I.1. Introduction:

Dans ce premier chapitre on traité les postulats et les hypothèses caractérisé la structure quantique et physique de l'espace-phase non-commutatif, les éléments principales sont résumés comme suivant:

1-Rappelle sur la structure quantique ordinaire,

2-Les nouveaux postulats de l'espace-phase non-commutatif,

3-Produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl,

4-La méthode de Boopp's Shift et ces application pour un potentiel centrale général,

5-La méthode de Boopp's Shift et ces application pour un potentiel centrale spéciale connue par inverse carrée $V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$ a deux dimensions [3].

I.2.Rappelle sur la structure de la mécanique quantique ordinaire:

La naissance de la physique quantique environ 1900, lorsque Planck, l'énergie $E=h\nu$ d'un quanta de Planck est la première marche dans ce route, $h\approx 6{,}6262.10^{-34}\, joul-seconde$, actuellement, la mécanique quantique ordinaire est formulée sur l'espace commutatif des coordonnées de variable et le moment canonique des opérateurs hermétiques(x_i,p_i), suivants **[1,2]** :

$$\begin{cases}[x_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}\\ [x_i,x_j]=0\\ [p_i,p_j]=0\end{cases} \quad \text{...} \quad (I.1)$$

Ou $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ et δ_{ij} sont la constant de Planck réduit et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement, la quantification satisfait par les deux fondamentales principes concernant l'énergie el l'impulsion E et p_i :

$$\begin{aligned}&E\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\\ &p_i\rightarrow\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \quad \text{...} \quad (I.2)$$

En mécanique classique l'énergie d'une particule de masse m_0 soumise des forces produit par potentiel extérieurs $V(\vec{r},t)$ est donnée par [1,2]:

$$E=\frac{\vec{P}^2}{2m_0}+V(\vec{r},t)\qquad\text{(I.3)}$$

Maintenant en applique les deux principes de quantification canonique présentée dans l'équation (I.2), on trouve :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta+V(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}\qquad\text{(I.4)}$$

L'équation (I.4) connait par l'équation de Schrödinger dans l'espace-temps ordinaire basé sur les postulats présenté par (I.1). $\Psi(\vec{r},t)$ Est la fonction d'onde, qui déterminer la probabilité de trouver la particule à l' instant t dans un volume d^3r entourant le point $\vec{r}$:

$$dP=\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2 d^3r\qquad\text{(I.5)}$$

Et Δ est l'operateur Laplacian, en trois dimensions prendre l'expression suivant :

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad\text{(I.6)}$$

Le point fondamentale qui représente la déférence entre la mécanique classique et la mécanique quantique ordinaire est appelée relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\begin{aligned}\Delta x\Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2}\\ \Delta y\Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2}\qquad\text{(I.7)}\\ \Delta z\Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

Une valeur très important caractérisée la mécanique quantique ordinaire, connait par la valeur moyenne d'un opérateur $\hat{A}$ noté par $\langle a\rangle$, prendre les deux expressions dans le cas à deux et trois dimensions, respectivement :

$$\langle a\rangle=\int\Psi(\vec{r},t)^*\hat{A}\Psi(\vec{r},t)d^2r\qquad\text{(I.8)}$$

Et

$$\langle a\rangle=\int\Psi(\vec{r},t)^*\hat{A}\Psi(\vec{r},t)d^3r\qquad\text{(I.9)}$$

Avec l'élément de surface d^2r et l'élément de volume d^3r .

En mécanique quantique le moment angulaire global $\vec{J}$ estla somme des deux moments angulaire $\vec{L}$ et le moment de spin $\vec{S}$, donc [1,2]:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad \text{(I.10)}$$

Ce qui permit de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L}\vec{S}$ de la façon suivante [30,31]**:**

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \qquad \text{(I.11)}$$

Les valeurs propres des opérateurs $\vec{J}^2, \vec{L}^2$ et $\vec{S}^2$ en mécanique quantique $(c = \hbar = 1)$ **:**

$$\begin{aligned} \vec{J}^2\Psi &= j(j+1)\Psi \\ \vec{L}^2\Psi &= \ell(\ell+1)\Psi \\ \vec{S}^2\Psi &= s(s+1)\Psi \end{aligned} \qquad \text{(I.12)}$$

Les relations (I.11) et (I.12) permettent d'obtenir :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \qquad \text{(I.13)}$$

Avec $\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \left|l + \frac{1}{2}\right|$, alors :

$$\begin{aligned} j &= l + \frac{1}{2} \\ j &= l - \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{(I.14)}$$

Si $j = l + \frac{1}{2}$ on dit que l'électron de spin up et si $j = l - \frac{1}{2}$, l'électron de spin down.

