Notations

EDO : Équation différentielle ordinaire.

EDP : Équation aux dérivées partielles.

NDE : Équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence.

PME : Équation de milieu poreux.

$C(K)$: Espace des fonctions continues sur l'espace K.

$C^n(K)$: Espace des fonctions continûment différentiable n fois sur l'espace K.

$L^\infty(K)$: Espace des fonctions bornées sur K.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^t, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$

$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$

Table des matières

Introduction **1**

1 Quelques notions de base préliminaires **3**

1.1 Equation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence (**NDE**) . 3

1.2 Solutions auto-similaires 5

1.3 Solution auto-similaire rétrécie 8

2 Etude l'existence et l'unicité de solution de l'équation (**NDE**) **13**

2.1 Introduction 13

2.2 Préliminaires et résultats principaux 13

3 Quelques solutions explicites de l'équation (**NDE**) **34**

3.1 Relation entre l'équation de milieu poreux (**PME**) et l'équation (**NDE2**) . . 35

3.2 Existence et unicité de solution de l'équation (**PME**) 38

3.3 Solutions explicites (cas particulier) 39

3.3.1 Solution "Noyaux de Gauss" 40

3.3.2 Solution de Barenblatt (ZKB) 41

3.3.3 Solution de dipôle 43

Conclusion **46**

Bibliographie **47**

Introduction

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont décrits par des équations ou des formules d'équations linéaires ou non linéaires qui sont difficiles dans la plupart à résoudre, pour des diverses causes.

La théorie des équations aux dérivées partielles linéaires a connu beaucoup de progrès, mais il a rapidement été observé que la plupart des équations de modélisation des phénomènes physiques sans excessive simplification ne sont pas linéaires. Cependant, les mathématiques ont des difficultés pour la construction théorique pour les versions non linéaires, il était impossible de faire le progrès significatif, jusqu'à le $20^{ème}$ siècle. Et ce constat s'applique à d'autres importantes équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires, ce qui s'est passé en particulier dans le domaine des équations paraboliques. C'est cette classe des équations qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion, comme **l'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence** et **l'équation de milieu poreux** (**PME**).

L'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence (noté par (**NDE**)) est un exemple de ces équations, c'est une équation parabolique non linéaire qui touchent quelques domaines de la pratique, ce modèle a été proposé par Chunprng Wang et Jingxue [3].

En général, les EDPs non linéaires n'admettent pas des solutions exactes, surtout à conditions initiales. Mais quelquefois, pour quelques EDPs qui possèdent la caractérisation de la symétrie, on peut déterminer leurs solutions exactes avec quelques transformations, l'EDP devient une équation différentielle ordinaire (EDOs), dans ce cas les solutions sont appelées "**solutions auto-similaires**", qui jouent souvent un rôle central dans l'étude d'une EDP. Puisqu'il est équivalent, pour ces solutions, de résoudre localement ou globalement.

Plus pragmatiquement, ce type de solutions s'avère important pour la dynamique des EDP: elles peuvent fournir un mécanisme d'explosion en temps fini. De même on peut classer les solutions auto-similaires en plusieurs catégories.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons les différentes définitions et les propriétés de l'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence, en particulier, on donne les critères d'auto-similarité présentant (**NDE**) et le principe d'auto-similarité rétréci, nous devrions d'abord déduire l'équation satisfaite par l'auto-similarité, et enfin nous arrivons au système que nous voulons étudier l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le deuxième chapitre on développe les travaux établis par Chunprng Wang et Jingxue [3] pour l'équation de (**NDE**), on développe aussi les preuves des théorèmes qui présentent les résultats principaux de cette étude.

Finalement, dans le dernier chapitre on se consacre à partir de l'étude des solutions auto-similaires de l'équation de milieu poreux, on donne quelques solutions explicites pour l'équation (**NDE**) selon un changement de variable qui est vérifiée et prouvée, il a été proposé par Wolfgang Arendt et Ralph Chill [19]. En particulier, on donne des solutions appelées respectivement, **Noyau de Gauss, Barenblatt** et **dipôle**.

Chapitre 1

Quelques notions de base préliminaires

Dans ce chapitre nous allons présenter premièrement l'équation appelée "**L'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence**" (***N**onlinear **D**iffusion **E**quation with nondivergence form*) noté par (**NDE**). Pour terminer ce chapitre on va présenter la notion de solution auto-similaire et l'appliquer à l'EDP non linéaire (**NDE**), ensuite les principes de similarités rétrécies.

1.1 Equation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence (NDE)

Définition 1.1.1 (Dérivée partielle)
Une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est la dérivée par rapport à une seule de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Définition 1.1.2 (Equation aux dérivées partielles)
*Une équation aux dérivées partielles (**EDP**) pour la fonction u est une relation entre u, les variables indépendantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme:*

$$F\left(u, x_1, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \ldots\right) = 0.$$

Notre objectif consiste à étudier et résoudre une EDP non linéaire appelée: "*L'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence*".

Définition 1.1.3 ([3])
L'équation appelée équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence, est une équation parabolique dégénérée crier comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \triangle u \qquad m \geq 1; \; x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Problème de Cauchy pour l'équation de (NDE)

On considère ici le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u^m \triangle u & m \geq 1; \; x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\mathbf{NDE})$$

Qui s'appelle problème de Cauchy[(1)] avec la donnée initiale $u_0 \geq 0$, soit une fonction de classe C^2 (on peut admettre une régularité moindre, par exemple $u_0 \in C^2 \bigcap L^\infty$).

Solutions du problème de Cauchy

On dira que le problème de Cauchy (**NDE**) admet une solution au sens des EDPs, si elle est suffisamment régulière pour que chaque terme de l'équation soit défini ponctuellement et continu en temps et en espace ou que la solution vérifie l'équation au sens faible.

Définition 1.1.4 (Solution classique)
On dit que u est une solution classique de l'équation (**NDE**) *dans un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, si c'est une fonction C^2 de x, et C^1 de t dans Ω, et si elle satisfait* (**NDE**) *point par point dans Ω.*

Définition 1.1.5 (Solution faible)
Une fonction u dite une solution faible ou généralisée de (**NDE**) *si elle vérifie l'équation au sens des distributions.*

[(1)] Augustin Louis, Baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, il a 800 parutions et sept ouvrages. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières.

1.2 Solutions auto-similaires

Les solutions auto-similaire est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure. Nous suggérons de trouver la solution de l'équation (**NDE**) sous forme "**auto-similaire**" suivante:

$$u(x,t) = \lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \ , \ \ \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Sur la base de cette considération, nous cherchons les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)$[1] est une solution de l'équation (**NDE**), pour tout $\lambda > 0$ sachant que u est solution de même équation.

Définition 1.2.6 (auto-similaire)
*On appelle "**auto-similaire**" une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps, le principe de la recherche des solutions auto-similaires consiste à remplacer la forme (1.1) dans l'équation* (**NDE**)*, ce qui permet de transformer l'équation aux dérivées partielles* (**NDE**) *en une équation différentielle ordinaire EDO non linéaire.*

Remarque 1.2.1
En général, ils existent plusieurs formes des solutions auto-similaires. Pour admettre de telles solutions de l'équation (**NDE**) *doit vérifier les conditions dite de "**similarité**".*

Maintenant, on considère l'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad m \geq 1; \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{1.2}$$

Définition 1.2.7 (Symétrie)
Soit $T_{h,r,s}$ une transformation de la forme:

$$T_{h,r,s} : (t,x,u) \to \left(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}\right) \quad \text{où } h, r \text{ et } s \text{ sont des paramètres de transformation.}$$

$T_{h,r,s}$ est appelée une symétrie de (1.2) si:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \hat{u}^m \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} \qquad m \geq 1.$$

[1] Cette forme de la solution auto-similaire est beaucoup utilisé, nous allons travailler comme le travail de Juan Luis Vàzquez [12].

Les solutions auto-similaires à EDPs sont des solutions qui dépendent de certains groupements des variables indépendantes, plutôt que sur chacun variable séparément. Ce type de solutions sont considérés comme des solutions particulières, leurs formes dépend d'un profil appelé parfois anzas.

Définition 1.2.8 ([11], [12], [13])
Soit $P(x, t, u, u_x, \ldots) = 0$ une équation aux dérivées partielles alors, P admet une solution auto-similaire si et seulement si elle invariante (par échelle) sous l'action de dilatation c'est-à-dire si on fait le changement de variables suivant:

$$v = hu; \qquad x' = rx; \qquad t' = st, \tag{1.3}$$

avec h, r et s sont des paramètres positives, et $u(x, t)$ est une solution de l'équation P alors:

$$v(x', t') = hu\left(\frac{x'}{r}, \frac{t'}{s}\right), \tag{1.4}$$

est une solution aussi de l'équation P.

Conditions d'invariances d'échelles

Le changement (1.3) donne:

$$\frac{\partial v(x', t')}{\partial t'} = \frac{\partial hu(x, t)}{\partial st} = \frac{h}{s}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

et

$$\frac{\partial^2 v(x', t')}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 hu(x, t)}{\partial r^2 x^2} = \frac{h}{r^2}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

D'après la définition (1.2.8), l'équation (1.2) équivalent à:

$$\frac{h}{s}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{h^{m+1}}{r^2} u^m u_{xx}.$$

D'où, (1.4) sera une solution de (1.2) si et seulement si:

$$h^m = r^2 s^{-1}. \tag{1.5}$$

De même, dans le cas $x \in \mathbb{R}^n$, on trouve la même condition (1.5), qui s'appelle la condition de similarité ou bien "**condition d'invariance d'échelle**" pour l'équation (**NDE**).

Forme de solution auto-similaire

Dans le cas général pour $m \geq 1$, la condition (1.5) devient:

$$h = \left(\frac{r^2}{s}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Par suit, la formule (1.4) devient comme suit:

$$v\left(x', t'\right) = \left(\frac{r^2}{s}\right)^{\frac{1}{m}} u\left(x, t\right).$$

Pour cette raison, on peut donner une formule plus générale pour la formule (1.4), si on pose:

$$v = \tau u, \quad \text{tel que} \quad \tau > 0,$$

et u une solution de l'équation (**NDE**), sous l'action de dilatation alors

$$\tau u\left(x, t\right) = \left(\frac{r^2}{s}\right)^{\frac{1}{m}} u\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{s}\right), \tag{1.6}$$

est une solution de (**NDE**), la dilatation τu est appelée la transformation d'échelle (voir [12]).

Remarque 1.2.2
En pratique, on peut utiliser un seul paramètre pour classifier la famille des solutions de l'équation (**NDE**). *L'idée là, si on pose une nouvelle relation entre les deux paramètres h et r, alors on obtient la transformation (1.6) à un seul paramètre s.*

Si on prend

$$h = r^{-\gamma}, \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

D'après la condition (1.5) on obtient $r^{-\gamma m} = \frac{r^2}{s}$ ce qui implique:

$$r = s^{\frac{1}{\gamma m+2}} = s^{\beta}, \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{\gamma m + 2}. \tag{1.8}$$

D'autre parte de (1.7), on a

$$h = s^{\frac{-\gamma}{\gamma m+2}} = s^{-\alpha}, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\gamma}{\gamma m + 2}. \tag{1.9}$$

D'après les formules (1.8), (1.9), on peut conclure une relation entre α et β comme suit:

$$\alpha m + 2\beta = 1.$$

De même, la transformation (1.6) devient:

$$\tau u\left(x,t\right)=s^{-\alpha}u\left(\frac{x}{s^{\beta}},\frac{t}{s}\right).$$

Si on pose $\lambda=\frac{1}{s}>0$, alors la solution

$$u_{\lambda}\left(x,t\right)=\left(\tau_{\lambda}\right)u\left(x,t\right)=\lambda^{\alpha}u\left(\lambda^{\beta}x,\lambda t\right),$$

est appelée la solution auto-similaire de l'équation (**NDE**) pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^{n}\times(0,\infty)$, (voir [11],[12]).

1.3 Solution auto-similaire rétrécie

Dans ce travail, nous sommes beaucoup intéressés à discussion des solutions de l'équation (**NDE**) avec les propriétés mentionnées ci-dessus et d'autres types des propriétés.
Les ensembles dits auto-similaires rétrécies peuvent être décrits comme des ensembles formés de contractions d'eux-mêmes. Ils présentent de ce fait une forte invariance par changement d'échelle.

