chapitre III : Filtrage du signal électrocardiogramme par la méthode svd

Introduction	39
III.1 Méthodes des moindres carrées	39

III.1.1 Principe de l'orthogonalité	40
III.1.2 Les équations normales	41
III.1.2.1 Propriétés de la matrice d'autocorrélation	42
III.1.3 Reformulation des équations normales	43
III.2 SVD et la résolution d'un système linéaire aux moindres carrés.....	44
III.2.1 Théorème de la SVD	44
III.3 filtrage et réduction de rang	46
III.3.1 Principe de la méthode	46
III.3.2 Filtrage du signal électrocardiogramme par la SVD	46
III.4 Evaluation.....	51
III.4.1 Rapport signal sur bruit	51
III.5 Comparaison des résultats	51
III.6 CONCLUSION	52
CONCLUSION GENERALE	53
BIBLIOGRAPHIE.....	54

Liste des figures

Chapitre I : ANATOMIE DU CŒUR ET L'ELECTROCARDIOGRAMME

Figure I.1 : Emplacement du cœur	3
Figure I.2 : Structure interne du cœur.	4
Figure I.3 : Schéma du circuit sanguin.....	5
Figure I.4 : Cycle cardiaque du cœur. a) systole auriculaire, b) contraction isovolumique des ventricules, c) systole ventriculaire, d) relaxation des ventricules, e) repos et f) nouvelle systole auriculaire. Les flèches pleines indiquent la contraction musculaire et les flèches en pointillés direction de pression sanguine	6
Figure I.5 : Processus de dépolarisation, A) une cellule a dépolarisé B) une onde se propage de cellule à cellule, C) jusqu'à ce que tous sont dépolarisée D) la repolarisation que reconstitue la polarité normale de chaque cellule	7
Figure I.6 : Les cinq phases du potentiel d'action et les transferts ioniques au niveau cellulaire	8
Figure I.7 : Circuit nodal.	9
Figure I.8 : Formes de potentiels d'action dans les différentes parties du cœur, et séquence temporelle de la propagation de l'activité électrique du cœur analogie avec les ondes de l'ECG.	9
Figure I.9 : Signal ECG avec ses ondes et ses intervalles principaux.....	10
Figure I.10 : Montage d'Einthoven pour l'enregistrement des dérivation bipolaires des membres	12
Figure I.11 : Montage de Goldberger pour l'enregistrement des dérivation Unipolaires membres augmentés	13
Figure I.12 : Positions des électrodes recommandées pour l'enregistrement du système de dérivation unipolaires précordiales	13
Figure I.13 : Axe électrique et dérivation frontales.	14
Figure I.14 : Boucle P, QRS et T d'un vectocardiogramme.	15
Figure I.15 : VCG spatial et ses projections sur les Plans frontal (F), horizontal (H) et sagittal (S).	15
Figure I.16 : Les douze dérivation standard dans chaque plan du Corps	16

Chapitre II : Méthodes et Techniques Algébriques

Figure II.1 : Résolution par la forme en ligne.	18
Figure II.2 : Résolution par la forme en colonnes.	18
Figure II.3 : a) Exemple d'un espace vectoriel .b) contre-exemple d'un espace vectoriel	22
Figure II.4 : Sous espace vectoriel.	22
Figure II.5 : Espace de colonnes défini par et représentant un sous espace de	22
Figure II.6 : Représentation des espaces fondamentaux.	26
Figure II.7 : Projection.	27
Figure II.8 : Projection d'un vecteur de mesure dans l'espace (bidimensionnel).	28
Figure II.9 : Principe géométrique des moindres carrés.	29
Figure II.10 : Effet d'une matrice.	30
Figure II.11 : Idée géométrique de l'SVD.....	33
Figure II.12 : Représentation géométrique de l'inverse gauche.	35
Figure II.13 : Représentation géométrique de l'inverse droite.	35
Figure II.14 : Singularité de la matrice	36

Chapitre III : Filtrage du signal électrocardiogramme par la méthode svd

Figure III.1 : Signal électrocardiogramme	46
Figure III.2: Résultats de débruitage pour et un opérateur de projection	48
Figure III.3: Résultats de débruitage pour et un opérateur de projection.....	49
Figure III.4 :Résultats de débruitage pour et un opérateur de projection	50
Figure III.5 : Comparaisons des performances de la méthode proposée.	52

Liste des Tableaux

Tableau III.1 : Comparaison basée sur facteur d'amélioration.....	52
Tableau III.2 : Comparaison basée sur rapport signal sur bruit SNR.....	52

Les maladies cardiovasculaires constituent un problème majeur de santé publique, avec un peu plus de 180 000 décès par an, elles sont les premières causes de mortalité dans le monde. Les facteurs de risques sont multiples : tabac, sédentarité, obésité, hypertension artérielle, diabète, facteurs génétiques aussi parfois.

Le cœur est l'organe central du système cardiovasculaire, il peut être affecté de nombreuses pathologies qui peuvent soit être bénignes, comme certaines tachycardies par exemple, soit s'avérer très sérieuses, comme l'infarctus du myocarde. Avec l'évolution des techniques, les médecins disposent aujourd'hui d'outils performants pour observer le fonctionnement du muscle cardiaque et dresser ainsi leur diagnostic. Parmi les examens cardiologiques possibles, l'électrocardiogramme (ECG) est l'examen le plus couramment effectué.

L'ECG est l'abréviation d'Electrocardiogramme, il représente l'activité électrique du cœur. L'analyse de ce signal électrique a été et continue d'être une voie obligée pour la compréhension de l'électrophysiologie cardiaque ainsi que l'aide au diagnostic. C'est un complément nécessaire à l'imagerie médicale qui permet une bonne résolution spatiale mais souvent à un prix plus cher. Au contraire, l'enregistrement de l'activité électrique donne accès à une haute résolution temporelle (couramment en ms). Cet enregistrement peut se faire soit par voie externe, à l'aide d'électrodes posées à la surface du corps, soit par voie interne en introduisant une sonde endocavitaire, soit encore en enregistrant l'activité électrique à la surface du cœur.

L'une des étapes principales de l'opération d'acquisition de données est le filtrage. Le filtrage est une opération relative, c'est-à-dire pour l'appliquer nous devons déterminer ce qu'on veut filtrer (Déterminer les signaux utiles et les signaux parasites ou perturbateurs). Par exemple, si notre système est un RADAR poursuivant un avion, le signal utile sera la position de cet avion, et toute autre signal sera considéré comme perturbation ; Dans notre cas, le signal utile est le signal électrocardiogramme, et les signaux parasites seront tous les autres signaux circulant dans le corps humain (EMG, EEG, et autres...). Donc, nous pouvons dire que la fonction principale d'un filtre est de minimiser l'effet des perturbations et de délivrer un signal utile plus lisse.

Le filtrage des signaux ECG est une étape très importante dans le processus de diagnostic des maladies. L'opération de diagnostic est la dernière étape de toute une chaîne d'acquisition qui commence par les capteurs, amplification, conversion analogique numérique, filtrage et enfin diagnostic par un système expert contenant une base de données.

Sur tout enregistrement électrocardiographique il peut apparaître des événements indésirables pouvant contaminer les données par des bruits, parfois, ce qui nous ramène un mauvais diagnostic. Le traitement des signaux biomédicaux a besoin de techniques fiables pour préserver les informations de diagnostic du signal enregistré.

Dans ce contexte nous allons à travers ce travail d'appliquer une méthode purement algébrique (la décomposition en valeurs singulières) pour débruiter (filtrer) les signaux ECG.

Pour satisfaire les besoins de ce mémoire, notre travail s'articule principalement autour de trois chapitres :

- Le premier chapitre présente sommairement le fonctionnement du système cardiovasculaire, et notamment du cœur. Il permet en particulier de comprendre l'origine, des signaux électriques enregistrés par l'électrocardiogramme.
- Au deuxième chapitre on va présenter le bagage essentiel de l'algèbre linéaire qui nous permet d'éclairer aux lecteurs la structure des algorithmes qui seront présentés au sein de ce mémoire.
- L'essentiel de notre travail est présenté au chapitre trois où on donne tous les détails concernant le débruitage des signaux électrocardiogrammes en utilisant la décomposition en valeurs singulières SVD.

Le présent mémoire se termine par une conclusion qui résume tous les résultats obtenus dans cette étude.

ANATOMIE DU CŒUR ET L'ELECTROCARDIOGRAMME

INTRODUCTION : Le travail proposé dans ce mémoire a pour objectif de filtrer les signaux biomédicaux, en particulier les signaux d'Electrocardiogramme (ECG), enregistré en interne et à la surface du cœur. Nous exposons dans ce premier chapitre l'anatomie du cœur à fin de comprendre la genèse de ces signaux. En outre, le métabolisme et la commande nerveuse avec les caractéristiques du potentiel et de l'activation électrique y sont décrits.

I.1 CONCEPTS DE BASE

I.1.1 Le cœur humain

Le cœur est un muscle creux (poids 270g chez l'adulte), à contraction rythmique dont la fonction est d'assurer la progression du sang à l'intérieur des vaisseaux. Le cœur est situé dans le thorax entre les deux poumons (figure I.1), il repose sur le diaphragme dans le médiastin antérieur, derrière le sternum et en avant de la colonne vertébrale. Le cœur est de forme pyramidale triangulaire [1].

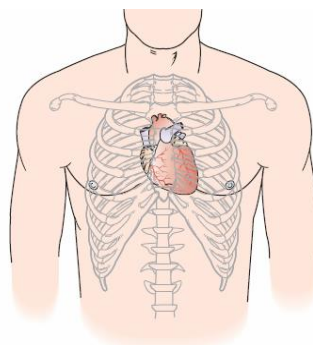


Figure I.1 : Emplacement du cœur (d'après [1]).

Le cœur se compose de deux ventricules et de deux oreillettes (figure I.2). Chaque oreillette droite et gauche communique avec le ventricule correspondant. Dans l'oreillette droite (OD) arrivent les deux veines caves, la veine cave supérieure (VCS) et les veines caves inférieures (VCI) et dans l'oreillette gauche (OG), les quatre veines pulmonaires, les veines pulmonaires

gauche (VPG) et les veines pulmonaires droites (VPD) qui amènent le sang au cœur, le sang est expulsé du ventricule gauche (VG) par l'aorte (Ao), et du ventricule droit (VD) par l'artère pulmonaire (AP). Les artères, les veines et les capillaires forment les tubes conducteurs ou vaisseaux [2] [3]; chaque oreillette droite et gauche communique avec le ventricule correspondant par des orifices auriculo ventriculaires munis d'un système valvulaire. Celui-ci est composé de deux valves, à gauche la valve mitrale (VM) et à droite la valve tricuspide (VT); l'artère pulmonaire est pourvue d'un système anti-reflux : les trois valvules sigmoïdes pulmonaires (VSP). L'artère est, elle aussi, pourvue d'un système valvulaire sigmoïde : les valvules sigmoïdes aortiques (VSAo). Ces appareils valvulaires n'autorisent le passage de sang que des oreillettes aux ventricules.

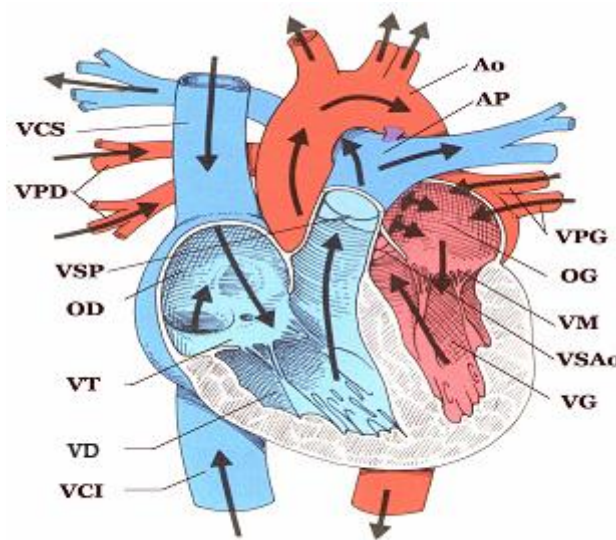


Figure I.2 : Structure interne du cœur.

I.1.2 Réseau vasculaire et circulation du sang

Le circuit sanguin est décrit sur la figure I.3. Les veines acheminent le sang au cœur et les artères le conduisent hors du cœur [4]. Le cœur propulse le sang grâce aux contractions de son tissu musculaire appelé myocarde. A chaque battement, le myocarde suit la même séquence de mouvement [5], l'oreillette droite reçoit le sang périphérique par les deux veines caves, l'oreillette gauche celui des poumons par les quatre veines pulmonaires. Le ventricule gauche propulse le sang riche en O_2 (hématosé) dans l'aorte. Le ventricule droit propulse le sang veineux (riche en CO_2) dans l'artère pulmonaire. Les valvules interdisent le retour du sang dans les oreillettes.

On peut diviser la circulation sanguine en deux parties:

- **La grande circulation** : (ou circulation systémique) permet depuis le ventricule gauche, la circulation du sang hématosé par l'aorte et ses multiples arborisation jusqu'au tissu. Le circuit se poursuit par les capillaires. Le réseau veineux ramène ensuite le sang appauvri en O_2 au niveau des veines caves qui débouchent dans l'oreillette droite.
- **La petite circulation** : (ou circulation pulmonaire) au départ du ventricule droit, l'artère pulmonaire et ses branches se divisent en capillaires pulmonaires (ramification) par lesquels arrive le sang veineux au niveau des alvéoles. Le sang se débarrasse alors du CO_2 , le sang revient ensuite au cœur dans l'oreillette gauche par les quatre veines pulmonaires et chassé dans l'aorte.

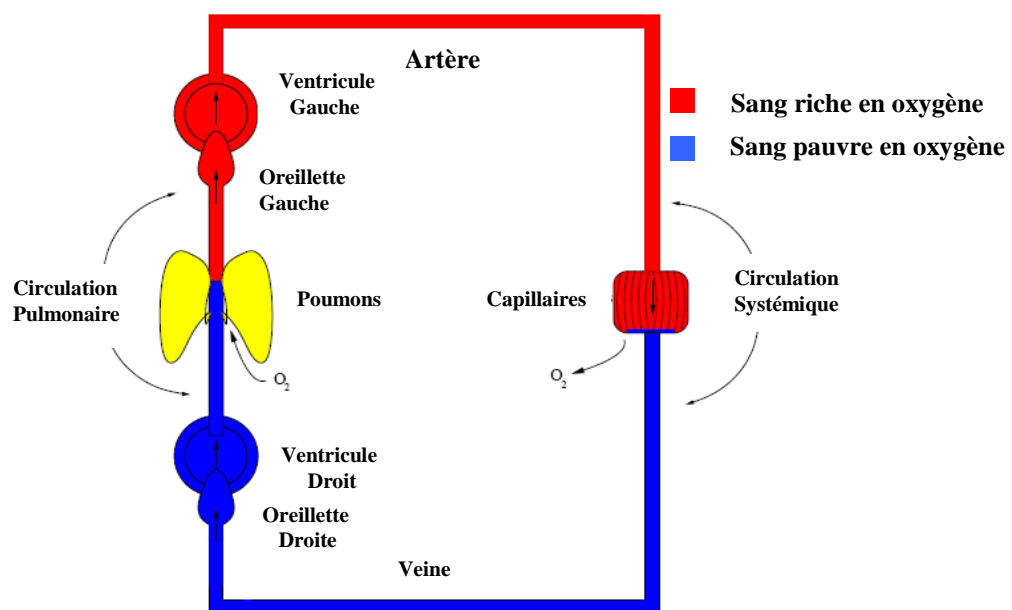


Figure I.3 : Schéma du circuit sanguin (d'après [4]).

I.1.3 Physiologie mécanique

Le cycle complet du pompage mécanique du sang bien que le cœur et la circulation pulmonaire désigné sous le nom du cycle cardiaque [1]. Le cycle de la circulation sanguine se répète constamment et se divise en deux périodes, la systole et elle est suivie d'une période de repos appelée diastole [4][6].

On peut diviser le cycle cardiaque (systole plus diastole) en cinq phases, la figure I.4 illustre la succession des différentes phases détaillées.