I.3.La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif :

L'idée du non commutativité de l'espace introduit par H. Syndre en 1947 [32], satisfait par nouveaux structure algébrique, connait par la règle de non commutative commutation relations [33-62]:

$$\text{Mécanique-quantique-ordinaire}\begin{cases} [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases} \quad \text{Mécanique-quantique-déformé} \rightarrow \begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\overline{\theta}_{ij} \end{cases} \qquad \text{(I.15)}$$

Ou $(i, j = \overline{1, D})$ et D la dimensions de l'espace, l'espace –temps non commutatif est définie en terme d'un ensemble de générateur $\hat{x}_i$ dits coordonnée non commutatif :

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i = f(x_i, p_i)$$
$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = g(x_i, p_i) \quad \text{..(I.16)}$$

Les deux paramètres $\left(\theta^{\mu\nu} =, \overline{\theta}^{\mu\nu}\right) \equiv -\left(\theta^{\nu\mu} =, \overline{\theta}^{\nu\mu}\right) = \varepsilon^{\mu\nu}\left(\theta, \overline{\theta}\right)$ sont deux tenseurs antisymétriques induits par lenon commutativité position-position et impulsion-impulsion, respectivement. Il est très important de noter les dimensions $\left(\theta^{\mu\nu} =, \overline{\theta}^{\mu\nu}\right)$ est $\left((Lenngth)^2 = (\mathrm{Im}\,pulsion)^2\right)$ respectivement.

Dans ce mémoire de master on sintérisé par l'espace a deux dimensions *N=2*, donc les indices prendre les valeurs (i j=$\overline{1,2}$), dans ce cas particulière, les règles de commutations canonique devient :

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = 0 \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\theta_{12} \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\hbar\overline{\theta}_{12} \end{cases} \quad \text{....(I.17)}$$

Ou bien de la forme

$$\begin{cases} [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 \\ [\hat{x}, \hat{y}] = i\hbar\theta_{12} \\ [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\overline{\theta}_{12} \end{cases} \quad \text{...(I.18)}$$

Remarque : Tous Les relations sont écriées en système d'unité naturelle (c=ħ=1)

Dans l'espace non commutatif, la construction des théories de jauge se fait de la mêmemanière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire :

1-Les champs classiques remplacés par les champs non commutatifs.

2-Le produit ordinaire commutatif remplacé par le produit de Moyal-Weyl (produit star).

Il très important de noter que les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par nouveaux produit connue par le produit star.

I.4.La théorie de jauge

En 1919, le terme 'jauge' est fut introduit pour la première fois par Harman Weyl dans une tentative d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Malheureusement, pour diverses raisons, cette tentative d'unification échoua. Mais par la suite, Weyl donna en 1929 le premier exemple d'une théorie de jauge local basée sur le groupe $U(1)$.L'idée a été généralisée par Dirac, puis Yang et Mills en utilisant des groupes plus grands que $U(1)$, ce sont les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$.

I-4-1- Rappelle sur les groupes :

La théorie des groupes joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs, parce que toutes les transformations considérées forment des groupes. Le plus souvent même des groupes de Lie **[33-36]**.

Soit G un ensemble, et * une application de $G \times G$:

$$\begin{cases} * : G \times G \to G, \\ (g_1, g_2) \to g_1 * g_2 \end{cases} \quad \text{(I.19)}$$

Le couple $(G,*)$ est construit un groupe si les axiomes suivants sont satisfaits :

a- La relation de L'associativité:

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \quad \text{(I.20)}$$

b- La relation de L'élément neutre :

$$\exists\, e \in G, \quad e*g = g*e = g \quad ; \ \forall g \in G \quad \text{(I.21)}$$

c-La relation deL'élément inverse :

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g^{-1} * g = g * g^{-1} = e \quad \text{(I.22)}$$

Si g_1 et g_2 sont des éléments de G, le groupe sera qualifiée abélienne si la relation suivant est satisfait :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad \text{(I.23)}$$

I.5.produit star:

I.5.1.Formule de Moyal-Weyl :

Le formalisme du star-produit initie pour Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace phases.La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, c'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variable de l'espace de phase (variable canonique).Soit f(x) une fonction quelconque défie sur l'espace phase**.**Pour chaque fonction f(x) on note $\tilde{f}$(k) transformation de Fourier **[33-36] :**

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D\, k e^{ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\ \tilde{f}(k) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_m \hat{x}_m}\, f(x) \end{cases} \qquad \text{.......................................(I.24)}$$

F devient en opérateur de Weyl :

$$w(f) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D k e^{ik_m \hat{x}_m} \tilde{f}\,(k) \qquad \text{...(I.25)}$$

$$w(g) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_n \hat{x}_n} \tilde{g}\,(l) \text{..............................(I.26)}$$

