



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

On the Numerical Solution of Mixed Volterra -Fredholm Intégral
Equations

Présentée par:

HAIMED Amina

Soutenu publiquement le: 28/06/2021.

Devant le jury composé de:

Mestefa NADIR

Noui DJAIDJA

Amina KHIRANI

Prof,

M.C.B,

M.C.A,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président:

Encadreur:

Examineur:

Année universitaire 2020/2021

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا – فريدولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام طريقة شبه المنحرف المتكررة علاوة على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة ولتأكيد رتبة التقارب .

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية- المعادلات التكاملية لفولتيرا- المعادلات التكاملية لفريدولم- الطرق التربيعية

Résumé :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second type, en utilisant la méthode des trapèzes répété. De plus, de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision, l'efficacité de la méthode proposée et pour confirmer l'ordre de convergence .

Mots clés : Equations intégrales-Equation intégrale de Fredholm, équation intégrale de Volterra -équation intégrale de Volterra-Fredholm, les méthodes de quadratures.

Abstract : The goal of this memory is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the volterra –Fredholm integral equation of the second kind ,using the repeated Trapezoidal method. Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy, efficiency of the method and to confirm the order of convergence.

Keywords: integral equations- Fredholm integral equation -Volterra integral equation mixed Volterra –Fredholm integral equation- numerical quadrature.

Remerciements

*Je remercie **ALLAH**, qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.*

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr : Noui DJAIDJA, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur Mostfa NADIR, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier, Dr :KHIRANI Amina pour l'honneur qui ma fait d'accepter d'examiner ce travail.

Enfin ,je remercie tous mes amis de prés ou de loin ,et je voudrais mentionner chafiqataleb et les étudiants de ma promotion de spécialité Analyse Mathématique et Numérique .

Dédicace

Je dédie mon travail à mes parents pour leurs amour ,leurs vigilance et leurs sacrifices pour le bien de mon éducation et m'avoir conduit au plus haut niveau .Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi .

A mes chères soeurs nouira ,aya oumelkheir et fatima ,et les deux poussins israe et Alaa pour leurs encouragements moraux constants à mon égard merci beaucoup

Et à mes frères saïf et Tawfiq pour tout ce que vous avez fait pour moi merci beaucoup .

A ma grand-mère et à tous les membres de ma famille HAIMED et BOUCHELALEG pour leurs soutien et leurs prières pour un succès durable .

A tous ceux avec qui les jours nous ont réunis ,certains d'entre eux étaient en or ,et certains d'entre eux ont gardé l'alliance ,à mes amis et à tous ceux qui se tenaient avec moi

A ceux avec qui j'avais une amitié historique qui n'a pas été interrompue par la géographie du lieu ,chafiq ,wahoba et mabrouka .

Table des matières

Introduction	ii
1 préliminaires	1
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles	1
1.1.1 Espace de Banach	2
1.1.2 Espace de Hilbert	2
1.1.3 Opérateurs	4
1.2 Notion d'analyse numérique	6
1.2.1 Méthode de quadrature	6
2 Equations intégrales	8
2.1 Equations intégrales linéaires et leurs classifications	8
2.1.1 Equations intégrales de Fredholm	8
2.1.2 Equations intégrales de volterra	9
2.1.3 Equations intégrales mixtes	10
2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de volterra -Fredholm	10
2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	12
2.3.1 La méthode des solutions sous forme de série [12]	12
2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian	15
3 Résolution numérique des équations intégrales	17
3.1 Equations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	17

3.2	Méthode de quadrature	17
3.2.1	Application de la méthode des Trapèzes	17
3.2.2	Application de la méthode $\frac{1}{3}$ de simpson	18
3.3	Exemples Numériques	20
Conclusion		26
Bibliographie		27

Introduction

Le but de cette mémoire est de donner l'existence, l'unicité et des résultats numériques pour la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a,b] \quad (0.0.1)$$

Pour l'existence et l'unicité de l'équation (0.0.1) nous appliquons la technique des opérateurs de Picard (voir [10] ,[11]). De plus, nous proposons la méthode numérique des trapèzes pour obtenir une approximation de solution de certaines équations.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle, ainsi que l'analyse numérique (Méthode de quadrature: trapèzes, simpson).

Dans le deuxième chapitre on a étudié l'existence et l'unicité des équations intégrales de Volterra-Fredholm de second type et nous présenterons des méthodes analytiques, pour résoudre ces équations intégrales(la méthode de solution sous forme de série, la méthode de décomposition d'Adomian) avec des exemples.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de résolution numérique où nous sommes basés sur la méthode des trapèzes.

