PEOPLE's DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

Mohamed Boudiaf university of Msila
Faculty of Mathematics and computer sciences
Department of Mathematics

Master memory

Field : Mathematics and computer sciences
Branch : Mathematics
Option : Mathematical and numerical analysis

Theme

REGULARIZATION METHODS OF ILL POSED PROBLEMS

Presented by :
Mlle TOUIL Randa

In front of the jury composed of :

Mostefa NADIR	Prof,	University of Msila	**President**.
Noui DJAIDJA	MAA,	University of Msila	**Supervisor.**
Bchir GAGUI	MCA,	University of Msila	**Examiner.**

University year 2019/2020

ملخص

قدمنا في هذه المذكرة مفهوم مشكل سيء الطرح كما تطرقنا الى طرق التعديل : -تعديل تكونوف--تعديل لافرونتياف-تعديل لاندويبر قدمنا كذلك الاطار النظري لتقارب هده الطرق, وكحالة خاصة طبقنا طريقة نيكونوف من اجل إنشاء حلول متزنة للمعادلات التكاملية من نمط فولترا من الصف األول.

-الكلمات المفتاحية: مشكل سيء الطرح- المعادالت التكاملية من نمط فولترا من الصف الاول-تعديل تكونوف--تعديل لافرونتياف-تعديل لاندويبر

.

Résumé

Dans ce mémoire nous présentons la notion d’un problème mal-posé, aussi on a étudié certains méthodes de régularisation :régularisation de Tikhonov, régularisation de Lavrentiev, régularisation de Land weber, on donne le cadre théorique qui montre la convergence de ces méthodes, En particulier on applique la méthode de Tikhonov pour la résolution numérique de l’équation intégrale de Volterra de première espèce .

***Mots clés** : Problème mal-posé, régularisation de Tikhonov, régularisation de Lavrentiev, régularisation de Land weber, équation intégrale de Volterra*

Abstract:

In this memory we present the notion of ill-posed problem, so we studied some regularization methods: Tikhonov regularization, Lavrentiev regularization, Land weber regularization, we give the theoretical framework which shows the convergence of these methods, In particular, the Tikhonov method is applied for the numerical resolution of the Volterra integral equation of the first kind.

Key words: ill-posed problem, Tikhonov regularization, Lavrentiev regularization, Land weber regularization, Volterra integral equation of the first kind.

Table des matières

Remerciements

Louange à notre seigneur "**ALLAH**" qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement .

Je tiens à remercier mon encadreur **Mr. Noui DJAIDJA** pour la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet , ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a

sugénérer. Ses remarques et ses suggestion m'ont permis de finaliser ce modeste travail.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait , en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourmer vers les êtres que me sont le plus cher ; ma famille qui on eu rôle essentiel et continu dans ma réussite, et tous mes amis qui étaient à mes côtés tout au long de mon travail .

Résumé

Soit l'équation de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq x \leq b \tag{0.0.1}$$

où $k(x,y)$ et $f(x)$ sont des fonctions donnés et $\varphi(y)$ la fonction inconnue.

L'équation (0.0.1)peut s'écrite sous forme opérateur

$$A\varphi = f \tag{0.0.2}$$

Si l'opérateur A est compact le problème (0.0.2) est mal posé (condition de stabilité).

Le but de ce travail est la résolution numérique du problème (0.0.2) par la méthode de régularisation de Tikhonov.

Introduction

La notion d'un problème mathématique mal-posé a apparut dans les discussions du mathématicien français J . Hadamard dans son ouvrage [2],aprés avoir introduit , une vingtaine d'années avant , la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire , d'aprés lui , à trois propriétés : l'existence , l'unicité et la stabilité de la solution . La pert d'une des poropriétés définisse un problème dit mal-posé .

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien était adaptés pour les solutions des problèmes bien-posés , cependant , ce n' était pas clair dans quel sens les poblèmes mal-posés peuvent avoir solution . Plusieurs mathématicien comme Tikhonov , John , Lavrent'ev , Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problème mal- posés.

Le présent travail porte est composé de trois chapitres .

Dans **le premier chapitre ,** nous présentons les notion utiles , qui sont utilisées dans les autres chapitres . Nous donnons un rapel des espace (Banach et Hilbert **) .** Puis nous paralons sur les élemets de la théorie des opérateurs (opérateurs bornés, opérateurs adjoint , opérateurs compacts) .

Le deuxiéme chapiter , est resérvé aux définitions d'un problème direct et problème inverse , poroblèm bien posé et mal-posé et on donne quelques exemples de problèmes mal-posés .

Dans **le troisiéme chapitre ,** On present brièvement le principe de quelques méthodes de régularisation plus courante : *Opérateurs régularisation et la méthode de Tikhonov , la méthode de Lavrentiev et on donne quelques exemples .*

Notation

$\mathbb{R}$ **:** ensemble des nombers réels .

$\mathbb{C}$ **:** ensemble des nombers complexes

$\|\cdot\|_E$: une norme dans éspace E .

$\Bbbk$: corps des scalaires ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

A: operateur linéaire defini sur un espace de Hilbert.

A^*: l'opérateur adjoint de l'opérateur A.

$\ker(A)$: Le noyau de l'opérateur A.

$\operatorname{Im}(A)$: l'image de l'opérateur A.

A^{-1} : l'inverse de l'opérateur A.

I : l'identité.

$\mathcal{L}(E, F)$: léspace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A .

H : espace de Hilbert.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire.

Chapitre 1

Notions d'analyse fonctionnelle

Dans cette partie on rappler quelques définitions et propriétés de base dont nous aurions besoin dans la suite de ce travail.

L'étude des problèmes mal posés nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert.

