République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed BoudiafDe M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

HAMDAOUI AOUATIF

Sujet

La localisation dans les espaces de type Triebel-Lizorkin

Date de soutenance :30/06/2019

Devant le jury :

Mr. Heraiz Rabah	M.C.B. Univ. de M'sila	Président
Mr. Djeriou Aissa	M.C.B. Univ.de M'sila	Rapporteur
Mr. Tallab Abdelhamid	M.C.B. Univ.de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je remercie mon Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu' à l ' achèvement de ce mémoire Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur : ***Djeriou Aissa*** *mon promoteur. Je le remercie pour sa gentillesse et sa disponibilité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction. Mes remerciements à tous les membres de jury :* ***Mr Heraiz Rabah*** *et* ***Mr Talab Abdelhamid****, qui ont acceptés de juger ce travail et d ' y apporter leurs cautions. Mesremerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leurs conseils, leurs Encouragements et leurs soutiens.*

Présenter

Merci

Table des matières

Notation et conventions

1. $\mathbb{N}$ est la collection de tous les nombres naturals.
2. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
3. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tout les nombres entiers.
4. $\mathbb{R}^n$ est l'espace Euclidien.
5. $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \cdots, n.$
6. Si $r \in \mathbb{Z}$, alors on pose $r^+ = \max(0, r)$.
7. $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$.
8. Le produit scalaire de $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n), i = 1, \cdots, n$ est définie par :
$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$
9. $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
10. Soient A_1 et A_2 deux espaces. $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :
$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \quad \forall f \in A_1.$$
11. p' est l'exposant conjugué de p oú $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. supp f est le support de f :
$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$
13. $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

14. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, appelé espace des distribution sur $\mathbb{R}^n$.

15. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ muni de semi norme classique

$$\Im_M(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq M} (1+|x|)^M \left|\partial^\alpha f\right|, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distribution tempérées.

16. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi$$

17. $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r

$$B(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\right\}.$$

18. $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$: désigne l'ensemble de tous les *polynômes* de $\mathbb{R}^n$.

19. $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$: l'ensemble des $u \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle f, u\rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

20. $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$: le dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des distribution modulo les polynômes.

Introduction

Plusieurs auteurs comme G. Bourdaud en [2] et A. Youssfi [14], H. Triebel [11] et A. Djeriou [3] ont étudiés la localisation des espaces de Sobolev H^s, Besov $B^s_{p,q}$, Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}$ et Triebel-Lizorkin homogène $\dot{F}^s_{p,q}$ en norme de ℓ^p.

Dans ce mémoire, on a basée sur le travail du A. Djeriou [5]. Qu'il a prouvé la localisation des espaces de type Triebel-Lizorkin généralisés $F^{v,\tau}_{p,q}$, et son multiplicateur $M(F^{v,\tau}_{p,q})$, qui sont défini par une fonction positive $v : [0, \infty) \longrightarrow]0, \infty)$ satisfaisant

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<\mu\leq 1} \frac{v(\mu)}{v(t\mu)} < +\infty.$$

Nous allons étudier la localisation des espaces de type Triebel-Lizorkin $F^{s,\tau}_{p,q}$ et les espaces des multiplicateurs de type Triebel-Lizorkin $M(F^{s,\tau}_{p,q})$ par la norme de $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ pour $v(t) = t^{-s}$.

Ce mémoire se compose en trois chapitres et d'une bibliographie avec la façons suivantes :

Le premier chapitre est constitué des notions fondamentales sur quelques espaces fonctionnels et inégalités qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on va présenter quelques définitions essentielles comme la décomposition de Littlewood-Paley et les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et type Triebel-Lizorkin $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Dans le troisième chapitre, une première partie commence par une généralités sur la localisation en norme de $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$, et dans la deuxième partie on va démontrer que l'espace $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est localisable en norme de $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ (i.e. $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \sim \left(F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)_{\ell^p}$), qu'il a aussi donné que l'espace $M(F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ est localisable en norme de $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ (i.e. $M(F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \sim \left(M(F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))\right)_{\ell^\infty}$). On termine ce chapitre par la preuve que si $s > n \max\left\{\frac{1}{p} - \tau, \frac{1}{q} - 1\right\}$, on a $M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}$.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

1.1 Définitions et quelques propriétés de certain espaces

Dans cette partie, on présente quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$, ℓ^p, ℓ^s_{q,r_+} et $L^p(\Omega, \ell^s_{q,r_+})$. On commence par les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 *Soient $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. On pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f|L^p(\Omega)\| < \infty\},$$

avec

$$\|f|L^p(\Omega)\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \qquad si \quad 0 < p < \infty.$$

et

$$\sup_{x\in\Omega} ess\, |f(x)| \qquad si \quad p = \infty.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.2 Les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$

Définition 1.1.2 *Soit* $0 < p \leq \infty$. *On appelle* ℓ^p *l'espace de suites* $\{f_j\}_{j\geq 0}$ *à valeurs réelles ou complexes telles que*

$$\left\| \{f_j\}_{j\geq 0} \, |\ell^p(\mathbb{N}) \right\| = \left(\sum_{j\geq 0} |f_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \qquad si \quad 0 < p < \infty$$

et

$$\left\| \{f_j\}_{j\geq 0} \, |\ell^\infty(\mathbb{N}) \right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} |f_j| < \infty.$$

Ces espaces sont de Banach.

Théorème 1.1.1 *Si* $0 < p \leq q \leq \infty$, *alors on a* $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$.

1.1.3 Les espaces $\ell^s_{p,r} \ (\mathbb{N})$

Définition 1.1.3 *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}, r^+ = \max(0,r)$ *et* $0 < p \leq \infty$. *On appelle* ℓ^s_{p,r^+} *l'espace de suites* $\{f_j\}_{j\geq 0}$ *à valeurs réelles ou complexes telles que*

$$\left\| \{f_j\}_{j\geq r^+} \, |\ell^s_{p,r^+} \right\| = \left(\sum_{j\geq r^+} 2^{jsp} \, |f_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \qquad si \quad 0 < p < \infty$$

et

$$\left\| \{f_j\}_{j\geq r^+} \, |\ell^s_{\infty,r^+} \right\| = \sup_{j\geq r^+} (2^{sj} \, |f_j|) < \infty.$$

Propriétés 1.1.1 *Soient* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Z}$ *et* $0 < p \leq \infty$.