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

préliminaires

1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues .

Espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition 1.1.1 (*norme*)

On appelle une norme sur l'espace E tout fonction notée $\| \cdot \|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifie les conditions suivants :

Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

- i) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation)
- ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$ (homogénéité)
- iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2 (*Espace vectoriel normé*)

Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\| \cdot \|$.

Sur l'espace $\mathbb{R}_+$, on peut définir trois normes :

$$1-\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$2-\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (norme euclidienne)}$$

$$3-\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est un espace métrique dont la distance d est définie par $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E$.

Tout espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est un espace métrisable.

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (*suite de Cauchy*)

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$, on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 (*Espace complet*)

Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E .

Définition 1.1.5 (*Espace de Banach*) On dit qu'un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet.

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.6 (*produit scalaire*)

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), vérifie les propriétés suivantes :

Pour tout x, y, z dans E et λ dans $\mathbb{K}$

$$1-\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$2-\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$3-\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$4-\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$5-\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Définition 1.1.7 (*Espace Euclidien*)

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E définie par

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 1.1.8 (*orthogonalité*) On dit que deux vecteurs x, y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 1.1.9 (*Espace de Hilbert*) Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle f, g \rangle$ et qui est complet pour la norme $\|f\|_H = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.1.1 L'espace vectoriel $L^2([a, b])$ des fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$,

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.3 Opérateurs

Opérateurs linéaires

Définition 1.1.10 Soient E et F deux espaces vectoriels, une application $A : E \rightarrow F$ est dite un opérateur linéaire si:

Pour tout x, y dans E et α, β dans $\mathbb{R}$ on a :

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Opérateur borné

Définition 1.1.11 Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\| A(x) \|_F \leq C \| x \|_E, \forall x \in E \quad (1.1.1)$$

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1.1) est appelée norme de A notée $\| A \|$ et donnée par

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| A(x) \|_F}{\| x \|_E} = \sup_{\| x \|_E = 1} \| A(x) \|_F = \sup_{\| x \| \leq 1} \| A(x) \|_F$$

Opérateur continu

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si :

pour toute suite (x_n) de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0)$$

L'opérateur A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.1.1 Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.

On note par $\mathcal{L}(E, F)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F .

Théorème 1.1.2 *Soit E et F deux espaces normés. L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace normé, de plus cet espace est de Banach si F l'est.*

Opérateurs compacts

Définition 1.1.12 *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit compact si l'image de la boule unité B_E est relativement compact i.e : si l'ensemble*

$$A(B_E) = \{A(x) \mid \|x\| \leq 1\}$$

est compact, ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on peut extraire de $A(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans F .

Opérateur intégral linéaire

Soit $k : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ défini par :

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

est appelé opérateur intégral linéaire, la fonction k s'appelle noyau de l'opérateur intégral A .

Si k est une fonction continue de $[a, b] \times [a, b]$ l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu k .

Opérateur adjoint

On dit que deux opérateurs $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ et $B : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ sont adjoints si :

$$\forall (\varphi, \psi) \in C[a, b]^2, \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle$$

On note par A^* l'adjoint de A .

1.2 Notion d'analyse numerique

Intégration numérique

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.

1.2.1 Méthode de quadrature

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note h le pas de cette subdivision. Dans la méthode des trapèzes, la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Proposition 1.2.1 *La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode des trapèzes est alors donnée par*

$$T_n \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (1.2.1)$$

L'erreur dans la méthode des trapèzes est donnée par l'expression:

$$Err = \left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq (b-a)^3 \frac{M_2}{12n^2} \quad (1.2.2)$$

où $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

Méthode de Simpson

En analyse numérique, la méthode de simpson du nom de Thomas simpson, est une technique de calcul numérique d'une intégrale.

On veut estimer $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide de cette méthode, on commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en un nombre $2n$ de sous-intervalles.

posons $h = \frac{b-a}{n}$ et considérons les points $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh = b$

Formule simple

soit f une fonction connue aux trois points équidistants de $[a, b]$,

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = a + h, \quad x_2 = b = a + 2h, \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{2},$$

Proposition 1.2.2 *La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode de Simpson est alors donnée par*

$$S_n \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (1.2.3)$$

Formule composite

La méthode simple requiert deux intervalles, il semble souhaitable de diviser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles et d'utiliser la méthode de Simpson simple dans chaque paire de sous-intervalles. On a alors,

$$\begin{aligned} S_n &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) \\ &\simeq \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Si f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4, l'erreur dans la méthode de Simpson est donnée par

$$Err = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq (b-a)^5 \frac{M_4}{180n^4} \quad (1.2.5)$$

où

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

Chapitre 2

Equations intégrales

2.1 Equations intégrales linéaires et leurs classifications

Définition 2.1.1 On appelle *équation intégrale linéaire* une équation où la fonction inconnue figure sous le signe $\int$, telle que

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (2.1.1)$$

où f et k sont des fonctions données, λ est un paramètre numérique et φ la fonction inconnue. Ω est un ensemble fermé, borné et mesurable.

