REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

**Université Mohamed Boudiaf de M'sila**
**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**
**Département de Mathématiques**

# *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique
**Filière** : Mathématiques
**Option** : Analyse mathématique et numérique

# Thème

---

*Sur les espaces de Sobolev fractionnaires et le Laplacien fractionnaire*

---

**Présenté par :**
*MEROUCHE* Linda

**Devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M^r$ *MOKHTARI* Abdelhak | MCB, | Université de M'sila | **Président**. |
| $M^r$ *SAADI* Abderachid | MCA, | Université de M'sila | **Encadreur**. |
| $M^r$ *CHADI* Khelifa | MAA, | Université de M'sila | **Examinateur**. |

Année universitaire 2020/2021

# Remerciements

Je remercie avant tous *ALLAH* pour son aide, ses innombrables dons, *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté et la moral pour accomplir mon étude en master en mathématique.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remercîments à mon encadreur **Mr. SAADI Abderachid** pour avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et il n'a pas cessé de me donner ses conseils.

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr. MOKHTARI Abdelhak** et **Mr. CHADI Khelifa** d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je remercie évidemment mes parents, et tous mes frères de les avoir encouragés et soutenus pendant de nombreuses années dans la poursuite de mes études.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master EDP et applications, et nous les souhaitons le bonheur et réussite dans la vie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

A tous MERCI

# Dédicaces

Avec toute mon affection, ma profonde reconnaissance, Je dédie ce travail :

À mes très chers parents, pour sacrifices, leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens qu'ALLAH me les garde.

À mes chers frères et mes soeurs.

À mes anges : Amdjad, Aniss, Maimouna.

À tout la famille Merouche, pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours raccordé.

À mes professeurs.

À mes très chères amis chacun en son nom.

À tous les étudiants de la deuxième année Master, spécialité analyse mathématiue et numerique 2020/2021.

Et à tous ceux qui ont que une place dans mon cœur que ma plume n'a pas mentionnée.

*Linda*

# Table des matières

# Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{R}^n$ | espace euclidien de dimension $n$ |
| $x$ | vecteur de $\mathbb{R}^n$ |
| $dx$ | mesure de Lebesgue de dimension $n$ . |
| $\Omega$ | ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. |
| $\chi_A$ | fonction indicatrice de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$. |
| $\overline{\Omega}$ | la fermeteur de $\Omega$. |
| $u$ | fonction mesurable définie de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ |
| $\nabla u$ | gradient de $u$ ,$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$. |
| $C_c(\Omega)$ | L'espace des fonctions de classe $C^\infty$, a support compact inclue dans $\Omega$. |
| $C_K^k$ | espace des fonctions $\varphi$ de $C^k(\Omega)$ a support dans $K$. |
| $p.p.$ | presque partout. |
| $p^*$ | L'exposant de Sobolev tel que : $p^* = np/(n-p).avec \quad n > p$ |
| $C(E)$ | espace des fonctions continue de $E$ (métrique) dans $\mathbb{R}$ |
| $E'$ | le dual topologie d'un espace de Banach $E$. |
| $S'(\mathbb{R}^n)$ | espace des distributions tempérées de $\mathbb{R}^n$. |

# Introduction

Dans la théorie d'analyse fonctionnelle et des équations aux dérivées partielles, il est important d'étudier certain propriétés des espaces fonctionnels .

Parmi ces espaces, on trouve les espaces de Sobolev classique $W^{m,p}$, basé sur les espaces de Lebesgue $L^p$, ces espaces lient surtout aux opérateur de laplacien et p-laplacien classique.

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, on cherche des solutions (généralement dite faibles), assurées quelques équations ou inéquations associées aux opérateurs différentielles. Pour cela, on a besoin des propriétés d'injection, surjection .... dans des espaces fonctionnels spéciaux. En général les espaces de Sobolev classique répond aux plusieurs questions concernés l'existence, l'unicité, la régularité, et même l'approximation numérique des solutions, car ces espaces sont construis essentiellement pour des types des équations aux dérivées partielles, mais malheureusement ces espaces ne sont pas suffise à répondre à tous les questions des problèmes associées aux équations aux dérivées partielles.

Récemment, il y a une autre notion des espaces de Sobolev , ce sont les espaces de Sobolev fractionnaire, qui sont liés aux opérateurs Laplacien et $p-$ Laplacien fractionnaire, on trouve deux approches pour définir espaces ci-dessus :

* La première approche est une approche un peut classique, il s'agit d'utiliser la transformée de Fourier pour définir des espaces de Hilbert $H^s$. C'est une approche un peu classique, basée sur la généralisation d'une propriété importante réalise par les espaces de Sobolev $H^m$, qui sont des espaces de Hilbert basé sur l'espace $L^2$.

* La deuxième approche est une généralisation de la définition de $H^s$ par une autre manière, il s'agit d'utiliser l'approche de Gagliardo.

On a devisé notre travail à trois chapitres :

**Dans le premier chapitre,** on introduit quelques espaces fonctionnels classiques ($L^p, W^{m,p}, ....$), et quelques définitions et théorèmes importants.

**Dans le deuxième chapitre,** on se donnera des définitions et propriétés concernant les espaces de Sobolev $H^s$ et l'opérateur de Laplace fractionnaire $(\Delta)^s$.

**Dans le dernier chapitre 3,** on introduit les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$ et l'opérateur $p-$ Laplacien fractionnaire.

Chapitre 1

# Espaces fonctionnels classiques

Dans ce chapitre , on va donner quelques notions et propriétés des espaces fonctionnels classiques : espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev d'ordre entiers.

Dans toute la suite, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lesbesgue dx.