1. $\ell^0_{p,r^+} = \ell_p$, *si* $r \in \mathbb{Z}_-$ *et* $0 < p \leq \infty$.
2. $\ell^{s_2}_{p,r^+} \hookrightarrow \ell^{s_1}_{p,r^+}$, *si* $s_2 \geq s_1$.
3. $\ell^{s_1}_{p,r^+} \hookrightarrow \ell^{s_1}_{q,r^+}$, *si* $0 < p \leq q \leq \infty$.

1.1.4 Les espaces $L^p(\Omega, \ell^s_{q,r} \ )$

Définition 1.1.4 *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}$, $0 < p, q \leq \infty$ *et* $\Omega \in \mathbb{R}^n$. *On appelle* $L^p(\Omega, \ell_{q,r^+})$ *l'espace des suites des fonctions* $\{f_j\}_{j\geq r^+}$ *qui vérifie*

$$\left\| \{f_j\}_{j\geq r^+} \, |L^p(\Omega, \ell^s_{q,r^+}) \right\| = \left\| \left(\sum_{j\geq r^+} 2^{sjq} \, |f_j|^q \right)^{1/q} |L^p(\Omega, \ell^s_{q,r^+}) \right\| < +\infty$$

1.2 La fonction maximale

La fonction maximale est un outil important pour caractériser certains espaces fonctionnel. Nous allons rappeler quelques propriétés de cette fonction.

Définition 1.2.1 *Pour tout fonction f localement intégrable, on définit la fonction maximale par*

$$\mathcal{M}g(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)|\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Si $t \in (0,\infty)$, alors nous définissons $\mathcal{M}_t g(x) = \left[\mathcal{M}\, |g|^t\right]^{1/t}(x)$ pour les $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 1.2.1 *Soit $1 < q < \infty$ et $1 < w \leq p < \infty$. Si $\{g_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ a>0} a^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{w})} \Big\| \{\mathcal{M}g_j\}_{j=0}^{\infty} \,|L^w(B(x,a),\ell^q(\mathbb{N}))\Big\| \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ a>0} a^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{w})} \Big\| \{g_j\}_{j=0}^{\infty} \,|L^w(B(x,a),\ell^q(\mathbb{N}))\Big\|.$$

Preuve. pour la preuve voir [13]. ■

1.3 Inégalités classiques

Lemme 1.3.1 *Si $0 < \theta \leq 1$.*

$$\left(\sum_{j\geq 0} |f_j|\right)^{\theta} \leq \sum_{j\geq 0} |f_j|^{\theta}.$$

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Hölder) *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p, p' \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\left\|f \cdot g|L^1\right\| \leq \|f|L^p\| \left\|g|L^{p'}\right\|.$$

Proposition 1.3.2 (Inégalité de Minkowski) *Soient $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f + g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f + g|L^p\|_p \leq \|f|L^p\| + \|g|L^p\|.$$

Théorème 1.3.1 (Inégalité intégrale de Minkowski) *Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.*
Si $0 < p \leq q \leq \infty$, alors on a

$$\left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (f(x,y))^p dy\right)^{q/p} dx\right)^{1/q} \leq \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} (f(x,y))^q dx\right)^{p/q} dy\right)^{1/p}$$

Proposition 1.3.3 (Inégalité de Young) *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tel que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *alors* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Lemme 1.3.2 *Soient* $0 < a < 1$ *et* $0 < q \leq \infty$. *Pour toute suite réelle à terme positif* $\{\psi_j\}_{k \geq r^+}$ *dans* ℓ^q, *les suites* $\sigma_k = a^k \sum_{j=r^+}^{k} a^{-j}\psi_j$ *et* $\mu_k = a^{-k} \sum_{j=r^+}^{k} a^j \psi_j$ *appartiennent à* ℓ^q *de plus, il existe une constante* $c = c(a, q) > 0$, *telle que*

$$\| \{\sigma_k\}_{k \geq r^+} |\ell^q\| + \| \{\mu_k\}_{k \geq r^+} |\ell^q\| \leq c\| \{\psi_k\}_{k \geq r^+} |\ell^q\|$$

Preuve. Pour $1 < q < \infty$, on peut écrire la suite $\{\sigma_k\}$ sous la forme

$$\sigma_k = \sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)/q} a^{(k-j)/q'} \psi_j .$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\sigma_k^q \leq \left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)} \psi_j^q \right) \left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)} \right)^{q/q'},$$

par conséquent

$$\sum_{k=r^+}^{\infty} \sigma_k^q \leq \sum_{k=r^+}^{\infty} \left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)} \psi_j^q \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right)^{q/q'} .$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=r^+}^{\infty} \left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{k-j} \psi_j^q \right) &= \left(\sum_{k=j}^{\infty} a^{k-j} \right) \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} \psi_j^q \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} \psi_j^q \right), \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{k=r^+}^{\infty} \sigma_k^q \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right)^q \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} \psi_j^q \right)$$

Ce qui donne

$$\left\|\{\sigma_k\}_{k \geq r^+} |\ell^q\right\| \leq \frac{1}{1-a} \left\|\{\psi_j\}_{j \geq r^+} |\ell^q\right\| .$$