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}\,(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour x, y dans E et λ dans $\mathbb{k}$ on a:*

1. $\|x\| = 0$ implique $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.2 *Une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé E est dite de Cauchy si:*

$$\textit{Pour tout } \varepsilon > 0, \textit{il existe } N \geq 1, \textit{pour tout } p, q \geq N \textit{ implique } \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.1.3 *On dit qu'un espace normé E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 1.1.4 *On apel espace de Banach tout espace normé complet.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Produit scalaire

Définition 1.1.5 *On apel produit scalaire sur un espace vectoriel E une application $\langle .,. \rangle$: $E \times E \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$,*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
2. $\langle x, x \rangle = 0$ implique $x = 0$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
5. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Espace Euclidien (préhilbertien)

Définition 1.1.6 *un espace H sur $\mathbb{k}$ muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien .*

Identité du paallélogramme

Définition 1.1.7 *soit x et $y \in E$ avec E est un espace préhilbertien alors :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Remarque 1.1.1 *Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

Exemple 1.1.1 $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace vectoriel normé mais n'est pas un espace préhilbertien car si*

$$f(x) = 1, g(x) = x, \text{ avec } x \in [0,1] \text{ ,alors}$$

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 .$$

Définition 1.1.8 *un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.*

***Exemple 1.1.2 L'espace**$L^2([a,b])$. Soit $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, l'espace vectoriel des fonctions de carré integrable sur $[a,b]$ est*

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \leq \infty. \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni da la norme

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt.$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Orthogonalité

Définition 1.1.9 *(Vecteurs orthogonaux)*

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

et on note $x \perp y$

Base hilbertiennes

Définition 1.1.10 *Une partie G de H est dite dense dans H si:*

$$\textit{Pour tout } h \in H, \textit{et pour tout} \varepsilon > 0, \textit{il existe } g \in G, \textit{telle que } \|g - h\| < \varepsilon$$

Ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite (g_n)d'élèment de G telle que $\|g_n - h\| \longrightarrow 0$

Définition 1.1.11 *Soit H un espace de Hilbert et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (Ou bien base hilbertienne) de H si:*

$$\text{Pour tout } (i, j) \in I^2 : \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 1, \text{ si } i = j \end{cases}$$

1.2 Opérateurs

1.2.1 opérateur Linéaires :

Définition 1.2.1 *soit E et F deux espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$, et $A : E \to F$.on dit que l'opérateur A est linéaire si :*

Pour tout $x, y \in E$,et $\lambda \in \Bbbk$,

1- $A(x, y) = A(x) + A(y)$.

2 - $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Noyau et Image d'un opérateur linéaire :

Pour tout opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq E \to F$,

Le noyau de A est le sous-espace $\ker(A)$ de E tel que:

$$\ker(A) = \{x \in E \ , \ Ax = 0\}.$$

.

L'image de A est le sous-espace $\mathrm{Im}\,(A)$ de F tel que:

$$\mathrm{Im}\,(A) = \{y \in F \ , \ \exists x \in E \ , \ Ax = y\} \,.$$

.

1.2.2 opérateur continus :

Définition 1.2.2 *Soit E et F deux espace normé , un opérateur A défini sur un sous ensemble $B \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de B si on a la propriété suivante :*

Pour tout suite (x_n) de B converge vers x_0, la suite $A\,(x_n)$ converge vers $A\,(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A\,(x_n) = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A\,(x_0)\,.$$

L'opérateur l'inéaire A est dit continu sur B, s'il est continu en tout point de l'ensemble B .

Soit E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $B \subset E$ dans F est dit continu par tout sur B s'il est continu en point x_0 de B .

1.2.3 Opérateurs bornés

Définition 1.2.3 *Soit E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\|A\,(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E \ , \quad \forall x \in E.$$

1-Soit $E = L^2\,(]0;1[)$ et $A\ f\,(x) = x\ f\,(x)$,alors :

$$\|A\ f\|_2^2 \equiv \int_0^1 |A\ f\,(x)|^2\,dx \equiv \int_0^1 x^2\,|f\,(x)|^2\,dx \leq \|f\|_2^2$$

donc A est borné sur E .

2- Soit E un Hilbert. L'opérateur **I** est borné car

$$\forall x \in E \ : \quad \|I(x)\| = \|x\| .$$

3- $E = l^2$, l'opérateur A définie par :

$$A \ : \ E \to E$$

$$x \to A(x) = (0 \ , x_1, x_2, x_3, ...)$$

est borné.

Théorème 1.2.1 *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si , il est borné .*

propriétés

Soit E et F de espaces nomrés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- L'opérateur A est continu sur E.

2-L'opérateur A est continu au point 0_E.

3- L'opérateur A est borné.

Remarque 1.2.1 *Soit E et F deux espaces normés, l'ensemble de touts les opérateurs linéaires continus de E dans F est notée $\mathcal{L}(E \ , \ F)$.*

L'ensemble $\mathcal{L}(E \ , \ F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E \ , \ F)$, de plus $\mathcal{L}(E \ , \ F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé .

Si $B \in \mathcal{L}(H)$ avec , H un Hilbert et si $\langle Bx \ , \ x\rangle = \langle Ax \ , \ x\rangle$, pour tout $x \in H$, alors $B = A$.

1.2.4 Opérateurs adjoint

Définition 1.2.4 ***(opérateur adjoint).****Soit E et F deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E, F)$,l'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ .tel que :*

$$\langle Ax, y\rangle_E = \langle x, A^*y\rangle_F \text{, pour tout } x \in E \text{ et } y \in F$$

est appelé opérateur adjoint de A.

Proposition 1.2.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(E, F)$*,alors on a* :

1- $\ker(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$.
2- $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \ker(A^*)^{\perp}$.

Théorème 1.2.2 *Soit* A *et* $B \in \mathcal{L}(E, F)$, A^* *et* B^* *leurs adjoints (respectivement)* ,α *et* β *deux scalaires, alors on a les propriétés suivantes* :

1) $(A^*)^* = A$.
2) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$..
3) $\|A^*\| = \|A\|$.
4) $(AB)^* = B^*A^*$.
5)$(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$
6) Si A est inversible, alors A^* est inversible et on a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

1.2.5 Opérateurs compacts

Définition 1.2.5 *Soit* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *,on dit que* A *est un opérateur compact si et seulement si l' image de toute partie bornné de* E *est relativement compacte dans* F *, c'est -à-dire si :*

$B \subset E$ est borné, $\overline{A(B)}$ est compacte dans F.

Une partie d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension finie est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

Théorème 1.2.3 *Soient* E, F, W *trois espaces de Hilbert.*

Si $A_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(F, W)$, alors $A_1A_2 \in \mathcal{L}(E, W)$ est compact.

Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact, alors $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ est compact.

Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des opérateurs compacts de E dans F, converge avec A de $\mathcal{L}(E, F)$ c'est-à-dire si

$$\|A_n - A\| = \sup \frac{\|A_nx - Ax\|_F}{\|x\|_E} \rightarrow_{n\to\infty} 0,$$

alors A est compact. En d'autre terme , les opérateurs compacts forment un sous- espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E\ ,\ F)$

Chapitre 2

Problèmes mal-posés

2.1 problèmes directs et problèmes inverses

La définition des problèmes directs et problèmes inverses n' est pas simple.