Forme de solution auto-similaire rétrécie

Définition 1.3.9
Soit $P\left(x,t,u,u_{x},\ldots\right)=0$ une équation aux dérivées partielle, on dit que P admet une solution auto-similaire rétrécie si et seulement si on fait le changement de variables suivant:

$$v=Ku;\qquad z=f\left(x\right)=f\left(x_{1},x_{2,\ldots},x_{n}\right);\qquad s=g\left(t\right),$$

où $K>0$ une constante positive, et $f:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ une fonction positive dépond seulement par x, et $g:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}_{+}^{*}$ une fonction positive dépond seulement par t, si $u\left(x,t\right)$ est une solution de l'équation P alors:

$$v\left(z,s\right)=Ku\left(x,t\right)\ \text{ où } z=f\left(x\right)\ \text{ et } s=g\left(t\right). \tag{1.10}$$

est une solution aussi de l'équation P.

Sur la base de cette considération, le but est d'étudier les solutions auto-similaires avec des propriétés rétrécies. En d'autres termes, La méthode de recherche de solutions auto-similaires rétrécies consiste à imposer une certaine forme à la solution recherchée.
On cherche des solutions de l'équation (**NDE**) qui vérifient:

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\left(t+1\right)^{\beta}}\omega\left(\left(t+1\right)^{\alpha}\left|x\right|^{2}\right),\ \alpha\geq0,\ \beta=\frac{1+\alpha}{m}. \tag{1.11}$$

Où ω est une fonction vérifié les propriétés:

$$\omega\left(\xi\right)>0 \text{ dans } \left[0,a\right), \omega\left(\xi\right)=0 \text{ dans } \left[a,+\infty\right), \text{ où } \xi=\left(t+1\right)^{\alpha}\left|x\right|^{2}, a>0.$$

α et β sont des constantes à choisir pour que les solutions existent.

Conditions d'invariances d'échelles

Maintenant, on cherche des conditions d'invariances d'échelles pour l'équation (**NDE**).
On pose:

$$\begin{cases} z=\varepsilon^{\delta}\left|x\right|^{2} \\ s=\varepsilon^{\gamma}\left(t+1\right) \end{cases} \quad \text{tels que } x\in\mathbb{R}^{n},\ t>0, \tag{1.12}$$

et

$$v\left(z,s\right)=\varepsilon^{\lambda}u\left(x,t\right)\Rightarrow u\left(x,t\right)=\varepsilon^{-\lambda}v\left(z,s\right), \tag{1.13}$$

avec ε un réel positif trés petit ($0<\varepsilon<<1$), et les exposants λ,γ,δ vérifient:

$$\delta\in\mathbb{R} \text{ et } \lambda,\gamma\in\mathbb{R}^{*} \text{ où } \frac{\delta}{\gamma}\leq0, \tag{1.14}$$

et v vérifie:

$$2n\frac{\partial v}{\partial z}+\left(4z-1\right)\frac{\partial^{2}v}{\partial z^{2}}=0, \quad \text{avec } n \text{ dimension de l'espace.}$$

Le changement (1.12) devient:

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon^{\delta}\left|x\right|^{2}=\varepsilon^{\delta}\left(x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+_{\dots}+x_{n}^{2}\right), \\ &\Rightarrow \nabla z=\varepsilon^{\delta}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+_{\dots}+x_{n}^{2}\right)=2\varepsilon^{\delta}x, \\ &\Rightarrow \triangle z=\operatorname{div}\left(\nabla z\right)=2\varepsilon^{\delta}\operatorname{div}\left(x\right)=2n\varepsilon^{\delta} \quad \text{avec } n \text{ dimension de l'espace.} \end{aligned}$$

Et

$$s=\varepsilon^{\gamma}\left(t+1\right)\Rightarrow\frac{\partial s}{\partial t}=s'\left(t\right)=\varepsilon^{\gamma}.$$

Règle de dérivation

D'après le changement (1.13) on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon^{-\lambda}\frac{\partial v}{\partial t}(z,s) = \varepsilon^{-\lambda}\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon^{\gamma-\lambda}v_s \ . \\
\triangle u(x,t) &= \varepsilon^{-\lambda}\triangle v(z,s) = \varepsilon^{-\lambda}\operatorname{div}(\nabla v(z,s)) = \varepsilon^{-\lambda}\operatorname{div}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(z,s)\right) \\
&= \varepsilon^{-\lambda}\operatorname{div}\left(\nabla z\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varepsilon^{-\lambda}\left[\operatorname{div}(\nabla z)\frac{\partial v}{\partial z} + \nabla z\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)\right] \\
&= \varepsilon^{-\lambda}\left[\triangle z\frac{\partial v}{\partial z} + \nabla z\cdot\nabla z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] = \varepsilon^{-\lambda}\left[2n\varepsilon^{\delta}\frac{\partial v}{\partial z} + 4\varepsilon^{2\delta}|x|^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \\
&= \varepsilon^{\delta-\lambda}[2nv_z + 4zv_{zz}] = \varepsilon^{\delta-\lambda}[2nv_z + (4z-1)v_{zz} + v_{zz}] \\
&= \varepsilon^{\delta-\lambda}v_{zz}.
\end{aligned}$$

Donc l'équation (**NDE**) équivalent à:

$$\varepsilon^{\gamma-\lambda}v_s = \varepsilon^{\delta-m\lambda-\lambda}v^m v_{zz} \ \Rightarrow\ v_s = \varepsilon^{\delta-m\lambda-\gamma}v^m v_{zz} \ .$$

Si on pose:

$$\delta - m\lambda - \gamma = 0,$$

donc on obtient:

$$v_s = v^m v_{zz} \ .$$

Alors **la condition d'invariance d'échelle** est:

$$m\lambda = \delta - \gamma.$$

Donc on peut écrire:

$$\lambda = \frac{\delta-\gamma}{m} = (-\gamma)\frac{1-\frac{\delta}{\gamma}}{m} \Rightarrow -\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{1+\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}{m} = \frac{1+\alpha}{m} \ \text{ tel que } \alpha = -\frac{\delta}{\gamma},$$

et de (1.14) on a $\alpha = -\frac{\delta}{\gamma} \geq 0$. Si on pose:

$$\beta = -\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{1+\alpha}{m} > 0,$$

alors on peut une relation entre α et β comme suit:

$$\alpha + 1 - m\beta = 0. \tag{1.15}$$

Si on multiplie z par s^{α} et $v(z,s)$ par s^{β} on obtient:

$$\begin{cases} zs^{\alpha} = \left(\varepsilon^{\delta}|x|^2\right)\left(\varepsilon^{\gamma}(t+1)\right)^{-\frac{\delta}{\gamma}} = |x|^2(t+1)^{\alpha} = \xi, \\ s^{\beta}v(z,s) = \left(\varepsilon^{\gamma}(t+1)\right)^{-\frac{\lambda}{\gamma}}\left(\varepsilon^{\lambda}u\right) = (t+1)^{\beta}u(x,t). \end{cases}$$

Les dernières égalités donnent $z = \xi s^{-\alpha}$ et

$$u(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{\beta}}\left(s^{\beta}v\left(\xi s^{-\alpha},s\right)\right).$$

Donc on peut écrit la solution $u(x,t)$ comme suit (voir [3]):

$$u(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{\beta}}\omega(\xi) \text{ tel que } \xi = |x|^2(t+1)^{\alpha} \text{ et } \alpha \geq 0,\ \beta = \frac{1+\alpha}{m}.$$

Système de solution

Pour discuter des solutions auto-similaires rétrécies, nous devrions d'abord déduire l'équation satisfaite par la fonction $\omega(\xi)$ à (1.11) utilisée pour la définition de solutions auto-similaires.

On va chercher des solutions auto-similaires sous la forme (1.11), on a trouvé:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (t+1)^{-\beta-1}\left(-\beta\omega(\xi) + \alpha\xi\omega'(\xi)\right), \\ u^m\triangle u = (t+1)^{\alpha-\beta-m\beta}\omega^m\left(2n\omega'(\xi) + 4\xi\omega''(\xi)\right). \end{cases}$$

Alors, l'EDP (**NDE**) équivalent à:

$$(t+1)^{-\beta-1}\left(\alpha\xi\omega'(\xi) - \beta\omega(\xi)\right) = (t+1)^{\alpha-\beta-m\beta}\omega^m\left(2n\omega'(\xi) + 4\xi\omega''(\xi)\right),$$

ce qui implique

$$\alpha\xi\omega'(\xi) - \beta\omega(\xi) = (t+1)^{\alpha+1-m\beta}\left(2n\omega^m(\xi)\omega'(\xi) + 4\xi\omega^m(\xi)\omega''(\xi)\right).$$

D'après (1.15), et d'après un calcul direct (en prendre $\omega = \omega(\xi)$) on peut satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$4\xi\omega^m\omega'' + (2n\omega^m - \alpha\xi)\omega' + \beta\omega = 0, \quad m \geq 1, \tag{1.16}$$

où n est la dimension de l'espace.

Soit:

$$\upsilon = \xi\omega' \Rightarrow \upsilon' = \omega' + \xi\omega'' \Rightarrow \xi\omega'' = \upsilon' - \omega',$$

donc l'équation (1.16) équivalent à:

$$4\omega^m (\upsilon' - \omega') + 2n\omega^m\omega' - \alpha\upsilon + \beta\omega = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\omega^m\upsilon' + (2n-4)\,\omega^m\omega' - \alpha\upsilon + \beta\omega = 0.$$

On multiplie la dernière équation par ξ on obtient:

$$4\xi\omega^m\upsilon' + (2n-4)\,\omega^m\upsilon - (\alpha\upsilon - \beta\omega)\,\xi = 0.$$

Finalement on trouve le système:

$$\begin{cases} \omega' = \frac{\upsilon}{\xi} \\ \upsilon' = \left(\frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega^m}\right)\upsilon - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}}, \end{cases} \tag{1.17}$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} \omega(0) = A, \qquad (A > 0) \\ \upsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Chapitre 2

Etude l'existence et l'unicité de solution de l'équation (NDE)

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre travail concerne sur les analyses et les preuves des théorèmes qui a été proposé par Chunprng Wang et Jingxue [3], qui démontrent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (**NDE**).

2.2 Préliminaires et résultats principaux

Définition 2.2.1

La couple (ω, υ) *est appelé une solution à support compact du problème de valeur initiale* $(1.17) - (1.18)$ *s'il existe une constante* $a > 0$ *tel que:*

i. $\omega(a) = 0$ *et* $\omega(\xi) > 0 \ \ \forall \xi \in [0, a)$.

ii. ω *est décroissante (monotone) sur* $[0, a)$.

iii. ω *et* υ *sont continûment différentiable en* $(0, a)$ *et satisfait* (1.17). ω *et* υ *sont continûment à droite à* 0 *et de satisfaire* (1.18) *et d'autre parte,* ω *est continue à gauche à* a.

Parce que le problème de valeur initiale (1.17)−(1.18) est singulier, nous étudions d'abord un problème approximatif[(1)]. Pour le petit $\varepsilon > 0$, on considère le système (1.17) avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \omega(\varepsilon) = A, \\ \upsilon(\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposition 2.2.1 *Soit $(\omega_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)$ la solution classique du problème de valeur initiale (1.17)−(2.1). Alors il existe une constante $a_\varepsilon > 0$ tel que:*

$$\omega_\varepsilon(a_\varepsilon) = 0 \ \text{et}\ \omega_\varepsilon(\xi) > 0,\ \omega'_\varepsilon(\xi) < 0,\ \forall \xi \in (\varepsilon, a_\varepsilon).$$

En outre, on a l'estimation:

$$a_\varepsilon \leq 2\varepsilon + \frac{4(n+1)A^m}{\beta}.$$

Preuve. En suit, facilement de la théorie des équations différentielles ordinaires $(\omega_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)$ existe localement. Donc, il existe $\delta > \varepsilon$, tel que $(\omega_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)$ existe dans (ε, δ), et pour tout $\xi \in (\varepsilon, \delta)$, nous avons:

$$\omega_\varepsilon(\xi) > 0,\ \upsilon_\varepsilon(\xi) < 0,\ \omega'_\varepsilon(\xi) < 0.$$

On cherche maintenant une écriture de ω_ε et υ_ε comme une combinaison l'un par l'autre, de (1.17) nous obtenons:

$$\upsilon(\xi) = \xi\omega'_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \omega'_\varepsilon(\xi) = \frac{\upsilon(\xi)}{\xi} \Rightarrow \int_\varepsilon^\xi \omega'_\varepsilon(t)\,dt = \int_\varepsilon^\xi \frac{\upsilon(t)}{t}dt,$$

et d'après les conditions (2.1) on a:

$$\omega_\varepsilon(\xi) = A + \int_\varepsilon^\xi \frac{\upsilon(t)}{t}dt.$$

Toujours de (1.17) on a:

$$\upsilon'_\varepsilon = \left(\frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega^m}\right)\upsilon - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}}. \tag{2.2}$$

[(1)] On doit donc développer des techniques qui permettent d'étudier des problèmes approximatifs les plus proches possibles du problème original.