Si $f(x) \neq 0$ l'équation (2.1.1) est dite *équation intégrale non homogène*.

si $f(x) = 0$ l'équation (2.1.1) est dite *équation intégrale homogène*.

2.1.1 Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.2 On appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce* une équation de la forme:

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes.

C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

Définition 2.1.3 On appelle *équation intégrale de Fredholm de seconde espèce* une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, y)$ et $f(x)$ des fonctions données, λ est un facteur inconnu

2.1.2 Equations intégrales de volterra

Les équations de volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que : $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.4 On appelle *équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce* une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

Définition 2.1.5 On appelle *équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce* une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2.1.3 Equations intégrales mixtes

Equations intégrales de volterra -Fredholm

Une équation intégrale de volterra -Fredholm ,est une combinaison des intégrales de volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale .

Définition 2.1.6 On appelle équation intégrale de volterra -Fredholm une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1.2)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions k_1 , k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.1.1

$$\varphi(x) = \exp(x) - 1 - x + \int_a^x \varphi(t) dt + \int_0^1 x \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x^2 + x - \int_0^x \int_0^1 (s - y) \varphi(y) ds dy$$

2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de volterra -Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.2).

Définition 2.2.1 Soit X un espace normé et $T : X \rightarrow X$ un opérateur , T est dit un opérateur de Picart s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique telque $T(\varphi_0) = \varphi_0$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = \varphi_0$, pour tout φ de X .

Théorème 2.2.1 [10] (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ_0 , alors T est un opérateur de Picard et

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.2.1)$$

où

1-

$f \in C[a, b]$, $k_1 \in C(D_1)$, $k_2 \in C(D_2)$, tels que $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x \leq b\}$ et $D_2 = [a, b] \times [a, b]$.

2-

$$M_1 = \max_{(x, t) \in D_1} |k_1(x, t)|, \text{ et } M_2 = \max_{(x, t) \in D_2} |k_2(x, t)|$$

Théorème 2.2.2 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b - a))] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Preuve. soit l'opérateur integral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
 |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\
 &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\
 &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt + \\
 &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt \\
 &\leq \left[\frac{M_1}{c} (\exp(c(x-a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b-a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\
 &\leq \left[\frac{M_1}{c} \exp(c(x-a)) + \frac{M_2}{c} \exp(c(x-a+b-x)) \right] \|\varphi - \psi\| \\
 &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\
 &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|T\varphi - T\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur T est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que T est une contraction. Alors on applique principe de contraction ■

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

2.3.1 La méthode des solutions sous forme de série [12]

Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous les ordres telles que la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

Dans cette section ,nous appliquerons la méthode des solutions en série ,qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques .

Pour résoudre les équations intégrales de Volterra -Fredholm, nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.3.2)$$

est analytique ,et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en ?? ,où les coefficients a_n sera déterminé de manière récurrente .Dans cette méthode ,nous substituons généralement la série Taylor 2.3.1 des deux côtés de 2.3.2 pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.3.3)$$

Ou pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt + \int_a^b k_2(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (2.3.4)$$

Exemple 2.3.1

Résoudre l'équation intégrale de Volterra -Fredholm en utilisant la méthode des solutions en série

$$\varphi(x) = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x (x - t) \varphi(t) dt + \int_0^1 (x + t) \varphi(t) dt \quad (2.3.5)$$

en remplaçant $\varphi(x)$ 2.3.5 par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -5 - x + 12x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x ((x-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt + \int_0^1 ((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots &= -5 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{6}a_4 + (-1 + a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{5}a_4) \\ &\quad + (-1 + \frac{1}{6}a_1)x^3 + (-1 + \frac{1}{12}a_2)x^4 + \dots \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de puissances similaires de x des deux côtés de 2.3.6 et en résolvant le système d'équations résultant ,nous obtenons

$$a_0 = 0, a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 6x + 12x^2$$

Résoudre l'équation intégrale Volterra-Fredholm en utilisant la méthode des solutions en série