Soient E et F deux espaces vectoriels et $A : E \to F$, un opérateur linéaire. On considère l' équation :

$$Ax = y \tag{2.1.1}$$

Il exite deux types de problèmes en analyse numérique :

Problème direct

Le problème direct consiste à calculer y, étant donnés A et x (par exemple le calcul d'un intégrale définie) .

Problème inverse

Le problème inverse, nous considérerons que$A$ et y est connues, et nous chercherons à retrouver $x, (x = A^{-1}y)$.

2.1.1 Problèmes bien-posés ou mal-posés

Problème bien-posés

Définition 2.1.1 *Soient E et F deux espaces Banach , et $A : E \supseteq D(A) \to F$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). le problème inverse $Ax = y$ est bien posé ou sens de Hadamard :*

1- Existence : pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $Ax = y$.

2-Unicité : pour tout $y \in F$, il y a au plus une solution $x \in E$.

3- Stabilité : La solution x dépend continument de la donnée y .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - x'|_E < \delta \Rightarrow |y - y'|_F < \varepsilon, \text{ avec } Ax' = y'.$$

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée,alors le problème(2.1.1) est dit mal-posé .C'est à dire n'existe pas de solution unique ou, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

2.1.2 Exemple des problèmes mal-posés

On présent ici quelques exemples des problèmes mal-posés.

Exemple 2.1.1 ***(Systéme linéaire)***

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne . On cherche à étudier l'influence des erreurs d'arrondi de la matrice A et du vecteur y sur la solution $x \in \mathbb{R}^n$du systéme $Ax = y$.

Le système linéaire $Ax = y$ est bien posé si

$$\begin{cases} A^{-1} \text{ existe} \\ \det A \neq 0 \\ Ax = 0 \text{ équivaut } x = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.1.2 *Considérons le systéme suivant $Ax = y$*

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix}$$

qui admet comme solution

Exemple 2.1.3

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le probléme suivant dans le quel le vecteur y est légèrement perturbé

Exemple 2.1.4

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.44 \\ 22.77 \\ 26.73 \end{pmatrix}.$$

La solution du systéme perturbé est

Exemple 2.1.5

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 6.23 \\ 4.73 \\ 4.69 \end{pmatrix}.$$

On remarque que une petites variations sur y, conduit á une grandes variations sur x .Donc le problème est mal posé(condition de stabilité)

Exemple 2.1.6 *On considère le système algebrique*

$$Ax = y \tag{2.1.2}$$

où A est une matrice de $m \times n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Si $m < n$,le système peut avoir de nombreuses solutions.

Si $m > n$,il peut n'y avoir aucune solution

Si $m = n$,le système(2.1.2) admet une solution unique pour tout $y \in \mathbb{R}^m$.Dans ce cas la matrice A^{-1} existe et borné(opérateur linéaire dans un espace dev dimension finie).

Donc les conditions de Hadamart sont satisfaites.

Analysons maintenant la dépendance de la solution aux perturbations du y dans le cas où la matrice A est non dégénérée.

Soit l'équation perturbée

$$A(x + \delta x) = y + \delta y \tag{2.1.3}$$

De l'équation (2.1.2) et (2.1.3) il vient

$$A\delta x = \delta y$$

d'où

$$\delta x = A^{-1}\delta y, \text{et } \|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta y\| \tag{2.1.4}$$

On a aussi

$$\|y\| \leq \|A\| \|x\| \tag{2.1.5}$$

De l'équation (2.1.4) et (2.1.5) en résult

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$$

On remarque que l'éreur est déterminé par le nombre $\|A\| \|A^{-1}\|$,qui appelé le Le conditionnement de A par rapport à la norme matricielle $\|\cdot\|$, et on note $\mathbf{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Si $\mathbf{cond}(A)$ est trés grand ,alors le système est mal conditionné.

Remarque 2.1.1 *La résolution directe du système (2.1.2) ne mène pas à une solution stable si la matrice A est mal conditionnée ou si les données y sont perterbés*

Exemple 2.1.7 *Considérons le systéme suivant $Ax = y$ ($A \in M_{2,2}$et $y \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$) :*

$$\begin{pmatrix} 4,218613 & 6,327917 \\ 3,141592 & 4,712390 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,54530 \\ 7,85982 \end{pmatrix}$$

,

la solution est :

$$x_1 = x_2 = 1.$$

Si on fait une petite perturbation sur A comme suit :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4,218611 & 6,327917 \\ 3,141594 & 4,712390 \end{pmatrix},$$

la solution $\tilde{x}$ est :

$$x_1 = -5 \; et \; x_2 = 5.$$

Autrement dit ,de trés petites variations sur A ont conduit à de grandes variation sur x .

Remarquons q'une erreur relative d'ordre 4 sur la solution et $cond\,(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| =$ 5519263.

Exemple 2.1.8 *[19](Equation intégrale de Frédholm du premier espèse)*

Soit l'équation de Frédholm du premier espèse

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = f\,(x)\,, \quad c \leq x \leq d \tag{2.1.6}$$

où le noyau $k(x,y)$ et la fonction $f(x)$ sont donnés et $\varphi(y)$ la fonction inconnue.

Onsuppose que $f(x) \in C[c,d], \varphi(y) \in C[a,b]$,et $k(x,y), \dfrac{\partial}{\partial x}k(x,y), \dfrac{\partial}{\partial y}k(x,y)$,sont continues sur le rectangle $\quad c \leq x \leq d, \;\; a \leq y \leq b.$

Si $f\,(x)$ est continue et non différentiable sur $[c,d]$,la solution $\varphi(y)$ n'existe pas et le problème (2.1.6)est mal posé.

Exemple 2.1.9 *[19](Equation intégrale de Volterra du premier espèse)*

Soit l'équation de Volterra du premier espèse

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f\,(x)\,, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.1.7}$$

où $k(x,y)$ et $f(x)$ sont des fonctions donnés et $\varphi(y)$ la fonction inconnue.

Si $k(x,y) = 1$, l'équation (2.1.7)équivalent

$$\varphi(x) = f'\,(x)$$

ce problème est mal posé (condition de stabilité).

Chapitre 3

Méthodes de régularisation

Dans ce chapitre on donne le principe de quelques méthodes de regularisation qui sont les plus courant : la méthode de Tikhonov([8, 13]), la méthode de Laverentiev([14, 19]) , la méthode de Landweber .

Régulariser un probème mal-posé, c'est le remplacer par un autre bien posé, de sorte que l'érreur commise soit compensée par le gain de stabilité .