## 1.1 Espaces $L^p$

**Définition 1.1.** [4] : Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ ; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\, ; f \ \ mesurable\ et \mid f \mid^p \in \ L^1(\Omega) \right\} \tag{1.1}$$

muni de la norme

$$\| \ f \ \|_{L^p} = \left[ \int \mid f(x) \mid^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

**Définition 1.2.** [4] : On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \text{ mesurable, il existe une constante } C \text{ telle que} \mid f(x) \mid \leq C \text{ p.p.sur } \Omega \} \tag{1.3}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; \mid f(x) \mid \leq C,\ p.p.sur\Omega\} \tag{1.4}$$

## 1.2 Quelques théorèmes

**Théorème 1.1.** ***(Fischer-Riesz)[4] :*** *$L^p$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

**Théorème 1.2.** ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[4] :*** *Soit $(f_n)$ une suite des fonctions de $L^1$ telle que :*

*a] $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. sur $\Omega$,*
*b] il existe une fonction $g \in L^1$ telle pour toute $n, \mid f(x) \mid \leq g(x)$ p.p sur $\Omega$ .*

*Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\| \ f_n - f \ \|_{L^1} \longrightarrow 0$.*

**Théorème 1.3.** ***(Lemme de Fatou)[4] :*** *Soit $(f_n)$ une suite de fonction de $L^1$ telle que*

*1] Pour toute $n$, $f_n(x) \geq 0$ p.p sur $\Omega$,* *2]* $\sup_n \int f_n < \infty.$

*Pour chaque* $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$

*Alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et :*

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

**Théorème 1.4.** *[4] :* $L^p$ *est réflexif pour* $1 \leq p < \infty$.

**Théorème 1.5.** ***(Théorème de représentation de Riesz)[4].*** *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $\varphi \in (L^p)'$

Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle \varphi, f\rangle = \int uf \qquad \forall f \in L^p \tag{1.5}$$

De plus, on a :

$$\| u \|_{L^{p'}} = \| \varphi \|_{(L^p)'} \tag{1.6}$$

**Théorème 1.6.** ***(densité )[4] :*** *L'espace* $C_c(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < \infty$.

**Définition 1.3.** [4] : Soit $1 \leq p \leq \infty$ ; on dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

**Lemme 1.1.** *[4] : Soit* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tel que :*

$$\int fu = 0 \qquad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{1.7}$$

Alors $f = 0$ p.p. sur $\Omega$.

**Théorème 1.7.** *[4] :* $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

**Corollaire 1.1.** *[4] : Soit* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *un ouvert quelconque .*

Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

**Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces** $L^P$ :

| | **Réflexif** | **Séparable** | **Espace dual** |
|---|---|---|---|
| $L^p$ $1 < p < \infty$ | OUI | OUI | $L^{p'}$ |
| $L^1$ | NON | OUI | $L^\infty$ |
| $L^\infty$ | NON | NON | Contient strictement $L^1$ |

## 1.3 Compacité dans $L^p$

**Théorème 1.8.** ***(Ascoli)[4] :*** *Soit $E$ un espace métrique compact et soit $F$ un sous-ensemble borné de $C(E)$.*

On suppose que $F$ est uniformément équicontinue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ telque \quad d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \varepsilon \quad \forall f \in F \tag{1.8}$$

Alors $F$ est relativement compact dans $C(E)$

**Corollaire 1.2.** *[4] : Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$.*

On suppose que :

$$\begin{array}{c}\forall \epsilon > 0, \, \forall \omega \subset\subset \Omega, \, \exists \delta > 0, \ \delta < \mathbf{dist}(\omega, \complement\Omega) : \\ \| \tau_h f - f \|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^n, \mid h \mid < \delta, \, \forall f \in F.\end{array} \tag{1.9}$$

$$\forall \epsilon > 0, \, \exists \omega \subset\subset \Omega, \, : \| f \|_{L^p(\Omega \backslash \omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in F \tag{1.10}$$

Alors $F$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

## 1.4 Espaces de Hilbert

**Définition 1.4.** [4] : Soit $H$ un espace vectoriel. Un produit sclaire $\langle u, v \rangle$ est une form bilinèaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive, i.e.

$$[\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in H \ et \ \langle u, u \rangle > 0 \ \text{ si } \ u \neq 0]. \tag{1.11}$$

**Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\mid \langle u, v \rangle \mid \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} \qquad \forall u, v \in H. \tag{1.12}$$

$| u |= \langle u, u\rangle^{1/2}$ est une norme.

$$| u + v |=| u |^2 + | v |^2 +2\langle u, v\rangle \leq| u |^2 + | v |^2 +2 | u || v | \tag{1.13}$$

**Identité du parallélogramme**

$$| \frac{a+b}{2} |^2 + | \frac{a-b}{2} |^2= \frac{1}{2}(| a |^2 + | b |^2) \qquad \forall a, b \in H \tag{1.14}$$

**Définition 1.5.** [4] : Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $H$ muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$, complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{1/2}$.

**Exemple 1.1.** $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx. \tag{1.15}$$

**Dans toute la suite, $H$ désignai un espace de Hilbert.**

**Théorème 1.9.** *(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)[4] :*

Etant donné $\varphi \in H'$. Il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \varphi, v\rangle = (f, v) \qquad \forall v \in H. \tag{1.16}$$

De plus, on a :

$$|f| = \|\varphi\|_{H'} \tag{1.17}$$

**Définition 1.6.** [4] : On dit qu'une bilinéaire $\alpha(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :

(i) continue s'il existe une constante $C$ telle que :

$$| \alpha(u, v) |\leq C | u || v | \quad \forall u, v \in H, \tag{1.18}$$

(ii) coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\alpha(u, v) \geq \alpha | v |^2 \quad \forall v \in H. \tag{1.19}$$

**Définition 1.7.** [4] : Soit $(E_n)_{n\geq1}$ une suite de sous-espaces fermés de H.

On dit que H est somme Hilbertienne des $(E_n)$ , et on note $H = \underset{n}{\oplus} E_n$ si :

(i) les $E_n$ sont deux à deux orthogonaux, i.e.

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall u \in E_m,\ \forall v \in E_n, \quad m \neq n \tag{1.20}$$

(ii) l'espace vectoriel engendré par $E_n$ est dense dans $H$.

**Proposition 1.1.** *[4] : On suppose que $H$ est une somme Hilbertienne des $(E_n)_{n\geq 1}$. Soit $u \in H$ et soit $u_n = P_{\mathbf{E}_n}u$. Alors on a :*

*(a)* $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *i.e.* $u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n.$

*(b)* $\mid u \mid^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid u_n \mid^2$ (*égalité de* **Bessel** $-$ **Parseval**).