En particulier, si on prend $f(\xi) = \frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega^m}$, alors $\upsilon'_\varepsilon = f(\xi)\,\upsilon$ est l'équation homogène de (2.2), et sa solution est:

$$\upsilon_\varepsilon(\xi) = C(\xi)\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right), \text{ tels que } C(\xi) < 0 \text{ et } C'(\xi) < 0,\ \forall\xi \in (\varepsilon,\delta).$$

D'après un calcul direct (en prendre $C = C(\xi)$ et $f = f(\xi)$), et d'après le théorème des variations des constantes[(1)] on peut satisfait de (2.2) l'équation suivante:

$$C'\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) + Cf\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) = Cf\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}},$$

donc

$$C' = -\frac{\beta}{4\omega^{m-1}}\exp\left(-\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right),$$

en effet

$$C(\xi) = -\int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)}\exp\left(-\int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right)d\eta + B, \text{ avec } B < \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)}\exp\left(-\int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right)d\eta.$$

Finalement

$$\upsilon_\varepsilon(\xi) = \exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) \times \left[-\int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)}\exp\left(-\int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right)d\eta + B\right],$$

et de (2.1) on trouve $B = 0$.

En conséquent, pour $f(t) = \frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega^m(t)}$, on peut écrit la solution classique $(\omega_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)$ du problème de valeur initiale $(1.17) - (2.1)$ comme suit:

$$\begin{cases} \omega_\varepsilon(\xi) = A + \int_\varepsilon^\xi \frac{\upsilon(t)}{t}dt \\ \upsilon_\varepsilon(\xi) = -\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) \times \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)}\exp\left(-\int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right)d\eta. \end{cases} \tag{2.3}$$

[(1)] On prend la solution générale de l'équation homogène, et on transforme la constante C en une fonction dérivable, notée encore C.

Le théorème de prolongement[1] implique celle-là et seulement une des deux conclusions suivantes:

$i)$ il existe $a_\varepsilon > 0$ tel que $\omega_\varepsilon(a_\varepsilon) = 0$, et pour tout $\xi \in (\varepsilon, a_\varepsilon)$, nous avons:

$$\omega_\varepsilon(\xi) > 0, \quad \upsilon_\varepsilon(\xi) < 0, \quad \omega'_\varepsilon(\xi) < 0.$$

$ii)$ Pour tout $\xi \in (\varepsilon, +\infty)$, nous avons:

$$\omega_\varepsilon(\xi) > 0, \quad \upsilon_\varepsilon(\xi) < 0, \quad \omega'_\varepsilon(\xi) < 0.$$

Maintenant, nous montrons que la conclusion (ii) ne tient pas. En effet, si la conclusion (ii) était valide, il s'ensuivrait de (2.3):

$$\begin{aligned}
-\upsilon_\varepsilon(\xi) &= \exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt\right) \times \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(-\int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right) d\eta, \\
&= \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\varepsilon^\xi f(t)\,dt - \int_\varepsilon^\eta f(t)\,dt\right) d\eta, \\
&= \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) d\eta, \text{ toujours } f(t) = \frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega^m(t)}.
\end{aligned}$$

Nous allons distinguer deux cas pour estimer la limite inférieure de $(-\upsilon_\varepsilon)$.

1) Quand $n = 1, 2$, pour tout $\xi \in (\varepsilon, +\infty)$, nous avons:

$$-\upsilon_\varepsilon(\xi) = \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) d\eta.$$

Et pour $n = 1, 2$, $f(t) = \frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega^m(t)} \geq \frac{\alpha}{4\omega^m(t)}$, et puisque ω est positive décroissante alors $\omega(\varepsilon) \geq \omega(\xi)$, $\forall \xi \in (\varepsilon, +\infty)$, en effet pour $\alpha \geq 0$;

$$A \geq \omega(\xi) \Rightarrow \frac{\alpha}{4\omega^m(\xi)} \geq \frac{\alpha}{4A^m}, \;\; \forall \xi \in (\varepsilon, +\infty),$$

de même:

$$\exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) \geq \exp\left(\int_\eta^\xi \frac{\alpha}{4\omega^m(t)} dt\right) \geq \exp\left(\int_\eta^\xi \frac{\alpha}{4A^m} dt\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{4A^m}(\xi - \eta)\right) \geq 1.$$

[1] Soient (ω, I) et $(\tilde{\omega}, \tilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle, où I et $\tilde{I}$ deux intervalles sur $\mathbb{R}$. On dira que $(\tilde{\omega}, \tilde{I})$ est un prolongement de (ω, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{\omega}|_I = \omega$.

Donc nous avons:

$$-v_\varepsilon(\xi) = \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) d\eta \geq \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} d\eta,$$

$$\Rightarrow -v_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta}{4A^{m-1}}(\xi - \eta). \tag{2.4}$$

2) Lorsque $n \geq 3$, on a $f(t) = \frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega^m(t)} \geq \frac{2-n}{2t}$ et:

$$\exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) \geq \exp\left(\int_\eta^\xi \frac{2-n}{2t} dt\right) = \exp\left(\frac{2-n}{2}(\ln(\xi) - \ln(\eta))\right) = \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} -v_\varepsilon(\xi) &= \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f(t)\,dt\right) d\eta \geq \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4A^{m-1}} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}-1} d\eta, \\ &\geq \frac{\beta}{2nA^{m-1}} \xi^{1-\frac{n}{2}} \left(\xi^{\frac{n}{2}} - \varepsilon^{\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Pour $0 < \varepsilon << 1$ et $n \geq 3$, évident que $\xi^{1-\frac{n}{2}}\left(\xi^{\frac{n}{2}} - \varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) \geq \xi - \varepsilon$, $\forall \xi > \varepsilon$, donc

$$-v_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta}{2nA^{m-1}}(\xi - \varepsilon). \tag{2.5}$$

Finalement, d'après (2.4) et (2.5) et pour tout $n \geq 1$, on a:

$$-v_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta}{2(n+1)A^{m-1}}(\xi - \varepsilon) \qquad \forall \xi \in (\varepsilon, +\infty).$$

Par conséquent, lorsque $\xi \geq 2\varepsilon$ alors $\frac{\xi - \varepsilon}{\xi} \geq \frac{1}{2}$ donc

$$-v_\varepsilon(\xi) = -\xi\omega'_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta}{2(n+1)A^{m-1}}(\xi - \varepsilon),$$

$$\Rightarrow -\omega'_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta}{4(n+1)A^{m-1}},$$

ce qui contredit la conclusion (ii).

On a pour ε très petit, et de (2.1) $A = \omega_\varepsilon(\varepsilon) \geq \omega_\varepsilon(2\varepsilon)$ (car ω est décroissante), nous appliquons le théorème des accroissements finis[1] sur l'intervalle $(2\varepsilon, a_\varepsilon)$, nous avons:

$$\exists \xi \in (2\varepsilon, a_\varepsilon) \text{ tel que } -\omega'_\varepsilon(\xi) = -\frac{\omega_\varepsilon(a_\varepsilon) - \omega_\varepsilon(2\varepsilon)}{a_\varepsilon - 2\varepsilon} = \frac{\omega_\varepsilon(2\varepsilon)}{a_\varepsilon - 2\varepsilon} \geq \frac{\beta}{4(n+1)A^{m-1}},$$

[1] Rappelons le résultat classique pour une fonction ω continue sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\omega(b) - \omega(a) = \omega'(c)(b - a)$.

$$\Rightarrow \frac{A}{a_\varepsilon - 2\varepsilon} \geq \frac{\beta}{4\,(n+1)\,A^{m-1}} \Rightarrow a_\varepsilon - 2\varepsilon \leq \frac{4\,(n+1)\,A^m}{\beta}.$$

Finalement nous obtenons l'estimation:

$$a_\varepsilon \leq 2\varepsilon + \frac{4\,(n+1)\,A^m}{\beta}.$$

La preuve est complète. ■

Maintenant nous établissons le principe de comparaison. Nous donnons deux conditions initiales:

$$\begin{cases} \omega_1\,(\varepsilon) = A_1, \\ \upsilon_1\,(\varepsilon) = B_1, \end{cases} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{cases} \omega_2\,(\varepsilon) = A_2, \\ \upsilon_2\,(\varepsilon) = B_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Proposition 2.2.2 (Principe de comparaison) *Soient $0 < A_1 \leq A_2$, $B_1 \leq B_2 \leq 0$, et (ω_1, υ_1) la solution du problème de valeur initiale (1.17)-(2.6), (ω_2, υ_2) la solution du problème de valeur initiale (1.17)-(2.7). Si ω_1 et ω_2 sont positifs dans $[\varepsilon, a_0]$ pour certains $a_0 > \varepsilon$, alors*

$$\omega_1\,(\xi) \leq \omega_2\,(\xi)\,, \qquad \upsilon_1\,(\xi) \leq \upsilon_2\,(\xi)\,, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_0]\,.$$

Preuve. Premièrement, si (ω_1, υ_1) [resp. (ω_2, υ_2)] la solution du problème de valeur initiale (1.17)-(2.6), [resp. (1.17) - (2.7)], alors:

$$\begin{cases} \omega_i\,(\xi) = A_i + \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \frac{\upsilon_i(t)}{t} dt, \\ \upsilon_i\,(\xi) = B_i \exp\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\xi} f_i\,(t)\,dt \right) - \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \frac{\beta}{4\omega_i^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int\limits_{\eta}^{\xi} f_i\,(t)\,dt \right) d\eta, \quad f_i\,(t) = \frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega_i^m(t)}. \end{cases} \text{où } i = 1, 2.$$

1) Si $A_1 = A_2$ et $B_1 = B_2$, alors:

$$\begin{cases} \omega_1\,(\varepsilon) = \omega_2\,(\varepsilon) = A_1 = A_2, \\ \upsilon_1\,(\varepsilon) = \upsilon_2\,(\varepsilon) = B_1 = B_2. \end{cases}$$

Donc on a l'unicité de solutions au problème de valeur initiale, en effet pour certains $a_0 > \varepsilon$, on a: $\omega_1 = \omega_2$ et $\upsilon_1 = \upsilon_2$, $\forall \xi \in [\varepsilon, a_0]$. Dans ce cas, le résultat est trivial.

2) Si $A_1 < A_2$ et $B_1 < B_2$.

Il facile que montre que l'hypothèse suivante est vraie:

$$\text{il existe } a_0 > \varepsilon \text{ tel que } \omega_1 < \omega_2 \text{ et } f_1 > f_2 \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_0]\,. \tag{2.8}$$

Par l'absurde, on suppose que $\omega_1 \geq \omega_2 \ \ \forall \xi \in [0, a)$.

D'après la définition, on a ω_1 et ω_2 sont décroissante (monotone) sur $[0, a)$, donc si on prend $a_0 \in [0, a)$ alors pour tout $0 < \varepsilon < a_0$ nous avons $\omega_1 \geq \omega_2 \ \ \forall \xi \in [\varepsilon, a_0]$, en particulier

$$\omega_1(\varepsilon) \geq \omega_2(\varepsilon) \Rightarrow A_1 \geq A_2, \text{ contradiction.}$$

Alors $\omega_1 < \omega_2$, $\forall \xi \in [\varepsilon, a_0]$, de même pour $\alpha \geq 0$ et $m \geq 1$ on a

$$f_1(\xi) = \frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega_1^m(\xi)} > \frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega_2^m(\xi)} = f_2(\xi)\,.$$

Finalement l'hypothèse (2.8) est valable.

Et d'autre façon $\forall \xi \in [\varepsilon, a_0]$ on a:

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = \left(\begin{array}{c} B_2 \exp\left(\int_{\varepsilon}^{\xi} f_2(t)\,dt \right) - B_1 \exp\left(\int_{\varepsilon}^{\xi} f_1(t)\,dt \right) \\ + \int_{\varepsilon}^{\xi} \frac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_{\eta}^{\xi} f_1(t)\,dt \right) d\eta - \int_{\varepsilon}^{\xi} \frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_{\eta}^{\xi} f_2(t)\,dt \right) \end{array} \right) > 0.$$

Donc $\upsilon_1 < \upsilon_2 \ \forall \xi \in [\varepsilon, a_0]$.

3) Maintenant, et d'après ce qui passé:

$$\begin{array}{llll} \text{si } A_1 = A_2 \text{ et } B_1 < B_2, & \text{alors} \ \ \omega_1 = \omega_2 \text{ et } f_1 = f_2 & \forall \xi \in [\varepsilon, a_0] & \text{(a)}\,, \\ \text{si } A_1 < A_2 \text{ et } B_1 = B_2, & \text{alors} \ \ \omega_1 < \omega_2 \text{ et } f_1 > f_2 & \forall \xi \in [\varepsilon, a_0] & \text{(b)}\,, \end{array}$$

Alors dans les deux estimations (a) et (b), il existe $\delta > \varepsilon$, tel que $0 < \omega_1 \leq \omega_2$ dans $[\varepsilon, \delta]$.