3.1 Méthodes de résolution

3.1.1 Méthode de moindres carrées

Une grande classe de problèmes inverses à résoudre peut s'écrire sous la forme

$$Ax = y \tag{3.1.1}$$

où A est un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F. On retrouve le caractère mal posé de(3.1.1) en écrivant que :

1) A peut ne pas être surjectif.

2) A peut ne pas être injectif.

3) l'inverse de A, s'il existe, peut ne pas être continu.

Le problème (3.1.1) n'a de solution que si $y \in \mathrm{Im}(A)$, mais ceci est trop contraignant du fait des erreurs de mesure.L'idée est alors de remplacer ce problème par un problème de moindres carrés :

$$\min_{x \in E} \parallel Ax - y \parallel_F^2$$

3.1.2 L'équation normale

Théorème 3.1.1 *Soit $A : E \to F$, un opéateur linéaire et borné et $y \in F$, il existe $\hat{x} \in E$ telque $\|A\hat{x} - y\|_F \leq \|Ax - y\|_F$, pour tout $x \in E$ si est sulement si $\hat{x} \in E$, est une solution de l'équation normale:*

$$A^* A\hat{x} = A^* y \tag{3.1.2}$$

où A^* est l'adjoint de A.

Preuve. Voir [11] Téorème 2.6 ■

Remarque 3.1.1 *Dans le cas où E et F sont de dimension infinie et A est compact (A^{-1} n'est pas continu), le preblème (3.1.2) est aussi mal-posé.*

3.1.3 Opérateur régularisant

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A : E \to F$, un opérateur linéaire injectif. On considére l'équation

$$Ax = y$$

Soit y^δ un second membre perterbé de l'équation $Ax = y$ tel que

$$\left\| y - y^\delta \right\| < \delta,\, \delta > 0$$

On souhaite approximer la solution x^δ de $Ax = y$.

Si $y \in A(E) = Im(A) = \{Ax : x \in E\}$,alors il existe une solution unique de $Ax = y$. Par contre rien ne dit que $y^\delta \in A(E)$!

Connaissant y^δ, on souhaite contruire approximation stable de x^δsolution de $Ax^\delta = y^\delta$, il faut approximer l'opérateur inverse non borné $A^{-1} : A(E) \to E$ par l'opérateur borné $R : F \to E$;

Définition 3.1.1 *On appelle régularisation de(3.1.1) toute famille d'opérateurs linéaires bornés* $R_\alpha : F \to E$, $\alpha > 0$,*tel que*

$$\lim_{\alpha \to 0}(R_\alpha Ax - x) = 0, \text{ pour tout } x \in E$$

i.e.l'opérateur $R_\alpha A$ converge simplement vers l'identitéI.

α : paramètre de régularisation.

Théorème 3.1.2 *Soit* R_α *une régularisation de(3.1.1), si* A *est compact en dimension* ∞.*Alors la famille d'opérateurs* R_α *ne sont pas uniformément bornés: il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \qquad et \qquad \lim_{k\to\infty} \|R_{\alpha_n}\| = \infty$$

i.e.$R_\alpha A$ ne converge pas vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

3.1.4 Méthode de Tikhonov [8]

Le principe de la méthode de Tikhonov pour résoudre le problème inverse mal posé $Ax = y$ est de déterminer $x_\alpha \in E$,$\alpha > 0$, comme solution approchée de l'équation (3.1.1) qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov $J_\alpha(x)$ telle que:

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|_F^2 + \alpha \|x\|_E^2 . \tag{3.1.3}$$

Théorème 3.1.3 *Soit* $A : E \to F$, *un opérateur linéaire borné et* $\alpha > 0$.*La fonctionnelle de Tikhonov* J_α *admet un seul minimum* $x_\alpha \in E$,*ce minimum est la solution unique de l'équation normale*

$$(A^*A + \alpha I)\, x_\alpha = A^*y \ . \tag{3.1.4}$$

Preuve. voir [8] ■

La solution régularisée du problème (3.1.1) est:

$$x_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y$$

qui converge quaand $\alpha \to 0$ vers la solution exacte x et la famille d'opérateurs régularisants R_α est donnée par :

$$R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* \tag{3.1.5}$$

Remarque 3.1.2 *Comme l'opérateur $(A^*A + \alpha I)$ admet un inverse borné,alors le problème (3.1.4) est bien posé.*

Théorème 3.1.4 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire et compact et $\alpha > 0$.*

a) *L'opérateur ($A^*A + \alpha I$) admet un inverse borné . L'opérateur $R_\alpha : F \to E$ défini par (3.1.5) forme une stratégie de régularsation avec $\|R\alpha\| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ .On l'appelle la régularisation de Tikhonov.$R_\alpha y^\delta$ est déterminé comme la solution unique $x_\alpha^\delta \in E$ de l'équation du seconde espace*

$$\alpha x_\alpha^\delta + A^*Ax_\alpha^\delta = A^*y^\delta.$$

Chaque chois de $\alpha(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ avec $\dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$ $(\delta \to 0)$ est admissible .

b) Soit $x = A^*z \in \operatorname{Im}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$. On choisit $\alpha(\delta) = \dfrac{c\delta}{E}$ pour $c > 0$, alors l'estimation suivante est vérifiée

$$\left\|x_{\alpha(\delta),}^\delta - x\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)\sqrt{\delta E} \quad .$$

c) Soit $x = A^*Az \in \operatorname{Im}(A^*A)$ avec $\|z\| \leq E$ (E une constante) . Le choix $\alpha(\delta) = c\left(\dfrac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{3}}$, pour $c > 0$,

donne l'estimation de l'erreur :

$$\left\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\right\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + c\right) E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}} \quad .$$

Pour cela , la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour :

$$\left\|(A^*)^{-1} x\right\| \leq E \text{ où } \left\|(A^*A)^{-1} x\right\| \leq E \quad .$$

Les valeur propres de A tendent vers zéro et les valeurs properes de $\alpha I + A^*A$ sont bornées loinses de zéro pour $\alpha > 0$.

Du théorème précédent , on observe que α a été choisit d'une façon à dépendre de δ et qu' il converge vers zéro quand δ tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2 .

Preuve. Pour la démonstration voir [8],page 38. ■

3.1.5 Méthode de Lavrentiev [19]

Soit A un opérateur linéaire compact sur un espace de Hilbert E . L'ensemble des valeurs $\mathrm{Im}\,(A)$ de l'opérateur A est en générral non fermé .