*Réciproquement, étant donnée une suite $(u_n)$ de $H$ telle que $u_n \in \mathbf{E}_n \quad \forall n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mid u_n \mid^2 < \infty$, alors la série $\sum_n u_n$ est convergente et $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vérifie $u_n = P_{\mathbf{E}_n}u$.*

**Définition 1.8.** [4] : On appelle base Hilbertienne une suite $(e_n)$ d'éléments de $H$ si elle vérifie :

(i) $\mid e_n \mid = 1 \quad \forall n,\ (e_m, e_n) = 0 \quad \forall m, n, m \neq n,$

(ii) l'espace vectoriel engendré par les$(e_n)$ est dense dans $H$.

**Théorème 1.10.** *[4] : Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

## 1.5 Espaces de Sobolev

**Définition 1.9.** [4] **:** L'espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega u g_i.\varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., n \right\} \tag{1.21}$$

On pose :

$$\boxed{H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).} \tag{1.22}$$

On munit $W^{1,p}(\Omega)$ de la norme :

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}} \tag{1.23}$$

**Proposition 1.2.** *[4] :*

- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*
- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

**Définition 1.10.** [4] :

Soient $m \geq 2$ un entier et soit $p$ un réel avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., n \right\} \tag{1.24}$$

On note $D^{\alpha}u = g_{\alpha}$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,||\forall\alpha \quad \text{avec} \quad |\,\alpha\,| \leq m \quad \exists g_{\alpha} \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \right\} \tag{1.25}$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|\, u \,\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\, Du \,\|_{L^p}, \tag{1.26}$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2} \tag{1.27}$$

est un espace de Hilbert.

**Corollaire 1.3.** ***:***(*Densité* )*[4] On suppose $\Omega$ est de classe $C^1$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, existe une suite $(u_n)$ de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_{n|\Omega} \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Autrement dit, les restrictions à $\Omega$ des fonctions de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ forment un sous-espace dense de $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

**Théorème 1.11.** *[4] : Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose $\Omega$ est de classe $C^1$, borne, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ et $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.*

- *Si $1 \leq p < \infty$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
- *Si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [p, +\infty]$.*
- *Si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$.*

**Théorème 1.12.** ***(Rellich-Kondrachov) [4] :*** *On suppose que $\Omega$ borne de classe $C^1$. On a :*

*1] Si $p < n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad , \quad \forall q \in [1, p^*]$ ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

*2] Si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [p, +\infty]$.*

*3] Si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.*

**Proposition 1.3.** *[4] : Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désinge la fermeture de $C_c(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ c-à-d $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.*

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$.

L'espace $H_0^1\Omega)$ est muni du produit scalaire induite par $H^1(\Omega)$.

**Proposition 1.4.** *[4] : L'espace$W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, réflèxif si $1 < p < \infty$.*

L'espace$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

**Remarque 1.1.** [4] **:** L'espace $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{1.28}$$

Le résultat suivante fournit une caractérisation essentielle de base des fonction dans l'espace $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

**Proposition 1.5.** ***(Inéglité de Poincaré )[4]*** *: Soit $\Omega$ un ouvert borné. Alors, il existe une constante C (dépondant de $\mid \Omega \mid$et $p$ ) telle que :*

$$\| u \|_{L^P} \leq C \| \nabla u \|_{L^P} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty) \tag{1.29}$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantite $\| \nabla u \|_{L^P}$ est une norme é quivalente à la norme usuelle de $\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Le théorème suivant donne une coïncidence des espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R})^n$ aux espaces définies en utilisant la transformé de Fourier des distribution tempérées, ce qui permis nous de généraliser la notion de $H^m$, à un exposant non forcément entier.

D'abord, on va donner la définition et le théorème suivants, qui donne une relation entre les espaces de Sobolev, et l'espace $L^2$.

**Définition 1.11.** [7] :Soit s un nombre réel, on désigne par $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des (classe de ) fonctions $f$ mesurables et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mid f(\zeta) \mid^2 (1+ \mid \zeta \mid^2)^s d\zeta < +\infty \tag{1.30}$$

**Théorème 1.13.** *[7] : Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la transformation de Fourier est un isomorphisme topologie de $H^m(\mathbb{R}^n)$ sur $L_m^2(\mathbb{R}^n)$.*

**Théorème 1.14.** *[7] : On peut écrire :*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\ \widehat{u}(\zeta)\ |^2\ (1+ |\ \zeta\ |^2)^m d\zeta < +\infty. \right\} \tag{1.31}$$

*Démonstration.* On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^m d\zeta = \sum_{|\alpha|=j+k} \frac{\alpha!}{k!j!} \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta^\alpha \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \leq C \sum \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta$$

En utilisant le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $L^2$ dans $L^2$, on arrive à :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^m d\zeta \leq C_1 |u|_{H^m(\mathbb{R}^n)}.$$

**Réciproquement :** on peut aussi vérifier par même argument que :

$$|u|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^m d\zeta.$$

Donc : $|u|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^m d\zeta < +\infty.$

$\square$

CHAPITRE 2

# ESPACE $H^s$ ET OPÉRATEUR LAPLACIEN FRACTIONNAIRE

D'après le théorème 1.14, on va généraliser la notion de l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n)$ à un espace de Sobolev dite fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^n)$ ou $s \in \mathbb{R}^n$.

Nous prenons en compte une définition alternative de l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ via la transformée de Fourier précisement nous pouvons définir :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \zeta \mid^{2s} \mid \mathcal{F}u(\zeta) \mid^2 dx < \infty\}. \tag{2.1}$$

et nous observons que la définition ci-dessus, valable pour tout réel $s \geq 1$. Nous pouvons également utiliser une définition analogue pour le cas $s < 0$ en définissant

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S^{'}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \zeta \mid^{2s} \mid \mathcal{F}u(\zeta) \mid^2 dx < \infty\}. \tag{2.2}$$

## 2.1 Espace $H^s$, Propriétés élémentaires

**Définition 2.1.** [7] : Soit $s \in \mathbb{R}$. Une distribution tempérée est dite élémennt de $H^s(\mathbb{R}^n)$ si son image de Fourier est un élément de $L^2_s(\mathbb{R}^n)$.