Et d'autre façon on a:

$$(a) \Leftrightarrow \upsilon_2 - \upsilon_1 = (B_2 - B_1) \exp\left(\int_\varepsilon^\xi f_1(t)\,dt\right) \geq 0,$$

et

$$(b) \Leftrightarrow \upsilon_2 - \upsilon_1 = \begin{pmatrix} B_1 \left[\exp\left(\int_\varepsilon^\xi f_2(t)\,dt\right) - \exp\left(\int_\varepsilon^\xi f_1(t)\,dt\right)\right] \\ + \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f_1(t)\,dt\right) d\eta - \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi f_2(t)\,dt\right) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Les dernières inégalités donnent que $\upsilon_1 \leq \upsilon_2 \leq 0$ dans $[\varepsilon, \delta]$, ainsi $\omega_1' - \omega_2' \leq 0$ dans $[\varepsilon, \delta]$. En conséquence,

$$\int_\varepsilon^\delta (\omega_1' - \omega_2')(t)\,dt = (\omega_1 - \omega_2)(\delta) - (\omega_1 - \omega_2)(\varepsilon) \leq 0.$$

Donc finalement

$$0 < \omega_1(\delta) \leq \omega_2(\delta), \qquad \upsilon_1(\delta) \leq \upsilon_2(\delta) \leq 0, \qquad \omega_2(\varepsilon) - \omega_1(\varepsilon) \leq \omega_2(\delta) - \omega_1(\delta).$$

Voici la preuve est complète si $a_0 \leq \delta$. Si $a_0 > \delta$, nous répétons les arguments ci-dessus.

Remarquant que ω_1' et ω_2' sont délimitées sur $[\varepsilon, a_0]$ et $\omega_2(\varepsilon) - \omega_1(\varepsilon) \leq \omega_2(\delta) - \omega_1(\delta)$. Nous voyons que les résultats ci-dessus sont valables pour certains $\delta \geq a$.

La preuve est complète. ■

Proposition 2.2.3 *Il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de ε, tel que*

$$a_\varepsilon > \varepsilon + C_0 > 2\varepsilon,$$

vérifie lorsque $0 < \varepsilon < C_0$. En outre, pour $0 < \delta < a_\varepsilon - 2\varepsilon$, nous avons l'estimation:

$$\omega_\varepsilon(\xi) \geq \frac{\beta\delta}{4(n+1)A^{m-1}}, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon - \delta].$$

Preuve. Nous allons distinguer deux cas pour estimer la limite supérieure de $-\upsilon_\varepsilon$.
1) Lorsque $n = 1$, pour tout $\xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon)$, nous avons $\omega_\varepsilon(\xi) > 0$, $\upsilon_\varepsilon(\xi) \le 0$, et

$$\begin{aligned}
-\upsilon_\varepsilon(\xi) &= \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi \left(\frac{1}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega_\varepsilon^m(t)}\right) dt\right) d\eta \\
&\le \frac{\beta}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \int_\varepsilon^\xi \exp\left(\int_\eta^\xi \frac{\alpha}{4\omega_\varepsilon^m(t)} dt\right) \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta \\
&\le \frac{\beta\xi^{\frac{1}{2}}}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \int_\varepsilon^\xi \exp\left(\frac{\alpha}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}(\xi - \eta)\right) (\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \\
&\le \frac{\beta\xi^{\frac{1}{2}}}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right) \int_\varepsilon^\xi (\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \\
&\le \frac{\beta\xi^{\frac{1}{2}}}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right) \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le \frac{\beta\xi}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right).
\end{aligned}$$

2) Lorsque $n \ge 2$, pour tout $\xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon)$, nous avons toujours $\omega_\varepsilon(\xi) > 0$, $\upsilon_\varepsilon(\xi) \le 0$, et

$$\begin{aligned}
-\upsilon_\varepsilon(\xi) &= \int_\varepsilon^\xi \frac{\beta}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\xi \left(\frac{2-n}{2t} + \frac{\alpha}{4\omega_\varepsilon^m(t)}\right) dt\right) d\eta \\
&\le \frac{\beta}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \int_\varepsilon^\xi \exp\left(\int_\eta^\xi \frac{\alpha}{4\omega_\varepsilon^m(t)} dt\right) d\eta \\
&\le \frac{\beta}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right) (\xi - \varepsilon) \\
&\le \frac{\beta\xi}{4\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $n \ge 1$, on obtient:

$$-\upsilon_\varepsilon(\xi) \le \frac{\beta\xi}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon).$$

D'où

$$\begin{aligned}
-\xi\omega_\varepsilon'(\xi) \le \frac{\beta\xi}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon), \\
\Rightarrow \omega_\varepsilon'(\xi) \ge -\frac{\beta}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha\xi}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Le principe de comparaison implique $a_\varepsilon \leq a_1$ pour $0 < \varepsilon \leq 1$. Ainsi pour $0 < \varepsilon \leq 1$, nous avons:

$$\omega_\varepsilon'(\xi) \geq -\frac{\beta}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon).$$

Comme ω_ε est une fonction décroissante sur $[\varepsilon, a_\varepsilon)$ alors $\omega_\varepsilon(\xi) \leq \omega_\varepsilon(\varepsilon) = A, \quad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon)$. Soit $\xi_0 \in [\varepsilon, a_\varepsilon)$ tel que $\omega_\varepsilon(\xi_0) = \frac{A}{2}$. Alors:

$$\omega_\varepsilon'(\xi) \geq -\frac{\beta}{2(A/2)^{m-1}} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4(A/2)^m}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \xi_0].$$

D'après le théorème des accroissements finis, on obtient que

$$\exists \xi \in [\varepsilon, \xi_0] \text{ tel que } \omega_\varepsilon'(\xi) = \frac{\omega_\varepsilon(\xi_0) - \omega_\varepsilon(\varepsilon)}{\xi_0 - \varepsilon} \geq -\frac{\beta}{2(A/2)^{m-1}} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4(A/2)^m}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-A/2}{\xi_0 - \varepsilon} \geq -\frac{2^{m-2}\beta}{A^{m-1}} \exp\left(\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right),$$
$$\Rightarrow \quad a_\varepsilon > \xi_0 \geq \varepsilon + \frac{A^m}{2^{m-1}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right).$$

Soit:

$$C_0 = \min\left\{1, \frac{A^m}{2^{m-1}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right)\right\}.$$

Alors pour $0 < \varepsilon < C_0$, Nous avons:

$$a_\varepsilon > \varepsilon + C_0 > 2\varepsilon.$$

Nous montrons maintenant ce dernier de la proposition correcte. Soit $0 < \delta < a_\varepsilon - 2\varepsilon$. De la preuve de la proposition (2.2.1), on obtient que

$$-\omega_\varepsilon'(\xi) \geq \frac{\beta}{4(n+1)A^{m-1}}, \quad \forall \xi \geq 2\varepsilon.$$

Remarquant que $a_\varepsilon - \delta > 2\varepsilon$, on obtient à partir du théorème des accroissements finis que

$$\exists \xi \in [a_\varepsilon - \delta, a_\varepsilon) \text{ tel que } -\omega_\varepsilon'(\xi) = -\frac{\omega_\varepsilon(a_\varepsilon) - \omega_\varepsilon(a_\varepsilon - \delta)}{a_\varepsilon - (a_\varepsilon - \delta)} \geq \frac{\beta}{4(n+1)A^{m-1}},$$

$$\Rightarrow \omega_\varepsilon(a_\varepsilon - \delta) \geq \frac{\beta\delta}{4(n+1)A^{m-1}}.$$

Par conséquence,

$$\omega_\varepsilon(\xi) \geq \omega_\varepsilon(a_\varepsilon - \delta) \geq \frac{\beta\delta}{4(n+1)A^{m-1}}, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon - \delta].$$

La preuve est complète. ■

Lemme 2.2.1 *Soit* $0 < \varepsilon < C_0$. *Pour tout* $\tau > 0$, *il existe une constante* $\delta > 0$ *indépendante de* ε *tel que:*

$$A - \tau < \omega_\varepsilon(\xi) \leq A, \qquad -\tau < \upsilon_\varepsilon(\xi) \leq 0, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon + \delta).$$

Preuve. Soit $0 < \varepsilon < C_0$. De la preuve de la proposition (2.2.3), on obtient:

$$-\upsilon_\varepsilon(\xi) \leq \frac{\beta \xi}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon).$$

Si on prend $\xi_0 \in [\varepsilon, a_\varepsilon)$ tel que $\omega_\varepsilon(\xi_0) = \frac{A}{2}$, alors pour $\varepsilon + C_0 \leq \xi_0$ on a $\omega_\varepsilon(\varepsilon + C_0) \geq \frac{A}{2}$, on obtient donc

$$-\upsilon_\varepsilon(\xi) \leq \frac{2^{m-2}\beta\xi}{A^{m-1}} \exp\left(\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon + C_0],$$

de même

$$-\omega'_\varepsilon(\xi) \leq \frac{2^{m-2}\beta}{A^{m-1}} \exp\left(\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon + C_0].$$

Comme ω_ε est décroissante, alors pour tout $\xi \in [\varepsilon, \varepsilon + C_0]$ on a l'estimation

$$A - \omega_\varepsilon(\varepsilon + C_0) \geq A - \omega_\varepsilon(\xi) \geq 0.$$

Soit la famille $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\varepsilon < c_1 < c_i \leq \varepsilon + C_0$, $1 \leq i \leq n$. Alors pour i_0 fixé, il existe $\xi \in [\varepsilon, c_{i_0}]$ tel que

$$-\omega'_\varepsilon(\xi) = -\frac{\omega_\varepsilon(c_{i_0}) - \omega_\varepsilon(\varepsilon)}{c_{i_0} - \varepsilon} = \frac{A - \omega_\varepsilon(c_{i_0})}{c_{i_0} - \varepsilon} \leq \frac{2^{m-2}\beta}{A^{m-1}} \exp\left(\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right).$$

Donc le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $\xi \in [\varepsilon, c_i]$ tel que pour chaque $1 \leq i \leq n$, nous avons:

$$\frac{\tau_i A^{m-1}}{2^{m-2}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right) \leq 1, \text{ tel que } \tau_i = \frac{A - \omega_\varepsilon(c_i)}{c_i - \varepsilon} \geq \frac{A - \omega_\varepsilon(c_i)}{C_0} > 0.$$

Pour tout $\tau > 0$, Soit:

$$\delta = \min\left\{C_0, \frac{\tau A^{m-1}}{2^{m-2}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right)\right\}.$$

Si $\delta = C_0$ alors $\forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon + \delta)$ on a

$$A - \omega_\varepsilon(\xi) < A - \omega_\varepsilon(\delta + \varepsilon) = A - \omega_\varepsilon(C_0 + \varepsilon) \leq \frac{A - \omega_\varepsilon(C_0 + \varepsilon)}{C_0} \leq \tau.$$

Si

$$\delta = \frac{\tau A^{m-1}}{2^{m-2}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{A^m}\right) < C_0,$$

alors $\forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon+\delta)$

$$A - \omega_\varepsilon(\xi) < A - \omega_\varepsilon(\delta+\varepsilon) < A - \omega_\varepsilon(C_0+\varepsilon) \leq \frac{A - \omega_\varepsilon(C_0+\varepsilon)}{C_0} \leq \tau,$$

finalement

$$A - \tau < \omega_\varepsilon(\xi) \leq A, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon+\delta),$$

de même (voir [3]), nous obtenons:

$$-\tau < v_\varepsilon(\xi) \leq 0, \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, \varepsilon+\delta).$$

La preuve est complète. ∎

Lemme 2.2.2 *Soit* $0 < \varepsilon < C_0$. *Pour tout* $\tau > 0$, *il existe une constante* $\delta > 0$ *indépendante de* ε *tel que:*

$$0 < \omega_\varepsilon(\xi) < \tau, \qquad \forall \xi \in (a_\varepsilon - \delta, a_\varepsilon).$$

Preuve. Soit $0 < \varepsilon < C_0$. Pour tout $\tau > 0$, on a
i) si $\tau \geq A$ le résultat est triviale car il existe une constante $0 < \delta < a_\varepsilon - \varepsilon$ indépendante de ε tel que

$$0 < \omega_\varepsilon(\xi) < A \leq \tau \qquad \forall \xi \in (a_\varepsilon - \delta, a_\varepsilon).$$

ii) si $0 < \tau < A$
De la preuve de la proposition (2.2.3), on obtient que

$$\omega'_\varepsilon(\xi) \geq -\frac{\beta}{2\omega_\varepsilon^{m-1}(\xi)} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4\omega_\varepsilon^m(\xi)}\right), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_\varepsilon).$$