Supposons que $\ker(A) = \{0\}$, si E est de dimension infinie , l'opérateur A admet un inverse A^{-1} sur $\mathrm{Im}\,(A)$ qui n'est pas borné . Cette circonstance , fait que le problème défini par $Ax = y$ devienne instable.La méthode de Lavrentiev consiste à réduire l'équation $Ax = y$ à une équation de deuxième espace $(\alpha x + Ax = y)$, $\alpha > 0$

Soit le problème

$$Ax = y, \quad (\ y \in \mathrm{Im}(A)) \tag{3.1.6}$$

où $A \in \mathcal{L}\,(E)$,un opérateur compact ,auto-adjoit et positive($A = A^* > 0$),dans un éspace de Hilbert séparable E. Soit $y^\delta \in E$ une approximation de y telleque $\left\|y - y^\delta\right\| \leq \delta$, $\delta > 0$.

Si $y^\delta \notin \mathrm{Im}(A)$,le problème

$$Ax = y^\delta \tag{3.1.7}$$

n' pas de solution . Même si elle a une solution x^α ,nous n'avons aucune raison de croire que $x^\alpha \to x_e$ pour $\alpha \to 0$, où x_e est la solution de $Ax = y$, donc il est mal posé.

Proposons-nous de régulariser cette équation .

A cet effet ,on peut remplacer l'équation (3.1.7) par une équation auxiliairede deuxième espèce .

$$\alpha x + Ax = y^\delta, \qquad \alpha > 0 \tag{3.1.8}$$

pour lequel le problème (3.1.7) devient bien posé. Dans ce qui suit, nous prouvons que dans de nombreux cas l'équation(3.1.8) a une solution x_α^δ qui tend vers la solution exacte x_e de l'équation $Ax = y$ quand αet l'erreur δdans l'approximation de f tend vers zéro avec $\dfrac{\delta}{\alpha} \to 0$.

Théorème 3.1.5 *Supposons que l'opérateur A vérifie pour tout $\alpha > 0$ la condition $\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \dfrac{C}{\alpha}$, C est une constante .*

Supposons aussi que $y \in D\left(A^{-2}\right)$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$, est choisi en fonction de δ de telle sort que , pour $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$ et $\dfrac{\delta}{\alpha^2} \to 0$, alors : $x_\alpha \to x$ pour $\delta \to 0$.

Si : $\alpha = 0\left(\delta^{\frac{1}{3}}\right)$ pour $\delta \to 0$ alors : $\|x_\alpha - x_e\| = 0\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)$.

Soit x_e la solution de l'équation $Ax = y$,on prend $x_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} y$ solution de l'équation $\alpha x + Ax = y$ comme une solution approximative del'équation(3.1.6).

Soit x_α^δ la solution de l'équation (3.1.8) telleque $\left\|y - y^\delta\right\| \leq \delta$,alors

$$\lim_{\alpha \to \to 0} \|x_e - x_\alpha\| = 0$$

et

$$x_\alpha^\delta \to x_e \text{ quand } \alpha \text{ et } \delta \text{ tend vers zéro avec } \frac{\delta}{\alpha} \to 0$$

Preuve. pour la démonstration voir [19] ■

Théorème 3.1.6 *([10]) Soit x_e la solution de l'équation $Ax = y$,x_α^δ la solution de l'équation*

$$(\alpha I + A)\, x_\alpha^\delta = y^\delta, \qquad \alpha > 0 \tag{3.1.9}$$

telleque $\left\|y - y^\delta\right\| \leq \delta$,alors

$$\lim_{\alpha \to \to 0 \text{ et } \delta \to 0} \left\|x_e - x_\alpha^\delta\right\| = 0$$

Preuve. Soit x_α telque

$$(\alpha I + A)\, x_\alpha = y \tag{3.1.10}$$

De (3.1.6) et (3.1.10) il vient

$$\alpha x_\alpha + A(x_\alpha - x_e) = 0$$

ou encore

$$\alpha\,(x_\alpha - x_e) + A(x_\alpha - x_e) = -\alpha x_e$$

d'où

$$\|x_\alpha - x_e\| \leq \alpha\, \|x_e\| \left\|(\alpha I + A)^{-1}\right\|$$

Da la difference entre l'équation (3.1.10) et l'équation (3.1.9) on obtient

$$(\alpha I + A)\left(x_\alpha - x_\alpha^\delta\right) = y - y^\delta \tag{3.1.11}$$

donc

$$\left\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\right\| = \left\|y - y^\delta\right\| \left\|(\alpha I + A)^{-1}\right\| \leq \delta \left\|(\alpha I + A)^{-1}\right\| \tag{3.1.12}$$

On a

$$\left\|x_e - x_\alpha^\delta\right\| \leq \|x_e - x_\alpha\| + \left\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\right\| \tag{3.1.13}$$

Le premier terme du second membre de l'équation (3.1.13) disparaît quand $\alpha \to 0$,Le second terme du second membre de l'équation (3.1.13) disparaît quand $\delta \to 0$.

Doù

$$\lim_{\alpha \to \to 0 \text{ et } \delta \to 0} \left\|x_e - x_\alpha^\delta\right\| = 0$$

■

3.2 Méthodes iteratives

3.2.1 Méthode itérative de Tikhonov

On considère l'équation opérateur

$$Ax = y, \quad (\ y \in \operatorname{Im}(A)) \tag{3.2.1}$$

où $A \in \mathcal{L}(E, F)$,et E ,F deux espaces de Hilbert,si $\operatorname{Im}(A)$,n'est pas fermé en général ce problème est mal-posé.

Soit $y^\delta \in E$ une approximation de y telleque $\left\|y - y^\delta\right\| \leq \delta$, $\delta > 0$,la méthode de régularisation pour résoudre le problème (3.2.1) est la méthode de Tikhonov

$$x_\alpha = (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* y^\delta, \quad \alpha > 0. \tag{3.2.2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,fixe, $x_0 \in E$,et $x_0 = x_\alpha^0 \in E$ une approximation initiale.la n-itéré de Tikhonov $x_\alpha = x_\alpha^n$ est donnée par la relation

$$x_\alpha^i = (A^* A + \alpha I)^{-1} \left(\alpha x_\alpha^{i-1} + A^* y^\delta\right), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.2.3}$$

Si $n = 1$,et $x_0 = 0$,l'équation (3.2.3)s'écrit

$$x_{\alpha}^{1} = (A^{*}A + \alpha I)^{-1} \left(A^{*}y^{\delta}\right),$$

qui est la régularisation de Tikhonov classique.