On multiplie les opérateurs w(f), w(g) pour donner d'autres opérateurs :

$$w(f).w(g) = w(f * g) \qquad \text{...(I.27)}$$

$$w(f).w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{ik_m \hat{x}^m} e^{il_n \hat{x}^n} \tilde{f}\,(k) \tilde{g}(l) \qquad \text{.................................... (I.28)}$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff **[8,1,2] :**

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[[A,B],B]-\frac{1}{12}[[A,B],A] \ldots\ldots}$$

Valable pour les opérateurs A et B talque **[1] :**

$$\left[A, [A, B]\right] = \left[B, [A, B]\right] = 0 \text{... (I.29)}$$

Donc :

$$w(f).w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{i(k_m + l_n)\hat{x}^m - \frac{i}{2} k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) = w(f * g) \ldots\ldots\ldots\ldots\text{..(I.30)}$$

(f*g) c'est la fonction de $Moyal - Weyl$:

$$w(f * g) = w\left[(2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l [e^{\frac{i\theta^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} e^{ik_m \hat{x}^m + il_n y^n}] \tilde{f}(k) \tilde{g}(l)\right]$$

$$= w\left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x) g(y)\right] |_{Y \to X} \text{...(I.31)}$$

$$(f * g) = \left[e^{\frac{i}{2}\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y)\right]|_{Y\to X} \quad \text{………………………………………………(I.32)}$$

Donc

$$(f * g)(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = (fg)(x,p) + \frac{i}{2}\theta^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m} f(x,p)\frac{\partial}{\partial x^n} + O(\theta^2)$$

……………….(I.33)

$$+\frac{i}{2}h\bar{\theta}^{mn}\frac{\partial}{\partial p^m} f(x,p)\frac{\partial}{\partial p^n} g(x,p) + 0(\bar{\theta}^2)$$

$\big(f(x) * g(x)\big)$Représenté la mécanique quantique etle terme deux représenté l'espace-temps et troisième terme de l'espace phase.

I.5.2.Propriétés du de produit star :

Le produit star vérifie les déférentes propriétés suivant **:**

a)-non commutatif :

$$f(x,p) * g(x,p) \neq g(x,p) * f(x,p) \quad \text{……………………………………………………(I.34)}$$

b)-associatif :

$$\big(f(x,p) * g(x,p)\big) * h(x,p) = f(x,p) * (g(x,p) * h(x,p)) \quad \text{………………………………}$$

(I.35)

c)-la relation du complexe conjugué

$$(f(x,p) * g(x,p))^* = f(x,p)^* * g(x,p)^* \quad \text{………………………………………………(I.36)}$$

d)-La relation d'intégrale :

$$\int d^D x(f * g)(x,p) = \int d^D\, x(g * f)(x,p) = \int d^D x f(x,p)g(x,p) \quad \text{……………………..(I.37)}$$

e)-Permutation cyclique :

$$\int d^D x(f * g * h)(x,p) = \int d^D\,(h * f * g) = \int d^D\, x(f * h * g)\text{…………………………(I.38)}$$

f)-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu(f * g) = \partial_\mu f * g + f\partial_\mu g\text{……………………………………………………………(I.39)}$$

I.6. La Méthode de Boopp's Shift:

Pour écrier l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif, on applique les étapes suivant [38-54]:

-On remplace la fonction d'onde ordinaire $\Psi(\vec{r},t)$ par nouveaux fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t)$,

-On remplace l'operateur d'Hamiltonien ordinaire $H(p_i, x_i)$ par nouveaux operateur $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$,

-On remplace l'énergie ordinaire E par nouveaux valeur E_{nc},

-On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Les quatre étapes permirent d'obtenteur l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) = E_{nc}\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) \qquad \text{(I.40)}$$

La fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t)$ est peut être écrié.

$$\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) = \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) f(t) \qquad \text{(I.41)}$$

Cela permit de simplifier l'équation (I.40) :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) = E_{nc}\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t) \qquad \text{(I.42)}$$

La méthode Boopp's Shift permit de traité l'équation de Schrödinger déformée (I.42) comme une équation ordinaire à condition d'appliquée les deux translations :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)\Psi(\vec{\hat{r}}) = E_{nc}\Psi(\vec{\hat{r}}) \qquad \text{(I.43)}$$

Avec l'operateur d'Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ peut être écrié en trois variétés :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j \, , \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) \quad \text{for} \quad \text{NC-2D:RSP} \qquad \text{(I.44)}$$

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i , \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \right) \quad \text{for} \quad \text{NC-2D:RS} \qquad \text{(I.45)}$$

C'est-à-dire, la variété (I.44), (I.45) et (I.46) correspond :

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_{\mathrm{i}} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_{\mathrm{i}} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \quad \text{(I.47)}$$

Et

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_{\mathrm{i}} = p_i \\ x_i \to \hat{x}_{\mathrm{i}} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \quad \text{(I.48)}$$