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^x \varphi(t)dt$$

En remplaçant $\varphi(x)$ par le polynôme de Taylor

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Et en procédant comme précédemment ,on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{2!}, a_4 = \frac{1}{4!}, \\ a_6 &= -\frac{1}{6!}, a_8 = \frac{1}{8!} \end{aligned}$$

Par conséquent ,la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos x$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian a été présentée en détail dans ce texte pour traiter indépendamment les équations intégrales de Volterra - Fredholm .La méthode consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série suivante

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.7)$$

où les composantes $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$ sont à déterminer de manière récursive .Pour établir la relation de récurrence ,nous substituons la série de décomposition dans l'équation intégrale de Volterra -Fredholm 2.3.2 pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt \quad (2.3.8)$$

La composante $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégral .Par conséquent ,nous définissons la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = f(x), \text{ et } \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (2.3.9)$$

Après avoir déterminé les composants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ la solution sous forme de série est facilement obtenue en utilisant 2.3.7, qui converge vers la solution exacte si une telle solution existe ,nous signalons ici que le phénomène de bruit rém et la méthode de décomposition modifiée sera utilisé dans cette section .cela sera illustré en utilisant les exemples suivants

Exemple 2.3.2 *Utiliser la méthode de décomposition adomienne modifiée pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^\pi (x - t) \varphi(t) dt$$

L'utilisation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = \cos(x), \text{ et } \varphi_1(x) = -\sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^\pi (x-t)\varphi(t)dt = 0$$

Par conséquent ,la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos x$$

Exemple 2.3.3 Utiliser la méthode de décomposition adomienne modifiée pour résoudre l'équation intégrale de volterra-fredholm suivante

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 t\varphi(t)dt$$

L'utilisation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = 3x + 4x^2 - x^3$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -x^4 - 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 t\varphi(t)dt \\ &= -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x^5 + x^3 \end{aligned}$$

L'annulation du terme de bruit $-x^3$ de $\varphi_0(x)$ donne la solution exacte

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2$$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

3.1 Equations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

Les équation intégrales ont admis un intérêt considérable dans les littératures mathématiques en raison de leurs nombreux domaines d'application dans différents domaines des sciences .

De nombreux auteurs donnent des solutions numériques pour différents types d'équations intégrales de fredholm et d'équations intégrales pour différents types d'équations intégrales de volterra .

3.2 Méthode de quadrature

3.2.1 Application de la méthode des Trapèzes

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm du second type donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b L(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.2.1)$$

pour résoudre cette équation sur l'intervalle fini $[a, b]$, nous le divisons en n intervalles plus petits de largeur h , où $h = (b - a)/n$.

le i -ème point de subdivision est noté x_i , telque $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$.

la solution approximative sera définie au point x_i est désigné par $\varphi(x_i)$ donné par

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \int_a^{x_i} k(x_i, t)\varphi(t)dt + \int_a^b L(x_i, t)\varphi(t), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.2)$$

Notons

$$k_{i,j} = k(x_i, x_j), \quad L_{i,j} = L(x_i, x_j), \quad f_i = f(x_i), \quad \varphi_i = \varphi(x_i), \quad i, j = 0, \dots, n$$

Si nous approximations les intégrales apparaissant dans l'équation (3.2.2) par la formule des trapèzes qui donnera le système d'équations suivant:

$$\varphi_0 = f_0 + \frac{h}{2}(L_{0,0}\varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} L_{0,j}\varphi_j + L_{0,n}\varphi_n) \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i &= f_i + \frac{h}{2}[(L_{i,0} + k_{i,0})\varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{i,j} + k_{i,j})\varphi_j + (2L_{i,i} + k_{i,i})\varphi_i + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{i,j}\varphi_j + L_{i,n}\varphi_n], \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\varphi_n = f_n + \frac{h}{2}[(L_{n,0} + k_{n,0})\varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (L_{n,j} + k_{n,j})\varphi_j + (L_{n,n} + k_{n,n})\varphi_n]$$

et φ_i est la valeur approximative de la fonction inconnue φ au noeud $x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

La solution approximative de l'équation (3.2.1) est obtenue en résolvant le système donné par l'équation (3.2.3)

3.2.2 Application de la méthode $\frac{1}{3}$ de simpson

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm du second type donnée par l'équation (3.2.1).

Ici, nous utilisons la méthode $\frac{1}{3}$ simpson pour trouver la solution de l'équation (EILVF). Pour ce faire, on divise l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ intervalles de largeur h , où $h = (b - a) / 2n$.