3.2.2 Méthode itérative de Lavrentièv

Si l'opérateur A est auto-adjoint positif ($A = A^{*} > 0$), et $E = F$,la méthode de régularisation pour résoudre le problème (3.2.1) est la méthode de Lavrentièv

$$(\alpha I + A)\, x_{\alpha} = y^{\delta} \tag{3.2.4}$$

La méthode $n-$itéré de Lavrentièv $x_{\alpha} = x_{\alpha}^{n}$ est donnée par la relation

$$x_{\alpha}^{i} = (A + \alpha I)^{-1} \left(\alpha x_{\alpha}^{i-1} + y^{\delta}\right), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.2.5}$$

Si $n = 1$,et $x_0 = 0$,l'équation (3.2.5)s'écrit
qui est la régularisation deLavrentièv classique.

$$x_{\alpha}^{1} = (A + \alpha I)^{-1}\, y^{\delta}.$$

3.2.3 Méthode de Landweber

Les méthodes itératives sont des méthodes qui construisent une suite de solution approchées convergent vers la solution désirée . Dans le contexte des problémes inverses la situation est plus compliquée : en présence de bruit , la suite construite par la méthode itérative ne converge pas , en général , vers une solution du problème de départ . Il est , encore une fois , nécessaire de régulariser le processus itératif , et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation . En d'autres termes , il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité .

On examine dans ce paragraphe que la plus simple des méthodes itératives : la méthode de Landweber [8] qui a pour principal avantage de se prêter à une analyse simple . Malheureusement , elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique , d'autant plus que des méthode beaucoup plus performantes existent . Les deux plus importantes sont la méthode de Brakhage voir ? et surtout la méthode du gradient conjugué et ses variantes . Cette dernière méthode est la plus employée . Dans le contexte des problèmes mal-posés , un exposé accessible se trouve dans le livre de Krich [8] , des exposés plus complets sont dans [12, 13]

Parmis ces méthodes itératives , on parle ici de la méthode de Landweber

Soit l'équation :

$$Ax = y \; . \tag{3.2.6}$$

La formule (3.2.6) réecit sous la forme :

$$x = (I - \lambda A^* A)\, x + \lambda A^* y$$

pour $\lambda > 0$. Le schéma itérative de cette éqaution est le suivant :

$$x^0 = 0 \text{ et } x^m = (I - \lambda A^* A)\, x^{m-1} + \lambda A^* y \quad . \tag{3.2.7}$$

Pour $m = 1, 2, 3...$

Soit la suite (x^m) définie par (3.2.7)et on définit la fonction $\Psi : X \to R$ par : $\Psi(x) = \frac{1}{2}\|Ax - y\|^2$, $x \in X$. Alors Ψ est différentiable au sens de fréchet pour tout $z \in X$ et

$$\acute{\Psi}(z)\, x = \operatorname{Re}(Az - y \;,\; Ax) = \operatorname{Re}(A^* (Az - y) \;,\; x) \quad , x \in X \quad . \tag{3.2.8}$$

La fonction linéaire $\acute{\Psi}(z)$ peut être identifié avec $A^*(Az - y) \in X$ sur l'espace de Hilbert X .

C'est facile de voir la forme explicite $x^m = R_m y$, où l'opérateur $R_m : Y \to X$ est défini par :

$$R_m = \lambda \sum_{k=0}^{m=1} (I - \lambda A^* A)^k A^* \quad , \quad m = 1, 2, ... \tag{3.2.9}$$

a) Soit $A : X \to Y$, un opérateur compact et soit $0 < \lambda < \dfrac{1}{\|A\|^2}$. On définit les opérateurs linéaires et bornés $R_m : Y \to X$ par (3.2.9). Cas opérateurs définissent une stratégie de régularization de paramètre $\lambda = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\|R_m\| \leq \sqrt{\lambda m}$. La suite $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$x^{0,\delta} = 0 \text{ et } x^{m,\delta} = (I - \lambda A^* A)\, x^{m-1,\delta} + \lambda A^* y^\delta \quad .$$

Pour $m = 1, 2, 3, ...$ toute stratétégie $m(\delta) \to \infty\, (\delta \to 0)$ avec $\delta^2\ m(\delta) \to 0\ (\ \delta \to 0\ )$ est admissible .

b) Soit $x = A^* z \in \operatorname{Im}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| \leq c_3 \sqrt{\delta E}$$

pour c_3 qui dépend de c_1 , c_2 et λ . Alors l'itération de Landweber est optimale pour $\left\|(A^*)^{-1} x\right\| \leq E$.

c) Maintenant ,soit $x = A^* A\ z \in \operatorname{Im}(A^* A)$, $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, on a :

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}$$

pour c_3 qui de c_1 , c_2 et λ . Pour cela , l'itération de Landweber est aussi optimale pour $\left\|(A^* A)^{-1} x\right\| \leq E$.

Pour cette méthode , on observe qu'une haute précision un nombre large m d'itérations mais la stabilité nous force à garder m le plus petit possible .

3.3 Exemples Numériques

Exemple 1. *Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + 1\right)\varphi(y)\, dy = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.3.1}$$

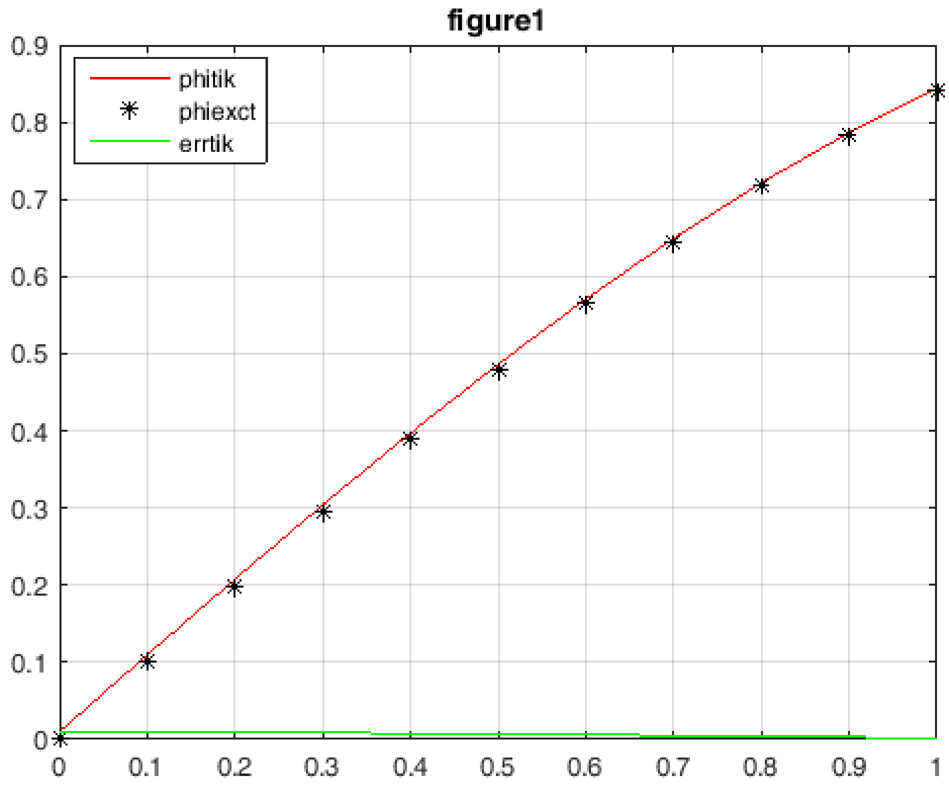
La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = \sin(x)$.