Soit $\xi_2 > \xi_1 \in (\varepsilon, a_\varepsilon)$ tel que $\omega_\varepsilon(\xi_2) = \frac{\tau}{2}$, $\omega_\varepsilon(\xi_1) = \tau$, alors $\forall \xi \in [\varepsilon, \xi_2]$ on a

$$\omega'_\varepsilon(\xi) \geq -\frac{\beta}{2(\tau/2)^{m-1}} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4(\tau/2)^m}\right).$$

Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe ξ dans $[\xi_1, \xi_2]$ tel que

$$\omega'_\varepsilon(\xi) = \frac{\omega_\varepsilon(\xi_2) - \omega_\varepsilon(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{-\tau/2}{\xi_2 - \xi_1} \geq -\frac{\beta}{2(\tau/2)^{m-1}} \exp\left(\frac{\alpha a_1}{4(\tau/2)^m}\right),$$

$$\Rightarrow \xi_1 \leq \xi_2 - \frac{\tau}{2} \frac{2\left(\tau/2\right)^{m-1}}{\beta} \exp\left(-\frac{\alpha a_1}{4\left(\tau/2\right)^m}\right) < a_\varepsilon - \frac{\tau^m}{2^{m-1}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{\tau^m}\right) < a_\varepsilon.$$

Soit:

$$\delta = \frac{\tau^m}{2^{m-1}\beta} \exp\left(-\frac{2^{m-2}\alpha a_1}{\tau^m}\right) > 0,$$

alors

$$\omega_\varepsilon\left(\xi_1\right) > \omega_\varepsilon\left(a_\varepsilon - \delta\right) > \omega_\varepsilon\left(a_\varepsilon\right) = 0.$$

Donc

$$0 < \omega_\varepsilon\left(\xi\right) < \tau, \qquad \forall \xi \in \left(a_\varepsilon - \delta, a_\varepsilon\right).$$

La preuve est complète. ■

Proposition 2.2.4 *Soit les conditions de la proposition* (2.2.2) *réalisées. En outre, on suppose que* $0 < \varepsilon < C_0$ *et* $B_2 = 0$. *Alors il existe deux constantes* M_1,$M_2 > 0$ *dépendent seulement par* a_0, $\omega_\varepsilon\left(a_0\right)$ *et* A_2, *mais sont indépendants de* ε *tel que pour tout* $\xi \in [\varepsilon, a_0]$, *l'estimation*

$$\left|\omega_1\left(\xi\right) - \omega_2\left(\xi\right)\right| < \left(A_2 - A_1 - a_0 M_2 B_1\right) \exp\left(a_0 M_1\right),$$

et

$$\left|\upsilon_1\left(\xi\right) - \upsilon_2\left(\xi\right)\right| < a_0 M_1 \left(A_2 - A_1 - a_0 M_2 B_1\right) \exp\left(a_0 M_1\right) - a_0 M_2 B_1,$$

vérifiées.

Preuve. Soit les conditions de la proposition (2.2.2) réalisées, avec $B_2 = 0$, et $A_1 < A_2$. Nous voyons du principe de comparaison que:

$$0 \leq \omega_1\left(a_0\right) \leq \omega_1\left(\xi\right) \leq \omega_2\left(\xi\right) \leq A_2, \qquad \upsilon_1\left(\xi\right) \leq \upsilon_2\left(\xi\right) \leq 0, \qquad \forall \xi \in \left[\varepsilon, a_0\right],$$

et pour $\varepsilon \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq a_0$, nous avons:

$$\omega_2\left(\xi_2\right) - \omega_1\left(\xi_2\right) \geq \omega_2\left(\xi_1\right) - \omega_1\left(\xi_1\right) \geq A_2 - A_1 \geq 0,$$

donc il existe une constante $0 < k < +\infty$, tel que

$$\frac{1}{\left|\omega_1\left(\xi\right) - \omega_2\left(\xi\right)\right|} = \frac{1}{\omega_2\left(\xi\right) - \omega_1\left(\xi\right)} \leq \frac{1}{A_2 - A_1} \leq k, \qquad \forall \xi \in \left[\varepsilon, a_0\right].$$

Ainsi pour tout $\xi \in [\varepsilon, a_0]$, on obtient que:

$$\int_{\varepsilon}^{\xi} \exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}d\eta \le \xi^{\frac{2-n}{2}}\exp\left(\frac{\alpha a_0}{4\omega_1^m(a_0)}\right)\int_{\varepsilon}^{\xi}\eta^{\frac{n-2}{2}}d\eta \le \frac{2}{n}\xi\exp\left(\frac{\alpha a_0}{4\omega_1^m(a_0)}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\varepsilon}^{\xi}\frac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\eta)}\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}d\eta\right.\\
&\qquad\left.-\int_{\varepsilon}^{\xi}\frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)}\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_2^m(t)}\right)dt\right\}d\eta\right|\\
\le\ &\left|\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\frac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\eta)}-\frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)}\right)\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}d\eta\right|\\
&+\left|\int_{\varepsilon}^{\xi}\frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)}\times\right.\\
&\left.\left(\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}-\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_2^m(t)}\right)dt\right\}\right)d\eta\right|\\
\le\ &\left|\left(\frac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\xi)}-\frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\xi)}\right)\int_{\varepsilon}^{\xi}\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}d\eta\right|\\
&+\left|\frac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\xi)}\times\right.\\
&\left.\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}-\exp\left\{\int_{\eta}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_2^m(t)}\right)dt\right\}\right)d\eta\right|\\
\le\ &\left(\frac{\beta}{2n\omega_1^{m-1}(a_0)}-\frac{\beta}{2nA_2^{m-1}}\right)\xi\exp\left(\frac{\alpha a_0}{4\omega_1^m(a_0)}\right)+\frac{\beta}{n\omega_1^{m-1}(a_0)}\xi\cosh\left(\frac{\alpha a_0}{4\omega_1^m(a_0)}\right)\\
\le\ &M\xi\frac{|\omega_1(\xi)-\omega_2(\xi)|}{|\omega_1(\xi)-\omega_2(\xi)|}\le M_1\xi\,|\omega_1(\xi)-\omega_2(\xi)|=M_1\xi\left(\omega_2(\xi)-\omega_1(\xi)\right),
\end{aligned}$$

tel que

$$M=\frac{\beta\left(A_2^{m-1}-\omega_1^{m-1}(a_0)\right)}{2nA_2^{m-1}\omega_1^{m-1}(a_0)}\exp\left(\frac{\alpha a_0}{4\omega_1^m(a_0)}\right)+\beta\frac{\cosh\left[\left(\alpha a_0\omega_1^{-m}(a_0)\right)/4\right]}{n\omega_1^{m-1}(a_0)}.$$

De même

$$\exp\left\{\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\frac{2-n}{2t}+\frac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right\}<M_2\xi,$$

où M_1,M_2 dépendent seulement par a_0, $\omega_1(a_0)$ et A_2, mais sont indépendants de ε. En conséquent, pour tout $\xi\in[\varepsilon,a_0]$

$$\begin{aligned}\upsilon_2(\xi)-\upsilon_1(\xi)&=-\int_{\varepsilon}^{\xi}\tfrac{\beta}{4\omega_2^{m-1}(\eta)}\exp\left(\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\tfrac{2-n}{2t}+\tfrac{\alpha}{4\omega_2^m(t)}\right)dt\right)d\eta\\&\quad-B_1\exp\left(\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\tfrac{2-n}{2t}+\tfrac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right)+\int_{\varepsilon}^{\xi}\tfrac{\beta}{4\omega_1^{m-1}(\eta)}\exp\left(\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\tfrac{2-n}{2t}+\tfrac{\alpha}{4\omega_1^m(t)}\right)dt\right)d\eta\\&<M_1\xi\left(\omega_2(\xi)-\omega_1(\xi)\right)-M_2\xi B_1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\omega_2(\xi)-\omega_1(\xi)&=A_2-A_1+\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\omega_2'(t)-\omega_1'(t)\right)dt<A_2-A_1+\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(M_1\left(\omega_2(t)-\omega_1(t)\right)-M_2B_1\right)dt\\&<(A_2-A_1-a_0M_2B_1)+M_1\int_{\varepsilon}^{\xi}\left(\omega_2(t)-\omega_1(t)\right)dt.\end{aligned}$$

Pour tout $\xi\in[\varepsilon,a_0]$, l'inégalité de Grönwall[(1)] implique que

$$\begin{aligned}\left|\omega_1(\xi)-\omega_2(\xi)\right|&=\omega_2(\xi)-\omega_1(\xi)<(A_2-A_1-a_0M_2B_1)\exp\left\{M_1(\xi-\varepsilon)\right\},\\&<(A_2-A_1-a_0M_2B_1)\exp(a_0M_1).\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\xi\in[\varepsilon,a_0]$, on obtient que

$$\begin{aligned}\left|\upsilon_1(\xi)-\upsilon_2(\xi)\right|&=\upsilon_2(\xi)-\upsilon_1(\xi)<M_1\xi\left(\omega_2(\xi)-\omega_1(\xi)\right)-M_2\xi B_1,\\&<a_0M_1(A_2-A_1-a_0M_2B_1)\exp(a_0M_1)-a_0M_2B_1.\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

[(1)] Le lemme de Gronwall sous sa forme originelle donnée par Thomas Hakon Gronwall (1877-1932) en 1919, s'exprime de la façon suivante : Soit ω une fonction positive sur un intervalle $[a,b]$ telle qu'il existe deux constantes $A\geq 0$ et $B\geq 0$ pour lesquelles l'inégalité suivante est vérifiée : $\omega(\xi)\leq A+B\int_a^{\xi}\omega(t)\,dt$. Alors on a la majoration suivante pour tout $\xi\in[a,b]$: $\omega(\xi)\leq A\exp(B(\xi-a))$.

Les résultats principaux de cette étude sont les théorèmes suivants:

Théorème 2.2.1

Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $A > 0$ il existe au moins une solution à support compact du problème de valeur initiale $(1.17) - (1.18)$.

Preuve.

Soit $0 < \varepsilon < C_0$ et $(\omega_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon)$ la solution du problème de la valeur initiale (1.17)-(2.1). De la proposition (2.2.1), il existe $a_\varepsilon > 0$ tel que:

$$\omega_\varepsilon(\xi) > 0, \qquad \forall \xi \in [0, a_\varepsilon), \qquad \omega_\varepsilon(a_\varepsilon) = 0.$$

Soit $a = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} a_\varepsilon$, du principe de comparaison, on voit que:

$$0 \leq a_{\varepsilon_1} \leq a_{\varepsilon_2} \text{ pour tout } 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < C_0.$$

Ainsi, a existe et $a > 0$. Pour tout $\xi \in (0, a)$, le principe de comparaison implique que ω_ε et υ_ε sont délimitées et monotones pour tout $0 < \varepsilon < C_0$. Ainsi ω_ε et υ_ε converge lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Pour $\xi \in (0, a)$, soit:

$$\omega(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \omega_\varepsilon(\xi), \qquad \upsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \upsilon_\varepsilon(\xi).$$

En outre, on a

$$\omega(0) = A, \qquad \upsilon(0) = 0, \qquad \omega(a) = 0.$$

Nous voyons que ω et υ sont continués à droite à 0 du *Lemme* (2.2.1). Et ω est continue à gauche à a d'après le *Lemme* (2.2.2). Il résulte de la proposition (2.2.3) que

$$\omega(\xi) > 0, \qquad \forall \xi \in [0, a).$$

Depuis ω_ε est décroissante monotone sur $[0, a_\varepsilon]$, ω est aussi décroissante monotone sur $[0, a]$. Pour tout

$$0 < \tilde{\varepsilon} < C_0 \text{ et } \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} < a,$$

la proposition (2.2.4) implique que ω_ε et υ_ε sont uniformément convergente sur $[\tilde{\varepsilon}, \tilde{a}]$. Ainsi ω'_ε et υ'_ε sont uniformément convergente sur $[\tilde{\varepsilon}, \tilde{a}]$. D'où ω et υ sont continûment différentiable en $(0, a)$ et satisfont (1.17). Ainsi (ω, υ) est une solution à support compact du problème de la valeur initiale $(1.17) - (1.18)$.