Et

$$\begin{cases} p_i \to \hat{p}_{\mathrm{i}} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_{\mathrm{i}} = x_i \end{cases} \quad \text{(I.49)}$$

Avec, les notations :

$$\begin{cases} i = 1 \to \hat{x}_1 = \hat{x} \to p_1 = p_x \\ i = 2 \to \hat{x}_2 = \hat{y} \to p_2 = p_y \end{cases} \quad \text{(I.50)}$$

Et:

$$\begin{array}{l} \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y \,, \quad \hat{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x \\ \hat{p}_x = p_x + \frac{\bar{\theta}}{2} y \ \text{ et } \ \hat{p}_y = p_x - \frac{\bar{\theta}}{2} x \end{array} \quad \text{(I.51)}$$

Avec la carré de $\hat{r}$est donné par :

$$\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \quad \text{(I.52)}$$

On utiliser le produit star pour résoudre l'équation de Schrödinger non commutatif, le but est remplacé le produit star avec le produit habituel par Boopp's shift.

La méthode de Boopp's Shift est considéré comme une conséquence du produit star entre l'opérateur du potentiels$\hat{V}(\hat{x})$ etLa fonction d'onde$\widehat{\hat{\Psi}}(\hat{r})$:

$$\left(\frac{\overleftrightarrow{\hat{p}}^{2}}{2m_0}+\hat{V}(\hat{x})\right)*\hat{\Psi}(\hat{x})\rightarrow\left(\frac{\overleftrightarrow{p}^{2}}{2m_0}+V(\hat{x})\right)\Psi(x) \quad \text{……………………………………………………………}(I.53)$$

Les deux opérateurs $\hat{r}$ et $\hat{p}$ écrire en deux dimension dans l'espace- phase non commutatif :

$$\hat{r}^2=r^2-\theta L_z \quad \text{et} \quad \hat{p}^2=p^2+\bar{\theta}L_z \quad \text{……………………………………………………………}(I.54)$$

I.7.Application surle potentiel carré-inverse a deux dimensions:

On applique les notions du président paragraphe sur le potentiel $V(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$, ce potentiel composé par deux termes [3]:

-le Terme colombien $V_1(r)=-\frac{B}{r}$ et le terme connue par carré inverse $V_2(r)=\frac{A}{r^2}$. L'opérateur Hamiltonien $H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i=p_i-\frac{\bar{\theta}^{ij}}{2}x_j\,,\hat{x}_i=x_i-\frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)$ correspond dans l'espace NC-2R : RSP, est donnée par :

$$H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_i=p_i-\frac{\bar{\theta}^{ij}}{2}x_j\,,\hat{x}_i=x_i-\frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)=\frac{\hat{p}^2}{2m_0}+\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}}) \quad \text{…………………………………} \quad (I.55)$$

Avec :

$$V(\hat{r})=\frac{A}{\hat{r}^2}-\frac{B}{\hat{r}} \quad \text{………………………………………………………………………..}(I.56)$$

Et

$$\hat{p}^2=p^2+\bar{\theta}L_z \quad \text{……………………………………………………………….……………} (I.57)$$

Le résultant de l'équation (I.54) permit de calculer les deux termes $\frac{A}{\hat{r}^2}$ et $\frac{B}{\hat{r}}$:

$$\begin{cases}\frac{A}{\hat{r}^2}=\frac{A}{r^2}+\frac{A}{r^4}L_z\theta\\ \frac{B}{\hat{r}}=\frac{B}{r}+\frac{B}{2r^3}L_z\theta\end{cases} \quad \text{…………………………………………………………………} \quad (I.58)$$

Donc

$$\mathrm{V}(\hat{\mathrm{r}})=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)L_z\theta \quad \text{……………………………………………………………………}(I.59)$$

La combinaison entre deux équations (I.57) et (I.59) donné $H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)$:

$$H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\frac{p^2}{2m_0}+\frac{L_z\overline{\theta}}{2m_0}+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)L_z\theta \quad \text{(I.60)}$$

L'opérateur $H(\hat{p}_i,\hat{x}_i)\equiv H\left(\hat{p}_{\mathrm{i}}=p_i-\frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2}x_j\,,\hat{x}_{\mathrm{i}}=x_i-\frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2}p_j\right)$ est la somme deux opérateurs $H(p_i,x_i)$ et $H_{pert}(p_i,x_i)$

$$H(p_i,x_i)=\mathrm{V}(\mathrm{r})+\frac{p^2}{2m_0} \quad \text{(I.61)}$$

Et

$$H_{pert}=\frac{L_z\overline{\theta}}{2m_0}+\left(\frac{A}{r^4}-\frac{B}{2r^3}\right)L_z\theta \quad \text{(I.62)}$$