Autrement dit;

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |\ \widehat{u}(\zeta)\ |^2\ (1+ |\ \zeta\ |^2)^s d\zeta \right\} \tag{2.3}$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ est munit d'un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\zeta)\overline{\widehat{v}(\zeta)}(1+ |\ \zeta\ |^2)^s d\zeta \tag{2.4}$$

muni de la norme pré-hilbertienne associée

$$B_0^K(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}^n); \quad D^\alpha u \in C_0(\mathbb{R}^n); \quad |\ \alpha\ | \leq k \right\} \tag{2.5}$$

**Théorème 2.1.** *[7] :*

$(i)$ La transformation de Fourier envoie isométriquement $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2_s(\mathbb{R}^n)$.

$(ii)$ Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Hilbert isométriquement isomorphes; plus précisément, la convolution par $\mathcal{F}\left[(1+ |\ M\ |^2)^{\frac{s}{2}}\right]$ envoie isométriquement l'espace $H^{r+s}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace $H^r(\mathbb{R}^n)$, pour tout r et s appartenant à $\mathbb{R}$.

$(iii)$ Pour tout s réel , l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ s'injecte canoniquement dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$; cette injection est continue et a image dense .

$(iv)$ Pour tout s réel , l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $S'(\mathbb{R}^n)$ le dual fort de $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte canoniquement dans $S'(\mathbb{R}^n)$ fort et s'identifie à l'espace hilbertien $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

**Remarque 2.1.** [7] **:** Si $s \in \mathbb{N}$, la distribution $\mathcal{F}[(1+ |\ M\ |^2)^s]$ n'est autre que $(1 + \dfrac{\Delta}{4\pi^2})^s\delta$, ou $\delta$ est la mesure de Dirac et ou $\triangle$ est l'opérateur de Laplace, tandis que $\mathcal{F}[(1+ |\ M\ |^2)^{-s}]$ est une solution élémentaire de l'opérateur $(1 + \frac{\triangle}{4\pi^2})^s$.

## 2.2 Théorèmes d'injection de sobolev

Nous allons étudier la régularité des éléments de $H^s$

a) **Cas de** $\mathbb{R}^n$

**Théorème 2.2.** *[7] : Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{n}{2} + k$.Alors l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte canoniquement dans $B_0^K(\mathbb{R}^n)$.*

ou $B_0^K(\mathbb{R})^n$ est munit vectoriel de la norme :

$$P_k(u) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} | D^\alpha u(x) | \tag{2.6}$$

b) **Cas d'un ouvert quelconque**

**Théorème 2.3.** *[7] : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Soit $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ deux entiers $m > \dfrac{n}{2} + k$. Alors l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte canoniquement dans l'espace $C^k(\mathbb{R}^n)$.*

c) **Cas d'un ouvert possédant la propriété de m-prolongement**

On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possède la propriété de m-prolongement s'il existe une application linéaire $\Pi$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ continue de $H^r(\Omega)$ dans $H(\mathbb{R}^n)$ pour tout $r = 0, 1, 2, ..., m$ telle que la restriction de $\Pi u$ à $\Omega$ coïncide $(p.p)$ avec $u$ ,$\Pi$ s'appelle un m-prolongement pour $\Omega$. Nous verrons qu'un demi-espace possède la propriété de m-prolongement pour tout $m$ entier positif .

**Théorème 2.4.** *[7] : Soit $\Omega$ un ouvert possédant la propriété de m-prolongement, alors $H^m(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $B^K(\overline{\Omega})$ pour tout $m > \frac{n}{2} + k$.*

Dans ce théorème $B_0^K(\overline{\Omega})$ désigne l'ensemble des fonction $k$ fois continément différentiables sur $\overline{\Omega}$ et dont toute les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k$ sont bornées sur $\overline{\Omega}$ ; on munira $B^K(\overline{\Omega})$ de la norme :

$$P_k(u) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} | D^\alpha u(x) | \tag{2.7}$$

**Théorème 2.5.** *[7] : Soit $K$ un compact dans $\mathbb{R}^n$ et soit $s$ et $r$ deux réels tels que $r < s$; alors l'injection naturelle de $H^s(\mathbb{R}^n) \cap (C_K)'(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ est compacte.*

Dans ce théorème

$$H^s(\mathbb{R}^n) \cap (C_k)'(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^r(\mathbb{R}^n); \sup p\, u \subset K\} \tag{2.8}$$

est muni de la topologie induite par celle de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

**Corollaire 2.1.** ***(Théorème de Rellich-Kondrashov )[7] :*** *Soit $\Omega$ un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout entier $m \geq 1$.*

(i) L'injection de $H_0^m(\Omega)$ dans $H_0^{m-1}(\Omega)$ est compact.

(ii) L'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compact si $\Omega$ possède la propriété de m-prolongement.

c) **Généralistion** [7] :

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et soit $s$ et $r$ deux nombres réels tels que $r < s$ .Alors la multiplication par $\varphi$ est une application continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même est une application compacte de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^r(\mathbb{R}^n)$.

## 2.3 Opérateur Laplacien fractionnaire

Cette section est consacrée à la définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$ avec $s \in ]0,1[$, et a ses propriétés.