Pour $\{\mu_k\}_{k \geq r^+}$. On peut écrire μ_k sous la forme

$$\mu_k = \sum_{j=k}^{\infty} a^{(j-k)/q} a^{(j-k)/q'} \psi_j .$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\mu_k^q \le \left(\sum_{j=k}^{\infty} a^{(j-k)}\psi_j^q\right)\left(\sum_{j=k}^{\infty} a^{(j-k)}\right)^{q/q'},$$

par conséquent

$$\sum_{k=r^+}^{\infty} \mu_k^q \le \sum_{k=r^+}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} a^{(j-k)}\psi_j^q\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{i}\right)^{q/q'},$$

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{k=r^+}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} a^{(j-k)}\psi_j^q\right) &= \left(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\right)\left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(j-k)}\right)\\ &\le \left(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{i}\right),\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{k=r^+}^{\infty} \mu_k^q \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{i}\right)^{q}\left(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\right)$$

Ce qui donne

$$\left\|\{\mu_k\}_{k\ge r^+}|\ell^q\right\| \le \frac{1}{1-a}\left\|\{\psi_j\}_{j\ge r^+}|\ell^q\right\|.$$

Pour $0 < q \le 1$. Par le lemme 1.3.1, on trouve

$$\sigma_k^q \le \sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)q}\psi_j^q,$$

alors

$$\sum_{k=r^+}^{\infty}\sigma_k^q \le \sum_{k=r^+}^{\infty}\left(\sum_{j=r^+}^{\infty} a^{(k-j)q}\psi_j^q\right)$$

Comme

$$\sum_{k=r^+}^{\infty}\left(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(k-j)q}\psi_j^q\right) = \left(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\right)\left(\sum_{k=j}^{\infty} a^{(k-j)q}\right),$$

alors la somme de σ_k^q pour $k \ge r^+$ est majorée par

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{iq}\right)\left(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\right)$$

Ce qui montre

$$\left\|\{\sigma_k\}_{k\ge r^+}|\ell^q\right\| \le \left(\frac{1}{1-a^q}\right)^{1/q}\left\|\{\psi_j\}_{j\ge r^+}|\ell^q\right\|.$$

Pour $\{\mu_k\}_{k\geq r^+}$, on a

$$\mu_k^q \leq \sum_{j=r^+}^{k} a^{(j-k)q}\psi_j^q,$$

alors

$$\sum_{k=r^+}^{\infty} \mu_k^q \leq \sum_{k=r^+}^{\infty}\Big(\sum_{j=r^+} a^{(j-k)q}\psi_j^q\Big).$$

Comme

$$\sum_{k=r^+}^{\infty}\Big(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(j-k)q}\psi_j^q\Big) = \Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\Big)\Big(\sum_{j=r^+}^{k} a^{(j-k)q}\Big),$$

alors la somme de μ_k^q pour $k \geq r^+$ est majorée par

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a^{iq}\Big)\Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\psi_j^q\Big)$$

Ce qui donne

$$\left\|\{\mu_k\}_{k\geq r^+}|\ell^q\right\| \leq \left(\frac{1}{1-a^q}\right)^{1/q}\left\|\{\psi_j\}_{j\geq r^+}|\ell^q\right\|.$$

Par les raisonnements, on peut démontrer le cas $q=\infty$. ■

1.4 Interpolation

Théorème 1.4.1 (théorème de Riesz-Thorin) *Soient* $(X,\mu),(Y,\nu)$ *deux espaces mesurés et* $p_0,p_1,q_0,q_1 \in [1,\infty]$ *avec* $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$.
On suppose que T *est un opérateur qui renvoie* $L^{p_0}(X,\mu)$ *dans* $L^{q_0}(Y,\nu)$ *et* $L^{p_1}(X,\mu)$ *dans* $L^{q_1}(Y,\nu)$ *tel que, pour tout fonction simples* f *:*

$$\|Tf|L^{q_i}\| \leq C_i\,\|f|L^{p_i}\| \qquad (i=0,1).$$

Alors T *renvoie* $[L^{p_0},L^{p_1}]_\theta = L^p$ *dans* $[L^{q_0},L^{q_1}]_\theta = L^q$ *tels que* $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$ *et* $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$. $(0<\theta<1)$ *de plus*

$$\|Tf|L^q\| \leq C_0^{1-\theta}C_1^{\theta}\,\|f|L^p\|.$$

Preuve. Voir [1]. ■

Théorème 1.4.2 *Pour* $0 < \theta < 1$, $1 \le p_1, p_2 < \infty$ *et* $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q1} + \frac{1-\theta}{q_2}$. *Alors*

$$[\ell^{q_1}(L^{p_1}(\Omega)), \ell^{q_1}(L^{p_2}(\Omega))]_\theta = \ell^q([L^{p_1}(\Omega), L^{p_2}(\Omega)]_\theta) = \ell^q(L^p(\Omega)).$$

Preuve. Voir [8, Section 1.18.1]. ■

Chapitre 2

Définitions et propriétés des quelques espaces

Nous allons définir maintenant les espaces de Besov, Triebel-Lizorkin, type Besov et type Triebel-Lizorkin, qui jouent un rôle important en l'analyse fonctionnelle. Pour cela, on rappel la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

2.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que

(i) $\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$.

(ii) $\varphi(\xi) > 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq |\xi| \leq 3$.

(iii) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \textit{pour} \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

On pose

$$\psi(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 1} \varphi(2^{-j}\xi),$$

on obtient une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tel que $\operatorname{supp} \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$$

est appellée la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions $\Delta_j : \mathcal{S}' \to C^\infty$, définis par

$$\mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi), \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, ...$$

et

$$\mathcal{F}(\Delta_0 f)(\xi) = \psi(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est

$$f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f.$$

Remarque 2.1.1 *Notre définition dépend de toute façon du choix de la couronne* $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$*, puis de* φ*. L'intérêt d'une telle décomposition réside dans les propriétés de presque-orthogonalité des opérateurs* φ_j