La preuve est complète. ■

Théorème 2.2.2 (Unicité)
Le problème de valeur initiale $(1.17) - (1.18)$ *admet au plus une solution à support compact.*

Preuve.
Soit (ω_1, υ_1) et (ω_2, υ_2) deux solutions à support compact du problème de la valeur initiale $(1.17) - (1.18)$. La constante a satisfaisant la définition sont écrits de façon correspondante a_1 et a_2. En générale, nous supposons $a_1 \leq a_2$. Soit $0 < a_0 < a_1$. Pour tout $\tau > 0$, la continuité de (ω_1, υ_1) et (ω_2, υ_2) à droite à 0 implique qu'il existe une constante

$$0 < \delta < \min\{C_0, a_0\},$$

tel que

$$A - \tau < \omega_1(\xi) \leq A, \qquad A - \tau < \omega_2(\xi) \leq A, \qquad \forall \xi \in [0, \delta),$$

et

$$0 < -\upsilon_1(\xi) \leq \tau, \qquad 0 < -\upsilon_2(\xi) \leq \tau, \qquad \forall \xi \in [0, \delta).$$

Pour tout $\varepsilon \in (0, \delta)$, on voit que:

$$(\omega_1(\xi), \upsilon_1(\xi))\,(\xi \in [\varepsilon, a_0]) \quad \text{et} \quad (\omega_2(\xi), \upsilon_2(\xi))\,(\xi \in [\varepsilon, a_0]),$$

sont deux solutions de système (1.17) avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \omega(\varepsilon) = \omega_1(\varepsilon); \\ \upsilon(\varepsilon) = \upsilon_1(\varepsilon); \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \omega(\varepsilon) = \omega_2(\varepsilon); \\ \upsilon(\varepsilon) = \upsilon_2(\varepsilon). \end{cases}$$

De façon correspondante. Soit $(\omega_0(\xi), \upsilon_0(\xi))$ la solution du système (1.17) avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \omega(\varepsilon) = A, \\ \upsilon(\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Le principe de comparaison implique que

$$\omega_1(\xi) \leq \omega_0(\xi), \qquad \upsilon_1(\xi) \leq \upsilon_0(\xi), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_0],$$

et

$$\omega_2(\xi) \leq \omega_0(\xi), \qquad \upsilon_2(\xi) \leq \upsilon_0(\xi), \qquad \forall \xi \in [\varepsilon, a_0].$$

La proposition (2.2.4) implique qu'il existe deux constante $M_1,\ M_2 > 0$ indépendant de ε tel que lorsque $\xi \in [\varepsilon, a_0]$, nous avons:

$$\begin{aligned} |\omega_1(\xi) - \omega_0(\xi)| &< (\tau + a_0 M_2 \tau)\exp(a_0 M_1), \\ |\upsilon_1(\xi) - \upsilon_0(\xi)| &< a_0 M_1 (\tau + a_0 M_2 \tau)\exp(a_0 M_1) + a_0 M_2 \tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\omega_2(\xi) - \omega_0(\xi)| &< (\tau + a_0 M_2 \tau)\exp(a_0 M_1), \\ |\upsilon_2(\xi) - \upsilon_0(\xi)| &< a_0 M_1 (\tau + a_0 M_2 \tau)\exp(a_0 M_1) + a_0 M_2 \tau. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\xi \in [\varepsilon, a_0]$, nous obtenons:

$$|\omega_1(\xi) - \omega_2(\xi)| < 2\tau(1 + a_0 M_2)\exp(a_0 M_1),$$

et

$$|\upsilon_1(\xi) - \upsilon_2(\xi)| < 2\tau(a_0 M_1 (1 + a_0 M_2)\exp(a_0 M_1) + a_0 M_2).$$

En raison de l'arbitraire de $\tau > 0$ et $\varepsilon \in (0, \delta)$, on obtient que

$$\omega_1(\xi) = \omega_2(\xi), \qquad \upsilon_1(\xi) = \upsilon_2(\xi), \qquad \forall \xi \in (0, a_0].$$

En raison de l'arbitraire de $a_0 \in (0, a_1)$, on obtient que

$$\omega_1(\xi) = \omega_2(\xi), \qquad \upsilon_1(\xi) = \upsilon_2(\xi), \qquad \forall \xi \in (0, a_1).$$

La continuité gauche de ω_1 et ω_2 à a_1 implique

$$\omega_1(a_1) = \omega_2(a_1) = 0.$$

Donc

$$a_1 = a_2.$$

En outre,

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = A, \qquad \upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = 0.$$

Ainsi (ω_1, υ_1) et (ω_2, υ_2) sont les mêmes solution à support compact du problème de la valeur initiale $(1.17) - (1.18)$.

La preuve est complète. ■

Théorème 2.2.3

Soit (ω, υ) *la solution à support compact du problème de valeur initiale* $(1.17) - (1.18)$ *alors*

i. pour $m \geq 1$, $\frac{1}{\omega^m(\xi)}$ *est non intégrable sur* $[0, a]$;

ii. pour $m > 1$, $\frac{1}{\omega^m(\xi)}$ *est intégrable sur* $[0, a]$,

et on a aussi $\frac{\eta^{n-1}}{\omega(\eta^2)}$ *est intégrable sur* $[0, \sqrt{a}]$.

On note

$$\lambda = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{\eta^{n-1}}{\omega(\eta^2)} d\eta.$$

En outre, soit:

$$u(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{\beta}} \omega\left((t+1)^{\alpha} |x|^2\right) \text{ avec } \beta = \frac{1+\alpha}{m} \text{ et } \alpha > 0,$$

est la solution auto-similaire rétrécie de l'équation (**NDE**) *et* $\phi(x)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^n$ *donc:*

$$\lim_{t \to +\infty} (t+1)^{\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{m}\right)\alpha - \frac{1}{m}} \int_{supp\ u(\cdot,t)} \frac{\phi(x)}{u(x,t)} dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda \phi(0),$$

où Γ *est la fonction gamma*[(1)] *standard. En particulier, lorsque*

$$m \neq \frac{2}{n} \text{ et } \alpha \neq \frac{2}{mn-2},$$

on obtient:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{supp\ u(\cdot,t)} \frac{\phi(x)}{u(x,t)} dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lambda \phi(0).$$

La preuve voir ([3]).

Théorème 2.2.4 (Non-existence)

il n'y a pas de solution de l'équation (1.16) *sans support compact, savoir, il est maintenant* $\omega(\xi) \in C^2(0, +\infty)$ *telle que* $\omega(\xi) > 0$ *pour tout* $\xi \in [0, +\infty)$, ω *et* ω' *sont continués à droite à* 0, *et* ω *satisfait* (1.16) *dans* $(0, +\infty)$.

[(1)] Pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction qui s'appelle fonction gamma, et notée par la lettre grecque Γ (gamma majuscule) : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Preuve.

Nous montrons par l'absurde.

Supposons que ω est une solution de l'équation (1.16) sans support compact, à savoir, $\omega(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in [0, +\infty)$, ω et ω' sont continûment à droite à 0, et $\omega(\xi) \in C^2(0, +\infty)$ satisfait (1.16) dans $(0, +\infty)$.

Soit $\upsilon = \xi\omega'$. Alors υ est continûment différentiable en $(0, +\infty)$, υ est continue à droite à 0 avec $\upsilon(0) = 0$, et l'équation (1.16) est transformé en système (1.17).

De (1.17), on obtient que

$$\begin{aligned} \upsilon'(\xi) &= \left(\frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega^m(\xi)}\right)\upsilon(\xi) - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\xi)} \\ &= \frac{(2-n)\,\omega'(\xi)}{2} + \frac{\alpha\upsilon(\xi)}{4\omega^m(\xi)} - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\xi)}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\xi\to 0^+} \upsilon'(\xi)$ existe, soit:

$$\upsilon'(0) = \lim_{\xi\to 0^+} \upsilon'(\xi).$$

Ainsi υ' est continue à droite 0 et d'après la règle de l'Hôpital(1)

$$\lim_{\xi\to 0^+} \frac{\upsilon(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0^+} \upsilon'(\xi) = \upsilon'(0).$$

De (1.17), on obtient que

$$\begin{aligned} \upsilon'(\xi) &= \left(\frac{2-n}{2\xi} + \frac{\alpha}{4\omega^m(\xi)}\right)\upsilon(\xi) - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\xi)} \\ &= \frac{(2-n)\,\upsilon(\xi)}{2\xi} + \frac{\alpha\upsilon(\xi)}{4\omega^m(\xi)} - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(\xi)}, \end{aligned}$$

lorsque $\xi \to 0^+$, nous obtenons:

$$\upsilon'(0) = \frac{(2-n)\,\upsilon'(0)}{2} - \frac{\beta}{4\omega^{m-1}(0)}.$$

Ainsi

$$\upsilon'(0) = -\frac{\beta}{2n\omega^{m-1}(0)} < 0.$$

(1)La règle de l'Hôpital est un moyen simple de calculer certaines limites de la forme indéterminée 0/0 ou ∞/∞, cette règle est due à Jean Benoulli comme suit : Si ω et υ deux fonctions dérivables telles que $\omega(\alpha) = \upsilon(\alpha) = 0$, ou $\lim_{\xi\to\alpha} \omega(\xi) = \infty$ et $\lim_{\xi\to\alpha} \upsilon(\xi) = \infty$. Alors, $\lim_{\xi\to\alpha} \frac{\omega(\xi)}{\upsilon(\xi)} = \lim_{\xi\to\alpha} \frac{\omega'(\xi)}{\upsilon'(\xi)}$.

On a $\upsilon(0) = 0$, nous voyons qu'il existe une constante $\xi_0 > 0$ tel que $\upsilon(\xi) \leq 0$ pour tout $0 \leq \xi \leq \xi_0$. Ainsi

$$\omega(\xi_0) \leq \omega(0) \quad \text{et} \quad \upsilon(\xi_0) \leq 0.$$

Soit $(\omega_0(\xi), \upsilon_0(\xi))$ la solution du système (1.17) avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \omega(\xi_0) = \omega(0), \\ \upsilon(\xi_0) = 0. \end{cases}$$

De la proposition (2.2.1), nous obtenons qu'il existe $a_0 > \xi_0$ tel que $\omega_0(a_0) = 0$. Le principe de comparaison implique que

$$\omega(a_0) \leq \omega_0(a_0) = 0.$$

Cela contredit l'hypothèse. Donc, il n'y a pas solution de l'équation (1.16) sans support compact.

La preuve est complète. ■

Remarque 2.2.1

Soit (ω, υ) la solution à support compact du problème de valeur initiale (1.17) − (1.18). De la preuve du théorème (2.2.3), on obtient que

$$u(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{\beta}}\omega\left((t+1)^{\alpha}|x|^2\right) \text{ avec } \beta = \frac{1+\alpha}{m} \text{ et } \alpha \geq 0,$$

*est une solution de l'équation (**NDE**) dans le sens*

$$\int_0^{+\infty}\iint_{\mathbb{R}^n}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{2}{m+1}u^{(m+1)/2}\nabla\left(u^{(m+1)/2}\right)\nabla\varphi - \frac{4m}{(m+1)^2}\left|\nabla\left(u^{(m+1)/2}\right)\right|^2\varphi\right)dxdt = 0,$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$.

Remarque 2.2.2

Les théorème (2.2.2) et (2.2.4) impliquent que le problème de valeur initiale (1.17) − (1.18) admet une solution unique.

Chapitre 3

Quelques solutions explicites de l'équation (NDE)

Dans ce chapitre, on veut chercher des solutions particulières de l'équation (**NDE**) sous formes explicites, mais pour $m \in (0,1)$.
Notons pour commencer par l'équation appelée: équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence (type 2), crier comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad m \in (0,1)\,; \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Problème de Cauchy pour l'équation de (**NDE**)

Nous considérons le problème de Cauchy pour une équation parabolique dégénérée avec la forme de non divergence:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour} \;\; x \in \mathbb{R},\, t > 0 \;\; \text{et} \;\; m \in (0,1)\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{\textbf{NDE2}}$$

La question qui nous intéresse est la suivante: pour quelles données l'équation (**NDE2**) est-elle globalement bien posée ?
Notons pour commencer que:

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \text{ où } 0 \leq u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})\,.$$

3.1 Relation entre l'équation de milieu poreux (PME) et l'équation (NDE2)

Définition 3.1.1

*L'équation de milieu poreux (**porous media**) est une équation parabolique non linéaire crier comme suit:*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 (w^p)}{\partial x^2} & p > 1; \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(x,0) = w_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{PME}$$

Remarque 3.1.1

*L'équation (**PME**) implique que peut être écrire l'équation des milieux poreux formellement sous la forme de non divergence (**NDE2**), par le changement de variable suivante:*

$$w = p^{\frac{1}{1-p}} u^{\frac{1}{p}}, \ \text{ tel que } \ p = \frac{1}{1-m} \ \text{ toujours } \ m \in (0,1). \tag{3.1}$$

Vérification.

D'après le changement (3.1) on a:

$$m = \frac{p-1}{p}$$

et

$$w_t = \frac{p^{\frac{1}{1-p}}}{p} u_t u^{\frac{1}{p}-1} = p^{\frac{p}{1-p}} u_t u^{\frac{1-p}{p}},$$

de même, on a:

$$w^p = p^{\frac{p}{1-p}} u$$

c'est-à-dire;

$$(w^p)_{xx} = p^{\frac{p}{1-p}} u_{xx} \ .$$

Donc; l'équation (**PME**) équivalent à:

$$p^{\frac{p}{1-p}} u_t u^{\frac{1-p}{p}} = p^{\frac{p}{1-p}} u_{xx},$$

ce qui implique

$$u_t = u^{\frac{p-1}{p}} u_{xx} = u^m u_{xx} \ .$$

Maintenant, nous cherchons les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\lambda^{\alpha} w\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)$ est solution de l'équation (**PME**), pour tout $\lambda > 0$ sachant que w est solution de même équation.