**Définition 2.2.** [9] **:** soient $p = 2$ et $s \in ]0,1[$. On définit le laplacien fractionnaire par :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{\mid x - y \mid^{n+2s}} dy \tag{2.9}$$

ou $B(x,\varepsilon)$ est la boule centrée en x de rayon $\varepsilon$ et C(n,s) est la constante dimensionnelle qui dépend de n et s précisément donnée par :

$$C(n,s) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{\mid \zeta \mid^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1} \tag{2.10}$$

On peut écrire :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s).P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{\mid x - y \mid^{n+2s}} dy, \tag{2.11}$$

avec

$$P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{\mid x - y \mid^{n+2s}} dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{\mid x - y \mid^{n+2s}} dy. \tag{2.12}$$

**Remarque 2.2.** [15] :

$$\lim_{s\to -1}(-\Delta)^s u = -\Delta u, \tag{2.13}$$

et

$$\lim_{s\to 0^+}(-\Delta)^s u = u. \tag{2.14}$$

## 2.4 Asymptotique de la constante C(n,s)

Dans cette section , nous allons dans le détail sur le facteur constant C(n,s) qui apparaît dans la définition du laplacien fractionnaire, en analysant son comportement asymptotique comme $s \longrightarrow 1^- et\ s \longrightarrow 0^+$, ceci est pertinent si l'on veut récupérer les normes de sobolev des espaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$ en commençant par celle de $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

Nous sommes intéresses a analyser le comportement asymptotique comme $s \longrightarrow 1^-$ et $s \longrightarrow 0^+$ d'une mise à l'échelle de la quantité dans le côte droit de la formule ci-dessus .

En changement la variable $\eta' = \zeta'/\mid \zeta_1 \mid$nous avons :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta \mid^{n+2}} d\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta_1 \mid^{n+2s}} \frac{1}{(1+\mid \zeta' \mid^2 / \mid \zeta_1 \mid^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\zeta' d\zeta_1, \tag{2.15}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{\mid \zeta_1 \mid^{1+2s}} \frac{1}{(1+\mid \eta' \mid^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta' d\zeta_{1}, \tag{2.16}$$

$$= \frac{A(n,s)B(s)}{s(1-s)}, \tag{2.17}$$

ou

$$A(n,s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+\mid \eta' \mid^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\eta' \tag{2.18}$$

$$B(s) = s(1-s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(t)}{\mid t \mid^{1+2s}} dt \tag{2.19}$$

**Proposition 2.1.** *[9] : pour tout $n > 1$ ,on défini $A$ et $B$ par(2.18) et (2.19) respectivement, on a :*

*(i)* $\lim\limits_{s\to 1^-} A(n,s) = \omega_{n-2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}} d\rho < +\infty;$

*(ii)* $\lim_{s\to 0^+} A(n,s) = \omega_{n-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}} d\rho < +\infty;$

*(iii)* $\lim_{s\to 1^-} B(s) = \frac{1}{2};$

*(iv)* $\lim_{s\to 0^+} B(s) = 1;$

*ou $\omega_{n-2}$ désigne (n-2) la mesure dimensionnelle de la sphére unitaire $S^{n-2}$.*

*En conséquence :*

$$\lim_{s\to 1^-} \frac{C(n,s)}{s(1-s)} = \left( \frac{\omega_{n-2}}{2} {}_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}} d\rho \right)^{-1}, \tag{2.20}$$

*et*

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{C(n,s)}{s(1-s)} = \left( \omega_{n-2} {}_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}} d\rho \right)^{-1}. \tag{2.21}$$

**Corollaire 2.2.** *[9] : Pour tout $n > 1$ ,on défini C(n,s) par (2.10), on a :*

*(i)* $\lim_{s\to 1^-} \frac{C(n,s)}{s(1-s)} = \frac{4n}{\omega_{n-1}},$

*et*

*(ii)* $\lim_{s\to 0^+} \frac{C(n,s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\omega_{n-1}}.$

*ou $\omega_{n-1}$ désigne (n-1) la mesure dimensionnelle de la sphère unitaire $S^{n-1}$.*

**Proposition 2.2.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et $(-\Delta)^s : \Im \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ alors on définit le laplacien fractionnaire via la transformée de fourier par :*

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mid \zeta \mid^{2s} (\mathcal{F}u)(\zeta)\right)(x) \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{2.22}$$

**Proposition 2.3.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et C(n,s) est la constant défini dans ((2.10)), pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$, l'égalité :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta.y)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy = C(n,s)^{-1} \mid \zeta \mid^{2s}. \tag{2.23}$$

**Proposition 2.4.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et C(n,s) est la constant défini dans (2.10), s pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, l'égalité :*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mid \zeta \mid^{2s} \mid \mathcal{F}u(\zeta) \mid^2 d\zeta. \tag{2.24}$$

De plus :

$$H^{s}(\mathbb{R}^{n}) = \widehat{H^{s}(\mathbb{R}^{n})}. \tag{2.25}$$

Le théorème suivant nous permis de généraliser la notion de l'espace de Sobolev $H^s$ à l'espace de Sobolev $W^{s,p}$, en remplaçant $2s$ dans (2.10) par $sp$.

**Théorème 2.6.** *[9] : Soit $s \in ]0,1[$ et soit $u \in H^{s}(\mathbb{R}^{n})$ puis*

$$[u]^{2}_{H^{s}(\mathbb{R}^{n})} = 2C(n,s)^{-1} \parallel (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \parallel^{2}_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})} \tag{2.26}$$

ou C(n,s) est défini par (2.10).

*Démonstration.* : L'égalité dans (2.26) découle clairement de la proposition 2.2 et de la proposition 2.4. En effet,

$$\parallel (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \parallel^{2}_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})} = \parallel \mathcal{F}^{-1}(-\delta)^{\frac{s}{2}} u \parallel^{2}_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})} = \parallel\mid \zeta \mid^{s} \mathcal{F}^{-1} u \parallel^{2}_{L^{2}(\mathbb{R}^{n})} = \frac{1}{2} C(n,s) [u]^{2}_{H^{s}(\mathbb{R}^{n})} \tag{2.27}$$

□

**Proposition 2.5.** *[9] : Soit $s \in ]0,1[$. Alors :*

$$(-\triangle)^{s} u(x) = -\frac{1}{2} C(n,s) \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{\mid y \mid^{n+2s}} dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n} \tag{2.28}$$

**Remarque 2.3.** [15] :Soit $s \in ]0, \frac{1}{2}[$. Observez que pour tout $u \in s$ et pour un $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy \leq C \int_{B(x,\mathbb{R})} \frac{\mid x-y \mid}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy + \parallel u \parallel \int_{\mathbb{R}^{n} \backslash B(x,\mathbb{R})} \frac{1}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy \tag{2.29}$$

$$\leq C \left( \int_{0}^{R} \frac{1}{\rho^{2s}} d\rho + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2s}+1} d\rho \right) < +\infty \tag{2.30}$$

où C est une constante positive dépendant uniquement de la dimension $n$ et $L^{\infty}$- norme de la fonction $u$ .Par conséquemt dans le cas $s \in ]0, 1/2[$ l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{u(x)-u(y)}{\mid x-y \mid^{n+2s}} dy \tag{2.31}$$

n'est pas singulier prés du point $x$ ,on peut donc se débarrasser du $P.V$ dans (2.12)

**Proposition 2.6.** ***:([13] Lemme 16.1) :*** *soit $s > \frac{1}{2}$, alors toute fonction $u \in H^{s}(\mathbb{R}^{n})$ a une trace $v$ sur l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ telle que $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ .*

De plus l'opérateur de trace T est surjectif de $H^{s}(\mathbb{R}^{n})$ sur $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ .

## 2.5 Une généralisation de $(-\Delta)^s$

**Définition 2.3.** [15] : Nous introduisons ici un opérateur intégrodifférentiel général de type non local qui généralise $(-\Delta)^s$ pour tout $s \in ]0,1[$ fixé ,l'opérateur $\mathcal{L}^k$ est donné par

$$\mathcal{L}^k u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy \tag{2.32}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ , où le noyau $K : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction ayant les propriétés suivants :

$mK \in L^1(\mathbb{R}^n)$ où $m(x) := \min\{| x |^2, 1\}$; il existe $\theta > 0$ tel que $k(x) \geq \theta \mid x \mid^{-(n+2s)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Bien sûr, comme modèle pour $k$ , on peut prendre la fonction

$$k(x) \geq \theta \mid x \mid^{-(n+2s)}, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \tag{2.33}$$

Chapitre 3

# Espaces de Sobolev Fractionnaires $W^{s,p}$

Dans ce chapitre, on veut introduire une notion généralisée des espaces de Sobolev classiques, cette notion est la notion des espaces de Sobolev fractionnaire, basée sur la théorème 2.6.

Soit $\Omega$ un ouvert éventuellement non régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$et $p \in [1, +\infty[$, pour toute $s > 0$. Dans la littérature, les espaces fractionnaires de type de sobolev sont également appelés espace Aronszajn,Gagliardo ou Slobodeckij ([2],[12]).

## 3.1 Définitions et généralités :

**Définition 3.1.** [9] **:** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\mid u(x) - u(y) \mid}{\mid x - y \mid^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \tag{3.1}$$

muni de la norme suivante :

$$\| u \|_{W^{s,p}} := (\| u \|_{L^p}^p + [u]_{s,p}^p)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2}$$

ou le terme $[u]_{s,p}$ est la semi norme de Gagliardo défini par :

$$[u]_{s,p} = \left( \int_\Omega \int_\Omega \frac{\mid u(x) - u(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

**Proposition 3.1.** *[9] : Soit $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s \leq s' < 1$, soit $\Omega$ un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction mesurable :*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega), \tag{3.4}$$

*est continue, pour certains constante positives $C = C(n, s, p) \geq 1$ :*

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1 \| u \|_{W^{s',p}(\Omega)} \tag{3.5}$$

*En particulier :*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

*Démonstration.* :

Premièrement, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap [|x-y| \geq 1]} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \left( \int_{\Omega \cap [|x-y| \geq 1]} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) \mid u(x) \mid^p dx \\ &\leq C(n, s, p) \| u \|_{L^p(\Omega)}^p . \end{aligned} \tag{3.7}$$

où nous avons utilisé le fait que : $\frac{1}{|z|^{n+sp}}$ est intégrable puisque $n + sp > n$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &\leq 2^{p-1}\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{|u(x)|+|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ &\leq 2^p C(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.8}$$

D'autre part :

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy \leq \int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+s'p}} dxdy \tag{3.9}$$

car $n + sp > n + s^{'}p$ et $| x - y |< 1$, alors (3.8) implique (3.9)

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy \leq 2^p C(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+s'p}} dxdy \tag{3.10}$$

Alors :

$$\parallel u \parallel_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 2^p C(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq 1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+s'p}} dxdy \tag{3.11}$$

$$\leq C(n,s,p) \parallel u \parallel_{W^{s',p}(\Omega)} \tag{3.12}$$

□

**Proposition 3.2.** *[9] : Soit $p \in [1, +\infty[$ et $p \in [1, +\infty[$ et $s \in ]0, 1[$ , soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ de frentière bornée.*

Alors :

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega), \tag{3.13}$$

est continue , i.e. il existe une constante $C(n,s,p) \geq 1$ telle que :

$$\parallel u \parallel_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_2 \parallel u \parallel_{W^{s1,p}(\Omega)} . \tag{3.14}$$

En particulier :

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega). \tag{3.15}$$

*Démonstration.* Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Grâce aux hypothèses sur le domaine $\Omega$, nous pouvons prolonger $u$ vers une fonction $\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\parallel \widetilde{u} \parallel_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \parallel u \parallel_{W^{1,p}(\Omega)}$ .

On utilise le changement de variable $z = y - x$ et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|<1]} \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{B_1} \frac{| u(x) - u(z+x) |^p}{| z |^{n+s'p}} dzdy \\ &= \int_\Omega \int_{B_1} \frac{| u(x) - u(z+x) |^p}{| z |^p} \frac{1}{| z |^{n+(s-1)p}} dzdy.\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \nabla(x+tz)dt &= \int_x^{x+z} \frac{\nabla(u)}{\mid z \mid} du \\
&= \frac{u(x)-u(z+x)}{\mid z \mid^p},
\end{aligned}
$$

ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|<1]} \frac{\mid u(x)-u(y) \mid^p}{\mid x-y \mid^{n+sp}} dxdy &\leq \int_\Omega \int_{B_1} \left( \int_0^1 \nabla(x+tz)dt \right)^p \left( \frac{1}{z^{n+(s-1)p}} \right)^p dzdx \\
&= \int_\Omega \int_{B_1} \left( \int_0^1 \frac{\nabla(x+tz)}{z^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p dzdx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \left( \int_0^1 \frac{\nabla\widetilde{u}(x+tz)}{z^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dt \right)^p dzdx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\mid \nabla\widetilde{u}(x+tz) \mid^p}{\mid z \mid^{\frac{n}{p}+(s-1)}} dtdzdx \\
&\leq \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\parallel \nabla\widetilde{u} \parallel^p}{\mid z \mid^{n+(s-1)p}} dtdx \\
&\leq C_1(n,s,p) \parallel \nabla\widetilde{u} \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_1(n,s,p) \parallel \widetilde{u} \parallel^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_2(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Alors, nous avons :

$$
\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|<1]} \frac{\mid u(x)-u(y) \mid^p}{\mid x-y \mid^{n+sp}} dxdy \leq C_2(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{3.16}
$$

Nous avons :

$$
\int_\Omega \int_{\Omega\cap[|x-y|\geq1]} \frac{\mid u(x)-u(y) \mid^p}{\mid x-y \mid^{n+sp}} dxdy \leq C(n,s,p) \parallel u \parallel^p_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.17}
$$

D'ou le résultat. □

**Définition 3.2.** [9] **:** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soient $s \notin \mathbb{N}$ avec $s > 1$ et $p \in [1,+\infty[$ et soit $s = m + \sigma$ et $\sigma \in ]0,1[$

L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad \forall\alpha \quad \mid \alpha \mid = m\}, \tag{3.18}$$

ou $m$ est un entièr.

•C'est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \| u \|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.19}$$

**Proposition 3.3.** *[9] : Soit $p \in [1,+\infty[$ et $s, s' > 1$, soit $\Omega$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ puis : si $s' > s$ nous avons*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega). \tag{3.20}$$

**Théorème 3.1.** *[9] : Pour tous $s > 0$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Remarque 3.1.** [9] : Pour $s < 0$ et $p \in ]1,+\infty[$ on définit $W^{s,q}(\Omega)$ comme dual de $W_0^{-s,p}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

## 3.2 Injections de Sobolev fractionnaire

Notons également que des noyaux plus généraux pour les espace $W^{s,p}$ peuvent être obtenus par des techniques d'interpolation et en passant par des espaces Besov ([3], [14]) .Pour un traitement plus complet des inégalités fractionnaires de type sobolev nous référons à ([8],[5],[1],[13]).

**Première cas $(sp < n)$ :**

**Théorème 3.2.** *[9] : Soit $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ .Alors il existe un constant positif $C = C(n,p,s)$ tel que pour toute fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :*

$$\|f\|^p_{L^{p*}} \leq C_{\mathbb{R}^n\mathbb{R}^n} \frac{\mid f(x) - f(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+sp}} dxdy \tag{3.21}$$

avec $p^* = p^*(n,s)$ : est l'exposant critique fractionnaire , qui égale á $\dfrac{np}{n-sp}$, s'est-é-dire

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall q \in [p,p^*] \tag{3.22}$$

**Théorème 3.3.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < n$ .Pour toute fonction mesurable à support compact et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe $C = C(n,s,p)$ tel que :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}} \qquad \forall q \in [p,p^*,] \tag{3.23}$$

avec $p^* = np/(n-sp)$,
c'est-à-dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \forall q \in [p,p^*]. \tag{3.24}$$

## Deuxième cas $(sp = n)$ :

**Théorème 3.4.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp = n$ .Alors il existe un constant $C = C(n,p,s) > 0$, pour tout fonction mesurable a support compact $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}} \qquad \forall q \in [p,+\infty], \tag{3.25}$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \forall q \in [p,+\infty]. \tag{3.26}$$

**Théorème 3.5.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp = n$ et soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Alors il existe un constant $C = C(n,p,s,\Omega)$ tel que ,pour tout $f \in W^{s,p}(\Omega)$ on a :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}} \qquad \forall q \in [p,+\infty], \tag{3.27}$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \forall q \in [p,+\infty]. \tag{3.28}$$

**Corollaire 3.1.** *[9] : Sous les hypothèses de Théorème (3.5) ,si on suppose de plus que $\Omega$ est borné, alors :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}} \qquad \forall q \in [1,+\infty], \tag{3.29}$$

*avec $C = C(n,p,s,\Omega)$,*
*c'est à dire :*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \forall q \in [1,+\infty]. \tag{3.30}$$

## Troisème cas $(sp > n)$ :

**Théorème 3.6.** *[9] :Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp > n$. Alors il existe un constant $C = C(n,p,s,\Omega)$, on a :*

$$\|f\|_{C^{0,n-\frac{s}{p}}} \leq C\|f\|_{W^{s,p}} \qquad \forall f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n), \tag{3.31}$$

*c'est a dire :*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.32}$$

*Plus précisément :*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{0,n-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.33}$$

**Corollaire 3.2.** *[9] : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ de frontière borné ,et Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp > n$ , alors il existe un constant $C = C(n,p,s,\Omega)$ on a :*

$$\|f\|_{C^{0,n-\frac{s}{p}}} \leq \left(C\|f\|_{L^p} + \int_{\Omega\Omega} \frac{|\, f(x) - f(y)\,|^p}{|\, x-y\,|^{n+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n), \tag{3.34}$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0,n-\frac{s}{p}}(\Omega) = C_b^{0,n-\frac{s}{p}}(\Omega). \tag{3.35}$$

## 3.3 Injections compacts

Dans cette section , nous indiquons certains résultats de compacité impliquant les espaces fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$ dans les domaines bornés. La preuve principale est une modification de l'un des théorèmes classiques de Riesz-Frechet-Kolmogorov ([11] ) et encore une fois, elle est autonome et il n'est pas nécessaire d'utilisation l'espace de Besov ou d'autres espace d'interpolation, ni les flux de transformation de Fourier et de semi_ groupe ([6] , théorème 1.5] ).