2.2 Espace de Besov , Besov homogène et Triebel-Lizorkin

2.2.1 Espace de Besov

Définition 2.2.1 *Soit* $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q < \infty$*. L'espace de Besov noté* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des toutes les fonctions* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

$$\left\| f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| := \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \left\| \Delta_j f|L^p(\mathbb{R}^n) \right\|^q \right)^{1/q} < \infty, \quad \textit{pour} \quad q \neq \infty$$

et

$$\left\| f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \right\| := \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(2^{sj} \left\| \Delta_j f|L^p(\mathbb{R}^n) \right\| \right) < \infty, \quad \textit{pour} \quad q = \infty.$$

2.2.2 Espace de Besov homogène

Définition 2.2.2 *Soient* $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q < \infty$*. L'espace de Besov homogène noté* $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des toutes les fonctions* $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

$$\left\| f|\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sjq} \left\| \Delta_j f|L^p(\mathbb{R}^n) \right\|^q \right)^{1/q} < \infty, \quad \textit{pour} \quad q \neq \infty$$

et

$$\left\| f|\dot{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \right\| := \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj} \left\| \Delta_j f | L^p(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty, \quad \textit{pour} \quad q = \infty.$$

Lemme 2.2.1 *Soient $s \in \mathbb{R}^n, 0 < p \leq \infty$ et $0 < q \leq \infty$, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\left\| f(\lambda\cdot)|\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq c\lambda^{s-\frac{n}{p}} \left\| f|\dot{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \right\|, \tag{2.2.1}$$

pour toutes $\lambda > 0$ et $f \in \dot{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Pour la preuve voir [9, page 237-239].

2.2.3 Espace de Triebel-Lizorkin

Définition 2.2.3 *Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. L'espace de Triebel-Lizorkin noté $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des toutes les fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$\left\| f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| := \left\| \left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \left| \Delta_j f \right|^q \right)^{1/q} |L^p(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty, \quad \textit{pour} \quad q \neq \infty$$

et

$$\left\| f|F^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \right\| := \left\| \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(2^{sj} \left| \Delta_j f \right| \right) |L^p(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty, \quad \textit{pour} \quad q = \infty.$$

2.3 Espace de type Triebel-Lizorkin

Définition 2.3.1 *Soient $s, r \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 \leq \tau < \infty$. L'espace de type Triebel-Lizorkin $F^{s,\tau}_{p,q}$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\left\| f|F^{s,\tau}_{p,q} \right\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left| B(x,2^{-r}) \right|^\tau} \left\| \Delta_j f | L^p(B(x,2^{-r}), \ell^s_{p,r^+}) \right\| < \infty, \quad \textit{si} \quad 0 < q < \infty$$

et

$$\left\| f|F^{s,\tau}_{p,\infty} \right\| := \sup \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \left| f_j \right|^q \right)^{1/p} < \infty, \qquad \textit{si} \quad q = \infty.$$

Remarque 2.3.1

1. La définition de l'espace $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est indépendante du choix de φ et ψ.

2. Si $\tau = 0$. Alors $F^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,q}$ est l'espace de Triebel-Lizorkin usuelle.

3. Les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$ et des Banach pour $p, q \geq 1$.

Proposition 2.3.1

1. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < \infty$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

2. *Soient $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q, r \leq \infty$ et $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$. Alors*

$$F^{s_0,\tau}_{p_0,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s_1,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \quad si \quad s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

3. *Soient $\tau, s \in \mathbb{R}$ et $p \in (0, \infty]$, si $q_1 \leq q_2$. Alors :*

$$F^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n),$$

4. *Soient $\tau, s \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty]$ et $\varepsilon \in (0, \infty)$, pour tout $q_1, q_2 \in (0, \infty]$,*

$$F^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n).$$

5. *Si $\tau \in (-\infty, 0)$, alors $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = 0$.*

Définition 2.3.2 *On dit qu'un espace vectoriel E est une algèbre si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|f \cdot g|E\| \leq C \|f|E\| \, \|g|E\|$$

pour toutes f et g appartiennent à E.

Remarque 2.3.2 Cette définition signifie que si $f, g \in E$ alors $f \cdot g \in E$ au sens de norme.

Proposition 2.3.2 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ et $\tau \in [0, 1/p)$ tel que*

$$s > n \max\left\{\frac{1}{p} - \tau, \frac{1}{q} - 1\right\}.$$

Alors $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une algébre.

Preuve. Voir [15, corollaire 6.1]. ■

2.4 Estimations du type de Littlewood-Paley

Proposition 2.4.1 *Soient $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $A > 0$ et $R \geq 1$*

$$\mathrm{supp}\hat{f} \subset \{\xi : |\xi| \leq AR\} \quad et \quad \mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi : |\xi| \leq A\} \tag{2.4.1}$$

Pour $t \in]0,1]$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left|\mathcal{F}^{-1}(\varphi\hat{f})(x)\right| \leq c(AR)^{n(\frac{1}{t}-1)}\left\|\varphi|\dot{B}^{n/t}_{1,t}(\mathbb{R}^n)\right\|(\mathcal{M}\,|f|^t)^{1/t}(x), \tag{2.4.2}$$

La constante c peut être prise comme fonction de t seulement.

Preuve. Pour la preuve voir [15]. ■

Proposition 2.4.2 *Soient $\gamma > 1$, $q \in (0,\infty]$, $p \in (0,\infty)$, $\tau \in (0, 1/p)$ and $\mu > (n/\min\{p,q\} - n)_+$. Alors*

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} g_j|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^{\tau}}\left\|\,\{g_j\}_{j\geq 0}\,|L^p(B(x,2^{-r}),\ell^s_{p,r})\right\| \tag{2.4.3}$$

est vérifiée, pour toute suite des distributions tempérées $\{g_j\}_{j\geq 0}$ vérifiant :

$$\mathrm{supp}\mathcal{F}g_j \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j\right\}.$$

Remarque 2.4.1 *On peut remplacer les couronnes $\gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j$ par les boules $|\xi| \leq \gamma 2^j$.*