La solution approximative de (EILVF) dans les noeuds pairs (x_{2i}) est donnée par:

$$\varphi(x_{2i}) = f(x_{2i}) + \int_a^{x_{2i}} k(x_{2i}, t)\varphi(t)dt + \int_a^b L(x_{2i}, t)\varphi(t)dt, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

et dans les noeuds impairs (x_{2i+1}) donnée par

$$\varphi(x_{2i+1}) = f(x_{2i+1}) + \int_a^{x_{2i+1}} k(x_{2i+1}, t) \varphi(t) dt + \int_a^b L(x_{2i+1}, t) \varphi(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.6)$$

En utilisant la formule $\frac{1}{3}$ de simpson pour approximer les intégrales apparaissant dans les équations (3.2.5), (3.2.6), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= f_0 + \frac{h}{3} (L_{0,0} \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^n L_{0,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} L_{0,2j} \varphi_{2j} + L_{0,2n} \varphi_{2n}) \\ \varphi_{2i} &= f_{2i} + \frac{h}{3} [(L_{2i,0} + k_{2i,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^i (L_{2i,2j-1} + k_{2i,2j-1}) \varphi_{2j-1} + \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} &2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{2i,2j} + k_{2i,2j}) \varphi_{2j} + (2L_{2i,2i} + k_{2i,2i}) \varphi_{2i} + \\ &4 \sum_{j=i+1}^n L_{2i,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i,2j} \varphi_{2j} + L_{2i,2n} \varphi_{2n}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$\varphi_{2i+1} = f_{2i+1} + \frac{h}{3} [(L_{2i+1,0} + k_{2i+1,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^i (L_{2i+1,2j-1} + k_{2i+1,2j-1}) \varphi_{2j-1} + \quad (3.2.8)$$

$$2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{2i+1,2j} + k_{2i+1,2j}) \varphi_{2j} + (2L_{2i+1,2i} + \frac{5}{2} k_{2i+1,2i}) \varphi_{2i} +$$

$$(4L_{2i+1,2i+1} + \frac{3}{2} L_{2i+1,2i+1}) \varphi_{2i+1} + 4 \sum_{j=i+2}^n L_{2i+1,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i+1,2j} \varphi_{2j} + L_{2i+1,2n} \varphi_{2n}],$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_{2n} = f_{2n} + \frac{h}{3} [(k_{2n,0} + L_{2n,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^n (k_{2n,2j-1} + L_{2n,2j-1}) \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (k_{2n,2j} + L_{2n,2j}) \varphi_{2j} + (k_{2n,2n} + L_{2n,2n}) \varphi_{2n}] \quad (3.2.9)$$

et φ_i est la valeur approximative de la fonction inconnue φ au noeud x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

La solution approximative de l'équation (3.2.1) est obtenue en résolvant le système donné par les équations (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9).

3.3 Exemples Numériques

Dans cette section on va donner quelques exemples numériques pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm de second type par la méthode des trapèzes.

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second type

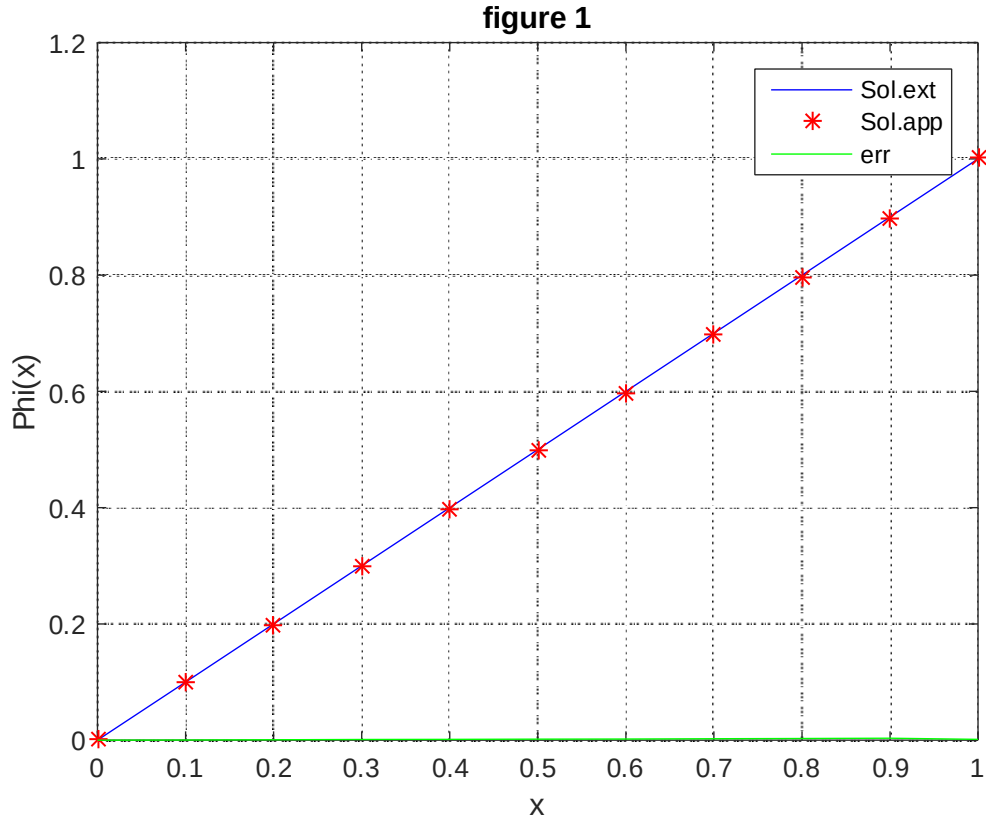
$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x xt\varphi(t)dt + \int_0^1 xt\varphi(t)dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x.$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des trapèzes, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 10$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Error
0.000	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00
0.200	2.0000e-01	1.9920e-01	7.9759e-04
0.400	4.0000e-01	3.9851e-01	1.4908e-03
0.600	6.0000e-01	5.9785e-01	2.1473e-03
0.800	8.0000e-01	7.9712e-01	2.8798e-03
1.000	1.0000e+00	1.0014e+00	1.3956e-03