**Théorème 3.7.** *[9] : Soit $s \in ]0,1[$ , $p \in [1,+\infty[$ , $q \in [1,p]$ , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine d'extension borné pour $W^{s,p}$ et $\Im$ est un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ , supposons que :*

$$\sup_{f\in\Im} \int_\Omega \int_\Omega \frac{| f(x) - f(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy < +\infty \tag{3.36}$$

*Alors $\Im$ est précompact dans $L^q(\Omega)$.*

**Corollaire 3.3.** *[9] : Soient $s \in ]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp < n$ soient $q \in [1,p^*]$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un domaine d'extension borné pour $W^{s,p}$ et $\Im$ est un sous-ensemble borné de $L^P(\Omega)$ , supposons que*

$$\sup_{f\in\Im \Omega\Omega} \frac{| f(x) - f(y) |^p}{| x-y |^{n+sp}} dxdy < +\infty \tag{3.37}$$

Alors $\Im$ est précompact dans $L^q(\Omega)$.

## 3.4 Opérateur $p - Laplacien$ fractionnaire

**Définition 3.3.** [15] :Soient $p \in ]1,+\infty[\infty$ et $s \in ]0,1[$. On définit le p-laplacien fractionnaire par :

$$(-\triangle)_p^s u(x) = P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{| u(x) - u(y) |^{p-2} (u(x) - u(y))}{| x-y |^{n+2s}} dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.38}$$

avec

$$P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{| u(x) - u(y) |^{p-2} (u(x) - u(y))}{| x-y |^{n+2s}} dy = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} \frac{| u(x) - u(y) |^{p-2} (u(x) - u(y))}{| x-y |^{n+2s}} dy \tag{3.39}$$

**Remarque 3.2.** [15] : Si $p \neq 2$ :$(-\triangle)_p^s$ est non linéaire . Cet opérateur est appelé non local, en ce sens que la valeur de p-laplacien fractionnaire u(x) à tout pour x $\in \Omega$ dépond non seulement des valours de x sur l'ensemble $\Omega$ , mais en fait sur la tout $\mathbb{R}^n$ • $(-\triangle)_p^s \longrightarrow (-\triangle)_p$ quand $s \longrightarrow -1$.

# Bibliographie


[1] **R. A. Adams,** *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] **N. Aronszajn,** *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral*. Techn. Report of Univ.of Kansas **14** (1955),77-94.

[3] **O. V. Besov**, *On a certain family of functional spaces. Imbed ding and continuation theorems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **126** (1959),1163-1165.

[4] **H.Brézis,** *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris,1983.

[5] **H. Brézis , P. Mironescu, & Gagliardo-Nirenberg**, *Composition and products in fractional Sobolev spaces*, J. Evol. Equ.1 (2001), no.4, 387-404.

[6] **A. Cotsiolis & N. K. Tavoularis**, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl., 295 (2004), 225-236.

[7] **V.K. Khoan,** *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, tome 2, Vuibert, 1972.

[8] **J. L. Lions**, *Théorèmes de trace et d'interpolation (IV)*, Math. Ann.151 (1963), 42-56.

[9] **E. Di Nezza, G. Palatucci, & E. Valdinoci,** *Hitchhikre's guide to the fractional Sobolev spaces*, Elsevier ,2011.

[10] **V.D. Radulescu G.M. Bisci & R. Servadei**. *Variational methods for nonlocal fractional problems*. University Printing House, Cambridge, United Kingdom, 2016.

[11] **M. Riesz,** *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*. Acta Szeged Sect. Math. **6** (1933), 136-142.

[12] **L. N. Slobodeckij,** *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations*. Leningrad. Gos. Ped. Inst. U2c7cep. Zap. **197** (1958), 54-112.

[13] **L. Tartar**, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana **3**, Springer Verlag, Berlin.Heidelberg 2007.

[14] **S. V. Uspenskii**, *An imbedding theorem for S. L.Sobolev's classes $W_p^r$ of fractional order*, English translation in Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 132-133.

[15] **V.D. Radulescu G.M. Bisci and R. Servadei.** *Variational methods for nonlocal fractional problems.* University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom, 2016.

[16] **E. Valdinoci,** *From the lung jump random walk to the fractional Laplacian.* Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. S~eMA 49 (2009), 33–44

# ملخص

في هذا العمل سنقدم باختصار تعاريف ومفاهيم خاصة بفضاءات سوبولاف كسرية الرتبة، والتي هي تعميم لفضاءات سوبولاف ذات الرتب الصحيحة. سيتم أولا تقديم التعاريف الخاصة بفضاءات سوبولاف الكسرية ذات الأساس $L^2$ والتي تعتمد على تحويل فورييه للتوزيعات المعتدلة، ثم تقديم تعريف فضاءات سوبولاف الكسرية بصفة عامة اعتمادا على القيمة الرئيسية لتكامل معطى.

أيضا سنقوم بتقديم مفهوم وبعض خواص مؤثر لابلاس كسري الرتبة، ومؤثر $p-$ لابلاس كسري الرتبة.



**كلمات مفتاحية:** فضاءات سوبولاف، فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة، مؤثر لابلاس كسري الرتبة، مؤثر $p-$ لابلاس كسري الرتبة.



# Résumé

Dans ce travail, nous présenterons brièvement des définitions et des concepts de l'ordre fractionnaire de l'espace Sobolev, qui est une généralisation des espaces de Sobolav d'ordre entier. Les définitions des espaces Sobolav fractionnaires avec une base de $L^2$ qui dépendent de la transformée de Fourier des distributions modérées seront présentées en premier, puis la définition des espaces Sobolev fractionnaires en général sera présentée en fonction de la valeur principale d'une intégrale donnée .



**Mots clés :** Espace de Sobolev, espaces Sobolev fractionnaires, opérateur de Laplace fractionnaire, opérateur $p-$ Laplaceien fractionnaire.



# Abstract

In this work, we will briefly present definitions and concepts of the fractional order of Sobolev space, which is a generalization of Sobolav spaces of whole order. The definitions of fractional Sobolav spaces with a base of $L^2$ which depend on the Fourier transform of moderate distributions will be presented first, then the definition of fractional Sobolv spaces in general will be presented according to the principal value of a given integral.



**Keywords:** Sobolev space, fractional Sobolev spaces, fractional Laplace operator, $p-$ fractional Laplaceian operator.