Preuve. (i) On remarque que

$$\Delta_k g_j = 0 \quad \text{si} \quad j \geq k + N_2 \quad \text{ou} \quad j \leq k - N_1, \tag{2.4.4}$$

ou $N_1 = [\log_2 2\gamma]$ et $N_2 = \left[\log_2(\frac{3\gamma}{2})\right]$. Alors nous avons

$$\Delta_k(\sum_{\ell=0}^{\infty} g_j) = \sum_{j=k-N_1}^{k+N_2} \Delta_k g_j,$$

Mainteneant par la proposition 2.4.1 nous trouvons

$$|\Delta_k g_j(x)| \leq c_1 2^{jn(\frac{1}{t}-1)}\left\|\Phi(2^{-k}\cdot)|\dot{B}^{t/n}_{1,t}\right\|\left[\mathcal{M}\,|g_j|^t\right]^{1/t}(x).$$

Puisque $\left\|\varphi(2^k\cdot)|\dot{B}^{t/n}_{1,t}(\mathbb{R}^n)\right\| = 2^{-k(\frac{n}{t}-n)}\left\|\varphi|\dot{B}^{t/n}_{1,t}(\mathbb{R}^n)\right\|$ (voir [9]), on a

$$2^{sk}\left|\Delta_k g_j(x)\right| \leq c_2 2^{(j-k)[n(\frac{1}{t}-1)-s]}\left[\mathcal{M}\left|g_j\right|^t\right]^{1/t}(x).$$

Maintenant, par le lemme 1.3.2 puisque $j \leq k,\ \mu > (n/\min\{p,q\}-n)_+$ et nous avons $t \in (0,1]$ alors nous obtenons

$$\Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\big(2^{sj}\big|\Delta_k g_j\big|\big)^q\Big)^{1/q} \qquad \Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\big(2^{sj}\big[\mathcal{M}\big|g_j\big|^t\big]^{1/t}\big)^q\Big)^{1/q}.$$

Cela implique que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau}\Big\|\Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\big(2^{sj}\big|\Delta_k g_j\big|\big)^q\Big)^{1/q}|L^p(B(x,2^{-r}))\Big\|^{1/t}$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau}\Big\|\Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\big(2^{sj}\big[\mathcal{M}\big|g_j\big|^t\big]^{1/t}\big)^q\Big)^{1/q}|L^p(B(x,2^{-r}))\Big\|^{1/t}.$$

En utilisant le lemme 1.2.1, on obtient

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}g_j|F^{v,\tau}_{p,q}\Big\| \leq c\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau}\Big\|\Big(\sum_{j=r^+}^{\infty}\big(2^{sj}\big|g_j\big|\big)^q\Big)^{1/q}|L^pB(x,2^{-r})\Big\|.$$

La proposition est prouvée. ■

Chapitre 3

La localisation des certains espaces fonctionelles

Dans ce chapitre, on va étudier la localisation de L^p, $F^{s,\tau}_{p,q}$ et $M(F^{s,\tau}_{p,q})$.

3.1 Généralités sur la localisation

On commence par la construction d'une fonction $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, portée par la boule $|x| \leq R$, $(R > \sqrt{n})$, telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(x-k) = 1, \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{3.1.1}$$

En effet, soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive qui vaut 1 sur le cube $|x_i| \leq 2^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$. Alors la fonction $G(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x-k)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, bornée et $G(x) \geq 1$, (puisque pour tout x, il existe $k \in \mathbb{Z}^n$, tel que $|x_i - k_i| \leq \frac{1}{2}$ (pour tout $i = 1, ..., n$) et donc $g(x-k) = 1$). On a aussi $G(x-k) = G(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\dfrac{1}{G(x)}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Il suffit de poser

$$\beta(x) = \frac{g(x)}{G(x)}.$$

On note par

$$\mathcal{A} = \left\{ \beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(x-k) = 1 \right\}.$$

Définition 3.1.1 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$.*

Si E est muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ telle que *(i) L'injection canonique* $E \to \mathcal{D}'$ *soit continue.*

(ii) $(E, \|\cdot\|_E)$ *soit un espace de Banach.*

On dit $(E, \|\cdot\|_E)$ *est un espace de Banach de distribution.*

Nous ferons sur E *les hypothéses suivantes :*

1. *Invariance par translation, si on note* τ_x *l'opérateur* $\tau_x f(t) = f(t-x)$*, alors* τ_x *est une isométrie de* E.
2. *Invariance par localisation, pour tout* $f \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*, on a* $\lambda f \in E$.

Définition 3.1.2 *Soit* E *un espace de Banach de distribution (E.B.D), on dit que* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *est un multiplicateur ponctuel de* E*, s'il existe une constante* $C > 0$*, telle que pour tout* $\phi \in C^\infty \cap E$*, on a*

$$\|f \cdot \phi|E\| \leq C \|\phi|E\|.$$

L'espace linéaire des multiplicateurs sera noté $M(E)$ *définie par la norme*

$$\|f|M(E)\| = \sup_{\|\phi|E\|=1} \|f \cdot \phi|E\|.$$

Remarque 3.1.1

1. *Si* E *contient* $C^\infty \cap E$ *comme un sous-espace dense, on dit tout simplement, pour tout* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$f \cdot \phi \in E \quad et \quad \|f \cdot \phi|E\| \leq c \|\phi|E\|$$

2. $\left(M(E), \|\cdot\|_{M(E)}\right)$ *est un espace de Banach.*
3. *Si* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset M(E)$ *alors* $M(E)$ *est une algébre (i.e., si* $f, g \in M(E) \Rightarrow f \cdot g \in M(E)$*).*
4. $M(E) = M(E')$ *tel que* E' *est le dual de* E.