Dirivons l'équation (3.3.1) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)\,dy = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Tableau 1.On présente la solution approchée $\widetilde{\varphi}(x)$ de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.1) obtenue par la méthode de Tikhonov pour $n = 10$, $\delta = 0.01$, $\alpha = 5.8594e - 03$

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.Tik$\widetilde{\varphi}(x)$	Err.Tikhonov
0.0000	0.0000	9.9417e-03	9.9417e-03
0.1000	9.9833e-02	1.0931e-01	9.4761e-03
0.2000	1.9867e-01	2.0758e-01	8.9149e-03
0.3000	2.9552e-01	3.0378e-01	8.2628e-03
0.4000	3.8942e-01	3.9694e-01	7.5257e-03
0.5000	4.7943e-01	4.8614e-01	6.7100e-03
0.6000	5.6464e-01	5.7047e-01	5.8233e-03
0.7000	6.4422e-01	6.4909e-01	4.8736e-03
0.8000	7.1736e-01	7.2123e-01	3.8699e-03
0.9000	7.8333e-01	7.8615e-01	2.8213e-03
1.0000	8.4147e-01	8.4321e-01	1.7382e-03



Exemple 2. *Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_{0}^{x} (\exp(x+y)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2}(\exp(2x)-1), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.3.2}$$

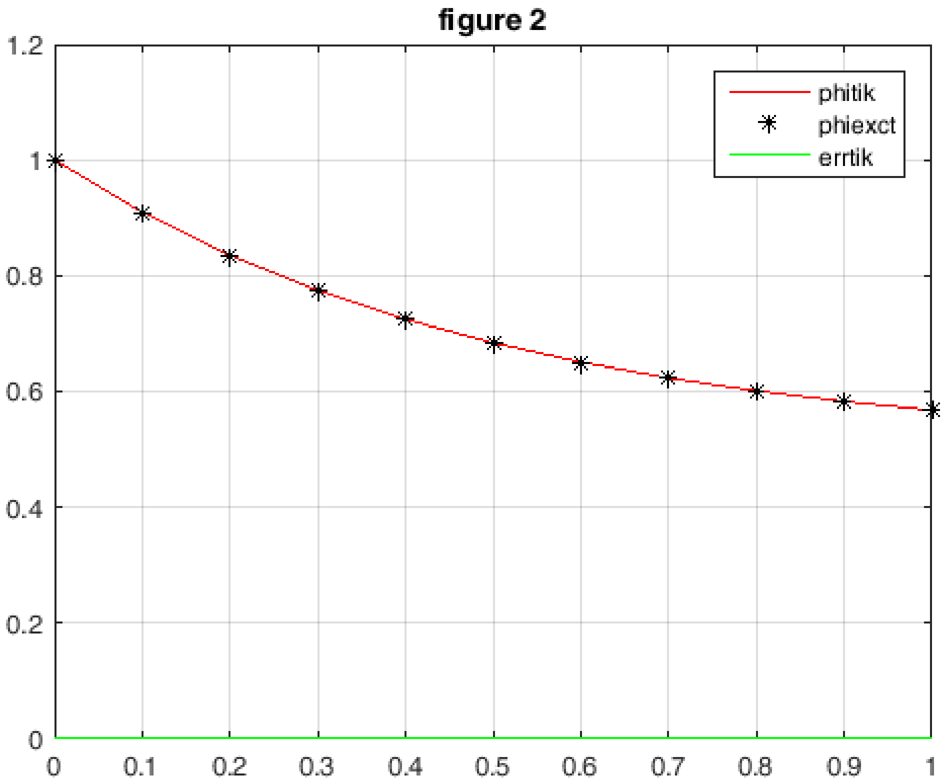
La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\exp(-2x)+1)$

Dirivons l'équation (3.3.2) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_{0}^{x} -(\exp(x-y)\varphi(y)\,dy = 1, \quad 0 \le x \le 1,$$

Tableau 2.On présente la solution approchée $\widetilde{\varphi}(x)$ de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.2) obtenue par la méthode de Tikhonov pour :$n = 10$, $\delta = 0.001$,$\alpha = 7.3242e-04$

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.Tik $\widetilde{\varphi}(x)$	Err.Tikhonov
0.0000	1.0000e+00	1.0006e+00	5.5015e-04
0.1000	9.0937e-01	9.0979e-01	4.2836e-04
0.2000	8.3516e-01	8.3549e-01	3.3473e-04
0.3000	7.7441e-01	7.7467e-01	2.6323e-04
0.4000	7.2466e-01	7.2487e-01	2.0888e-04
0.5000	6.8394e-01	6.8411e-01	1.6776e-04
0.6000	6.5060e-01	6.5073e-01	1.3690e-04
0.7000	6.2330e-01	6.2341e-01	1.1389e-04
0.8000	6.0095e-01	6.0105e-01	9.6873e-05
0.9000	5.8265e-01	5.8273e-01	8.4545e-05
1.0000	5.6767e-01	5.6774e-01	7.5660e-05



Exemple3. *Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_0^x (\cos(x-y)\varphi(y)\,dy = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.3.3}$$

La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = 1$

Dirivons l'équation (3.3.3) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_0^x -(\sin(x-y)\varphi(y)\,dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Tableau 3.On présente la solution approchée $\widetilde{\varphi}(x)$ de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.3) obtenue par la méthode de Tikhonov pour :$n = 10$, $\delta = 0.001$,$\alpha = 3.6621e-04$