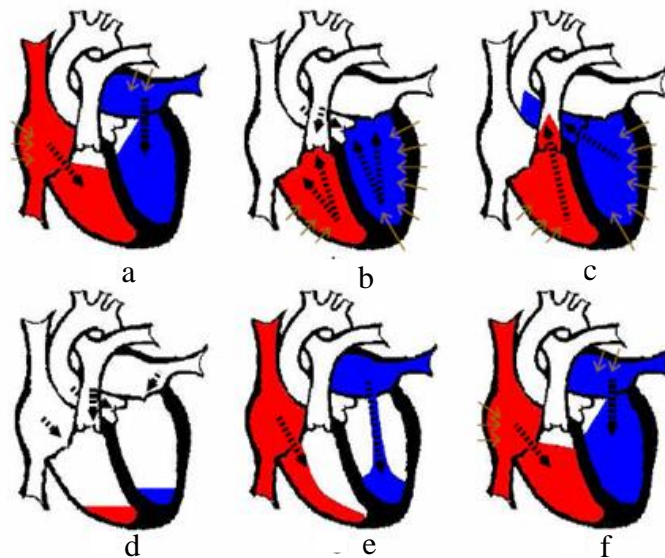


Figure I.4 : Cycle cardiaque du cœur. a) systole auriculaire, b) contraction isovolumique des ventricules, c) systole ventriculaire, d) relaxation des ventricules, e) repos et f) nouvelle systole auriculaire. Les flèches pleines indiquent la contraction musculaire et les flèches en pointillés direction de pression sanguine (d'après [7]).

a et f) La systole auriculaire : est la contraction des oreillettes lorsque celles-ci sont remplies du sang. La pression exercée par le muscle auriculaire ferme les orifices veines caves et pulmonaires et provoque le versement du sang auriculaire dans les ventricules (figure I.4) par les valves tricuspide et mitrale cependant, la majorité du remplissage des ventricules survient passivement pendant la diastole.

b) La contraction ventriculaires isovolumique : commence lorsque les cellules musculaires du myocarde ventriculaire se contractent. La pression ferme les valves tricuspide et mitrale et les valvules sigmoïdes restent fermées pendant quelques dizaines de centièmes de secondes. Comme il n'y a pas d'éjection ventriculaire, la pression augmente fortement dans les ventricules.

c) La systole ventriculaire : commence lorsque les pressions dans les ventricules dépassent les pressions dans l'artère pulmonaire et l'aorte. Les valvules sigmoïdes s'ouvrent et l'éjection se commence. Le sang oxygéné emprunte la crosse aortique et le sang désoxygéné le tronc pulmonaire. La pression aortique atteint un pic (pression artériel systolique) puis redescend jusqu'à la fin de la systole.

d) La relaxation ventriculaire : fait suite à la systole, les ventricules se relâchent, la pression chute jusqu'à être inférieure à celle exercé dans l'aorte et l'artère pulmonaire. En conséquence, les valves sigmoïdes se ferment et, lorsque la pression devient inférieure à celle des oreillettes, les valves tricuspide et mitrale s'ouvrent.

e) La phase de repos : est celle pendant laquelle le sang des veines caves et pulmonaires s'écoule librement dans les ventricules via les oreillettes [1] [4] [6].

I.1.4 Les cellules musculaires cardiaques

Les cellules musculaires cardiaques sont des fibres contractiles, soudées les unes aux autres grâce à des disques intercalaires. Elles se distinguent des fibres musculaires striées, non seulement par leurs caractéristiques histologiques mais aussi par leur fonctionnement. Elles conduisent l'influx électrique [2] [7].

I.1.5 Fonctionnement électrique

Le cœur compose un réseau intrinsèque de cellules conductrices qui produisent et propagent des impulsions électriques, ainsi que des cellules qui répondent à ces impulsions par une contraction [1] [4]. Donc l'activité du cœur est en fait la somme de l'activité électrique de toutes les cellules myocardiques, chacune se comportant comme un dipôle électrique, avec un pôle positif et un pôle négatif.

A l'état de base, les cellules cardiaques (comme toutes les cellules de l'organisme) sont polarisées, à cause d'une répartition particulière des ions de l'organisme entre l'extérieur et l'intérieur de la cellule.

En effet, il existe plus d'ions positifs (Na^+ , Ca^{2+} , ...) à l'extérieur qu'à l'intérieur de la cellule (figure I.5). La dépolarisation cellulaire correspond à une entrée d'ions positifs (ou sortie d'ions négatifs) dans la cellule. Cette phase va se propager de proche en proche aux autres cellules cardiaques pour induire une contraction du muscle cardiaque (systole). La repolarisation (retour vers l'état initial) cellulaire suit la dépolarisation cellulaire et correspond à une sortie d'ions positifs (ou entrée d'ions négatifs) de la cellule. Cette phase va permettre au cœur de se relâcher (diastole) pour qu'une nouvelle dépolarisation puisse se produire et ainsi de suite.

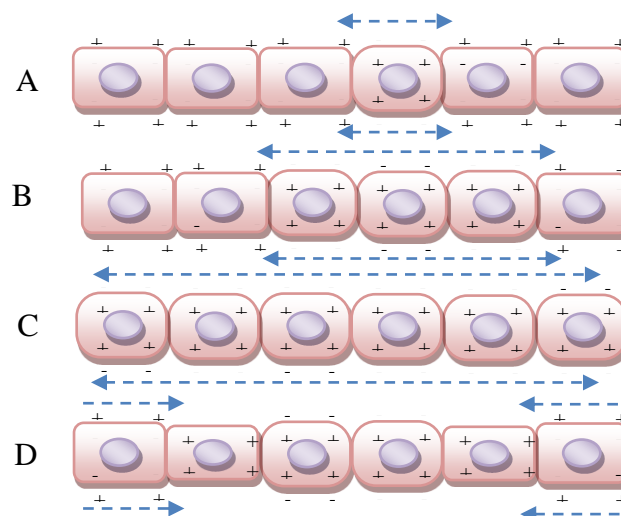


Figure I.5 : Processus de dépolarisation, A) une cellule a dépolarisé B) une onde se propage de cellule à cellule, C) jusqu'à ce que tous sont dépolarisée D) la repolarisation que reconstitue la polarité normale de chaque cellule (d'après [1]).

I.1.6 Le potentiel d'action

Un autre élément fondamental de la compréhension de l'électrophysiologie cardiaque est la représentation d'un potentiel d'action d'une cellule myocardique. Ils'agit du courant électrique enregistré au niveau d'une cellule cardiaque, qui est généré par la dépolarisation et la repolarisation, il existe cinq phases dans le potentiel d'action d'une cellule cardiaque (figure I.6)

- **La phase 0 ou dépolarisation rapide** : durant laquelle la pente du potentiel est maximale, après une excitation électrique au-dessus du seuil d'activation de la cellule au repos, les potentiels mesurés présente une inversion rapide de polarité suite à l'ouverture de canaux transmembranaires permettant l'entrée d'ions Na^+ à l'intérieur de la cellule.
- **La phase 1 ou début de la repolarisation** : qui est caractérisée par une repolarisation rapide et de courte durée, due à l'inactivation des canaux Na^+ et au flux d'ions K^+ de l'intérieur vers l'extérieur de la cellule.
- **La phase 2 ou plateau** : qui correspond à la phase de repolarisation lente. Le plateau est dû principalement à l'ouverture des canaux calciques, qui permettent une diffusion lente et passive d'ions Ca^{++} vers l'intérieur de la cellule, en atténuant l'influence des canaux K^+ , et en diminuant ainsi la vitesse de repolarisation.
- **La phase 3 ou repolarisation rapide** : qui correspond à la phase de repolarisation finale et qui se caractérise par la fermeture des canaux ioniques spécifiques, ce qui ramène la cellule au potentiel de repos originel. Il se produit également dans la dernière partie de cette phase, une activation des canaux de potassium qui permet l'expulsion active de ces ions, facilitant le retour à la négativité originelle du potentiel d'action.
- **La phase 4** : qui correspond au potentiel de repos, où la cellule devient plus facilement excitable [4].

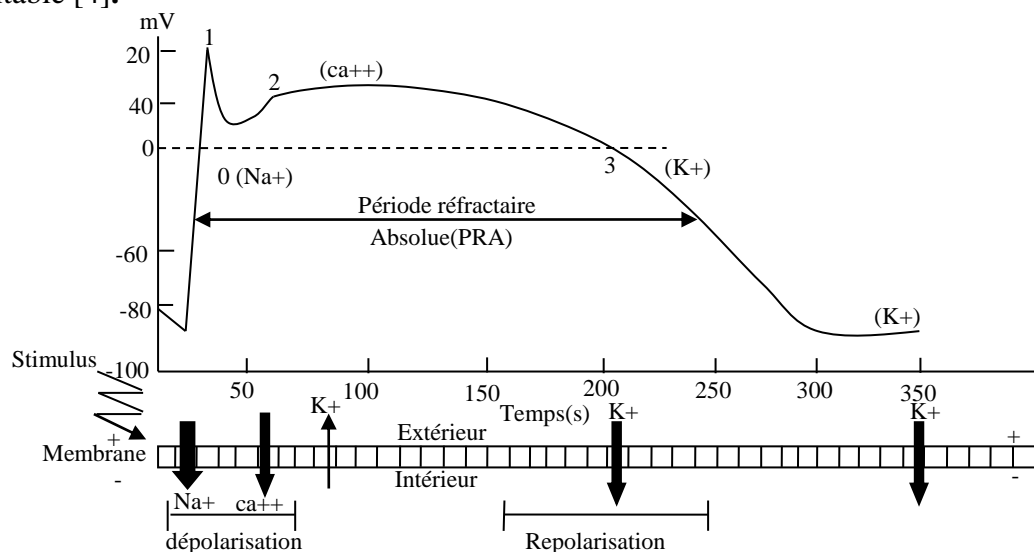


Figure I.6 : Les cinq phases du potentiel d'action et les transferts ioniques au niveau cellulaire (d'après [6]).

I.1.7 Propagation de l'influx électrique a l'intérieur du cœur

L'influx électrique cardiaque naît au niveau du nœud sinusal, qui se trouve à la jonction entre l'oreillette droite et l'abouchement de la veine cave supérieur. Cet influx va ensuite se propager dans les deux oreillettes, de l'oreillette droite vers l'oreillette gauche avant de se diriger vers le nœud auriculo-ventriculaire ou nœud de aschoff-tawara, qui se trouve dans la partie basse de la cloison interauriculaire. A ce niveau l'influx électrique transite sans dépolariiser de structure cardiaque et arrive au niveau du faisceau de His qui se trouve dans la partie haute du septum interventriculaire. Là. Le faisceau de His se divise en deux branches : La Branche Droite destinée au ventricule droit et La Branche Gauche destinée au ventricule gauche (figure I.7). La branche gauche va se diviser en deux hém branches : l'Hémibranche Antérieur Gauche et l'Hémibranche Bosterieur Gauche. La branche droite et les deux hémibranches gauche vont se diviser dans chacun des ventricules en deux nombreux petits filets nerveux pour former le réseau de purkinje.

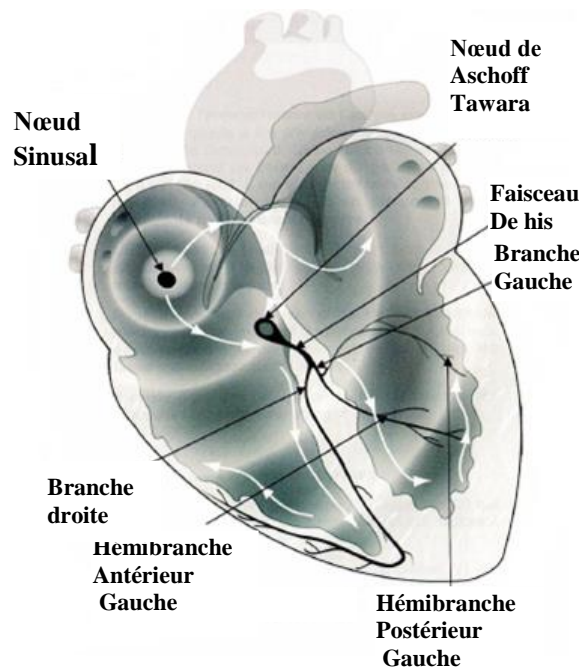


Figure I.7 : Circuit nodal.

L'électrocardiogramme va représenter l'ensemble de ce trajet de conduction électrique comme montre la figure suivante :

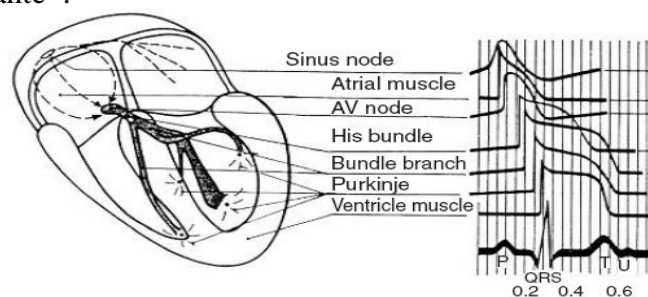


Figure I.8 : Formes de potentiels d'action dans les différentes parties du cœur, et séquence temporelle de la propagation de l'activité électrique du cœur analogie avec les ondes de l'ECG (d'après [8]).

I.2 l'Electrocardiogramme

I.2.1 Définition

L'électrocardiographie (ECG) est la représentation graphique du potentiel électrique qui commande l'activité musculaire du cœur. Ce potentiel est recueilli par des électrodes à la surface de la peau [9]. Ces potentiels naissent à la limite entre les zones excitées et celles non excitées du myocarde, et sont mesurés entre deux points de la surface du corps [4].

I.2.2 Ondes et Intervalles de L'ECG

L'ECG enregistre le processus de dépolarisation et la repolarisation du massif musculaire auriculaire et du massif musculaire ventriculaire. Ce processus est enregistré comme une séquence de déflexions ou ondes superposées à une ligne de potentiel zéro, appelée ligne isoélectrique ou ligne de base. Ces déflexions sont dites positives si elles sont situées au-dessus de la ligne isoélectrique, et négatives si non.

Pour chaque battement cardiaque l'ECG comporte plusieurs ondes, et différents intervalles entre ces ondes (figure I.9) [1] [2] [8] [9] [10].

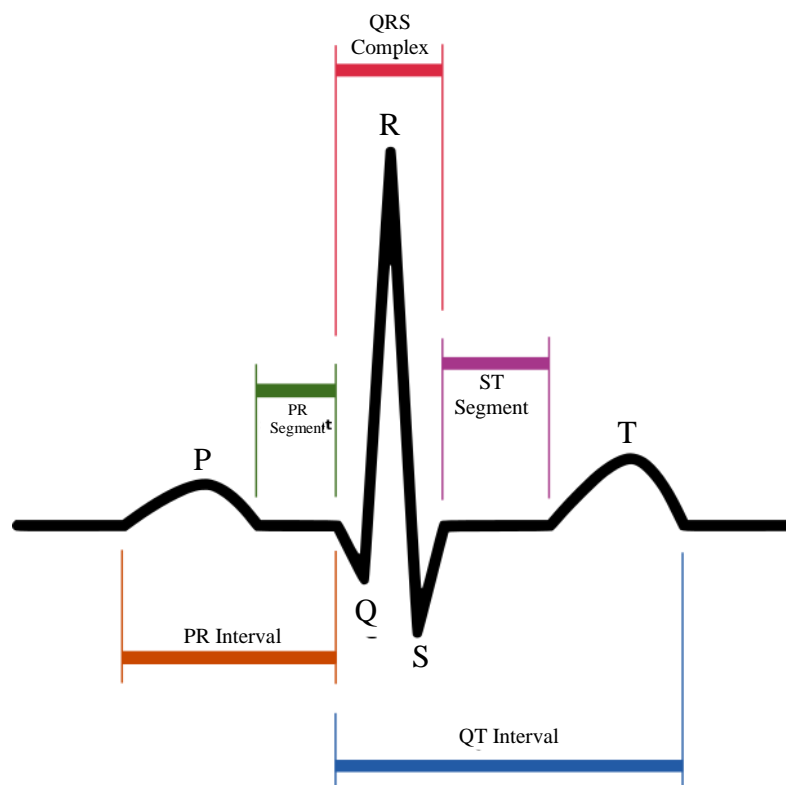


Figure I.9 : Signal ECG avec ses ondes et ses intervalles principaux.