Définition 3.1.3 *Soit* E *un espace de Banach de distribution (E.B.D). On définit* $(E)_{\ell^w}$ *l'ensemble de* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*, telles que*

$$\|f|(E)_{\ell^w}\| = \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\beta(\cdot - k)f|E\|^w\right)^{1/w} < \infty & si \quad 1 \leq w \leq \infty \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\beta(\cdot - k)f(x)|E\| < \infty & si \quad w = \infty. \end{cases}$$

Définition 3.1.4 *On dit que l'espace* E *est localisable en norme* $\ell^w (1 \leq w \leq \infty)$*, s'il existe* $\beta \in \mathcal{A}$ *et* $c \geq 1$ *telle que*

$$c^{-1} \|f|E\| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\beta(\cdot - k)f|E\|^w\right)^{1/w} \leq c \|f|E\|.$$

3.2 Localisation de $L^p(\Omega)$ en norme ℓ^p

Théorème 3.2.1 (Théorème de Bourdaud) *Soit* $p \in [1, \infty]$, *alors* $L^p(\Omega) = (L^p(\Omega))_{\ell^p}$.

Preuve. Il suffit de montrer que l'opérateur

$$T_\beta : f \longmapsto (\beta(\cdot - k)f)_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

est isomorphisme de $L^p(\Omega)$ sur un sous espace fermé de $(L^p(\Omega))_{\ell^p}$.
pour cela, on introduit l'opérateur

$$G_\beta((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(\cdot - k) f_k,$$

pour un choix convenable de $\lambda \in \mathcal{D}, G_\beta$ est un inverse de T_λ.
Puisque λ est à supporte compact, alors il existe $c = c(\lambda) > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda(x-k)| \leq c,$$

d'ou

$$\begin{aligned} \left\|T_\lambda f|(L^1)_{\ell^1}(\Omega)\right\| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda(x-k)|\,|f(x)|\,dx \\ &\leq c \left\|f|\ L^1(\Omega)\right\|. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \|T_\lambda f|(L^\infty)_{\ell^\infty}(\Omega)\| &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^n, x\in\mathbb{R}^n} |\lambda(x-k)f(x)| \\ &\leq \|\lambda|L^\infty(\Omega)\|\,\|f|L^\infty(\Omega)\|, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

d'apres (3.2.1) et (3.2.2) et en appliquant le théorème de Riesz- Thorin, alors T_λ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $(L^p(\Omega))_{\ell^p}$.
Autrement on a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\lambda(\cdot - k)f|L^p\|^p\right)^{1/p} \leq c\,\|f|L^p\|, \tag{3.2.3}$$

La continuité de G_β de $(L^p(\Omega))_{\ell^p}$ dans L^p se démontre de la même manière

$$\begin{aligned} \left\|G_\beta((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n})|L^1(\Omega)\right\| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\beta(\cdot - k)f_k|L^1\right\| \qquad \text{(Hölder)} \\ &\leq \|\beta|L^\infty(\Omega)\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|f_k|L^1\right\| \\ &= \|\beta|L^\infty(\Omega)\|\,\|(f_k)_k|(L^p(\Omega))_{\ell^p}\|. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

et

$$\|G_\beta((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n})|L^\infty(\Omega)\| \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|(f_k)_k|L^\infty(\Omega)\|\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\beta(x-k)|\right) \tag{3.2.5}$$

Jusqu'ici, λ et β pouvaient être des fonction à support compacts quelconques.
Maintenant on suppose que $\lambda \in \mathcal{A}$, et on choisit β de façon que $\beta = 1$ sur le support de λ, alors

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\lambda(\cdot-k)f \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\beta(\cdot-k)\cdot\lambda(\cdot-k)\cdot f \\ &= G_\beta((\lambda(\cdot-k)\cdot f)_{k\in\mathbb{Z}^n}) \end{aligned}$$

et la continuité G_β dans $L^p(\Omega)$ donne

$$\|f|L^p(\Omega)\| \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\lambda(\cdot-k)f|L^p\|^p\right)^{1/p} \tag{3.2.6}$$

Les inégalités (3.2.5) et (3.2.6), impliquent la localisation de $L^p(\Omega)$ en norme de ℓ^p. ■

3.3 Localisation de $F^{s,\tau}_{p,q}$ en norme ℓ^p

Définition 3.3.1 *Pour $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et w dans $[1,\infty]$, on définit $(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^w}$ comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\left\|f|(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^w}\right\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\beta(\cdot-k)f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^w\right)^{1/w} < \infty \qquad si \quad w \neq \infty$$

et

$$\left\|f|(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^w}\right\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\left\|\beta(\cdot-k)f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|\right) < \infty \qquad si \quad w = \infty$$

Lemme 3.3.1 *Pour tout $R > 0$ il existe $c = c(n,R)$ tel que pour tout famille $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ des fonctions portées respectivement par les boules $|x-k| \leq R$, on ait*

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f_k|L^p(\Omega)\right\| \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f|L^p(\Omega)\|^p\right)^{1/p}.$$

Preuve. La preuve on remarque que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(\cdot - k) f_k = G_\beta((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}).$$

où $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est choisie de sort que $\beta = 1$ sur la boule $|x| \leq R$. ■

Proposition 3.3.1 *Si $\theta \in \mathcal{S}$ ne s'annule pas sur le support de β, on a*

$$\|u|(E)_{\ell^p}\| \sim \|(\|\tau_k\theta.u\|_E)_{k\in\mathbb{Z}^n}|\ell^p\|.$$

Théorème 3.3.1 *Soient $p \in (0,\infty)$, $q \in [0,\infty]$, $\tau \in (0, 1/p)$ et $s > (n/\min\{p,q\} - n)_+$. Alors*

$$F^{s,\tau}_{p,q} \sim (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}$$

Preuve. On montre que

$$(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p} \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q}$$

Soit $f \in (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}$

$$\left\|f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left\| \{\Delta_j f\}_{j\geq r^+} |L^p(B(x,2^{-r}), \ell^v_{q,r^+})\right\| \tag{3.3.1}$$