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.Tik $\widetilde{\varphi}(x)$	Err.Tikhonov
0.0000	1.0000e+00	1.0006e+00	6.3360e-04
0.1000	1.0000e+00	1.0006e+00	6.3443e-04
0.2000	1.0000e+00	1.0006e+00 4	6.3682e-0
0.3000	1.0000e+00	1.0006e+00	6.4099e-04
0.4000	1.0000e+00	1.0006e+00	6.4671e-04
0.5000	1.0000e+00	1.0007e+00	6.5422e-04
0.6000	1.0000e+00	1.0007e+00	6.6340e-04
0.7000	1.0000e+00	1.0007e+00	6.7413e-04
0.8000	1.0000e+00	1.0007e+00	6.8653e-04
0.9000	1.0000e+00	1.0007e+00	7.0059e-04
1.0000	1.0000e+00	1.0007e+00	7.1621e-04

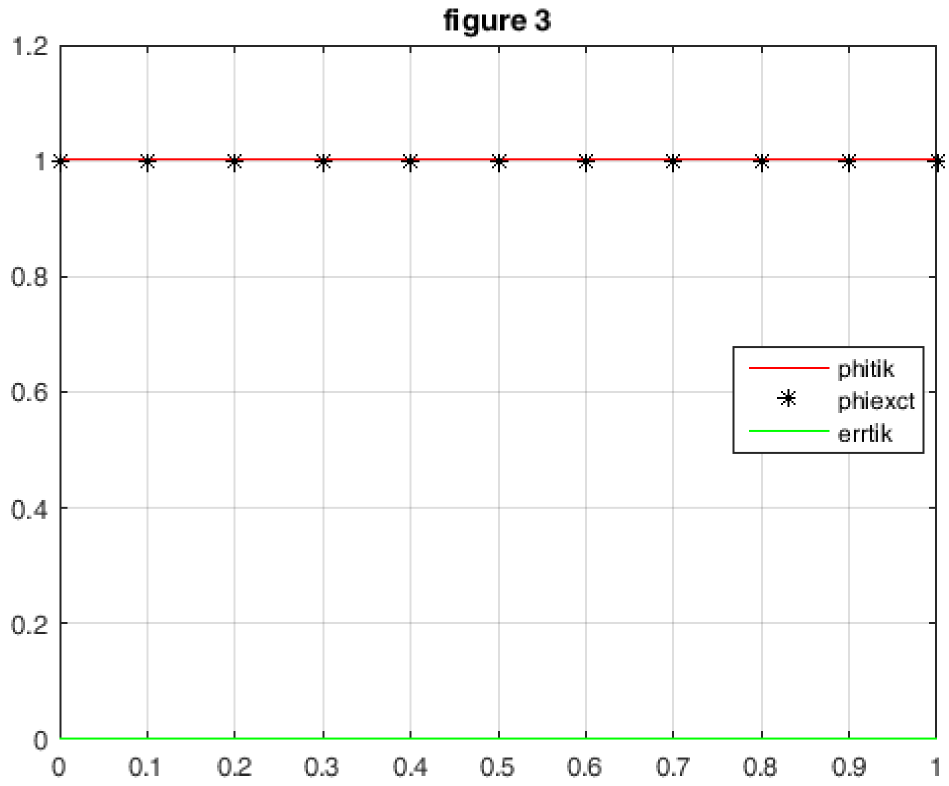


figure 3
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
phitik
phiexct
errtik

Conclusion

D'aprés ces exemples on remarque que les résultats obtenues par la méthode de régularisation de Tikhonov sont acceptables.

Bibliographie

[1] M.NADIR, Cours d'analyse fonctionnelle, University de M'sila (2004).

[2] J.H ADAMARD , Lecteure on Cauchy 's Problem in Lineair Partial Differential Equations ,Yal University Press, (1923).

[3] MICHEL KERN .Problème inverses , INRIA,ROCQUEN COURT BP 105,78153 Le CHESNAY, (2002–2003).

[4] D. COLTON et R. KRESS , I nverse Acourtic and Electromatical scattering theory (chapitre 4 : ill -posed probelems) ,Volum (93) of Applied Mathematical siences springer verlag.

[5] Cours : Analyse Matriciel et optimisation , Master 1 (2019).

[6] Jacques RAPPAZ , M arcco PICASSO : Introduction à l'analyse numérique ,presse polyte chniques et universitaires romandes (1998) , chapiter 1 .

[7] MEHDI DANECH-PAJOUH , Problème mal-posés un exemple d'application à la prévision à court -terme , Institu national de recherche sur les tronsports et leur sécurté,(1998) .pp.7.

[8] A. Kirsch, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems,Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, 1996

[9] A.I.ELMAHDY , On the methode of Laverentiev regularisation and majorizing sequence for solving ill-posed problems with monotone operators , Applied mathematical science vol . 9 ,(20) , no . 24, 1159-1174.

[10] Mostefa NADIR,DJAIDJA Noui,Approximation Method for Volterra integral equation of the first kind,International journal of Mathematics and Computation vol 29 NO 4;2018.

[11] H . W . Engl , M . Hanke , and A . Neubauer . Regularization of Inverse problems . Kluwer , Dordrecht , 1996.

[12] M.Hanke , Conjugate Gradient Type Methods for Ill-posed problems , volume 327 of Pitman Research Notes in Mathematics .Longman , Harlow , 1995 .

[13] A.N.Tikhonov,V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, Halsted Press,Washington-Winston-New York (1977).

[14] M. M. LAVRENT'EV, Conditionally Ill-Posed Problems for Differential Equations [in Russian], NGU, Novosibirsk (1973).

[15] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger. Time dependent problems and difference methods. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., 1995.

[16] H.W. ENGL , On the choice of the regularization parameter for iterated Tikhonov regularization of inverse problems, J. Approx. Theory 49(1987) 55-63.

[17] P. C. H , Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete il l-posed problems, Numer. Algorithms, 6 (1994), pp. 1—35. (Software available at http://www.netlib.org.)

[18] M. T. Nair and U. Tautenhahn, Lavrentiev Regularization for Linear Ill-Posed Problems under General Source Conditions,Journal for Analysis and its Applications,Volume 23 (2004), No. 1, 167–185.

[19] S. I. Kabanikhin,Definitions and examples of inverse and ill-posed problems,in J. Inv. Ill-Posed Problems 16 (2008), 317–357.