Remarque 3.1.2

Si $w\,(x,t)$ est une solution de l'équation (**PME**) *alors d'après la définition (1.2.8) on a*

$$v\,(x',t') = hw\left(\frac{x'}{r}, \frac{t'}{s}\right),$$

est une solution de l'équation des milieux poreux.

On trouve la condition d'invariance d'échelle pour l'équation (**PME**), comme suit:

$$h^{p-1} = r^2 s^{-1}.$$

Pour plus détaille voir [13].

De même, si on pose $v = \tau w$ tel que w est une solution de l'équation de milieu poreux sous l'action de dilatation alors:

$$\tau w\,(x,t) = \left(\frac{r^2}{s}\right)^{\frac{1}{p-1}} w\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{s}\right). \tag{3.2}$$

est une solution de (**PME**). Aussi, on obtient:

$$h = s^{-\alpha} \quad \text{et } r = s^{\beta},$$

où

$$\alpha\,(p,\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma\,(p-1)+2}, \qquad \beta\,(p,\gamma) = \frac{1}{\gamma\,(p-1)+2}. \tag{3.3}$$

D'après la formule (3.3), on trouve $\alpha = \beta\gamma$, donc

$$\alpha\,(p-1) + 2\beta = 1. \tag{3.4}$$

D'où. La transformation (3.2) devient:

$$\tau w\,(x,t) = s^{-\alpha} w\left(\frac{x}{s^{\beta}}, \frac{t}{s}\right).$$

Si on pose $\lambda = \frac{1}{s} > 0$ alors:

$$w_{\lambda}\,(x,t) = (\tau_{\lambda})\, w\,(x,t) = \lambda^{\alpha} w\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right), \tag{3.5}$$

est la solution auto-similaire de l'équation (**PME**) pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Différentes solutions de forme auto-similaire pour (PME)

Il y a plusieurs formes des solutions auto-similaires, on peut classer ces solutions comme suit:

1. **Solution auto-similaire classique:** pour tout $\lambda > 0$, la formule (3.5) donne, pour $\lambda = \frac{1}{t}$, $t \in (0, \infty)$

$$w(x,t) = t^{-\alpha}\varphi\left(xt^{-\beta}\right) = t^{-\alpha}\varphi(\xi) \qquad \text{avec } \xi = \frac{x}{t^{\beta}},$$

   où α et β sont des constantes et $\varphi(\xi) = w(\xi, 1)$ est le profil de la solution auto-similaire.

2. **Solution Blow up:** c'est une solution qui explose en temps fini, s'écrit sous la forme

$$w(x,t) = (t-T)^{-\alpha}\varphi\left(\frac{x}{(t-T)^{\beta}}\right) \qquad T > 0.$$

3. **Solution auto-similaire de forme exponentielle:**

$$w(x,t) = e^{\alpha t}\varphi\left(\frac{x}{e^{\beta t}}\right).$$

   Toujours α, $\beta \in \mathbb{R}$, et φ est le profil de la solution auto-similaire.

4. **Solution auto-similaire générale:**

$$w(x,t) = c(t)\,\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

   où $a(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions dépendantes de t.

Remarque 3.1.3

le changement de variable (3.1) implique que tout solution de l'équation (**PME**) *est aussi solution de l'équation* (**NDE2**) *tel que:*

$$u = p^{\frac{1}{p-1}} w^{p} = \left(\frac{1}{1-m}\right)^{\frac{1-m}{m}} w^{\frac{1}{1-m}}, \ \textit{tel que } \ m = \frac{p-1}{p} \ \ \textit{avec } \ p > 1. \tag{3.6}$$

3.2 Existence et unicité de solution de l'équation (PME)

L'étude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation de milieu poreux est boucaup étudier, parce qu'il existe plusieurs articles ont pris par cette équation, pour cela nous reposera sur la brièveté et rappel seul l'un des théorèmes principaux qui montrent l'existence et l'unicité de la solution auto-similaire de forme classique. (B. H. Gilding and L. A. Peletier, *On a Class of Similarity Solutions of the Porous Media Equation* [1]) .

Solution auto-similaire de forme classique

On vu dans la section précédente qu'une solution auto-similaire peut s'écrire sous la forme classique

$$w(x,t) = t^{-\alpha}\varphi(\xi) \qquad \text{avec } \ \xi = \frac{x}{t^{\beta}}, \tag{3.7}$$

où α et β sont des constantes et φ est le profil de la solution auto-similaire.
D'après un calcul direct, l'équation (**PME**) équivalent à:

$$\alpha\varphi(\xi) + \beta\xi\varphi'(\xi) + t^{1-\alpha(p-1)-2\beta}\left(\varphi^{p}(\xi)\right)'' = 0. \tag{3.8}$$

En remplaçant (3.4) dans (3.8), on peut satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\alpha\varphi(\xi) + \beta\xi\varphi'(\xi) + \left(\varphi^{p}(\xi)\right)'' = 0.$$

L'équation précédente est une équation non linéaire n'est pas facile à résoudre, si on ajoute les conditions $\varphi(0) = U$ et $\varphi(\infty) = 0$. Donc nous allons étudier le problème:

$$\begin{cases} \left(\varphi^{p}(\xi)\right)'' + \beta\xi\varphi'(\xi) + \alpha\varphi(\xi) = 0 & 0 < \xi < +\infty, \\ \varphi(0) = U, \qquad \varphi(\infty) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Définition 3.2.2 (Solution faible)

une fonction φ sera dit une solution faible de l'équation (3.9) si:

1) *φ est bornée, continue et non négative sur $[0,+\infty)$.*
2) *$(\varphi)^{p}(\xi)$ a une dérivée continue sur $[0,+\infty)$.*
3) *φ vérifie l'identité:*

$$\int_{0}^{+\infty} \phi'\left[(\varphi^{p})' + \beta\xi\varphi'\right] d\eta + (\beta-\alpha)\int_{0}^{+\infty} \phi\varphi d\eta = 0.$$

Supposons qu'il existe $\varphi(\xi; a)$ une solution faible de (3.9) non triviale à support compact tel que:

$$\varphi(a) = 0, \qquad (\varphi^p)'(a) = 0. \tag{3.10}$$

Pour $0 < \xi < a$, l'intégration de (3.9) à l'intervalle (ξ, a) donne que:

$$-(\varphi^p)'(\xi) = \beta\xi\varphi(\xi) + (\beta - \alpha)\int_{\xi}^{a}\varphi(\eta)\, d\eta.$$

De même, si on intègre l'égalité précédent à partir de ξ à a, nous obtenons:

$$\varphi^p(\xi) = \beta\xi\int_{\xi}^{a}\varphi(\eta)\, d\eta + (2\beta - \alpha)\int_{\xi}^{a}(\eta - \xi)\varphi(\eta)\, d\eta. \tag{3.11}$$

Théorème 3.2.1 ([1]) *Supposons que $U > 0$, alors le problème (3.9), (3.10) admet une solution unique, et il existe une unique $a(U) > 0$ telle que $\varphi(\xi; a(U))$ est positive sur $(0; a(U))$ si et seulement si $\beta > 0$ et $2\beta - \alpha > 0$.*

La preuve voir [1].

3.3 Solutions explicites (cas particulier)

Nous conclurons par une discussion sur les conséquences du (théorème 3.2.1) pour les solutions auto-similaires de forme classique de l'équation (**PME**), si l'on rajoute une condition supplémentaire de type «conservation de la masse (voir [4])», c'est-à-dire:

$$\int_{\mathbb{R}} w(x,t)\, dx = Q, \tag{3.12}$$

et les conditions:

$$\varphi'(0) = 0, \tag{3.13}$$

$$\varphi(0) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

L'équation de milieu poreux (de même l'équation (**NDE2**)) admet certain nombre des solutions explicites qui jouent un rôle très important dans le développement de la théorie mathématique du problème, (voir [1], [2], [6], [11], [12], [14]).
On commence tout d'abord par donner la solution dite de **Noyaux de Gauss.**

3.3.1 Solution "Noyaux de Gauss"

Si on prend $p = 1$, c'est-à-dire $m = 0$, l'équation de milieu poreux devient l'équation da la chaleur, alors l'équation (**PME**) devient:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

et l'équation (**NDE2**) devient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Donc la formule (3.4) implique que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

La solution auto similaire classique devient comme suit:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

L'équation (3.9) devient:

$$\frac{1}{2}(\xi\varphi)' + \varphi'' = 0.$$

On peut résoudre cette équation facilement, si les conditions $(3.13), (3.14)$ réalisées, alors le profil φ donne par l'égalité

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right),$$

et la solution qui appelée "**Noyau de Gauss**" devient par:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Ce qui implique

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Donc pour $p = 1$ c.-à.-d. $m = 0$, la figure suivante montre le graphe de cette solution pour quelques valeurs de t.

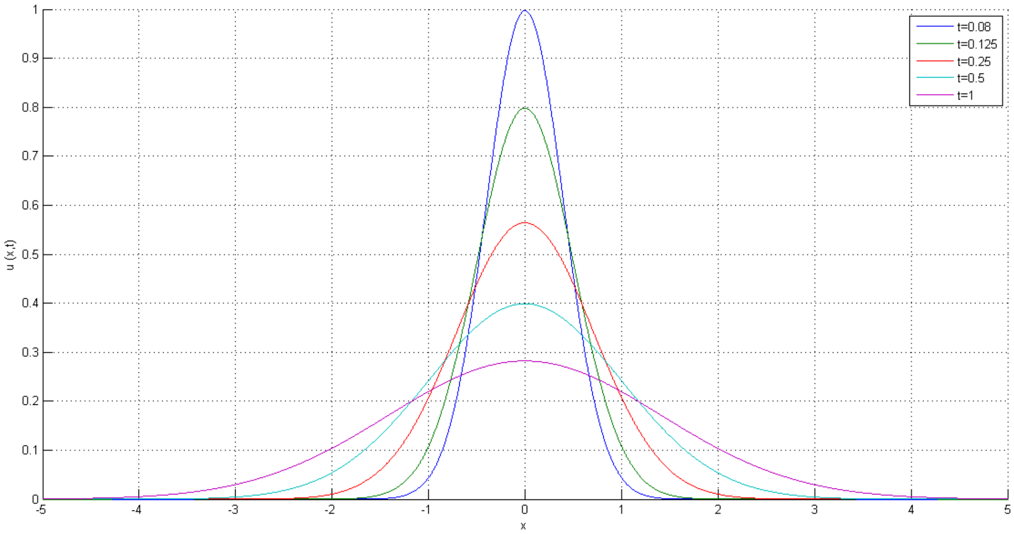

Figure 3.3.1 : **Solution fondamentale de l'éq. de la chaleur pour** $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$**,** $m = 0$**.**

3.3.2 Solution de Barenblatt (ZKB)

C'est une solution fondamentale des autres solutions de l'équation (**PME**) et elle est obtenue en 1950 par **Z**el'dovich et **K**ompanneets et **B**arenblatt.

Définition 3.3.3 (Solution de Barenblatt, voir [2])
Soit C une constante positive, si pour $t > 0$, les conditions (3.12), (3.13) sont vérifiées. Alors la solution de Barenblatt pour l'équation (**PME**) *est $w_{C,p}(x,t)$: $\mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, définit par:*

$$w_{C,p}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} \left[C - \frac{\alpha (p-1)}{2p} x^2 t^{-2\alpha} \right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.15}$$

Détermination.
La condition (3.12) devient:

$$\int_{\mathbb{R}} t^{-\alpha} \varphi(\xi)\, dx = Q \Leftrightarrow t^{\beta-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\, d\xi = Q,$$

ce qui implique de (3.4) que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{p+1}.$$

L'équation (3.9) devient:

$$\frac{1}{p+1}\left(\xi\varphi\right)' + \left(\varphi^p\right)'' = 0.$$

Par intégration, on obtient:

$$\left(\varphi^p\right)' + \frac{1}{p+1}\xi\varphi = C_0,$$

et d'après (3.13) on a $C_0 = 0$, donc

$$p\varphi'\varphi^{p-1} = -\frac{\xi\varphi}{p+1}.$$

D'après un calcul direct, le profil φ sera définit par l'expression:

$$\varphi\left(\xi\right) = \left[-\frac{\alpha\left(p-1\right)}{2p}\xi^2 + C\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Donc la solution w s'écrit comme (3.15) avec $C > 0$ (constante arbitraire).