Remplaçons dans (3.3.1) f par $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(\cdot - k) f$, donc

$$\left\|f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left\| \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{sj} \left|\Delta_j(\beta(\cdot - k) f)\right| \right)^q \right)^{1/q} |L^p(B(x,2^{-r}))\right\|,$$

d'aprés Minkowski

$$\begin{aligned}
& \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left\| \left\| \left\{ \left\| \left\{ 2^{sj} \left|\Delta_j(\beta(\cdot - k) f)\right| \right\}_{k\in\mathbb{Z}^n} |\ell^1 \right\| \right\}_{j\geq r^+} |\ell^q \right\| |L^p(B(x,2^{-r}))\right\| \\
\leq \; & \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left\| \left\| \left\{ \left\| \left\{ 2^{sj} \left|\Delta_j(\beta(\cdot - k) f)\right| \right\}_{j\geq r^+} |\ell^q \right\| \right\}_{k\in\mathbb{Z}^n} |\ell^1 \right\| |L^p(B(x,2^{-r}))\right\|,
\end{aligned}$$

d'aprés le lemme 3.3.1 on trouvera

$$\begin{aligned}
& \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \left|\Delta_j(\beta(\cdot - k) f)\right|^q \right)^{1/q} |L^p(B(x,2^{-r}))\right\|^p \right)^{1/p} \\
\leq \; & \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|(\beta(\cdot - k) f)|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^p \right)^{1/p} \\
\leq \; & c \left\|f|(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}\right\|.
\end{aligned}$$

Inversement montrons que

$$F_{p,q}^{s,\tau} \hookrightarrow (F_{p,q}^{s,\tau})_{\ell^p},$$

soit $f \in F_{p,q}^{s,\tau}$, en remplaçant f par $\sum_{j=r^+}^{\infty} \Delta_j f$, nous avons

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \beta(\cdot - k) f | F_{p,q}^{s,\tau} \right\|^p \right)^{1/p} \leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \sum_{j=r^+}^{\infty} \beta(\cdot - k) \cdot \Delta_j f | F_{p,q}^{s,\tau} \right\|^p \right)^{1/p}.$$

En se reportant au proposition 2.4.2, on trouve

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \beta(\cdot - k) f | F_{p,q}^{s,\tau} \right\|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} 2^{sjq} \left| \beta(\cdot - k) \Delta_j f \right|^q \right)^{1/q} | L^p(B(x,2^{-r})) \right\|^p \right)^{1/p}$$

$$\leq c \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x,2^{-r})|^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \beta(\cdot - k) \left(\sum_{j=r^+}^{\infty} 2^{sjq} \left| \Delta_j f \right|^q \right)^{1/q} | L^p(B(x,2^{-r})) \right\|^p \right)^{1/p}$$

et d'apres la localisation de l'espace $L^p(\Omega)$ en norme ℓ^p on trouve

$$\left\| f | (F_{p,q}^{s,\tau})_{\ell^p} \right\| \leq c \left\| f | F_{p,q}^{s,\tau} \right\|.$$

■

Remarque 3.3.1 Si $p \in (0,\infty), q \in (0,\infty]$, $\tau \in (0,1/p)$ and $s > (n/\min\{p,q\} - n)_+$, nous retrouvons un théorème de A. Djeriou [3].

3.4 Localisation de les espaces des multiplicateurs.

Dans ce section on va étudier la localisation des espaces de multiplicateurs ponctuels de l'espace type Lizorkin-Triebel.

Théorème 3.4.1 *Soient $s > (n/\min\{p,q\} - n)_+$, $p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ et $\tau \in [0,1/p)$, alors*

1. *Pour tout $s > 0$, on a*

$$M(F_{p,q}^{s,\tau}) = (M(F_{p,q}^{s,\tau}))_{\ell^\infty}$$

2. Si $s > n \max\left\{\frac{1}{p} - \tau, \frac{1}{q} - 1\right\}$*, on a*

$$M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}$$

Preuve. 1. Montrons que $M(F^{s,\tau}_{p,q}) \hookrightarrow (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty}$.
Soit $f \in M(F^{s,\tau}_{p,q})$, alors

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k)|M(F^{s,\tau}_{p,q})\right\| \leq c \left\|\psi|M(F^{s,\tau}_{p,q})\right\| \left\|f|M(F^{s,\tau}_{p,q})\right\|.$$

Inversement montrons que $(M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty} \hookrightarrow M(F^{s,\tau}_{p,q})$
Soit $f \in M(F^{s,\tau}_{p,q})$, alors pour tout $g \in F^{s,\tau}_{p,q}$ on a

$$\left\|f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k) f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^p\right)^{1/p}$$

parce-que $F^{s,\tau}_{p,q}$ est localisable en norme de ℓ^p

$$\begin{aligned} &\left\|f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \\ &\leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k)\varphi(\cdot - k) f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^p\right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k) f|M(F^{s,\tau}_{p,q})\right\|^p \left\|\varphi(\cdot - k) g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est identiquement 1 sur le support de ψ

$$\left\|f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k) f|M(F^{s,\tau}_{p,q})\right\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\varphi(\cdot - k) g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|^p\right)^{1/p}$$

parce-que $F^{s,\tau}_{p,q}$ est localisable en norme de ℓ^p, donc

$$\left\|f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq c \left\|f\right\|| M(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty} \left\|g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|,$$

d'où l'inclusion.

Alors

$$M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty}.$$

2. On démontre que

$$(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty} \hookrightarrow M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty} \hookrightarrow (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}.$$

Soit $s > n \max\left\{\frac{1}{p} - \tau, \frac{1}{q} - 1\right\}$ alors $F^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow M(F^{s,\tau}_{p,q})$, autrement dit, qu'il exist $\gamma > 0$ tel que

$$\left\|f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq \gamma \left\|f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \left\|g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|, \qquad \forall f, g \in F^{s,\tau}_{p,q},$$

on a aussi $(F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty} \hookrightarrow (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty} = (M(F^{s,\tau}_{p,q}))$.
Inversement, si $f \in M(F^{s,\tau}_{p,q})$, et $\forall g \in F^{s,\tau}_{p,q}$ on a

$$\left\|\psi(\cdot - k) f \cdot g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \leq \gamma \left\|\psi(\cdot - k) f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\| \left\|g|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|.$$

D'où

$$\|\psi(\cdot - k) f|M(E)\| \leq c \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\|\psi(\cdot - k) f|F^{s,\tau}_{p,q}\right\|\right),$$

donc

$$(M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty} \hookrightarrow (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}.$$

■

Remarque 3.4.1 Si $p \in (0, \infty), q \in (0, \infty]$, $\tau \in (0, 1/p)$ and $s > n \max\left\{\frac{1}{p} - \tau, \frac{1}{q} - 1\right\}$, nous retrouvons un théorème de A. Djeriou [3].