Example 2. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second type

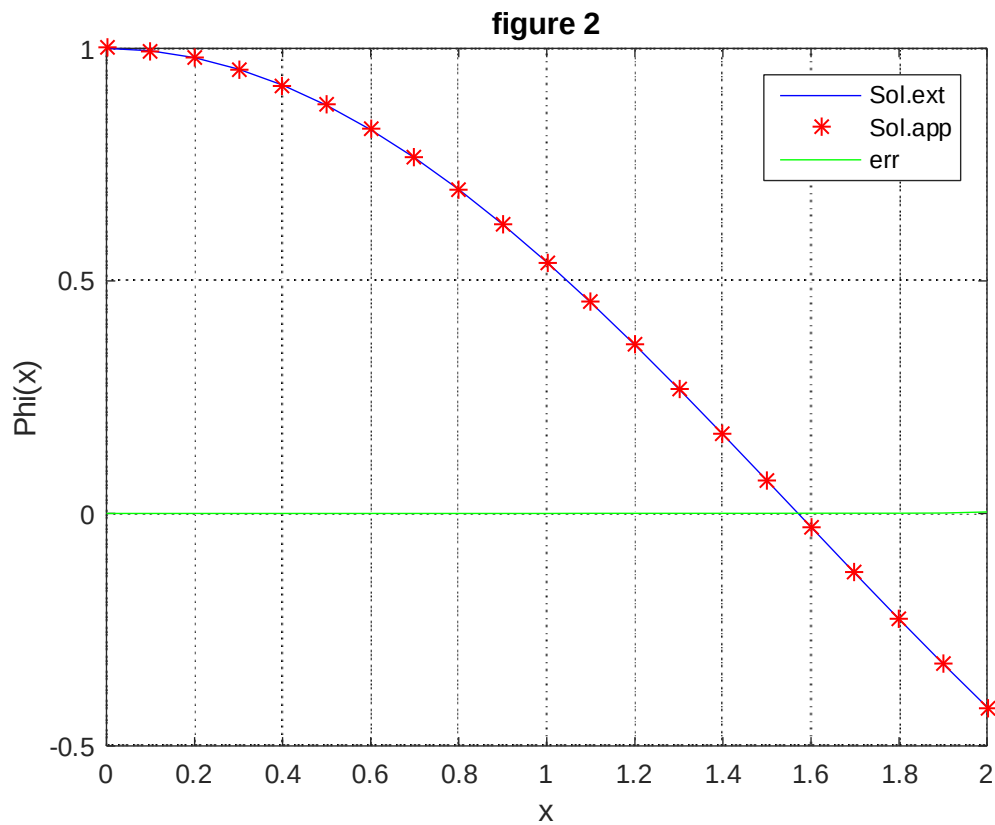
$$\varphi(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + \int_0^2 xt \varphi(t) dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 2$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \cos x$$