Par suite, la solution de (**PME**) par définition à support compact, c'est-à-dire pour $t > 0$, la solution de (**PME**) existe, où

$$w_{C,p}\left(x,t\right) = \frac{1}{t^\alpha}\begin{cases} \left[C - \frac{\alpha(p-1)}{2p}x^2t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{p-1}} & \text{si } \frac{x^2}{t^{2\alpha}} \leq \frac{2pC}{\alpha(p-1)}, \\ 0 & \text{si } \frac{x^2}{t^{2\alpha}} > \frac{2pC}{\alpha(p-1)}. \end{cases}$$

Si $t \to 0$ nous avons $w_{C,p}\left(x,t\right) \to M\delta\left(x\right)$ telle que M est une constante dépend de C, p et δ la distribution de Dirac(1) ou la masse de Dirac, la solution est appelée Solution **ZKB** ou Solution **Barenblatt**(2).

Et d'après le changement (3.6), la solution de (**NDE2**) donne par l'expression:

$$u_{C,m}\left(x,t\right) = \left(\frac{1}{1-m}\right)^{\frac{1-m}{m}} t^{\frac{\alpha}{m-1}}\begin{cases} \left[C - \frac{\alpha m}{2}x^2t^{-2\alpha}\right]^{\frac{1}{m}} & \text{si } \frac{x^2}{t^{2\alpha}} \leq \frac{2C}{\alpha m}, \\ 0 & \text{si } \frac{x^2}{t^{2\alpha}} > \frac{2C}{\alpha m}. \end{cases} \quad \alpha = \beta = \frac{1-m}{2-m}.$$

Si on pose $C = 1$ et $p = 2$ c.-à.-d. $m = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, alors la figure suivante montre le graphe de cette solution:

(1) La distribution de Dirac ou masse de Dirac, introduite par Paul Dirac, est une fonction δ qui prend une valeur infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

(2) Nous avons vu la contribution importante de Zel'dovich, de Kompaneets [532], de 1950, qui a trouvé la source des solutions dans un cas particulier, et de Barenblatt [60], qui a réalisé une étude complète de ces solutions en 1952.

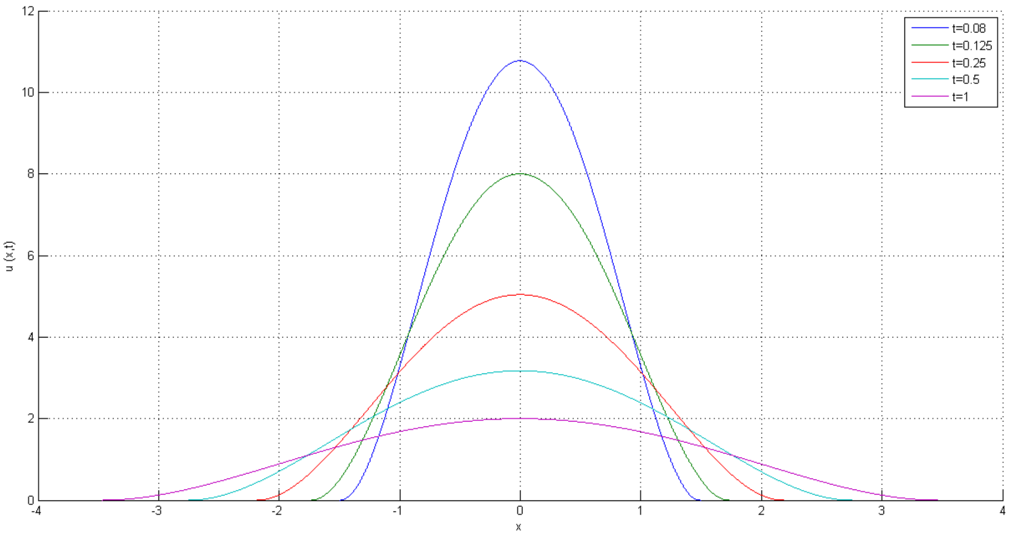

Figure 3.3.2 : **Solution ZKB pour l'équation (NDE2) pour $m = \frac{1}{2}$.**

3.3.3 Solution de dipôle

Il résulte de (théorème 3.2.1), qu'il existe une solution non trivial à support compact si et seulement si $2\beta - \alpha > 0$, et d'après la formule (3.4) l'existence de la solution vérifie pour $\alpha < \frac{1}{p}$ et $\beta > \frac{1}{2p}$, mais si on prend

$$\alpha = \frac{1}{p}; \quad \beta = \frac{1}{2p}, \tag{3.16}$$

ce qui implique $2\beta - \alpha = 0$, alors on peut trouver une solution auto-similaire appelée **"Solution de dipôle(1)"** (voir [1], [9], [10], [12]). La solution auto similaire classique devient comme:

$$w(x,t) = t^{\frac{-1}{p}} \varphi(\xi) \quad \text{où} \quad \xi = xt^{\frac{-1}{2p}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Dans ce cas l'EDO (3.9) devient

$$(\varphi^p)'' + \frac{1}{p}\varphi + \frac{1}{2p}\xi\varphi' = 0,$$

et l'estimation (3.11) devient:

$$\varphi^p(\xi) = \frac{1}{2p}\xi \int_{\xi}^{a} \varphi(\eta)\, d\eta. \tag{3.17}$$

(1) La solution de dipôle est due à Zel'dovich et à Barenblatt [530] et a été employée par Kamin et Vazquez [326] en décrivant le comportement asymptotique des solutions signées plus générales.

Si on pose:

$$g(\xi) = \int_{\xi}^{a} \varphi(\eta)\, d\eta \;\Rightarrow\; g'(\xi) = -\varphi(\xi),$$

ce qui implique de (3.17) que

$$g' = -\left(\frac{1}{2p}\xi g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La solution de cette équation donne par l'expression

$$g(\xi) = \left[\left(\frac{1}{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{p-1}{p+1}\left(a^{\frac{p+1}{p}} - \xi^{\frac{p+1}{p}}\right)\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

et de (3.17) on obtient que

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{\xi}{2p}\right)^{\frac{1}{p}} g^{\frac{1}{p}}.$$

Le profil φ_{dip} c'est la solution de cette équation est égale à:

$$\varphi_{dip}(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{p}}\, sign(\xi)\left(C - \frac{p-1}{2p(p+1)}|\xi|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \text{ où } C = \frac{a^{\frac{p+1}{p}}(p-1)}{2p(p+1)} > 0.$$

Donc la solution de dipôle est:

$$w_{dip} = t^{\frac{-1}{p-1}}|x|^{\frac{1}{p}}\, sign(x)\left[Ct^{\frac{p+1}{2p^2}} - \frac{p-1}{2p(p+1)}|x|^{\frac{p+1}{p}}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Cette solution à support compact, est représentée par Barenblatt et Zel'dovich en 1957. Et d'après le changement (3.6) la solution de (**NDE2**) donne par l'expression

$$u_{dip} = \left(\frac{1}{1-m}\right)^{\frac{1-m}{m}} xt^{\frac{-1}{m}}\left[Ct^{\beta(2-m)} - \frac{\beta m}{2-m}|x|^{2-m}\right]^{\frac{1}{m}}, \text{ où } \beta = \frac{1-m}{2},$$

et son graphe prend la forme suivante (pour $C = 1$):

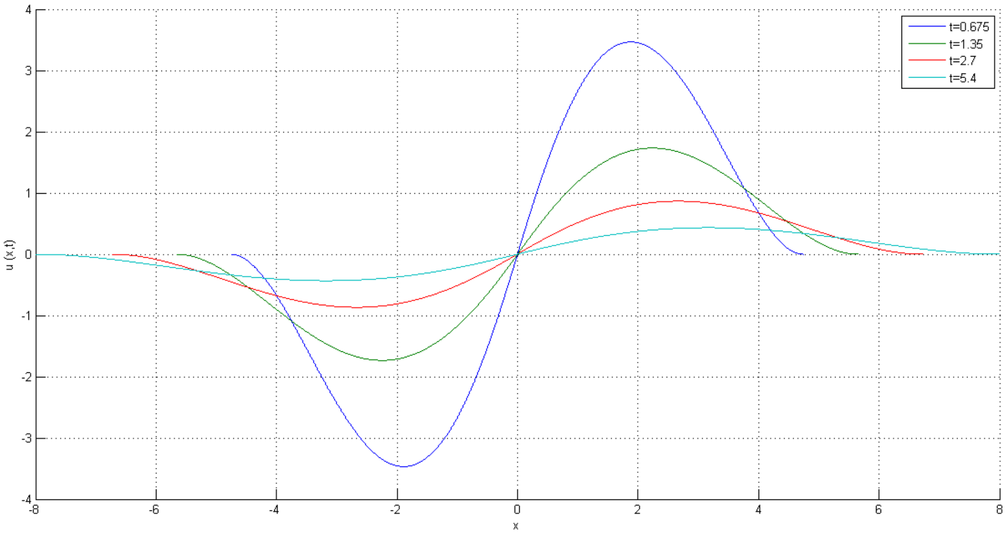

Figure 3.3.3 : **Solution de dipôle pour l'équation (NDE2) avec** $m = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudiée une EDP non linéaire appelé l'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence, nous avons cherché les solutions sous forme auto-similaire, et démontré leurs existence et leurs unicité, se basant sur les travaux de Chunprng Wang et Jingxue [3], ensuite nous avons présenté quelques solutions particulières sous forme explicite selon les exposants de similarité (α et β), par exemple les solutions de: Noyaux de Gauss, de Barenblatt, et de dipôle.

On note que la question intéressante reste posé, notamment si $m \geq 1$, pour la recherche de solution explicite pour l'équation de diffusion non linéaire avec la forme de non divergence.

Bibliographie

[1] B. H. Gilding and L. A. Peletier, *On a Class of Similarity Solutions of the Porous Media Equation*, Netherlands, **55** (1976), 351-364.

[2] Bachelor-Arbeit, *Barenblatt's solution to the porous medium equation*, Moritz Egert, October 2010, 16-20.

[3] Chunprng Wang and Jingxue, *Shrinking self-similar solution of a nonlinear diffusion equation with nondivergence form*, J. Math. Anal. Appl. **289** (2004), 387-404.

[4] Christophe Ancey, *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[5] Cristina Brändle, Fernando Quirós & Juan Luis Vàzquez, *Analyse Asymptotic behaviour of the porous media equation in domains with holes*, U. Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain.

[6] G.I Barenblatt, *On self-similar motoins of compressible fluids in porous media* , Prikl.Mat.Mekh, **16** (1952) 679-698 (in Russian).

[7] G.I Barenblatt, *On some unsteady motios of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl.Mat.Mekh, **16** (1952) 67-78 (in Russian).

[8] G.I Barenblatt, *Scaling self-similarity and intermediate asymptotics*, Cambridge Univ, Combridge, Press, 1996.

[9] G.I Barenblatt & Y.B Zel'dovich, *On Dipole-Solutions inproblems of nonstationary filtration of gas under polytropic regime*, Prikl.Mat.Mekh, **21** (1957) 718-720.

[10] Josephus Hulshof & J.L.Vàzquez, *The Dipole Solution For The Porous Medium Equation In Serval Space Dimensions*, IMA Prepint Series #842 August 1991, 5-8.

[11] Juan Luis Vàzquez, *Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 11-12.

[12] Juan Luis Vàzquez, *The Porous Medium Equation - Mathematical Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[13] F.Mihoub dirigé par Prof. N. Benhamidouche, *Mémoire de fin étude* (**Master**) *Solution auto-similaire pour une équation de réaction diffusion non linéaire*, Université de M'sila, M'sila-Algérie, promotion 2012/2013.

[14] Pedro Ferreira et Sylvie Mas Gallic, *Équation aux Dérivées Partielles*, 11 Décembre 2001, 20-21.

[15] Polubarinova-Cochin P.B, *Applied Mathematics and Mechanics*, 55, **2** (1991), 222-227.

[16] Polubarinova-Cochin P.B, *Mathematics and Mechanics*, Nauka, Novosibirsk, 1983, 166-177.

[17] Polubarinova-Cochin P.B, *Theory of Groundwater Motion*, Nauka, Moscow, 1977, 664p.

[18] Vladimir SVERAK, Patrick GERARD, Pierre GERMAIN, *Analyse d'équations aux dérivées partielles d'évolution issues de la physique et de la geometrie différentielle*, Soutenue par Pierre GERMAIN le 5 décembre 2008 à l'université Paris 7.

[19] Wolfgang Arendt and Ralph Chill, *Global existence for quasilinear diffusion equations in isotropic nondivergence form*, Vol. **IX** (2010), 523-539.

[20] Zel'doviche, Ya, B & Kompaneets A.S, *Towards theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature*, Izd. Akad.Nauk SSSR, Moscow, 1950, 61-72.