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier la localisation des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, espaces type Triebel-Lizorkin $F^{s,\tau}_{p,q}$ et espaces $M(F^{s,\tau}_{p,q})$ par la norme de $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$.

Cette étude nous a permet de présenter certains resultats de a A. Djeriou [3].

Bibliographie

[1] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces, An introduction.* Springer Science. Berlin, 1976.

[2] Gérard Bourdaud. Localisations des espaces de Besov. *Studia Mathematica*, 90(2) :153–163, 1988.

[3] Aissa Djeriou. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebe. Thèse de Magister, Université de Annaba (2004).

[4] Aissa Djeriou. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels. Thèse de doctorat en sciences, Université de Batna (2012).

[5] Aissa Djeriou. Localization property of $B_{p,q}^{v,\tau}$ spaces and $F_{p,q}^{v,\tau}$ spaces. Submitted.

[6] Silvia I Hartzstein and Beatriz E Viviani. Integral and derivative operators of functional order on generalized Besov and Triebel-Lizorkin spaces in the setting of spaces of homogeneous type. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 43(4) :723–754, 2002.

[7] Silvia I Hartzstein and Beatriz E Viviani. On the composition of the integral and derivative operators of functional order. *Comment. Math. Univ. Carolin*, 44(1) :99–120, 2003.

[8] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators, veb deutsch.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[9] Hans Triebel. *Theory of function spaces*, volume 1 of *Monographs in Mathematics.* Birkhauser, 1983.

[10] Hans Triebel. *Theory of function spaces*, volume 2 of *MM084*. Birkhauser, 1 edition, 1992.

[11] Hans Triebel. A localization property for $B^s_{p,q}$, and $F^s_{p,q}$ spaces. *Studia Mathematica*, 109 :183–195, 1994.

[12] Hans Triebel. *Theory of function spaces. III, volume 100 of Monographs in Mathematics*. 2006.

[13] Lin Tang and Jingshi Xu. Some properties of morrey type besov–triebel spaces. *Mathematische Nachrichten*, 278(7-8) :904–917, 2005.

[14] Abdellah Youssfi. Localisation des espaces de Lizorkin-Triebel homogènes. *Mathematische Nachrichten*, 147(1) :107–121, 1990.

[15] Wen Yuan, Winfried Sickel, and Dachun Yang. *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*. Springer, 2010.

[16] Dachun Yang, Wen Yuan. New Besov-type spaces and Triebel-Lizorkin-type spaces including Q spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 265, 06 2010.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا التحديد لفضاءات من نوع ليزوركين-تريبل و فضاءه الضربي باستعمال نظيم $\ell^w(\mathbb{Z}^n)$. من اجل $p \in (0,\infty)\,, q \in [0,\infty],\ \tau \in (0,1/p)$ و $s > (n/\min\{p,q\}-n)_+$.
سوف نجد

$$F^{s,\tau}_{p,q} \sim (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}, \qquad M(F^{s,\tau}_{p,q}) \sim (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty},$$

و اذا كانت $s > n\max\left\{\frac{1}{p}-\tau, \frac{1}{q}-1\right\}$، لدينا :

$$M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}.$$

كلمات مفتاحية

فضاءات بيزوف، فضاءات بيزوف المتماثلة، فضاءات ليزوركين-تربل ، فضاءات من نوع ليزوركين-تربل، تجزئة لتلوود بيلي، خواص التحديد.

Abstract

In this memory we shall study the localization of some Triebel-Lizorkin type spaces and its multiplier by the norm of $\ell^r(\mathbb{Z}^n)$. For $p \in (0,\infty)\,, q \in [0,\infty],\ \tau \in (0,1/p)$ and $s > (n/\min\{p,q\}-n)_+$, we have :

$$F^{s,\tau}_{p,q} \sim (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}, \qquad M(F^{s,\tau}_{p,q}) \sim (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty},$$

and if $s > n\max\left\{\frac{1}{p}-\tau, \frac{1}{q}-1\right\}$, we present that

$$M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}.$$

Key words :

Besov spaces, Besov homogeneous spaces, Triebel-Lizorkin spaces, Triebel-Lizorkin type spaces, Littlewood-Paley decomposition, localization property.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la localisation des certain espaces de type Triebel-Lizorkin et leurs multiplicateurs, par la norme de $\ell^r(\mathbb{Z}^n)$. Pour $p \in (0,\infty)\,, q \in [0,\infty],\ \tau \in (0,1/p)$ et $s > (n/\min\{p,q\}-n)_+$, on a :

$$F^{s,\tau}_{p,q} \sim (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^p}, \qquad M(F^{s,\tau}_{p,q}) \sim (M(F^{s,\tau}_{p,q}))_{\ell^\infty},$$

et si $s > n\max\left\{\frac{1}{p}-\tau, \frac{1}{q}-1\right\}$, nous presenté que :

$$M(F^{s,\tau}_{p,q}) = (F^{s,\tau}_{p,q})_{\ell^\infty}.$$

Mot-clés :

Espace de Besov, espace de Besov homogène, espace de Triebel-Lizorkin, espace de type Triebel-Lizorkin, décomposition de Littlewood-Paley, propriété de la localisation.