Table 2. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des trapèzes, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Error
0.000	1.0000e+00	1.0000e+00	0.00e+00
0.200	9.8007e-01	9.8004e-01	3.1098e-05
0.400	9.2106e-01	9.2103e-01	3.0784e-05
0.600	8.2534e-01	8.2533e-01	1.0133e-06
0.800	6.9671e-01	6.9676e-01	5.6219e-05
1.000	5.4030e-01	5.4044e-01	1.3892e-04
1.200	3.6236e-01	3.6260e-01	2.4520e-04
1.400	1.6997e-01	1.7034e-01	3.7338e-04
1.600	-2.9200e-02	-2.8677e-02	5.2220e-04
1.800	-2.2720e-01	-2.2651e-01	6.9099e-04
2.000	-4.1615e-01	-4.1946e-01	3.3147e-03



Example 3. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second type

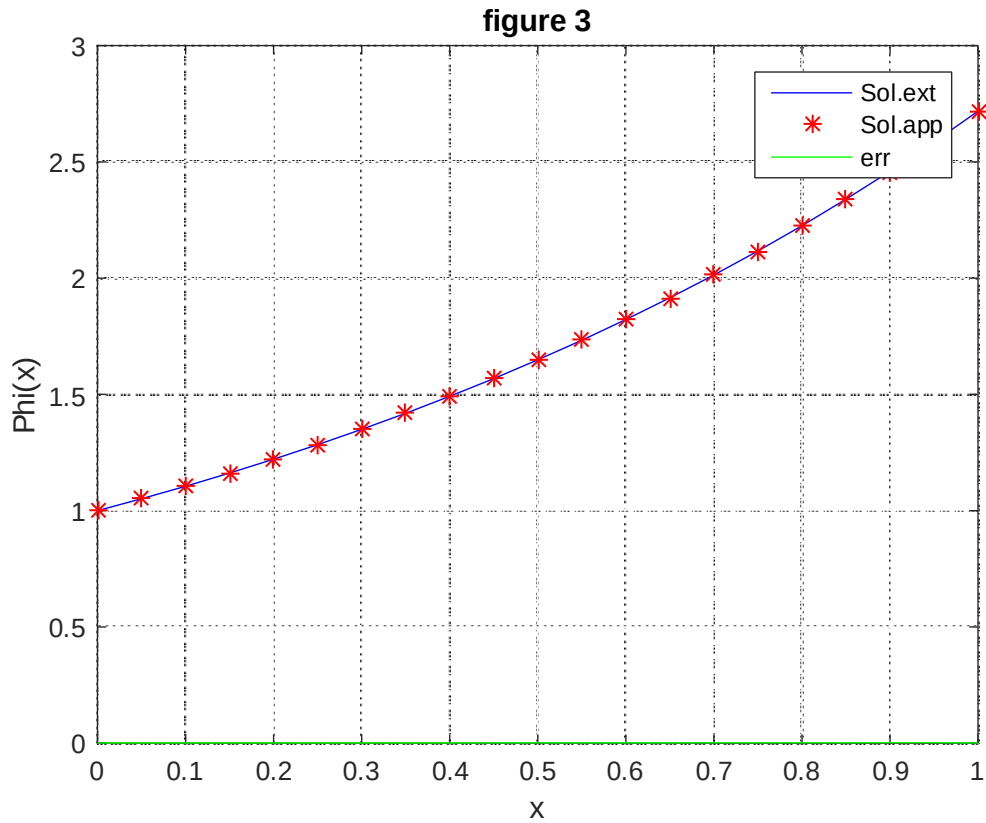
$$\varphi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt - \int_0^1 \exp(x-t) \varphi(t) dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(x).$$

Table 3. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des trapèzes, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Error
0.000	1.0000e+00	9.9944e-01	5.5673e-04
0.200	1.2214e+00	1.2206e+00	7.8022e-04
0.400	1.4918e+00	1.4908e+00	1.0726e-03
0.600	1.8221e+00	1.8207e+00	1.4540e-03
0.800	2.2255e+00	2.2236e+00	1.9499e-03
1.000	2.7183e+00	2.7192e+00	8.9285e-04



Example 4. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second type

$$\varphi(x) = -2 + 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_0^1 t\varphi(t)dt,$$