- **L'onde P** : elle est liée à la dépolarisation auriculaire. C'est une onde de petite amplitude, arrondie. Le rythme physiologique est dit sinusal. Dans ce cas les ondes P auriculaires précèdent régulièrement les complexes ventriculaires. Les ondes P dites «sinusales » sont toujours positives.
- **L'intervalle PR** : (ou PQ) est le temps entre le début de P et le début du QRS. Il est le témoin du temps nécessaire à la transmission de l'influx électrique des oreillettes aux ventricules.
- **Segment PR** : c'est un court segment isoélectrique qui sépare l'onde P du complexe ventriculaire.
- **Le Complexe QRS** : il témoigne de la dépolarisation ventriculaire, et se compose de plusieurs déflexions rapides:
 - **L'onde Q** : physiologiquement, elle est de faible amplitude (moins du tiers du complexe QRS).
 - **L'onde R** : elle est par définition la première onde positive, qu'elle soit ou non précédée d'une onde Q.
 - **L'onde S** : est une onde négative qui fait suite à une onde R.
- **Segment ST** : il correspond au début de la repolarisation ventriculaire. Il est généralement isoélectrique et suit horizontalement la ligne de base.
- **L'Onde T** : elle est le témoin électrique de la repolarisation ventriculaire. Sa durée est imprécise du fait de sa fin progressive. Elle est généralement dirigée dans le même sens que le complexe QRS. Sa forme est asymétrique, avec un premier versant en pente faible, un sommet arrondi et un deuxième versant descendant en pente rapide.
- **L'Intervalle QT** : mesuré du début du QRS à la fin de l'onde T correspond à l'ensemble de la dépolarisation et de la repolarisation cardiaque.

Les durées normales des différentes composantes de l'ECG chez l'homme sont les suivantes : onde P < 0.12 s, complexe QRS = 0.06 à 0.10 s, onde T = 0.2 s environ, intervalle PR=0.12 à 0.20 s, segment ST = 0 à 0.16 s, intervalle QT = 0.33 à 0.43 s.

Les amplitudes des ondes P, Q, S et T normales sont de quelque 0.1 mV; l'onde R peut parfois dépasser 1 mV. La fréquence cardiaque s'évalue à partir de la mesure d'un espace RR.

I.2.3 Dérivations cardiaques

L'ECG s'enregistre à partir de divers points (dérivations) donnant naissance à des courbes de morphologies différentes, toujours dans l'ordre : onde P, complexe QRS et onde T. La courbe électrocardiographie va présenter des morphologies différentes selon où est placée l'électrode qui enregistre [6][8].

On distingue deux types d'électrodes:

- **Les électrodes périphériques :** (appelées D) qui sont placées sur les quatre membres et qui explorent le plan frontal du cœur.
- **Les électrodes précordiales :** (appelées V) qui sont placées sur le thorax du patient pour explorer le plan transversal du cœur.

D'après ces électrodes l'ECG standard est enregistré sur douze dérivations (six dérivations des membres et six précordiales) [1] [8] [9] [10].

I.2.3.1 Dérivations sur le plan frontal

A. Dérivations bipolaires des membres

Les dérivations bipolaires enregistrent l'activité cardiaque entre deux points du corps, elles sont placées sur les bras droit et gauche, ainsi que sur le pied gauche. On relève ainsi les différences de potentiel entre les bras gauche et droit (I), pied gauche et bras droit (II) et pied et bras gauches (III). Ces dérivations ont été déterminées par Einthoven au début du vingtième siècle et restent encore utilisées aujourd'hui [6].

Soit VL le potentiel sur le bras gauche, VR le potentiel sur le bras droit et VF le potentiel sur la jambe gauche, les trois dérivations sont:

- **DI** (dérivation I) dont la différence de potentiel respecte l'équation $DI = VI - VR$
- **DII** (dérivation II) avec $DII = VF - VR$
- **DIII** (dérivation III) avec $DIII = VF - VL$.

Ces trois dérivations constituent le triangle d'Einthoven et chaque dérivation est une arête du triangle (figure I.10).

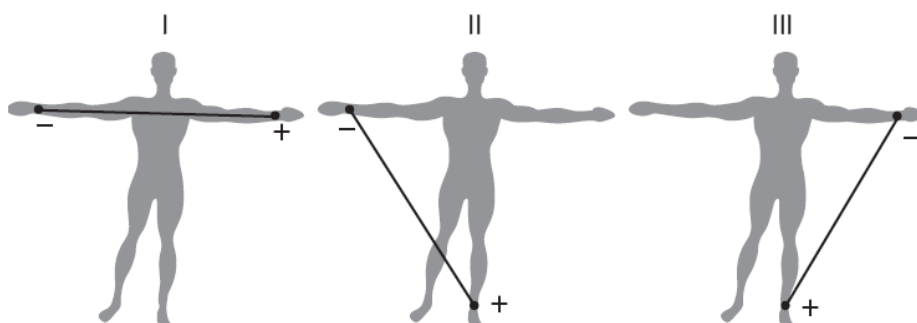


Figure I.10 : Montage d'Einthoven pour l'enregistrement des dérivations bipolaires des membres.

B. Dérivation unipolaires des membres

Les trois dérivations unipolaires aVR, aVL et aVF (a = augmented, R = right, L = left, F = foot). Ont chacune des lignes allant d'un pôle positif à un pôle négatif en passant par le centre d'un triangle, chaque électrode est prise comme pôle positif avec pour référence négative les deux autres électrodes. Les trois dérivations sont (figure I.11):

- **aVL** = $V_L - V_R + V_F/2 = 1.5V_L$ (loi de Kirchhoff $V_L + V_R + V_F = 0$)
- **aVR** avec $aVR = 1.5V_R$
- **aVF** avec $aVF = 1.5V_F$.

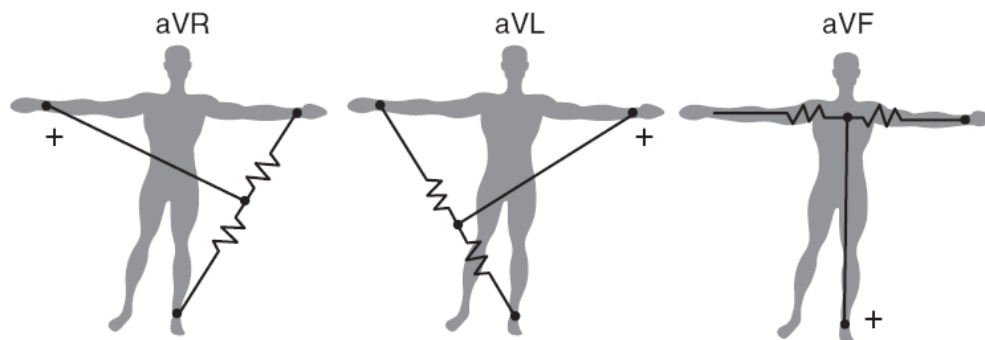


Figure I.11 : Montage de Goldberger pour l'enregistrement des dérivations Unipolaires membres augmentés.

I.2.3.2 Dérivations sur le plan horizontal (précordiales)

Les dérivations du plan horizontal (dérivations de Wilson) constituent les dérivations unipolaires et sont au nombre de six (V1 à V6). Ces dérivations ont une partie positive, là où est placée l'électrode exploratrice, et une négative, qui correspond à la région opposée.

L'électrode exploratrice est placée sur divers points précordiaux. En plus des dérivations V1 à V6, on peut utiliser dans certaines occasions les dérivations plus droites (V1R à V4R) ou plus gauches (V5 à V6) [11].

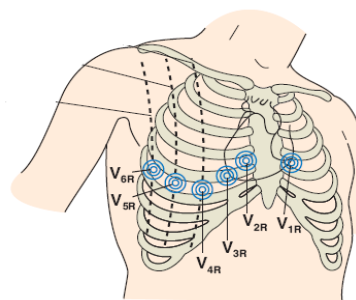


Figure I.12 : Positions des électrodes recommandées pour l'enregistrement du système de dérivations unipolaires précordiales (d'après [1]).

I.2.4 L'axe électrique du cœur

C'est l'angle du champ électrique généré par les cellules cardiaques lors de l'activation ventriculaire. On assimile ce champ à un vecteur unique dans le plan frontal. L'axe se mesure par la comparaison des amplitudes (idéalement des surfaces) respectives du segment QRS (positivité – négativité) dans les dérivations frontales. La plus grande positivité du QRS (onde R) donne une bonne idée de l'axe du cœur. Comme la dépolarisation physiologique se fait du nœud AV vers la pointe des ventricules, l'axe moyen du cœur est situé entre 30° et 60° mais il peut être normal entre -30° et $+100^\circ$. On parle de déviation axiale gauche au-delà de -30° et de déviation axiale droite au-delà de $+100^\circ$. Dans certaines configurations, l'axe électrique n'est mesurable car situé dans un plan perpendiculaire au plan frontal, ceci n'est pas un signe de tracé pathologique. L'axe électrique du cœur dans le plan horizontal est nettement moins utilisé en pratique. Un axe anormal peut être le signe de perturbations dans la séquence d'activation des ventricules ou même de dommages cellulaires.

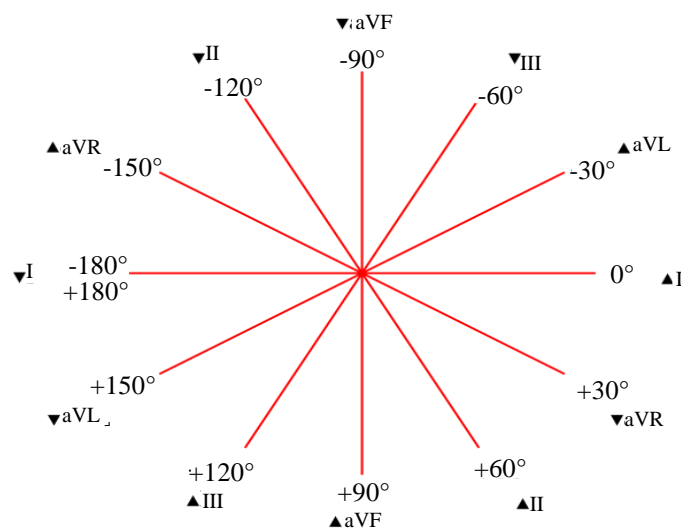




















Figure I.13 : Axe électrique et dérivations frontales.

Le tableau I.1 donne la polarité des complexes QRS sur les trois premières dérivations frontales et axe électrique du cœur :

Table I.1. Polarité des complexes QRS						
	Axe normal 0 à 90	Axe gauche physiologique 0 à -30	Axe gauche pathologique -30 à 90	Axe droite 90 à 180	extrême Axe -90 à -180	Axe indéterminé ?
DI						
DII						
DIII						

I.2.5 Le Vectocardiogramme

Avec trois dérivations orthogonales d'ECG, à chaque instant, si on trace un point dans un espace en trois dimension en prenant, pour coordonnées, les valeurs des trois dérivations d'ECG à cet instant, la trajectoire de ce point forme une courbe dans l'espace, appelée vectocardiogramme (VCG) [4]. Le VCG permet de visualiser la progression du front d'excitation sous la forme de la trajectoire d'un vecteur (ou d'un point) résultant de l'ensemble des dipôles électriques qui se déplacent avec le front d'excitation.

En raison de l'existence des deux segments isoélectriques PQ et ST, un VCG en réalité est constitué de trois boucles situées dans un espace à trois dimensions : boucle P, boucle QRS et boucle T (figure I.14). Le sens de rotation du VCG doit impérativement être indiqué. En général, on ne considère pas le VCG spatial trop difficile à représenter (figure I.15), mais ses projections dans trois plans perpendiculaires deux à deux : on a ainsi le VCG frontal, le VCG horizontal et le VCG sagittal (figure I.15). Les plans frontaux, horizontal et sagittal utilisés sont définis sur la figure I.17.

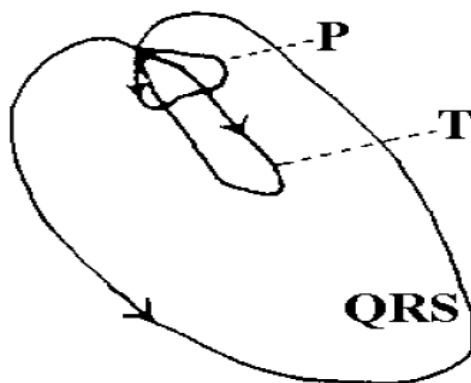


Figure I.14 :
Boucle P, QRS et T
d'un vectocardiogramme.

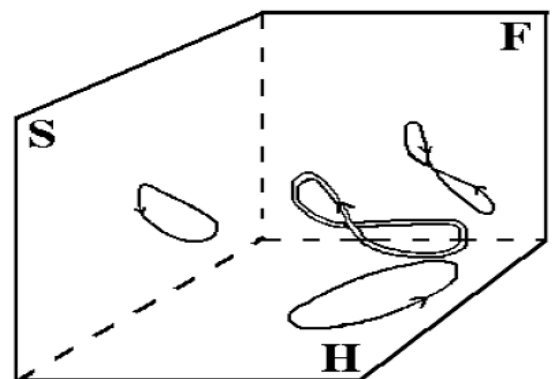


Figure I.15 :
VCG spatial et ses projections sur
les Plans frontal (F), horizontal (H)
et sagittal (S).

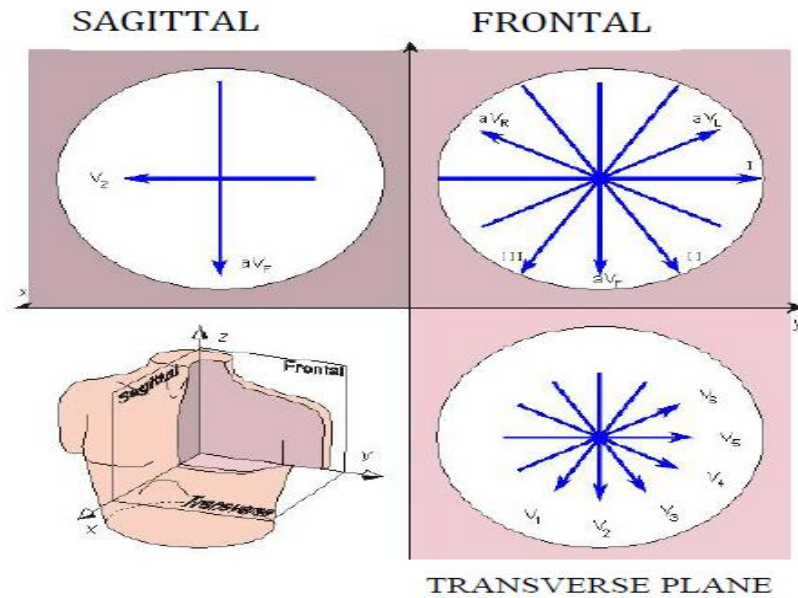


Figure I.16 : Les douze dérivations standard dans chaque plan du corps (d'après [4]).

I.3 CONCLUSION

Plusieurs activités électriques peuvent être détectées au niveau du corps humain (ECG, EMG, EEG, ...). Le signal électrocardiogramme ECG sera considéré dans notre cas.

L'ECG est l'activité électrique du cœur. Ce signal peut être utilisé dans le domaine médical pour détecter les anomalies de fonctionnement du corps (Diagnostic).

L'électrophysiologie cardiaque a été introduite en détail dans ce chapitre où nous avons essayé d'expliquer et de vulgariser toutes les notions liées au signal électrocardiogramme. Parmi les points présentés nous citons : Anatomie du cœur, son fonctionnement mécanique et électrique, signal ECG, son dérivation et enregistrement.

METHODES ET TECHNIQUES ALGEBRIQUES

INTRODUCTION : La majorité des algorithmes numériques existants actuellement ont été issus de l'algèbre linéaire. L'algèbre linéaire est donc un outil très important pour comprendre les bases des méthodes qu'on peut rencontrer en plusieurs domaines tels que traitement de signaux, télécommunications, control, ...

Vu cet intérêt, nous avons envisagé de présenter dans ce chapitre le bagage essentiel en algèbre linéaire qui nous permet d'éclairer aux lecteurs la structure des algorithmes qui seront présentés au sein de ce mémoire.

II.1 SYSTEMES D'EQUATIONS

Le problème principal de l'algèbre linéaire se résume pratiquement dans la résolution d'un système d'équations linéaires. Le cas également le plus normal sera celui de n équations linéaires avec n inconnues. Un système d'équations linéaires peut être vu ou représenté par deux formes différentes :

- Forme 1 : forme en lignes
- Forme 2 : forme en colonnes.

Si on considère la représentation simultanée lignes colonnes à la fois, on obtient ce qu'on appelle "forme matricielle", définie par une matrice A [12].

▪ Exemple 1

Soit à résoudre le système à deux équations et à deux inconnues suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \tag{II.1}$$

Ce système peut être représenté par la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \tag{II.2}$$

- **Forme en lignes** : dans cette représentation, chaque équation dans (II.1) est une ligne ; donc, si on trace dans le plan $(x - y)$ ces deux lignes, la solution du système sera le point d'intersection de ces deux lignes comme le montre la figure II.1.

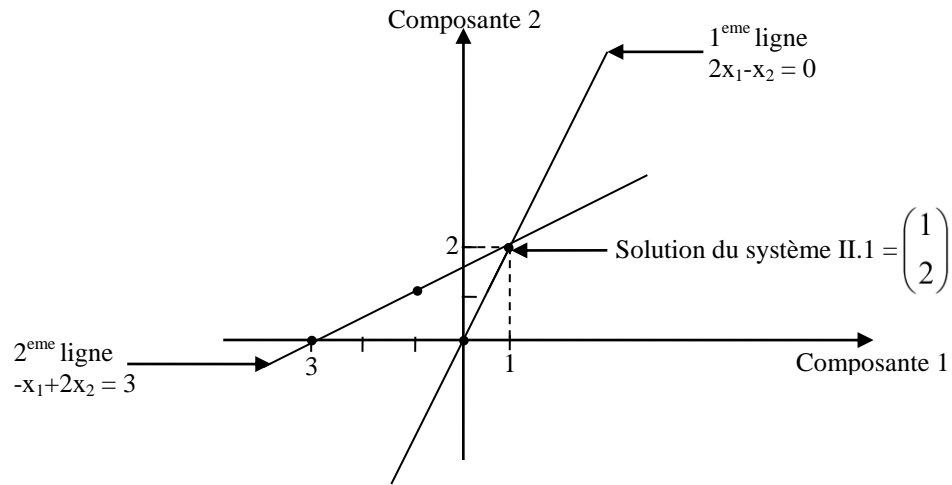


Figure II.1 : Résolution par la forme en ligne.

- **Forme en colonnes** : dans cette représentation, le système (II.1) est mis sous la forme suivante:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

On remarque que cette forme utilise les colonnes de la matrice A , et on peut dire que le vecteur b est une combinaison linéaire des colonnes de A . Comme le montre la figure II.2, la solution de ce système est donnée par les valeurs de x_1 et x_2 telle que la combinaison des colonnes donne le vecteur b .

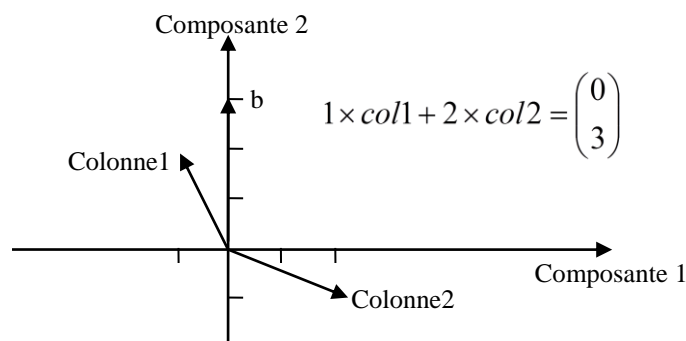


Figure II.2 : Résolution par la forme en colonnes.

- **Remarque** : si on considère toutes les combinaisons de $col1$ et $col2$, on obtient ce qu'on appelle espace des colonnes.

- **Forme matricielle** : dans cette forme, le système (II.1) devient :

$$Ax = b$$

La multiplication d'une matrice par un vecteur sera définie par la combinaison linéaire des colonnes de A comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2 & + & \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 & = & \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{Col1} & \text{Col2} & & \text{Col1} & & \text{Col2} & & \end{array}$$

Donc, Ax est une combinaison linéaire des colonnes de A . L'ensemble de tous les vecteurs définis par cette combinaison linéaire s'appelle "Espace des colonnes".

La multiplication d'un vecteur par une matrice sera définie par la combinaison des lignes de A comme suit:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 5 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Ligne1}} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{Ligne2}}$$

II.2 MULTIPLICATION DES MATRICES

Soit trois matrices $A : m \times n$, $B : n \times p$ et $C : m \times p$ tel que :

$$A \cdot B = C$$

Cette multiplication peut être faite par les trois méthodes non classiques suivantes [12] [13] :

II.2.1 Méthode 1

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\ A & B & \uparrow & C \uparrow \\ & & A.Col1(B) & A.Colp(B) \end{array}$$

Chaque colonne de la matrice C est une combinaison des colonnes de A .

II.2.2 Méthode 2

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 A & B & C
 \end{array}
 \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}
 \begin{array}{l} \leftarrow \text{lig1}(A).B \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligm}(A).B \end{array}$$

Chaque ligne de la matrice C est une combinaison des lignes de B .

II.2.3 Méthode 3

$A \cdot B = \text{Somme des } (\text{Cols}(A)) \cdot (\text{Ligne de } B)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Remarque :** si une matrice est le produit d'une colonne par une ligne, alors toutes les colonnes de la matrice résultante sont dans le même sens (ainsi la même remarque pour toutes les lignes).

II.3 INVERSE D'UNE MATRICE

Pour le moment, l'inverse d'une matrice sera associé seulement aux matrices carrées ($m=n$); une matrice carrée peut avoir un inverse comme elle ne peut l'avoir. Si cet inverse existe, il sera noté par A^{-1} , et dans le cas négatif, on dit que A est singulière [12][13].

La matrice A est dite singulière si les colonnes ou les lignes sont dépendantes (existence d'une relation linéaire entre les colonnes ou entre les lignes) comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si une relation linéaire existe entre les colonnes de A , alors :

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, dans ce cas A n'a pas d'inverse (puisque $Ax = 0$).

L'inverse d'une matrice carrée est un inverse gauche et droite à la fois, c'est-à-dire :

$$A^{-1}A = I = AA^{-1} \quad (\text{II.4})$$

Où I est une matrice identité.

Finalement on peut dire que si A une matrice carrée, alors elle n'a pas d'inverse si on peut trouver x tel que : $Ax = 0$.

II.4 TRANSPOSE D'UNE MATRICE

La matrice transposée de $A = (a_{ij})$ sera noté par A^T , et il est défini par :

$$A^T = (a_{ji}) \quad (\text{II.5})$$

Le transposé d'une matrice symétrique reste égal à la même matrice, c'est-à-dire, $A^T = A$.

Notons que le produit d'une matrice transposée par la matrice elle-même nous donne une matrice symétrique, c'est-à-dire, $A^T A$ est une matrice symétrique.

II.5 ESPACE VECTORIEL

Les deux seules opérations qu'on peut effectuer sur les vecteurs sont l'addition et la multiplication par un scalaire. Un ensemble de vecteurs munis de ces deux opérations peut former donc des combinaisons linéaires. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires sera appelé "Espace vectoriel" [12][13][14].

La figure II.3.a représenté un espace vectoriel à deux dimensions, car si on applique les deux opérations (+, .) sur un vecteur de cet espace, le résultat sera toujours dans le même espace. La figure II.3.b n'est pas un espace vectoriel, car si on multiplie un vecteur appartenant au premier quadrant par (-1), le résultat sera alors à l'extérieur de ce quadrant.

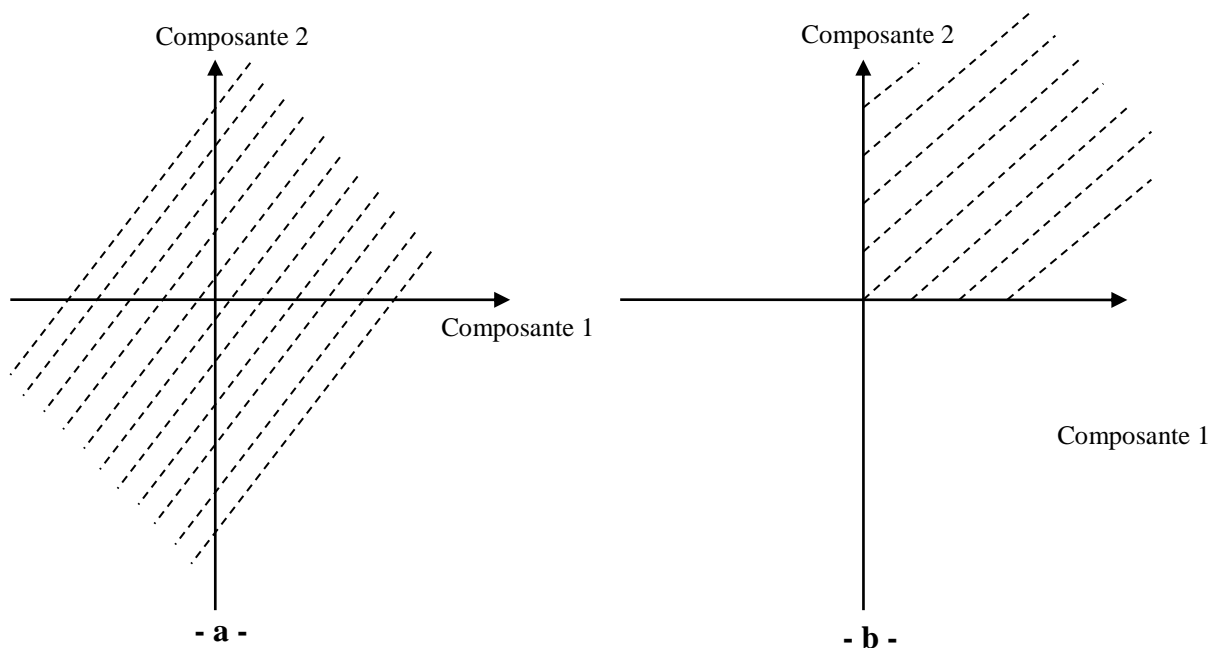


Figure II.3 : a) Exemple d'un espace vectoriel R^2 .b) contre-exemple d'un espace vectoriel.

Un espace vectoriel qui est une partie d'un autre sera appelé sous espace vectoriel, comme le montre par exemple la figure II.4. La ligne passant par l'origine sera un sous espace vectoriel dans R^2 comme le montre la figure II.4.

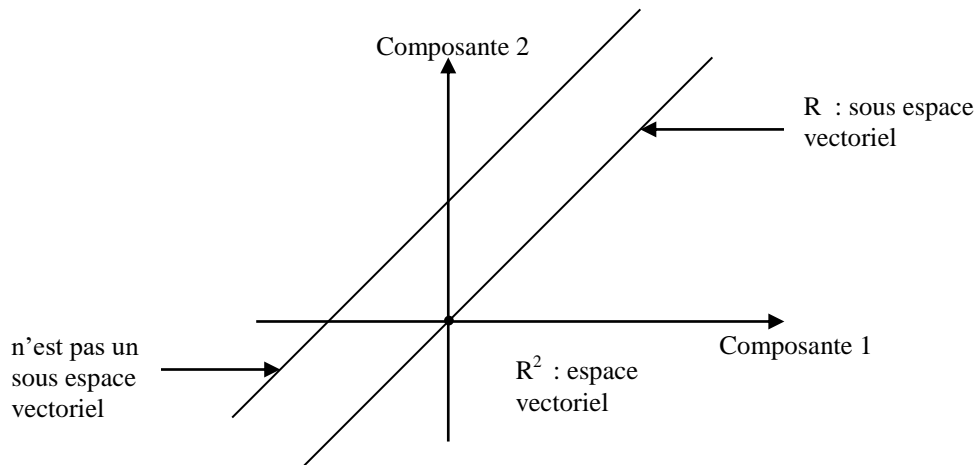


Figure II.4 : Sous espace vectoriel.

Les sous espaces vectoriels de R^2 sont tous les vecteurs dans R^2 , toutes les droites qui traversent l'origine et finalement le point 0 (origine).

▪ Exemple

Si A est une matrice dans l'espace vectoriel R^3 , donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Les colonnes de A sont dans l'espace vectoriel R^3 , mais elles forment un sous espace dans R^3 de dimension deux appelé l'espace des colonnes $C(A) = R^2$ comme le montre la figure II.5.

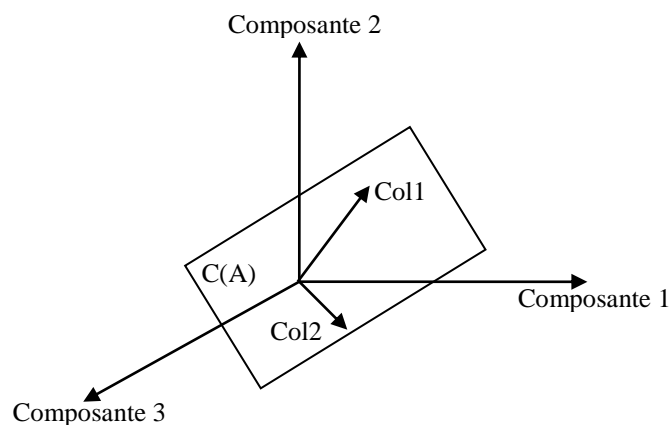


Figure II.5 : Espace de colonnes défini par $col1$ et $col2$ représentant un sous espace de R^3 .

II.5.1 Espace des colonnes d'une matrice

Si par exemple A est une matrice 4×3 donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

On remarque que les colonnes de A sont des vecteurs dans l'espace R^4 puisque elles ont quatre composantes. Les trois colonnes de A génèrent donc un sous espace de dimension 3 (R^3), on va appeler cet espace " espace des colonnes ", c'est un sous espace de R^4 , et il est noté $C(A)$; noter que cette espace est formé par toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A .

Le système linéaire $Ax = b$ possèdera des solutions que si le vecteur b appartient à l'espace des colonnes de A . Dans le cas contraire, si $b \notin C(A)$, le système d'équations ne possède pas de solutions, car $b \in R^4$ et $C(A) \subseteq R^4$, donc la seule condition pour l'existence d'une solution est que $b \in R^3$ (quatrième composante soit nulle) qui veut dire aussi que b doit être une combinaison linéaire des colonnes de A .

II.5.2 Espace Nul d'une matrice

Soit toujours la matrice A définie dans le paragraphe précédent. L'espace Nul de A noté $N(A)$ ou $Ker(A)$ sera formé par tous les vecteurs x vérifiant $Ax = 0$, dans cet exemple, le vecteur x possède trois composantes, donc notre espace nul sera inclus dans R^3 .

▪ **Remarque** : pour la matrice $A: 4 \times 3$, l'espace $C(A)$ est dans R^4 et l'espace $N(A)$ dans R^3 ; donc généralement pour une matrice $A: m \times n$ $C(A)$ sera dans R^m et $N(A)$ sera dans R^n .

▪ **Remarque** : notons que le vecteur nul appartient toujours à l'espace Nul $N(A)$.

II.5.3 Rang d'une matrice

La résolution d'un système d'équations peut être faite par la méthode d'élimination qui va nous donner le nombre de pivots. Ce nombre de pivots reflète une information très utile dans la théorie des matrices, c'est une grandeur qui nous donne le nombre des colonnes linéairement indépendantes. On va appeler ce nombre " rang de la matrice " qui sera noté par r appelé aussi $Rank(A)$. Si A est une matrice $m \times n$ de rang r , alors :

$$\begin{aligned} r &\leq m \\ r &\leq n \end{aligned} \tag{II.6}$$

Ou bien :

$$r \leq \min(m, n)$$

Plusieurs cas peuvent être distingués :

➤ Rang complet en colonnes : $r = n < m$

dans ce cas l'espace nul contient seulement le vecteur nul et le système possède une seule solution si $b \in C(A)$.

➤ Rang complet en lignes : $r = m < n$

dans ce cas l'espace nul contient d'autres éléments que le vecteur 0, et le système aura une infinité de solution quelque soit b .

➤ Rang complet : $r = n = m$

pour ce cas, toutes les matrices sont carrées, et sont toutes inversibles, et le système aura une seule solution car l'espace nul contient seulement le vecteur nul.

➤ $r < n$ et $r < m$

dans ce cas, soit on n'a pas de solution si $b \notin C(A)$ soit on a une infinité de solutions si $b \in C(A)$.

II.5.4 Indépendance

Un ensemble de vecteurs x_1, \dots, x_n est linéairement indépendant si aucune combinaison donne le vecteur nul, c'est-à-dire :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \neq 0 \quad (\text{II.7})$$

A l'exception de la combinaison zéro ou tous les c_i sont nuls.

Pour une matrice $A: m \times n$ ou $m < n$, on a $N(A) \neq 0$, donc le système $Ax=0$ possède des solutions non nulles c'est-à-dire, pour $x \neq 0$ on a $Ax=0$. (Seulement dans le cas où le nombre d'inconnus dépasse le nombre des équations).

Les colonnes d'une matrice A sont dépendantes s'il existe des vecteurs non nuls dans l'espace Nul $N(A)$ et si $N(A) = 0$, les colonnes sont donc indépendantes.

II.5.5 Générations d'un espace "Span"

Générer ou spanner un espace par les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n veut dire obtenir l'espace de toutes les combinaisons de ces vecteurs.

Comme exemple, on peut dire que les colonnes d'une matrice A Span l'espace des colonnes.

II.5.6 Base

Une base d'un espace vectoriel est une séquence de vecteurs x_1, x_2, \dots, x_d avec deux propriétés :

- 1) Ils sont indépendants
- 2) Ils span l'espace.

II.5.7 Dimension

Etant donné un espace vectoriel, chaque base de cet espace possède le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre dimension de l'espace qui reflète la grandeur de l'espace.

▪ **Exemple**

Soit l'espace $\text{Span } C(A)$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Après élimination on trouve que le nombre de pivots est deux, qui veut dire que le rang de A est deux ($\text{Rank}(A) = 2$). Le rang de A est la dimension de l'espace $C(A)$, donc :

$$\text{rank}(A) = \dim C(A) = \text{nombre de pivots} = 2$$

et bien sur, les deux premières colonnes de A forment une base de $C(A)$.

L'espace nul de A est de dimension deux selon la formule :

$$\dim N(A) = n - r = 4 - 2 = 2$$

Où : $r = \text{rank}(A)$

II.6 QUATRE ESPACES FONDAMENTAUX

Les quatre espaces fondamentaux représentent vraiment le cœur de l'algèbre linéaire. Ces espaces sont :

- L'espace des colonnes $C(A)$
- L'espace nul $N(A)$
- L'espace des lignes (combinaison linéaire des lignes de la matrice) noté $C(A^T)$
- L'espace nul de A^T noté $N(A^T)$ est appelé espace nul gauche de A .

Si la matrice A est $m \times n$, alors :

- $C(A) \subseteq R^m$, $\dim C(A) = r$ où $r = \text{rang}(A)$

- $N(A) \subseteq R^n$, $\dim N(A) = n - r$
- $C(A^T) \subseteq R^n$, $\dim C(A^T) = r$
- $N(A^T) \subseteq R^m$, $\dim N(A^T) = m - r$.

D'où la représentation suivante des quatre espaces :

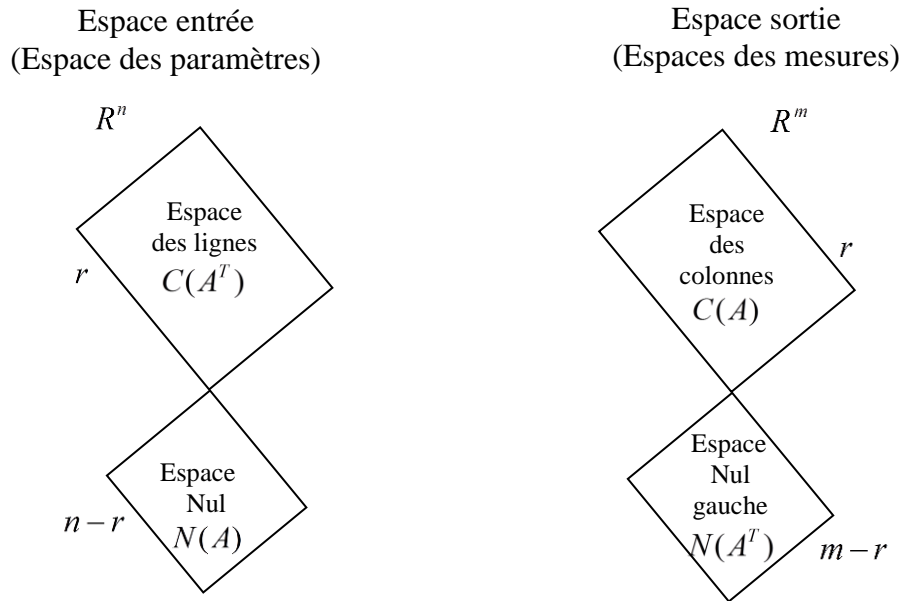


Figure II.6 : Représentation des espaces fondamentaux.

L'espace des lignes est orthogonal à l'espace nul, car si $Ax = 0$, cela veut dire que chaque ligne dans A est perpendiculaire au vecteur x . On constate la même remarque (perpendicularité) pour les espaces colonnes et $N(A^T)$.

II.7 MATRICES DE RANG UNITAIRE

Une matrice de rang unitaire est une matrice vérifiant $\text{rang}(A) = r = 1$.

Soit par exemple la matrice $A : 2 \times 3$ telle que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

La 2^{ème} ligne est un multiple de la première ligne, donc la première ligne est une base de l'espace des lignes. On a aussi :

$$\dim C(A) = \text{rang} = \dim C(A^T) = 1$$

De telles matrices peuvent être représentées par le produit de deux vecteurs comme suit :
(1^{ère} colonne \times 1^{ère} ligne)

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

donc, généralement :

$$A = UV^T$$

II.8 PROJECTION

Soit à projeter un vecteur b sur un autre vecteur a comme le montre la figure II.7. Le sens de cette projection est de trouver un point sur la droite a qui soit le plus proche possible de b , ce point sera donc la projection perpendiculaire de b sur a .

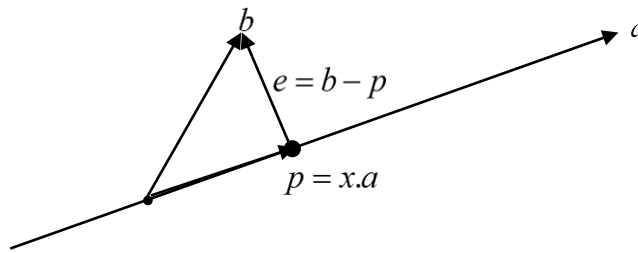


Figure II.7 : Projection.

Le vecteur e représente l'erreur entre b et a .

On a :

$$a^T(b - x \cdot a) = 0 \Rightarrow x = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (\text{II.8})$$

Donc, la projection sera donnée par :

$$p = a \cdot x = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a} \quad (\text{II.9})$$

Cette projection peut être exprimée aussi par le biais de la matrice de projection :

$$p = \frac{a \cdot a^T}{a^T a} b = P \cdot b \quad (\text{II.10})$$

En résumé, on peut dire que si a est un vecteur (droite), la quantité $\frac{a \cdot a^T}{a^T a} = P$ représente une matrice qui lorsque on la multiplie par n'importe quel vecteur, on obtient la projection de ce dernier sur la ligne a .

II.9 METHODES DES MOINDRES CARREES

Puisque le système $Ax = b$ peut ne pas avoir une solution, nous sommes amenés alors à approximer b par sa projection dans l'espace des colonnes, ce qui nous donne le vecteur p . Alors on a :

$$A\hat{x} = p$$

où $p = \text{proj}_{C(A)} b$ et \hat{x} la valeur approximée de x .

Cette situation est clairement illustrée dans la figure suivante :

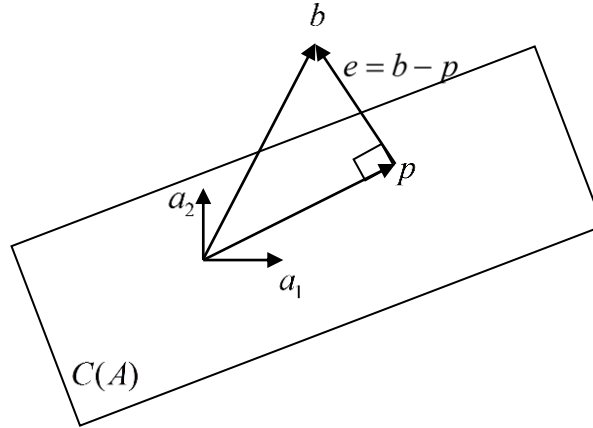


Figure II.8 : Projection d'un vecteur de mesure dans l'espace $C(A)$ (bidimensionnel).

Suivant la figure II.8, la matrice $A = [a_1 \ a_2]$, où a_1 et a_2 sont les colonnes de la matrice A .

On a :

$$p = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2 = A\hat{x} \quad (\text{II.11})$$

Notre problème maintenant sera de déterminer \hat{x} .

Nous avons : $b - A\hat{x} \perp C(A) \Rightarrow$

$$a_1^T (b - A\hat{x}) = 0 \quad \text{et} \quad a_2^T (b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} (b - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^T (b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow A^T A\hat{x} = A^T b$$

$$\Rightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (\text{II.12})$$

L'équation (II.12) représente les solutions au sens des moindres carrées du système $Ax = b$.

Donc, et après (II.12), la matrice de projection sera :

$$p = A \cdot (A^T A)^{-1} A^T b = P \cdot b \quad (\text{II.13})$$

où $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ est la matrice de projection du vecteur b dans l'espace des colonnes.

Géométriquement, les principes des moindres carrés sont représentés dans les quatre espaces fondamentaux par la figure II.9 :

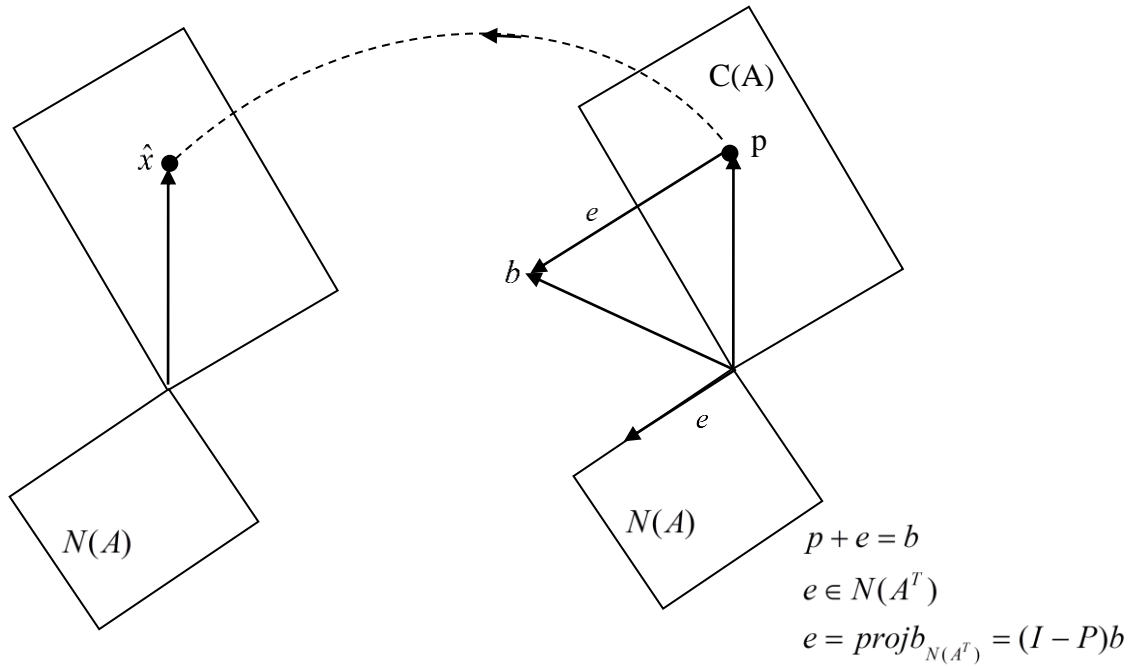


Figure II.9 : Principe géométrique des moindres carrés.

II.10 ORTHOGONALITE

Un ensemble de vecteurs q_1, q_2, \dots, q_n est dit ortho normal si :

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Si cet ensemble de vecteurs est mis dans une matrice Q comme suit :

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]$$

Alors l'identité suivante sera vraie :

$$Q^T Q = I$$

Dans le cas particulier où la matrice Q est carrée, alors on l'appelle matrice ortho normale et on déduit que :

$$Q^T = Q^{-1} \quad (\text{II.15})$$

La projection sur l'espace des colonnes de Q sera obtenu par :

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T = Q Q^T \quad (\text{II.16})$$

Donc, $Q Q^T$ est une matrice de projection, et si dans le cas particulier où Q est carrée, alors :

$$P = Q Q^T = I$$

L'application de l'orthogonalité à la méthode des moindres carrées sera par le remplacement de A par Q , ce qui nous donne :

$$\hat{x} = Q^T b$$

où chaque paramètre $\hat{x}_i = q_i^T b$.

Le passage de la matrice A vers la matrice Q s'obtient par ce qu'on appelle orthogonalisation de Gram-schmidt.

II.11 VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A sont définis par :

$$Ax = \lambda x \quad (\text{II.17})$$

où λ sont les valeurs propres de A et les x sont les vecteurs propres de A [15].

La multiplication d'une matrice A par un vecteur x va changer de direction à ce vecteur comme le montre la figure suivante :

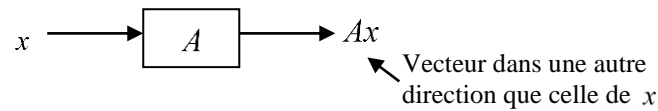


Figure II.10 : Effet d'une matrice.

On conclut donc de l'équation (II.17) que les vecteurs propres de A sont les vecteurs qui lorsqu'on les multiplie par A ne changent pas de direction mais changent d'amplitude.

De l'équation (II.17) on a :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

cela veut dire que les colonnes de $A - \lambda I$ sont linéairement dépendantes, donc la matrice $A - \lambda I$ est singulière, alors :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{II.18})$$

L'équation (II.18) nous permet de calculer les valeurs propres et l'équation (II.17) les vecteurs propres.

Si A est une matrice $n \times n$, tel que nous avons n valeurs et vecteurs propres, en effectuant maintenant la multiplication de A par la matrice S formée par les vecteurs propres de A , alors :

$$\begin{aligned}
 A.S &= A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}
 \end{aligned}$$

Alor :

$$\begin{aligned}
 AS &= S\Lambda \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1} \\
 &\Rightarrow \Lambda = S^{-1}AS
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

Donc cette méthode nous permet de diagonaliser la matrice A puisque la matrice résultante est diagonale (Λ). On dit aussi qu'on a décomposé la matrice A en $S\Lambda S^{-1}$.

II.12 MATRICES SYMETRIQUES

Une matrice A est dite symétrique si $A = A^T$. Pour ce type de matrices on a deux propriétés principales :

- 1) toutes les valeurs propres de A sont réelles
- 2) les vecteurs propres peuvent être choisis perpendiculaires.

Pour la deuxième remarque, si les vecteurs propres sont orthonormaux, alors S devient Q et on obtient alors :

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$$

Donc si A est symétrique, alors :

$$A = Q\Lambda Q^T$$

(II.20)

La décomposition (II.20) nous donne :

$$\begin{aligned}
 A = Q\Lambda Q^T &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T \\
 A &= \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^T
 \end{aligned} \tag{II.21}$$

Chaque quantité $q_i q_i^T$ est une matrice de projection, donc, si A est symétrique, alors A est une combinaison linéaire de n matrices de projection (théorème de la décomposition spectrale).

II.13 MATRICES SYMETRIQUE DEFINIES POSITIVES

De telles matrices sont caractérisées par :

- Toutes les valeurs propres sont positives
- Tous les pivots sont positifs
- Tous les sous déterminants sont positifs
- $x^T A x > 0$

La matrice $A^T A$ est une matrice toujours positive définie, ce type de matrices nous le rencontrons dans la méthode des moindres carrées.

$$A^T A \text{ est positive} \Rightarrow x^T (A^T A) x > 0$$

La vérification de ça peut être faite comme suit :

$$x^T (A^T A) x = (Ax)^T (Ax) \text{ qui est toujours positive.}$$

Donc $x^T (A^T A) x > 0 \Rightarrow A^T A$ est positive définie et aussi bien sûre symétrique est de rang n (puisque $A : m \times n$).

II.14 DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES SVD

C'est la dernière et la plus importante décomposition des matrices que nous allons présenter dans ce chapitre. Les deux premières ont été : décomposition propre $A = \Lambda S \Lambda^{-1}$ et décomposition orthogonale $A = Q \Lambda Q^T$. Ces deux décompositions ont l'inconvénient qu'elles exigent que A soit une matrice carrée. La décomposition en SVD est plus générale et concerne même la décomposition des matrices rectangulaires ($A : m \times n$) [16].

La décomposition SVD d'une matrice $A : m \times n$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 A &= U W V^T \\
 V &= [V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n] \\
 U &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m] \\
 W &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

où V est une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs de base de l'espace d'entrée (espace lignes) ($V : n \times n$) (base ortho normale dans R^n).

U est une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs de base de l'espace de sortie (espace des colonnes) ($U : m \times m$)

W : Matrice diagonale d'ordre $m \times n$.

De ce contexte, la matrice A transforme tous les vecteurs v_i de l'espace des lignes en des vecteurs u_i dans l'espace des colonnes par la transformation Av_i . En suite, une normalisation des u_i sera faite comme suit :

$$u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} \Rightarrow Av_i = \|Av_i\| u_i$$

Notons $\|Av_i\| = \sigma_i > 0$, alors $Av_i = \sigma_i u_i$ $\sigma_i > 0$

Ce passage peut être représenté graphiquement par :

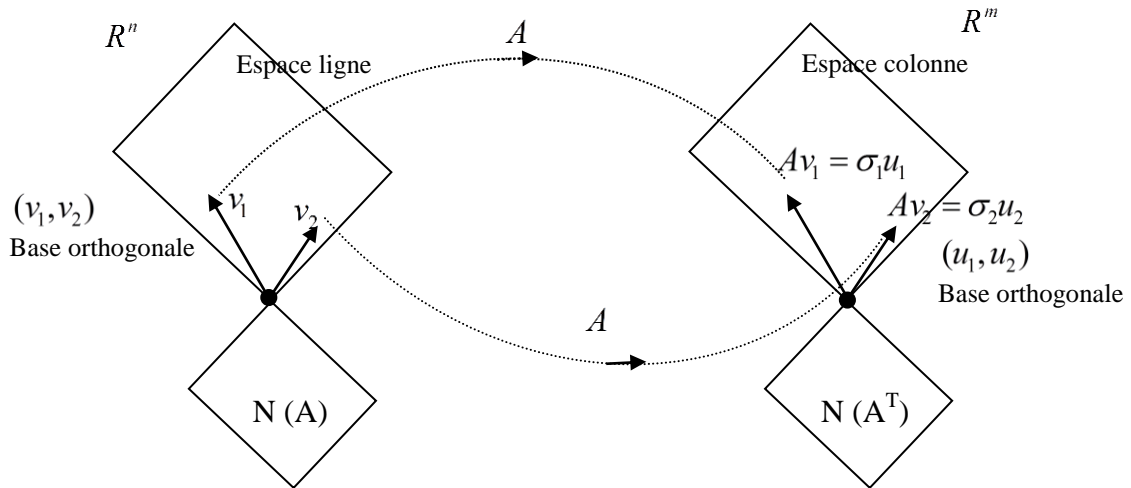


Figure II.11 : Idée géométrique de l'SVD.

Ecrivons maintenant toutes ces transformations par une seule équation :

$$\underbrace{A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{--- } V \text{ ---} \\ n \times n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{--- } U \text{ ---} \\ m \times m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{--- } W \text{ ---} \\ m \times n}}$$

Donc :

$$AV = UW \Rightarrow A = UWV^T$$

(II.22)

L'équation (II.22) est dite décomposition en SVD de la matrice A .

Notons que $A^T A = (UWV^T)^T (UWV^T) = VW^2V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{bmatrix} V^T$, donc les σ_i^2 sont les

valeurs propres de la matrice $A^T A$ et les v_i sont ses vecteurs propres.

Le cas inverse, $AA^T = (UWV^T)(UWV^T)^T = UW^2U^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \\ \vdots & \sigma_2^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{bmatrix} U^T$

II.15 INVERSES GENERALISES

II.15.1 Inverse ordinaire (bilatérale)

Soit A une matrice carrée $n \times n$ de rang $r = n = m$ (rang complet), alors, l'inverse de A existe et vérifie :

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad (\text{II.23})$$

On dit que cet inverse est bilatéral, car A^{-1} peut être multipliée soit par la gauche ou par la droite de A pour donner I .

II.15.2 Inverse gauche

Si A est une matrice $m \times n$ avec $m > n$ et $r = n$ (colonnes indépendantes). Dans ce cas on dit que A ne peut pas être inversée directement sauf si nous introduisant une astuce. Puisque $r = n$; alors $A^T A$ peut être inversée, donc :

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) = I_n \quad (\text{II.24})$$

$$\underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^{-1}_{\text{gauche}}} \cdot A = I_n \quad (\text{II.25})$$

donc : $A^{-1}_{\text{gauche}} \cdot A = I \quad (\text{II.26})$

L'expression $(A^T A)^{-1} A^T$ est appelée inverse gauche de A , et c'est cet inverse qu'on utilise dans la méthode des moindres carrés où :

$$\hat{x}_{LS} = \underbrace{(A^T A)^{-1}}_{A_g^{-1}} A^T y \quad (\text{II.27})$$

C'est-à-dire, si $Ax = y$ et $A : m \times n$, alors l'inverse ordinaire n'existe pas, donc $\hat{x}_{LS} = A_g^{-1} y$, comme le montre la figure suivante :

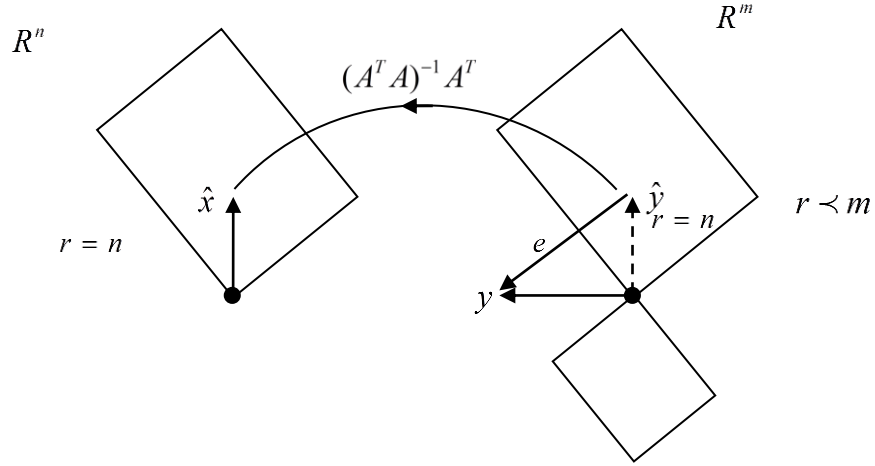


Figure II.12 : Représentation géométrique de l'inverse gauche.

II.15.3 Inverse droite

Dans ce cas A est une matrice $m \times n$ avec $n > m$ et $r = m$ (lignes indépendantes). A est dite de rang complet en lignes. L'inverse de A est obtenue par l'inverse de (AA^T) puisque cette dernière est de rang complet. Donc :

$$\underbrace{AA^T (AA^T)^{-1}}_{A_d^{-1}} = I_m \quad \Rightarrow \quad A \cdot A_d^{-1} = I \quad (\text{II.28})$$

Et l'expression $A^T \cdot (AA^T)^{-1}$ est appelée inverse droite de A . Et c'est cet inverse qu'on utilise dans La méthode des moindres normes où :

$$\hat{x}_{LS} = A^T (AA^T)^{-1} y \quad (\text{II.29})$$

Comme la montre la figure suivante :

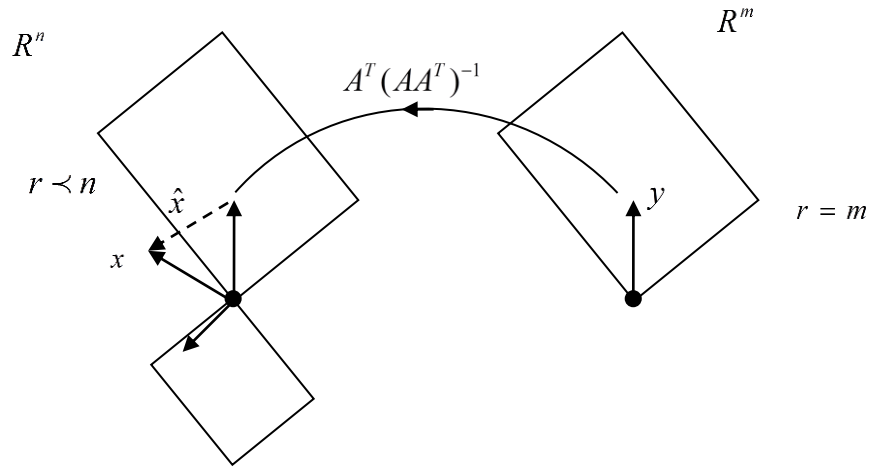


Figure II.13 : Représentation géométrique de l'inverse droite.

- **Remarque :** si on multiplie l'inverse gauche à la droite par A on obtient :

$$A(A^T A)^{-1} A^T$$

Cette matrice représente la matrice de projection P sur l'espace des colonnes car :

$$Py = \hat{y} \quad (\text{II.30})$$

$$Py = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T y \quad (\text{II.31})$$

$$\Rightarrow P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{II.32})$$

Même remarque pour l'inverse droite si on le multiplie par la gauche de A on obtient :

$$A^T (AA^T)^{-1} A \quad (\text{II.33})$$

Qui représente la matrice de projection sur l'espace des lignes, car :

$$PX = \hat{x} = A^T (AA^T)^{-1} Ax \quad (\text{II.34})$$

$$\Rightarrow P = A^T (AA^T)^{-1} A \quad (\text{II.35})$$

II.15.4 Pseudo inverse

Dans cette section nous allons discuter le cas où la matrice A est d'ordre général, c'est-à-dire $r < m$ et $r < n$, dans ce cas $N(A)$ et $N(A^T)$ sont tous les deux non nuls, on sait bien que ces deux espaces sont la cause des singularités lorsqu'ils sont $\neq \{0\}$. Donc, une matrice singulière (non inversible) est une matrice où :

$$N(A) \neq \{0\}.$$

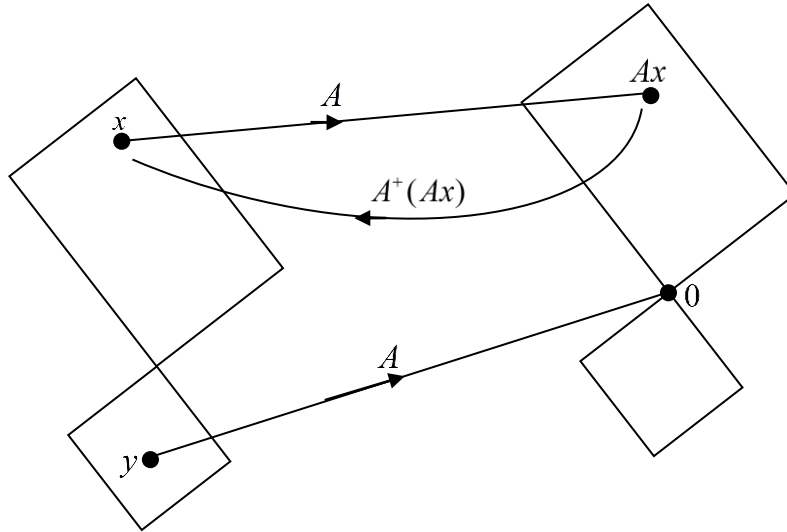


Figure II.14 : Singularité de la matrice A .

De la figure II.14 on remarque que chaque $x \in C(A)$, a une image Ax dans $C(A)$, et on peut revenir à x par inversion spéciale de A qu'on va noter par A^+ (pseudo inverse ou inverse généralisée). On remarque aussi si $y \in N(A)$ alors $Ay = 0$, et on ne peut pas retrouver le y concerné par inversion, ce qui crée la singularité de la matrice A . Donc, la matrice pseudo inverse A^+ est une matrice inverse entre seulement l'espace des lignes et l'espace des colonnes.

$$A = UWV^T$$

avec :

$$W = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_r & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow W^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{\sigma_r} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$\Rightarrow A^+ = (UWV^T)^{-1} = VW^+U^T \quad (\text{II.36})$$

Donc, la matrice pseudo inverse A^+ est donnée par :

$$A^+ = VW^+U^T \quad (\text{II.37})$$

Cette matrice sera utilisée dans la méthodes des moindres carrés dans le cas où $N(A) \neq \{0\}$.

II.16 CONCLUSION

L'algèbre est la partie plate des mathématiques. Toutes les techniques mathématiques qui seront utilisées dans notre travail se basent sur l'algèbre linéaire, et c'est pour cette raison que nous avons vu nécessaire de faire introduire ce chapitre dans le but de faciliter les choses aux lecteurs de ce mémoire.

Dans ce chapitre nous avons présenté une synthèse générale sur les points principaux de la théorie de l'algèbre linéaire. L'algèbre présenté est pris du point de vu de Matlab. Les points traités ont touché principalement, Les opérations matriciels, Projection, Espaces fondamentaux, Moindres carrées, Décompositions simples, Décomposition SVD et Inverses généralisé.

CHAPITRE III

FILTRAGE DU SIGNAL ELECTROCARDIOGRAMME PAR LA METHODE SVD

INTRODUCTION : La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une méthode de l'algèbre linéaire qui permet de décomposer n'importe quelle matrice (rectangulaire ou carrée) et permet aussi de calculer les pseudos inverses.

Dans ce chapitre nous allons essayer de voir et de réaliser l'opération de filtrage en utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD).

III.1 METHODES DES MOINDRES CARREES

Soit à approximer l'ensemble de données (x_i, d_i) par le modèle de convolution discret suivant (somme de convolution) :

$$d(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) + v(i) \quad (\text{III.1})$$

où d est le signal observé (mesuré) obtenu à partir du signal d'entrée x , h_l sont les paramètres inconnus du modèle et v représente le bruit de mesure qui est une variable aléatoire (non observable). Il est d'usage de supposer que v est blanc de moyenne nulle dont la variance est σ_v^2 .

Notre objectif est d'estimer les paramètres h_l , étant donnés les deux ensembles de données observables : $\{x(i)\}$ et $\{d(i)\}$ avec $i = 1, 2, \dots, N$. Pour cela, on définit le signal d'erreur comme la différence entre le signal désiré d et la sortie du modèle y d'un filtre RIF (Réponse impulsionnelle Finie) qui a pour coefficients h_l avec $l = 0, 1, \dots, L-1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} e(i) &= d(i) - y(i) \\ &= d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Dans la méthode des moindres carrés (MC), on choisit les paramètres h_l qui minimisent la fonction de coût suivante :

$$J_{LS} = \sum_{i=i_1}^{i=i_2} e^2(i) \quad (\text{III.3})$$

où i_1 et i_2 sont des indices qui représentent l'intervalle dans lequel la minimisation se fait. Pour cette minimisation, les coefficients du filtre h_0, h_1, \dots, h_{L-1} sont constants pendant l'intervalle $i_1 \leq i \leq i_2$. Le filtre obtenu par cette minimisation est un filtre linéaire au sens des moindres carrés.

Dans la suite, on utilisera $i_1 = L$ et $i_2 = N$. Dans ce cas le signal d'entrée peut être réarrangé sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x(L) & x(L+1) & \dots & x(N) \\ x(L-1) & x(L) & \dots & x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \dots & x(N-L+1) \end{bmatrix}$$

III.1.1 Principe de l'orthogonalité

La fonction de coût qu'on cherche à minimiser au sens des moindres carrés est :

$$\begin{aligned} J_{LS} &= \sum_{i=L}^N e^2(i) \\ &= \sum_{i=L}^N \left[d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Pour obtenir les coefficients de ce filtre RIF qui donnent la valeur minimale de J_{LS} , le gradient de (V.4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} &= 2 \sum_{i=L}^N \frac{\partial e(i)}{\partial h_l} e(i) \\ &= -2 \sum_{i=L}^N x(i-l) e(i) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

doit être égal à zéro :

$$\frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} = 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{III.6})$$

Soit e_{\min} l'erreur pour laquelle J_{LS} est minimisée, alors :

$$\sum_{i=L}^N x(i-l)e_{\min}(i) = 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{III.7})$$

L'expression précédente est la description mathématique de la version temporelle du principe d'orthogonalité. En d'autres termes: la suite temporelle $e_{\min}(i)$ est orthogonale à la suite temporelle $x(i-1)$ quand le filtre opère dans les conditions des moindres carrés.

III.1.2 Les équations normales

Il existe une autre manière de décrire le principe d'orthogonalité : c'est le système d'équations normales. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=L}^N x(i-l)e_{\min}(i) &= 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \\ \sum_{i=L}^N x(i-l) \left[d(i) - \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} x(i-k) \right] &= 0 \\ \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k) &= \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i) \\ \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} r(k,l) &= p(-l) \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

où :

$$r(k,l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k) \quad \text{avec } l, k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{III.9})$$

est la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée x , et :

$$p(-l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i) \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{III.10})$$

Es

t l'intercorrélation entre la sortie désirée d et l'entrée x .

On peut facilement vérifier que les équations normales peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$Rh_{opt} = p \quad (\text{III.11})$$

avec :

$$R = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(1,0) & \cdots & r(L-1,0) \\ r(0,1) & r(1,1) & \cdots & r(L-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(0,L-1) & r(1,L-1) & \cdots & r(L-1,L-1) \end{bmatrix}$$

est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée x , et :

$$p = [p(0) \quad p(-1) \quad \cdots \quad p(-L+1)]^T$$

est le vecteur d'intercorrélacion entre la sortie désirée d et l'entrée x , et :

$$h_{opt} = [h_{opt,0} \quad h_{opt,1} \quad \cdots \quad h_{opt,L-1}]^T$$

est le filtre optimal au sens des moindres carrés.

En supposant que R est inversible, on a donc :

$$h_{opt} = R^{-1} p \quad (\text{III.12})$$

III.1.2.1 Propriétés de la matrice d'autocorrélation

Soit le vecteur suivant :

$$\times(i) = [x(i) \quad x(i-1) \quad \cdots \quad x(i-L+1)]^T$$

La matrice d'autocorrélation peut se réécrire :

$$R = \sum_{i=L}^N \times(i) \times^T(i) \quad (\text{III.13})$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés de cette matrice :

Propriété 1. La matrice d'autocorrélation R est symétrique, c'est-à-dire $R = R^T$.

Propriété 2. La matrice d'autocorrélation R est toujours définie non négative, c'est-à-dire $z^T R z \geq 0, \forall z$.

Propriété 3. La matrice d'autocorrélation R est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

Propriété 4. Les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R sont toutes réelles et non négatives.

Propriété 5. La matrice d'autocorrélation R est le produit d'une matrice rectangulaire de toeplitz et la transposée de cette même matrice.

En effet, soit la matrice rectangulaire de Tœplitz de taille $L \times (N - L + 1)$ suivante :

$$X^T = [\times(L) \quad \times(L+1) \quad \cdots \quad \times(N)] \quad (\text{III.14})$$

$$X^T = \begin{bmatrix} x(L) & x(L+1) & \cdots & x(N) \\ x(L-1) & x(L) & \cdots & x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N-L+1) \end{bmatrix}$$

On voit bien que :

$$R = X^T X \quad (\text{III.15})$$

Propriété 6. La matrice d'autocorrélation R est inversible si et seulement si le rang colonne de la matrice X est égal à L .

III.1.3 Reformulation des équations normales

L'équation normale $h_{opt} = R^{-1}p$ peut encore s'écrire en fonction de la matrice d'entrées X . On a d'une part :

$$R = X^T X$$

et de l'autre part, on a :

$$p(-l) = \sum_{i=l}^N x(i-l)d(i) \text{ avec } l = 0, 1, \dots, L-1$$

soit sous forme matricielle :

$$p = X^T d$$

d'où la nouvelle forme de l'équation normale :

$$h_{opt} = (X^T X)^{-1} X^T d \quad (\text{III.16})$$

L'estimation de d (sortie du modèle) au sens des moindres carrés est donc :

$$\begin{aligned} \hat{d} &= X h_{opt} \\ &= X (X^T X)^{-1} X^T d \end{aligned}$$

la matrice :

$$P = X (X^T X)^{-1} X^T \quad (\text{III.17})$$

est un opérateur de projection pour le sous-espace X .

On vérifie directement l'égalité $PX = X$. L'opérateur de projection orthogonale est défini Par :

$$P^\perp = I - P \quad (\text{III.18})$$

d'où :

$$\hat{d} = Pd \quad (\text{III.19})$$

et :

$$\begin{aligned} e_{\min} &= d - \hat{d} = d - Pd \\ &= P^\perp d \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

III.2 SVD ET LA RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE AUX MOINDRES CARRES

On rappelle que l'équation normale est :

$$h_{opt} = (X^T X)^{-1} X^T d \quad (\text{III.21})$$

tel que la matrice X contient les échantillons du signal d'entrée x .

Définissons maintenant la matrice suivante :

$$X^+ = (X^T X)^{-1} X^T \quad (\text{III.22})$$

alors l'équation normale peut encore s'écrire :

$$h_{opt} = X^+ d \quad (\text{III.23})$$

avec la matrice X^+ est le pseudo inverse de la matrice X .

En pratique, il arrive très souvent que la matrice X ne soit pas de rang plein, c'est-à-dire cette matrice contient des colonnes qui sont linéairement dépendantes. Dans ce cas, la matrice $X^T X$ n'est pas inversible et le système a une infinité de solutions. Donc, laquelle il faut choisir ?

III.2.1 Théorème de la SVD

Nous sommes intéressés au système d'équations linéaires suivant :

$$X h_{opt} = d \quad (\text{III.24})$$

où la matrice X est de taille $K \times L$, d est un vecteur de longueur K , et h_{opt} (qui représente l'estimation du vecteur de paramètres inconnus) est un vecteur de dimension L .

Etant donnée la matrice X , il existe deux matrices orthogonales V (de taille $L \times L$) et U (de taille $K \times K$) telles que :

$$U^T X V = \begin{bmatrix} W & 0_{r \times L-r} \\ 0_{k-r \times r} & 0_{k-w \times L-w} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

où

$$W = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (\text{III.26})$$

est une matrice diagonale et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$.

r représente le rang de la matrice X [17].

La pseudo inverse de la matrice X sera définie par :

$$X^+ = V \begin{bmatrix} W^{-1} & 0_{r \times k-r} \\ 0_{L-r \times r} & 0_{L-r \times k-r} \end{bmatrix} U^T \quad (\text{III.27})$$

où:

$$W^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}) \quad (\text{III.28})$$

avec r le rang de X . Cette définition s'applique quelle que soit la matrice X , quelle que soit "sur ou sous déterminée" et quel que soit son rang. Ce pseudo inverse peut être encore s'écrire :

$$X^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T \quad (\text{III.29})$$

Finalement la solution du problème des moindres carrés :

$$X h_{opt} = d \quad (\text{III.30})$$

Donc :

$$h_{opt} = X^+ d \quad (\text{III.31})$$

III.3 FILTRAGE ET REDUCTION DE RANG

III.3.1 Principe de la méthode

Les matrices U et V (III.25) peuvent être réarrangées suivants le rang r (le nombre des valeurs singulières différentes de zéro) comme suit :

$$X = U W V^T = \begin{bmatrix} U_r & U_r^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ (V_r^\perp)^T \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

où:

$$U_r = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_r^\perp = \begin{bmatrix} u_{r+1} & u_{r+2} & \cdots & u_m \end{bmatrix}$$

$$V_r = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_r^\perp = \begin{bmatrix} v_{r+1} & v_{r+2} & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

et $W_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Les vecteurs singuliers u_i et v_i dans U_r et V_r correspondants aux plus grandes valeurs singulières sont connus sous le nom de vecteurs dominants (signaux dominants), de la même façon, les vecteurs singuliers associés avec les plus petites valeurs singulières sont connus sous le nom de vecteurs singuliers sous dominant (introduisent des bruit). Un peu de bruit dans les données change les valeurs singulières zéro en petits nombres positifs différents de zéro. Cependant, la perturbation du sous dominant espace $U_r(V_r)$ reste relativement insignifiante.

III.3.2 Filtrage du signal électrocardiogramme par la SVD

Dans cette section le filtrage d'un signal ECG bruité va être présenté. Le signal ECG est enregistré sous forme d'un vecteur x tel que (voir figure III. 1) :

$$x = [x(1) \ x(2) \ \cdots \ x(n)]$$

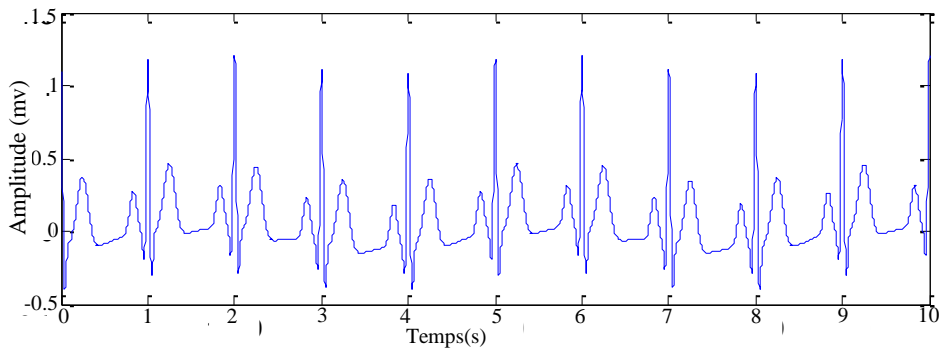


Figure III.1 : Signal électrocardiogramme.

Le bruitage de cet ECG s'effectue en ajoutant un bruit au vecteur x comme suit:

$$x_b = x + v \quad (\text{III.33})$$

avec v une source du bruit blanc.

La problématique du filtrage suppose que nous avons un signal bruité x_b , et la question sera comment estimé le signal utile x ?

- ✓ A partir des données enregistrées x_b de l'ECG, former la matrice de données de toeplitz X_b :

$$X_b = \begin{pmatrix} X_b(i) & X_b(i-1) & \dots & X_b(2) & X_b(1) \\ X_b(i+1) & X_b(i) & X_b(i-1) & \dots & X_b(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_b(n) & \dots & \dots & \dots & X_b(i) \end{pmatrix}$$

On note que dans notre cas le rang de cette matrice est :

$$r = 23$$

- ✓ chercher la meilleure matrice X_{bk} approximante de rang k pour X_b , pour cela on utilisant une réduction de rang.
- ✓ utiliser la pseudo inverse au sens des moindres carrées pour le calcul de la matrice de projection P_k :

$$X_{bk} = P_k X_b \Rightarrow P_k = X_{bk} X_b^+ \quad (\text{III } 34)$$

- ✓ En fin estimer le signal x comme suit :

$$\hat{x} = P_k X_b \quad (\text{III } 35)$$

Dans ce qui suit, nous allons tester l'opération de filtrage d'un signals électrocardiogramme par l'algorithme de la décomposition en valeurs singulières.

Nous avons simulé la méthode avec un bruit blanc de mesures (telle que $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$). Les figures suivantes représentent les résultats de ce type de filtrage avec différents opérateurs de projection P_k :

1) Opérateur de projection : P_6

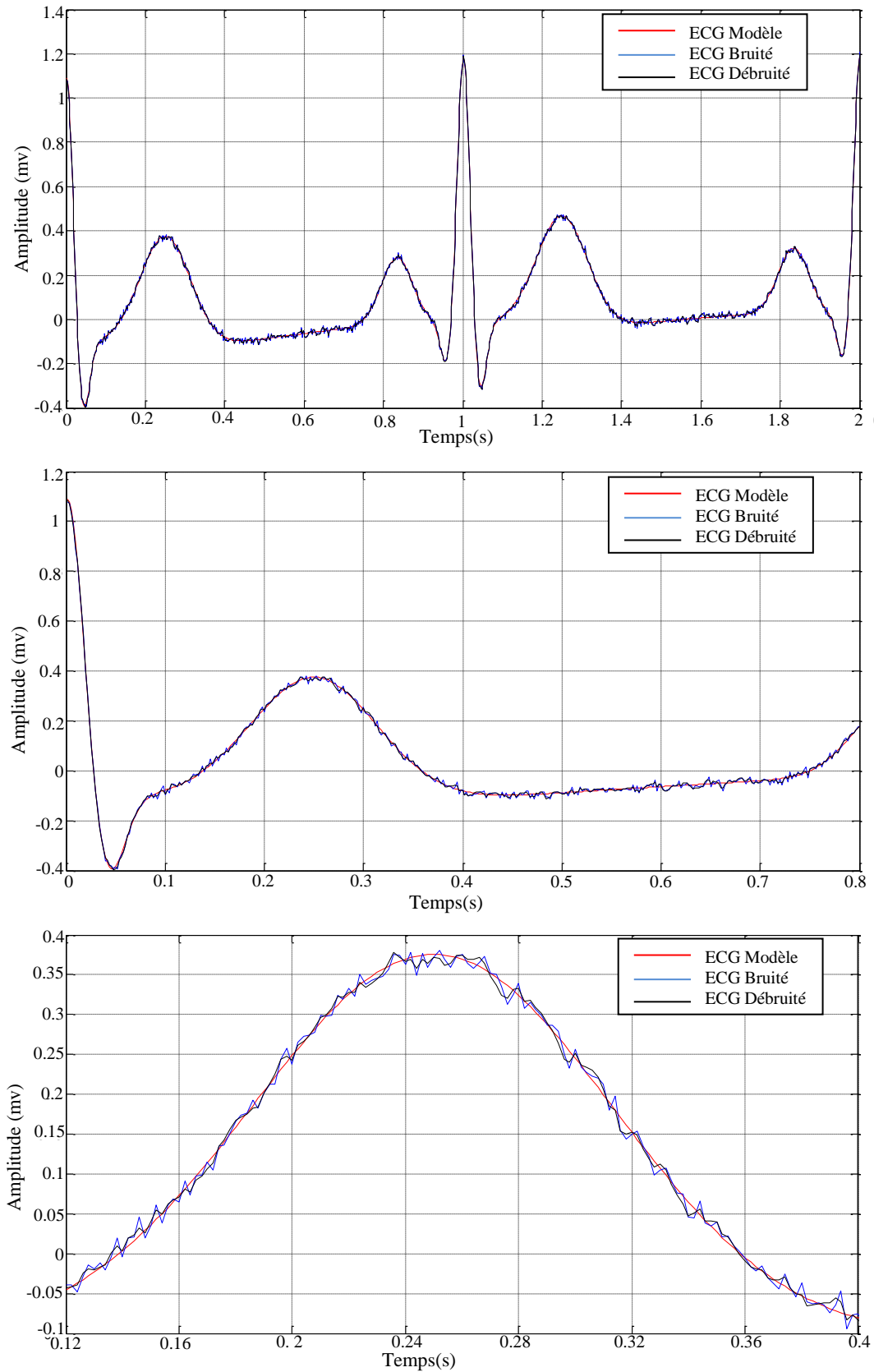


Figure III.2: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$ et un opérateur de projection P_6 .

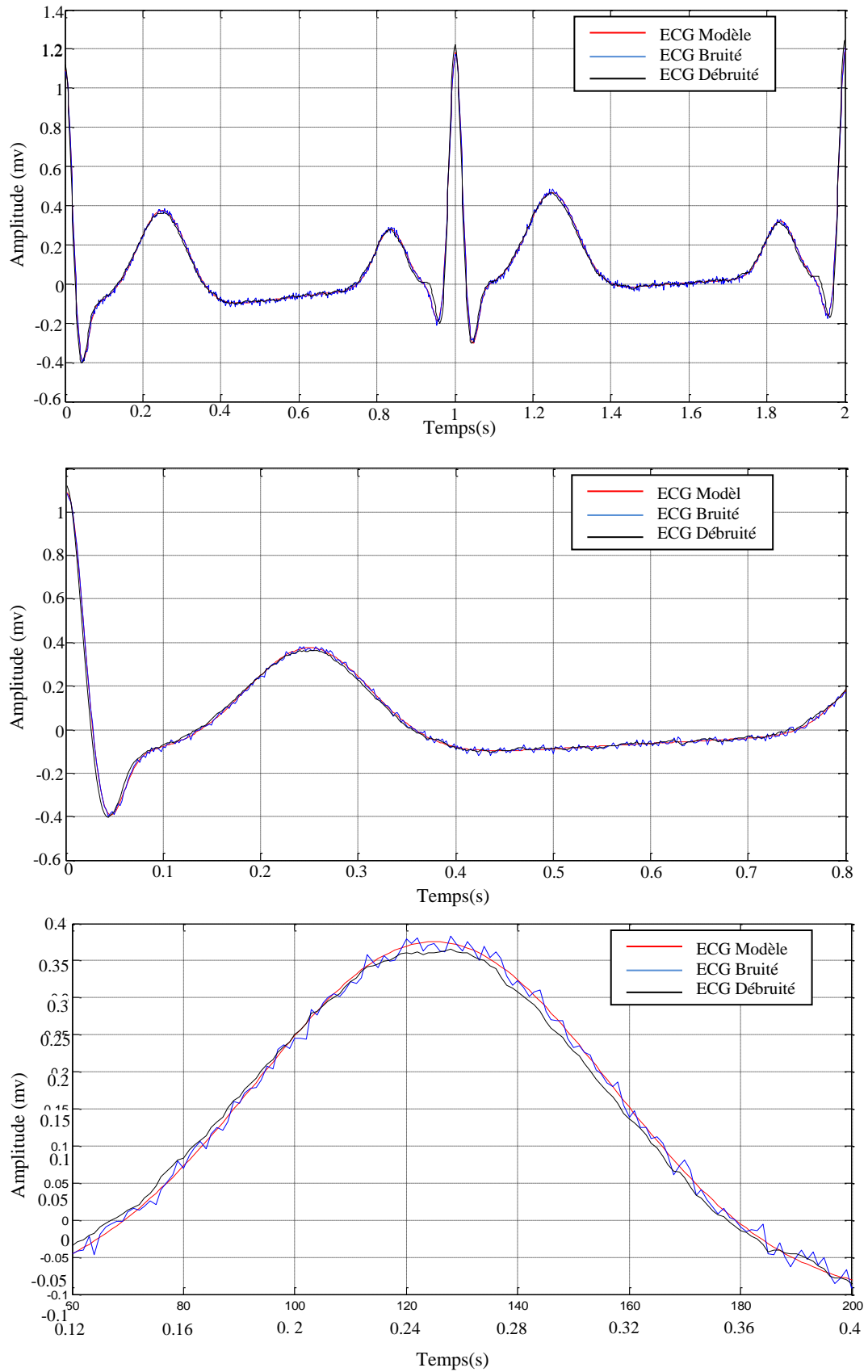
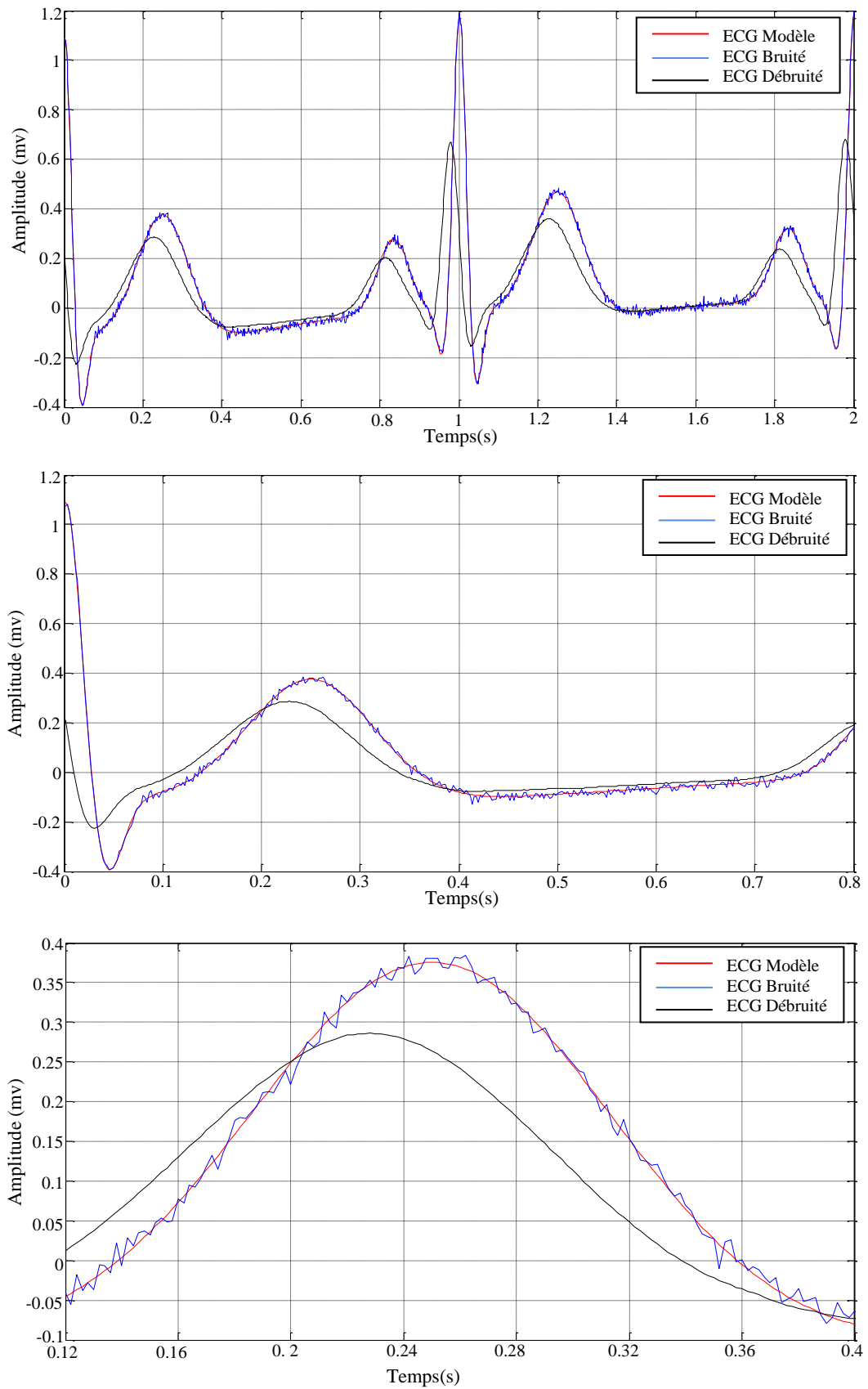
2) Opérateur de projection : P_4 

Figure III.3: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$ et un opérateur de projection P_4 .

3) Opérateur de projection : P_2 **Figure III.4 :** Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$ et un opérateur de projection P_2 .

On remarque des figures 2 et 3 que le filtrage a été réalisé avec succès et cela avec des opérateurs de projection P_6 et P_4 . Mais avec un opérateur de projection P_2 l'opération de filtrage a échoué ce qui reflète le fait d'une très grande réduction de rang.

III.4 EVALUATION

III.4.1 RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

Pour voir numériquement la qualité du filtrage et évaluer les performances on utilise comme critère d'évaluation le Rapport Signal sur Bruit En abrégé SNR, c'est un critère qui nous permet de mesurer le rapport du signal considéré sur le bruit qui le contamine. Alors, si l'effet du bruit est minime sur le signal, cela veut dire que : *signal /bruit* , donc le rapport sera grand. Mathématiquement, l'SNR est défini par :

$$SNR [dB] = 10 \log \left(\frac{\text{Puissance du signal } x}{\text{Puissance du bruit } b} \right) \quad (\text{III.34})$$

où la puissance du signal est donnée par $\sum_{i=1}^N x_i^2 / N$, et la puissance du bruit est simplement sa variance et N est le nombre des échantillons.

Une fois le rapport SNR est calculé pour le signal d'entrée et pour le signal de sortie, une autre mesure donnant un facteur d'amélioration peut aussi être utilisée. Cette mesure s'appelle "Facteur d'amélioration" (improvement en anglais) dont l'expression mathématique est :

$$\text{imp} [dB] = SNR_{\text{output}} - SNR_{\text{input}} \quad (\text{III.35})$$

Notons que le facteur d'amélioration peut être calculé directement par la formule suivante :

$$\text{imp} [dB] = \left(\frac{\sum_i |x_n(i) - x(i)|^2}{\sum_i |x_d(i) - x(i)|^2} \right) \quad (\text{III.36})$$

avec x le signal du modèle de l'ECG, x_d le signal ECG filtré (débruité), x_n le signal ECG bruité.

III.5 COMPARAISON DES RESULTATS

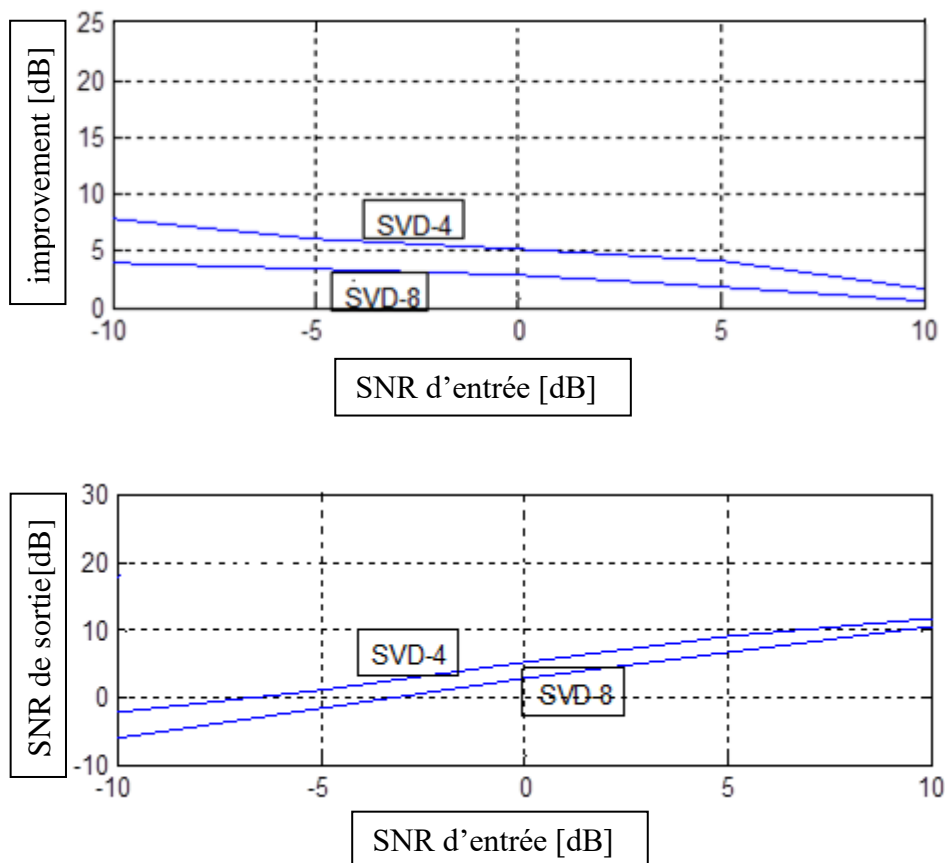
Dans cette section on va essayer de faire une petite comparaison entre les résultats de filtrages obtenus par la méthode SVD avec deux différents opérateurs de projection. Comme critères, nous proposons d'utiliser le rapport signal sur bruit (SNR) et le facteur d'amélioration (Improvement).

Les résultats de la comparaison sont données par les tableaux et la figure suivants :

Input SNR		-10dB	-5dB	0dB	5dB	10dB
Imp.[db]	SVD-4	7.7483	6.0445	5.1518	4.0817	1.7093
	SVD-8	3.8903	3.3740	2.8111	1.8086	0.5829

Table III.1 : Comparaison basée sur facteur d'amélioration.

Input SNR		-10dB	-5dB	0dB	5dB	10dB
Output SNR	SVD-4	-2.2517	1.0445	5.1518	9.0817	11.7093
	SVD-8	-6.1097	-1.626	2.8111	6.8086	10.5829

Table III.2 : Comparaison basée sur rapport signal sur bruit SNR.**Figure III.5 :** Comparaisons des performances de la méthode proposée.

Comme nous le constatons des tableaux III.1, III.2 et de la figure III.5, le filtrage par la méthode de SVD est performant.

III.6 CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre nous avons présenté une méthode pour le débruitage des signaux ECG basée sur une technique algébrique : la décomposition en valeurs singulières SVD. Les résultats de simulation suggèrent que cette méthode est très efficace pour de tels problèmes, surtout lorsque l'on fait un très bon choix de l'opérateur de projection.

Les travaux présentés dans ce mémoire, ont pour but principal de :

- ✓ Appliquer les techniques algébriques telle que : SVD au débruitage des signaux ECG.

Un signal électrocardiogramme est une description électrique de l'activité du cœur. Ce signal peut être décomposé à des ondes principales nommées : P, Q, R, S et T. Durant l'étape de l'enregistrement d'un signal ECG, il est contaminé par plusieurs types de bruits. Alors l'extraction des informations cardiologiques utiles à partir de ces mesures bruitées est l'un des axes les plus importants du traitement des signaux biomédicaux.

Dans ce travail, la tâche principale a été de filtrer (débruiter, lisser) un signal ECG en utilisant la décomposition en valeurs singulières. On a utilisé ce dernier pour estimer les états cachés de la dynamique non linéaire du signal ECG présenté dans l'ensemble de données de l'ECG. La technique SVD a été utilisé avec succès dans le but de minimiser les effets des bruits qui contaminaient les signaux ECG.

Les résultats de simulation étaient très intéressants et ont montré l'efficacité de cette méthode pour de telles applications.

Comme perspective, on propose de continuer ce travail suivant les points qui suivent :

1. Ajustement automatique de rang r de la nouvelle matrice par des techniques d'optimisation récente et intelligentes.
2. Développer un système expert pour le diagnostic médical basé sur la morphologie des signaux ECG.
3. Evaluer ce travail en introduisant des perturbations réelles de caractère physiologique sur le signal ECG.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.A. Jones, "ECG Success, Exercises in ECG Interpretation" , A.A Davis 2008.
- [2] K.Balkine,"Analyse et Modélisation d'Electrocardiogramme dans le cas de Pathologies ventriculaires," Thèse de doctorat en Sciences, Université de nice-sophia antipolis-UFR Sciences,2005.
- [3] C.Cabrol, R.Vialle, "Anatomie du Cœur humain." Université Paris - VI , Faculté de Médecine.
- [4] I.M.Alfredo, "Segmentation de l'Electrocardiogramme pour la Modélisation de la dynamique du QT lors de l'exercice du handgrip," Thèse de doctorat électronique, Université de Rennes,2008.
- [5] D.Rémi,"Application des Nouvelles méthodes d'Apprentissage à la détection précoce d'anomalies en Electrocardiographie," Thèse de doctorat électronique, Université Paris 6,2004.
- [6] P.François," Pilotage d'Algorithmes pour la Reconnaissance en ligne d'arythmies cardiaque," Thèse de doctorat informatique, Université de Rennes 1,2005.
- [7] H.Mahmoud,A.Alaeddine, "Réalisation d'un Phonocardiographe à base d'un microcontrôleur PIC 16F876 Piloté par un PC," PFE en électronique, Université de M'sila, 2007.
- [8] A.Bayés de Luna," Basic Electrocardiography, " .
- [9] Z,Abedin,R,Conner," ECG Interpretation," Blackwell Publishing ,2008.
- [10] M.Gabriel Khan," Rapid ECG Interpretation," 3eme edition, Associate Professor of Medcinie, University of Ottaw Cardiologist,2007.
- [11] M.Akhtar."The Electrocardiogram," 5eme partie, American Heart Association.
- [12] D.C.Lay,"Linear algebra and its applications," University of Maryland.
- [13] L.Seymour,"Algebre Lineaire," serie schaum,McGraw, 1973.

- [14] C.Robert,L.Christian, "Espaces Vectoriels Polynomes,"Grandes Eécoles medecine, paris,1987.
- [15] R.Steven,"Advanced Linear Lgebra,"second edition,University of California,Irvine.2000.
- [16] David Skillicorn,"Understanding Complex datasets," Taylor and Francis Group,2007.
- [17] R.J.Semnani,BF Womack,KR Diller," Applications of Rank-reduction to ECG Analysis," Electrical and Biomedical Engineering Departments, TheUniversity of Texas, Austin,USA.

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MASTER EN ELECTRONIQUE**

Option: Contrôle industriel.

Proposé et dirigé par : Mr. Ouali Mohammed Assam.

Etudié par : MENDJEHI Abd el fetah.

**Thème : FILTRAGE DU SIGNAL ELECTROCARDIOGRAMME PAR LA
DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERS (SVD).**

Résumé

Le signal ECG représente l'activité électrique du cœur et reflète l'état de santé de l'appareil cardiovasculaire. Il contient aussi des informations qui permettent la distinction des maladies cardiovasculaires. Le taux élevé de mortalité dans le monde dû aux problèmes liés au dysfonctionnement de l'appareil cardiaque, Le matériel utilisé lors de l'enregistrement doit être manipulé avec précaution car il peut être source de bruits lors de l'enregistrement. Aujourd'hui les chercheurs à développer des techniques de filtrage de signal ECG pour un bon diagnostic.

Le filtrage des signaux ECG est une étape très importante dans le processus de diagnostic des maladies. L'opération de diagnostic est la dernière étape de toute une chaîne d'acquisition qui commence par les capteurs, amplification, conversion analogique numérique, filtrage et enfin diagnostic par un système expert contenant une base de données.

Dans ce contexte nous allons à travers ce travail d'appliquer une méthode purement algébrique (la décomposition en valeurs singulières) pour débruiter (filtrer) les signaux ECG.

Mots clés

ECG, la décomposition en valeurs singulières, bruit, Filtrage, L'algèbre linéaire.