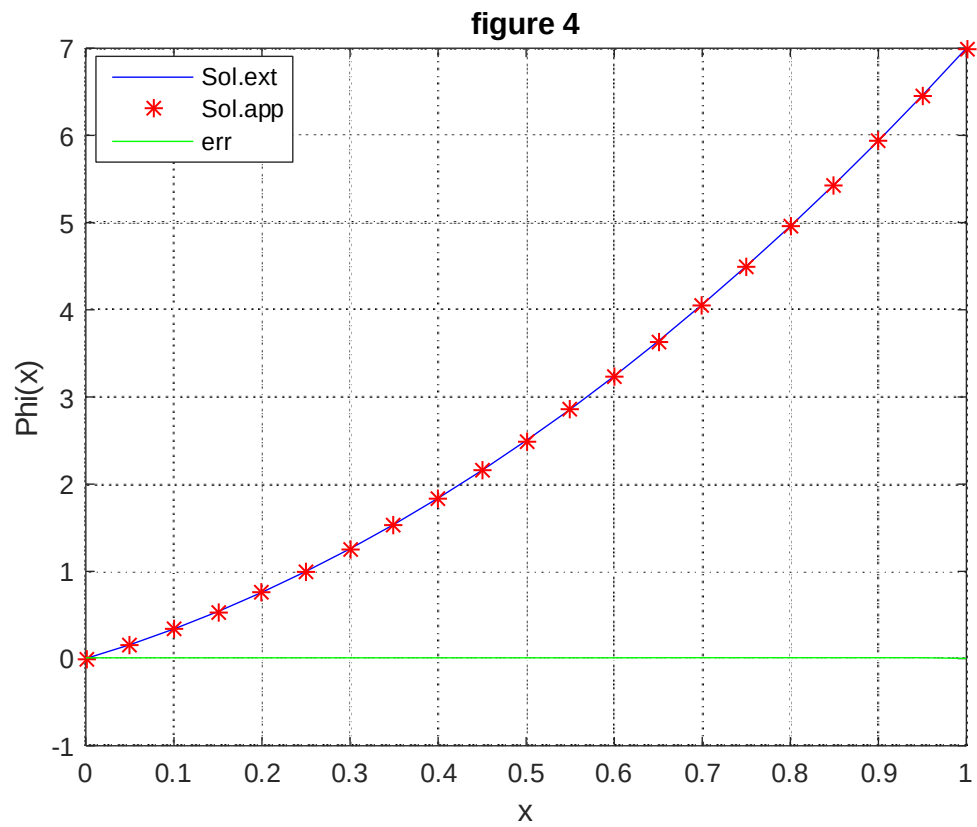
où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = .3x + 4x^2$$

Table4. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des trapèzes, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 20$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Error
0.000	0	-1.0013e-02	1.0013e-02
0.200	7.6000e-01	7.5014e-01	9.8607e-03
0.400	1.8400e+00	1.8301e+00	9.9028e-03
0.600	3.2400e+00	3.2298e+00	1.0155e-02
0.800	4.9600e+00	4.9493e+00	1.0661e-02
1.000	7.0000e+00	6.9975e+00	2.5320e-03

4



4.pdf

Conclusion

Dans cette mémoire nous avons présenté quelques méthodes analytiques pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra -Fredholm de second type.

Numériquement nous avons appliqué la méthode des trapèzes pour résoudre des équations intégrales de Volterra-Fredholm de second type. Le but de ce travail est de voir la performance de cette méthode

D'après les résultats numériques obtenus à partir des exemples illustratifs, nous concluons que pour h suffisamment petit nous obtenons une bonne précision,

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] Noui DjAIDJA,Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [3] F.Calio ,E. Marchetti ,V.Mureşan ,on some volterra -Fredholm integral Equations .International Journal of Pure and Applied Mathematics ,volume 31 No.2 2006,174-184
- [4] S.J.Majeed and H.H.Omran,Numerical Methods for Solving Lineaire Fredholm -volterra Integral Equations ,vol,11(3),December ,2008,pp,131-134
- [5] Rahmoune Azedine ,sur la résolution Numérique des équations intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales ,Thèse de doctorat
- [6] Farshid Mirzaee,Sima Piroozfar .Numerical solution of lineare Fredholm integral equations via modified Simpson's quadrature rule ,Journal of Saud uniersity(Science)(2011)23,7-10
- [7] I.A .Rus,Picard mappings :results and problems ,Seminar on Fixed Point Theory ,Preprint ,Cluj-Napoca ,Babeş-Bolyani Univ .,6(1987),55-64.
- [8] I.A.Rus ,Metrical Fixed point Theorems ,Univ .of Cluj-Napoca (1979).
- [9] I.Narosi ,A remark on Fredholm-volterra integral equations ,Seminar of Fixed Point Theory ,Preprint ,Cluj-Napoca ,Babeş-Bolyai Univ.3(1986)21-23.
- [10] S. Andréas,, weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, Studla Univ . "Babes_–Bolyar, Mathematica , Volume XLVIII, Number 3, September 2003

- [11] I.A. Rus, Picard mappings: results and problems, Seminar on Fixed Point Theory, Preprint, Cluj-Napoca, Babeş-Bolyai Univ., 6 (1987), 55-64.
- [12] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA