

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

*Solution de l'équation de Klein-Gordon linéaire dans un intervalle avec une
longueur variable*

Présentée par :

BOUDRISSA Imane

Soutenu publiquement le : 01/07/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^{me} BOUNAB Noura.*

M.C.B, Université de M'sila

Encadreur : *M^r SENGOUGA Abdelmouhcene.*

M.C.A, Université de M'sila

Examineur : *M^r MOKHTARI Abdelhak.*

M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout premier lieu, je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné, la santé, le courage et la patience, la volonté d'entamer et de terminer ce travail.

Je tenons à exprimer ma sincères remerciement et ma profonde gratitude à mon Encadreur : Dr. Sengouga. A, pour tout les orientations et les conseils qu'il je a prodigué tout le long de ce mémoire.

Mes remerciement s'adressent également aux membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce mémoire

Il est important pour moi de remercie ma famille, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.

Je remercie profondément toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenue de près ou de loin.

Merci.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ce qui le plus cher, à ma mère qu'était un bon soutien pour moi.

À mon père qui m'a soutenu et m'aide pour arriver d'ici.

À mes frères, et mes sœurs.

À toute ma famille.

À tous mes amis.

À tous mes collègues d'étude.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Équation de Klein-Gordon dans un intervalle fixe	3
1.1.1 Solution par séparation des variables	4
1.2 Méthode de Frobenius	6
1.2.1 Formulation de la méthode	7
1.3 Fonctions de Bessel	9
1.3.1 Fonctions de Bessel d'indice entier	9
1.3.2 Fonctions de Bessel d'indice non entier	9
1.3.3 Équation de Bessel	10
1.3.4 Fonctions de Bessel de deuxième espèce	11
2 Équation de Klein-Gordon dans un intervalle avec une longueur variable	13
2.1 Énoncé du problème	14
2.2 Solution du problème par changement de variables I	14
2.2.1 Équations a variables séparées	15
2.2.2 Détermination de la fonction h	16
2.2.3 Détermination de la fonction k	18
2.3 Solution du problème par changement de variables II	22
2.3.1 Équations a variables séparées	23
2.3.2 Détermination de la fonction V	24
2.3.3 Détermination de la fonction Φ	25

3	Solution avec différences finies	26
3.1	Le problème avec longueur variable	27
3.2	Différences finies	27
3.2.1	Discrétisation du problème	28
	Conclusion Générale	34
	Bibliographie	35

Table des figures

1.1	La corde dans la position $0l$ à l'instant t	3
1.2	Fonction de Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$	10
1.3	Fonction de Bessel $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$	12
3.1	Maillage dans l'espace et le temps, les cercles indiquent les points connectés dans l'équation aux différences finies.	28
3.2	Solution pour $\mu = 0.1$	30
3.3	Solution pour $\mu = 2$	31
3.4	Solution pour $\mu = 5$	31
3.5	Solution pour $\alpha = 0.1$	32
3.6	Solution pour $\alpha = 0.5$	33
3.7	Solution pour $\alpha = 0.9$	33

Introduction

D'une manière générale, la modélisation des phénomènes physiques repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles (notées abrégé EDP). Ces équations correspondent à la traduction mathématiques des lois de la physique.

Ce mémoire présent des méthodes de résolution (analytique et numérique) de l'équation de **Klein-Gordon linéaire**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^2 u = 0.$$

Ce travail, basé sur les travaux de Vesnitskii [9], et Khoen [4]. Les deux articles ont comme but de donner une solution exacte du problème dans un intervalle avec une longueur variable qui dépend de t ,

$$(0, \ell(t)), \quad \ell(t) = 1 + \alpha t, \quad 0 < \alpha < 1,$$

ont utilisant deux techniques différents.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelque rappels sur la résolution de l'équation de K-G linéaire par séparation des variables dans un intervalle fixe $0 < x < l$, $l > 0$, puis on définit la méthode de Frobenius, ensuite nous présentons quelques préliminaires sur les fonctions de Bessel de premier et deuxième espèce, et comment résoudre l'équation de Bessel. Dans le deuxième chapitre, on utilise l'approche de Vesintiskii [9], ainsi que celui de Khoen [4], pour trouve la solution exact de l'équation de K-G linéaire, sous forme d'une série de fonctions spéciales. Enfin dans le dernier chapitre, on considère une approche numérique du problème par différences finis. Une conclusion et quelque références sont donné a la fin du mémoire.

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons l'équation de Klein-Gordon dans un intervalle fixe, et nous donnons la solution par séparation des variables de cette équation. Ensuite on présente la méthode de Frobenius, et quelque résultat élémentaires sur les fonctions de Bessel. Les définitions trouvées dans ce chapitre sont tirées de [8, 6].

1.1 Équation de Klein-Gordon dans un intervalle fixe

On considérant une corde, en position horizontale, et de longueur l (de $x = 0$ à $x = l$) au repos tendue avec tension constante T , les points de cette corde peuvent se déplacer dans un plan vertical, on note ρ la densité massique de la corde, que l'on suppose est constante, on s'intéresse aux petits déplacements verticaux des points de la corde, comme l'aire la résistance sont négligés. On note $u(x, t)$ la déplacement vertical du point, d'abaisse x à l'instant t , voir [1].

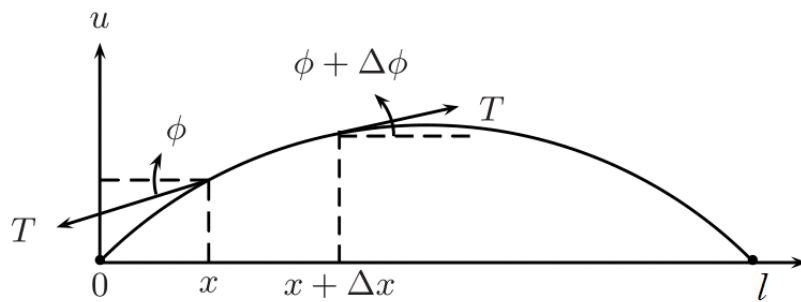


FIGURE 1.1 – La corde dans la position $0l$ à l'instant t .

Maintenant de la figure 1.1, il est clair que la force verticale nette F_1 agissant sur la corde dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ est :

$$\begin{aligned} F_1 &= T \sin(\phi + \Delta\phi) - T \sin \phi \\ &\cong T[\tan(\phi + \Delta\phi) - \tan \phi], \quad \text{puisque } \phi \text{ est petit} \\ &= T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right]. \end{aligned}$$

Supposons aussi que la corde est soumis à une force F_2 de restauration proportionnelle à u de la forme

$$F_2 = -k[(x + \Delta x) - x]u, \quad \text{où } k > 0.$$

D'après la seconde loi de Newton de la mouvement,

$$\text{masse} \times \text{accélération} = F_1 + F_2,$$

on a

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] - k \Delta x u,$$

qui est le même que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} \right] - \frac{k}{\rho} u.$$

Enfin, en prenant la limite comme $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient alors l'équation de Klein-Gordon linéaire en dimension un suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u, \quad (1.1)$$

où : $c^2 = \frac{T}{\rho}$ et $\mu^2 = \frac{k}{\rho}$,

avec les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (1.2)$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (1.3)$$

Remarque 1.1. L'équation (1.1) est très importante en mécanique quantique, elle a été proposée par Oskar Klein et Walter Gordon en 1926 pour décrire l'état de certaines particules atomiques (électron, pion, ...). La constante μ désigne la masse de la particule considérée.

1.1.1 Solution par séparation des variables

La séparation des variables consiste à chercher la solution de (1.1), (1.2), (1.3) qui prendraient la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, l].$$

Si nous remplaçons cette expression dans l'équation (1.1), nous obtenons :

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + \mu^2 X(x)T(t).$$

On divise par le produit XT :

$$c^2 \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} + \mu^2 = \lambda,$$

les variables sont bien séparé . On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

$$\begin{cases} c^2 X''(x) = \lambda X(x) & x \in [0, l], \\ X(0) = X(l) = 0, \\ T''(t) = (\lambda - \mu^2) T(t) & t > 0. \end{cases}$$

On cherche la solution pour $\lambda < 0$, ($\lambda = -\alpha^2$)

1. Pour l'équation :

$$c^2 X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0,$$

on a $\Delta = (2i\alpha c)^2 < 0$, donc la solution est donné par :

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right).$$

On appliquant les condition aux limites on obtient :

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{n\pi c}{l},$$

donc,

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.4)$$

2. Pour l'équation :

$$T''(t) + (\mu^2 + \alpha^2)T(t) = 0,$$

on a $\Delta = (2i\sqrt{\alpha^2 + \mu^2})^2 < 0$, donc la solution est donné par :

$$T_n(t) = A_n \cos(\delta_n t) + B_n \sin(\delta_n t),$$

tels que : $\delta_n = \sqrt{\mu^2 + \alpha^2}$.

On utilisant (1.4) et le principe de superposition des solutions on obtient la sérier :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\delta_n t) + B_n \sin(\delta_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Calcul des coefficients A_n, B_n :

Pour calculer les coefficients A_n et B_n on utilise les condition initiales (1.3)

1. $u(x, 0) = f(x)$, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x),$$

En multipliant ceci par $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ et intégrer sur l'intervalle $[0, l]$ nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx.$$

On peut vérifier que :

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}. \quad (1.5)$$

Donc

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

2. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = g(x),$$

en multiplie ceci par $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ et intégrer sur l'intervalle $[0, l]$, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^l \delta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx,$$

et on utilisant (1.5), on obtient :

$$B_n = \frac{2\delta_n}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Remarque 1.2. On peut considérer d'autres conditions aux limites, i.e. des conditions de Neumann, conditions mixtes,

1.2 Méthode de Frobenius

La méthode de Frobenius est une technique d'obtention du développement en série entière des solutions d'une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0 \quad a(x) \neq 0,$$

où a, b et c sont des polynômes, ou d'une manière équivalente,

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (1.6)$$

avec :

$$p(x) = b(x)/a(x), \quad \text{et} \quad q(x) = c(x)/a(x),$$

et permet d'obtenir au voisinage d'un point $x = x_0$ un développement d'au moins une solution en série entière de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r} \quad a_0 \neq 0.$$

Points singuliers réguliers

Définition 1.1. Un point singulier de (1.6) est dit un point singulier régulier si les deux produits $(x - x_0)p(x)$, et $(x - x_0)^2q(x)$, sont analytiques à x_0 .

Autrement, on dit x_0 est un point singulier irrégulier.

Équation Indicielle

Définition 1.2. Si x_0 est un point singulier régulier de (1.6), alors l'équation indicielle pour ce point est :

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0,$$

où

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2q(x),$$

les racines de l'équation indicielle sont appelées l'exposant (indices) de la singularité x_0 .

1.2.1 Formulation de la méthode

Pour obtenir une solution en série sur le point singulier x_0 de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad , x > x_0. \quad (1.7)$$

1. On définit $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ si les deux produits $(x - x_0)p(x)$ et $(x - x_0)^2q(x)$ sont analytiques en x_0 , alors x_0 est un point singulier régulier et les étapes restantes s'appliquent.

2. On pose :

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r} \quad a_0 \neq 0, \quad (1.8)$$

et en substituant (1.8) dans l'équation (1.7) pour obtenir une équation de la forme :

$$A_0(x - x_0)^{r+j} + A_1(x - x_0)^{r+j+1} + \dots = 0.$$

3. On exige que les coefficients A_0, A_1, \dots égaux à zéro. [remarquez que l'équation $A_0 = 0$ est juste un multiple constant de l'équation indicielle $r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0$].

4. On utilise le système des équations :

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \dots, \quad A_K = 0,$$

et en trouve une relation de récurrence impliquant a_k et a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .

5. On prend $r = r_1$, la racine de l'équation indicielle, et on utilise la relation obtenue à l'étape 4 pour déterminer a_1, a_2, \dots de manière récursive en termes de a_0 et de r_1 .

6. Une expansion en série d'une solution à (1.7) est :

$$y(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x > x_0, \quad (1.9)$$

où a_0 est arbitraire et les a_n sont définis en termes de a_0 et r_1 .

Théorème de Frobenius

Une question important qui reste concerne le rayon de convergence de la série entière apparaissant en (1.9). Le théorème suivant contient une réponse.

Théorème 1.1. *Si x_0 est un point singulier régulier de l'équation (1.7), il existe alors au moins une solution en série de la forme (1.8), où $r = r_1$ est la racine de l'équation indicielle associée. De plus, cette série converge pour tout x tel que $0 < x - x_0 < R$, où R est la distance de x à l'autre point singulier le plus proche (réel ou complexe) de (1.7).*

Démonstration. Voir [3].

□

1.3 Fonctions de Bessel

1.3.1 Fonctions de Bessel d'indice entier

Définition 1.3. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction de Bessel J_k de première espèce et d'indice k est définie par :

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k},$$

la fonction J_k est entière et de même parité que k .

Remarque 1.3. Pour un indice négatif $-k$, on pose

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x). \quad (1.10)$$

1.3.2 Fonctions de Bessel d'indice non entier

Définition 1.4. Soit $\nu \in \mathbb{C}$, on définit la fonction de Bessel J_ν de première espèce et d'indice ν par :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (1.11)$$

Où $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma, satisfaisant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

c'est une généralisation de la factorielle car elle satisfait la relation

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Quelque relations de récurrence

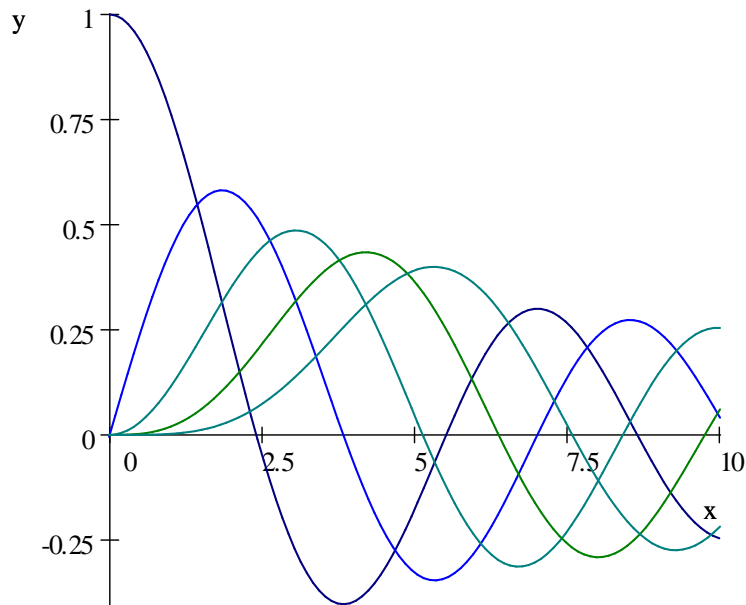
Il existe plusieurs relations de récurrence utiles impliquant des fonctions de Bessel, par exemple :

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (R.1)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad (R.2)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), \quad (R.3)$$

$$J_{\nu+1}(x) = J_{\nu-1}(x) - 2J'_\nu(x). \quad (R.4)$$

FIGURE 1.2 – Fonction de Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

1.3.3 Équation de Bessel

On considère l'équation différentielle de second ordre linéaire dans le champ complexe, dite équation de Bessel d'indice ν :

$$x^2 y''(x) + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (1.12)$$

Où ν est un paramètre fixé, cette équation a un point singulier régulier à $x = 0$ et pas d'autres points singuliers dans le plan complexe.

C'est pourquoi une solution en série pour (1.12) obtenue par la méthode de Frobenius, convergera pour $0 < x < \infty$.

Théorème 1.2. *Dans le cas où ν n'est pas entier, les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace des solutions de l'équation (1.12).*

Démonstration. L'équation indiciale de (1.12) est :

$$r(r-1) + r - \nu^2 = (r-\nu)(r+\nu),$$

nous donne les racines $r = \nu$ et $r = -\nu$.

Grâce à ν n'est pas entier, alors la méthode de Frobenius donne deux solutions linéairement

indépendants, données par :

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1 + \nu)_n} x^{2n+\nu}, \quad (1.13)$$

$$y_2(x) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1 - \nu)_n} x^{2n-\nu}. \quad (1.14)$$

Où $(1 + \nu)_n = (1 + \nu)(1 + \nu + 1)(1 + \nu + 2)\dots(\nu + n)$, et comme $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$, alors :

$$(1 + \nu)_n = \frac{\Gamma(1 + \nu + n)}{\Gamma(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad (1 - \nu)_n = \frac{\Gamma(1 - \nu + n)}{\Gamma(1 - \nu)}$$

En prenant

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad b_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)},$$

et en utilisant (1.11), on voit que :

$$y_1(x) = J_\nu(x) \quad \text{et} \quad y_2(x) = J_{-\nu}(x).$$

□

Remarque 1.4. En effet, la fonction Γ ne prend des valeurs infinies que pour des valeurs entières négative, et lorsqu'on fait tendre x vers 0, J_ν tend vers 0 (à cause du terme $(x/2)^\nu$) alors que la fonction $J_{-\nu}$ tend vers l'infini (à cause du terme $(x/2)^{-\nu}$).

Notation 1.1. La solution générale de (1.12) est notée $Z_\nu(x)$, qui est appelée fonction cylindrique, donnée par :

$$Z_\nu(x) = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x),$$

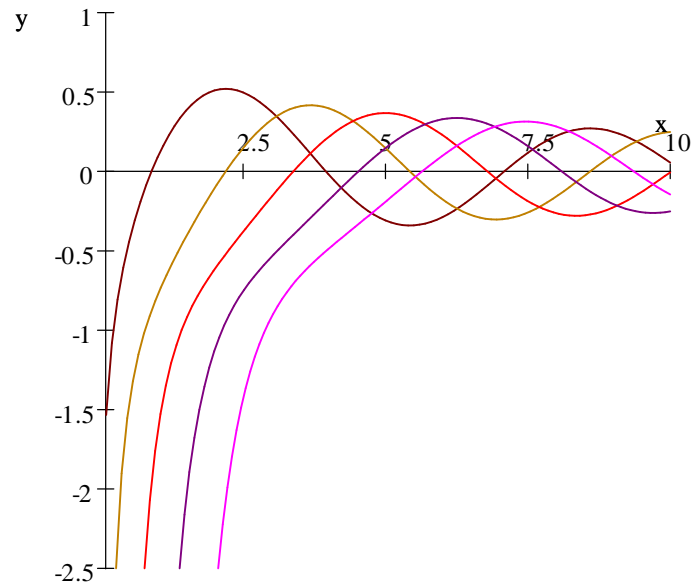
où A et B sont des constantes arbitraires.

1.3.4 Fonctions de Bessel de deuxième espèce

Pour ν n'est pas un entier, on peut prendre des combinaisons linéaires de $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ pour obtenir d'autres solutions à (1.12). En particulier, laissez

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \text{ n'est pas un entier.} \quad (1.15)$$

Définition 1.5. Pour $x > 0$. La fonction (1.15) s'appelle la fonction de Bessel du second espèce d'indice ν et, comme on peut le vérifier $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ sont linéairement indépendantes.

FIGURE 1.3 – Fonction de Bessel $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Remarquez que lorsque ν est un entier, le dénominateur dans (1.15) est Zéro, mais dans la formule (1.10), le numérateur l'est aussi ! par conséquent, il est raisonnable d'espérer que, dans un sens limitatif, la formule (1.15) ait encore un sens.

En fait, en utilisant la règle de l'Hôpital, il est possible de montrer que pour k un entier non négatif, la fonction définie par :

$$Y_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow k} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (1.16)$$

Pour $x > 0$ est une solution à (1.12) avec $\nu = k$.

De plus, $J_k(x)$ et $Y_k(x)$ sont linéairement indépendants.

ÉQUATION DE KLEIN-GORDON DANS UN INTERVALLE AVEC UNE LONGUEUR VARIABLE

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation de Klein-Gordon dans un intervalle avec une longueur variable, c-à-d, $0 < x < \ell(t)$, par deux méthodes.

2.1 Énoncé du problème

Considérons l'équation de Klein-Gordon linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u, \quad 0 < x < \ell(t), \quad (2.1)$$

avec les conditions aux bords

$$u(0, t) = u(\ell(t), t) = 0. \quad (2.2)$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \ell(0), \quad (2.3)$$

où f et g sont des fonctions régulières.

Dans ce cas, il est difficile de résoudre ce problème, car la méthode de séparation des variables utilisée dans le chapitre 1, ne marche plus. Pour contourner cette difficulté on va changer les variables, pour retrouver un problème dans un intervalle fixe a variables séparées.

2.2 Solution du problème par changement de variables I

Pour résoudre l'équation (2.1), il est plus pratique de passer à de nouvelles variables qui varie dans un intervalle fixe et indépendantes. En se limite au cas où les frontières se déplacent à vitesse constant, nous supposons que :

$$\ell(t) = a_0(1 + \alpha t),$$

où a_0 est la longueur initiale et α est la vitesse de l'extrémité droit de l'intervalle, vérifiant :

$$0 < \alpha < 1. \quad (2.4)$$

Une nouvelle variable peut être alors écrite sous la forme :

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell(t)}, \quad (2.5)$$

nous choisirons la deuxième variable de manière à pouvoir séparer l'équation différentielle (2.1), écrite dans les nouvelles variables. Pour cela, on définit :

$$\bar{t} = \frac{\ell^2(t)}{\beta^2} - x^2. \quad (2.6)$$

Où $\beta = \frac{\alpha a_0}{c}$ et comme $c = 1$, donc $\beta = \alpha a_0$ est le rapport entre la vitesse de déplacement de la limite et la vitesse de propagation de l'onde.

2.2.1 Équations a variables séparées

En remplaçant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dans (2.1) en termes de dérivées de $\varphi(\bar{x}, \bar{t}) = u(x, t)$, par rapport aux nouvelles variables, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} - 2x \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\alpha a_0}{\beta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} - \frac{x\alpha a_0}{\ell^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}},$$

donc,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} - 4\bar{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}} + 4\ell^2 \bar{x}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t}^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\alpha^2 a_0^2 \ell^2}{\beta^4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t}^2} - \frac{4\bar{x}\alpha^2 a_0^2 \ell^2}{\beta^2 \ell^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}} + \frac{2\alpha^2 a_0^2}{\beta^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} + \frac{2\alpha^2 a_0^2 \bar{x}}{\ell^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} + \frac{\alpha^2 a_0^2 \bar{x}^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2}.$$

On obtient :

$$\frac{1 - \beta^2 \bar{x}^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} - 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} - 4\bar{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}} + \left(4\ell^2 \bar{x}^2 - \frac{4\ell^2}{\beta^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t}^2} + 4\bar{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}} - 2 \frac{\beta^2 \bar{x}}{\ell^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} - \mu^2 \varphi = 0,$$

on multiplie cette dernière expression par \bar{t} , $\left(\bar{t} = \frac{\ell^2}{\beta^2} - \bar{x}^2 \ell^2 \right)$, on trouve :

$$\left(\frac{1 - \beta^2 \bar{x}^2}{\ell^2} \right) \left(\frac{\ell^2}{\beta^2} - \bar{x}^2 \ell^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} - 2 \left(\frac{\beta^2 \bar{x}}{\ell^2} \right) \left(\frac{\ell^2}{\beta^2} - \bar{x}^2 \ell^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} - 4\bar{t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} - 4\bar{t}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t}^2} - \mu^2 \bar{t} \varphi = 0,$$

finalement, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)^2}{\beta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} + 2\bar{x}(\beta^2 \bar{x}^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = 4\bar{t} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} + 4\bar{t}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{t}^2} + \mu^2 \bar{t} \varphi, \\ \varphi(0, \bar{t}) = \varphi(1, \bar{t}) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour résoudre l'équation (2.7), on peut utiliser la méthode de séparation des variables. On cherche des solutions particulières de la forme :

$$\varphi(\bar{x}, \bar{t}) = h(\bar{x})k(\bar{t}).$$

Ce qui revient à trouver une constante λ telle que :

$$\begin{cases} \frac{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)^2}{\beta^2} h''(\bar{x}) + 2\bar{x}(\beta^2 \bar{x}^2 - 1) h'(\bar{x}) = \lambda h(\bar{x}), \\ 4\bar{t}^2 k''(\bar{t}) + 4\bar{t} k'(\bar{t}) + \mu^2 \bar{t} k(\bar{t}) = \lambda k(\bar{t}). \end{cases}$$

Dans ce cas, les conditions aux bords peuvent être écrites sous la forme :

$$h(0) = h(1) = 0.$$

On cherche la solution pour $\lambda < 0$, ($\lambda = -d^2$). On obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} h''(\bar{x}) + \frac{2\beta^2 \bar{x}}{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)} h'(\bar{x}) + \frac{\beta^2 d^2}{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)^2} h(\bar{x}) = 0, \\ h(0) = h(1) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

et

$$k''(\bar{t}) + \frac{1}{\bar{t}} k'(\bar{t}) + \frac{1}{4} \left(\frac{d^2}{\bar{t}^2} + \frac{\mu^2}{\bar{t}} \right) k(\bar{t}) = 0. \quad (2.9)$$

2.2.2 Détermination de la fonction h

Écrire l'équation (2.8) comme :

$$\frac{1}{q(\bar{x})} h'' + \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})} h' + h = 0, \quad (2.10)$$

où :

$$p(\bar{x}) = \frac{2\beta^2 \bar{x}}{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)} \quad \text{et} \quad q(\bar{x}) = \frac{\beta^2 d^2}{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)^2}.$$

On cherche une transformation $\xi = g(\bar{x})$, qui transformera (2.10) en une équation du second ordre à coefficients constants.

En remplaçant :

$$\begin{aligned} h' &= \frac{\partial h}{\partial \xi} g', \\ h'' &= \frac{\partial h}{\partial \xi} g'' + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} (g')^2. \end{aligned}$$

Où les primes désignent des dérivées par rapport à x . L'équation (2.10) devient :

$$\frac{(g')^2}{q} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{g'' + p g'}{q} \frac{\partial h}{\partial \xi} + h = 0. \quad (2.11)$$

Nous exigeons que :

$$(g')^2 = c_1 q, \quad (2.12)$$

$$g'' + pg' = c_2 q. \quad (2.13)$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes. Donc d'après (2.12) :

$$(g')^2 = \frac{\beta^2 d^2}{(\beta^2 \bar{x}^2 - 1)^2},$$

ainsi :

$$g = -\beta d \operatorname{arctanh}(\beta \bar{x}),$$

tandis que de (2.11), on obtient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + h = 0,$$

ce qui conduit à la solution :

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= C \sin(\xi) + D \cos(\xi), \\ &= C \sin(\beta d \operatorname{arctanh}(\beta \bar{x})) + D \cos(\beta d \operatorname{arctanh}(\beta \bar{x})). \end{aligned}$$

Et comme :

$$\operatorname{arctanh}(\beta \bar{x}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \bar{x}}{1 - \beta \bar{x}} \right),$$

alors :

$$h(\bar{x}) = C \sin \left[\frac{\beta d}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \bar{x}}{1 - \beta \bar{x}} \right) \right] + D \cos \left[\frac{\beta d}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \bar{x}}{1 - \beta \bar{x}} \right) \right]. \quad (2.14)$$

Ici C et D sont des constantes arbitraires.

Il résulte des conditions aux limites dans (2.8) que :

$$h(0) = 0 \implies D = 0,$$

et

$$h(1) = 0 \implies C = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta d}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \bar{x}}{1 - \beta \bar{x}} \right) = n\pi,$$

donc, pour ne pas avoir une solution nulle, on a

$$D = 0, \quad d = d_n = \frac{2n\pi}{\beta \ln[(1 + \beta)/(1 - \beta)]}, \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.15)$$

2.2.3 Détermination de la fonction k

Pour résoudre l'équation (2.9), on peut utiliser deux méthodes :

- On utilise la méthode de Frobenius

Puisque :

$$p(\bar{t}) = \frac{1}{\bar{t}} \quad \text{et} \quad q(\bar{t}) = \left(\frac{d_n^2}{4\bar{t}^2} + \frac{\mu^2}{4\bar{t}} \right),$$

On remarque que $\bar{t} = 0$ est un point singulier régulier. En d'autre part, on a :

$$p_0 = \lim_{\bar{t} \rightarrow 0} \bar{t}p(\bar{t}) = 1 \quad , \quad q_0 = \lim_{\bar{t} \rightarrow 0} \bar{t}^2 q(\bar{t}) = \frac{d_n^2}{4}.$$

Donc l'équation indiciale est :

$$r(r-1) + r + \frac{d_n^2}{4} = 0, \quad r^2 = -\frac{d_n^2}{4},$$

avec des racines : $r = \pm \frac{id_n}{2}$.

Cherchons les solutions particulières de l'équation (2.9) sous la forme :

$$k(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{t}^{r+n}, \quad a_0 \neq 0,$$

donc

$$k'(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n \bar{t}^{r+n-1} \quad \text{et} \quad k''(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n \bar{t}^{r+n-2}.$$

Substituant ces expressions k , k' , k'' dans (2.9). On obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)^2 + \frac{d_n^2}{4} \right] a_n \bar{t}^{r+n-2} + \frac{\mu^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{t}^{r+n-1} = 0,$$

qui peut être réécrit comme :

$$\left(r^2 + \frac{d_n^2}{4} \right) a_0 \bar{t}^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r+n)^2 + \frac{d_n^2}{4} \right] a_n \bar{t}^{r+n-2} + \frac{\mu^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \bar{t}^{r+n-2} = 0.$$

Comme $a_0 \neq 0$, doit avoir l'équation indiciale :

$$r^2 + \frac{d_n^2}{4} = 0,$$

et, pour $n \geq 1$ la relation de récurrence :

$$\left[(r+n)^2 + \frac{d_n^2}{4} \right] a_n + \frac{\mu^2}{4} a_{n-1}.$$

La méthode de Frobenius donnera deux solutions linéairement indépendantes :

- Avec $r = r_1 = +\frac{id_n}{2}$, on trouve :

$$k_1(\bar{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\bar{t})^{m+\frac{id_n}{2}}, \quad (2.16)$$

et pour $m \geq 1$, on a la relation de récurrence :

$$4m(m + id_n)A_m + \mu^2 A_{m-1} = 0.$$

- Avec $r = r_2 = -\frac{id_n}{2}$, on trouve :

$$k_2(\bar{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\bar{t})^{j-\frac{id_n}{2}}, \quad (2.17)$$

et pour $j \geq 1$, on a la relation de récurrence :

$$4j(j + id_n)B_j + \mu^2 B_{j-1} = 0.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (2.9), s'écrit :

$$k(\bar{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\bar{t})^{m+\frac{id_n}{2}} + \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\bar{t})^{j-\frac{id_n}{2}},$$

on multiplie et divise par $\left(\frac{\beta^2}{a_0^2}\right)$, on obtient :

$$k(\bar{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{\beta^2 \bar{t}}{a_0^2}\right)^{m+id_n/2} + \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{\beta^2 \bar{t}}{a_0^2}\right)^{j-id_n/2}. \quad (2.18)$$

Où A_m et B_j sont déterminés à partir des relations récurrentes suivantes :

$$4m(m + id_n)A_m + \left(\frac{a_0 \mu}{\beta}\right)^2 A_{m-1} = 0, \quad (2.18-a)$$

$$4j(j - id_n)B_j + \left(\frac{a_0 \mu}{\beta}\right)^2 B_{j-1} = 0. \quad (2.18-b)$$

Et A_0 et B_0 sont des constantes arbitraires.

Les deux séries (2.16) et (2.17) sont convergentes pour toutes les valeurs de l'argument \bar{t} , (voir le théorème 1.1).

Solution avec les variables originales

Revenir aux anciennes variables, en utilisant les équations (2.5), (2.6), et (2.14)-(2.18), on peut écrire l'équation de Klein-Gordon avec les variables originales (x, t) et qui satisfait (2.1) et (2.2) :

$$u_n(x, t) = C_n \sin \left(\frac{\beta d_n}{2} \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\ell - \beta x} \right) \right) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{\ell^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right)^{m+id_n/2} + \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{\ell^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right)^{j-id_n/2} \right\}, \quad (2.19)$$

• On convertie une équation (2.9) à l'équation de Bessel

On pose :

$$x^2 = \mu^2 \bar{t} \quad \text{et} \quad -\nu^2 = d_n^2,$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial \bar{t}} = \frac{\mu}{2\sqrt{\bar{t}}} \frac{\partial k}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 k}{\partial \bar{t}^2} = \frac{-\mu^3}{4x^2\sqrt{\bar{t}}} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\mu^2}{4\bar{t}} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}. \end{cases}$$

On substituant dans (2.9), on obtient :

$$\frac{x^2}{4} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{x}{4} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{4} (x^2 - \nu^2) k = 0,$$

i.e.

$$x^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + x \frac{\partial k}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) k = 0.$$

Et cette dernière est une équation de Bessel d'indice ν .

Donc la solution de l'équation (2.9) est :

$$k(\bar{t}) = C_1 J_{id_n}(\mu\sqrt{\bar{t}}) + C_2 Y_{id_n}(\mu\sqrt{\bar{t}}) \quad (2.20)$$

Solution avec les variables originales

Revenir aux anciennes variables, en utilisant les équations (2.5), (2.6), et (2.14), (2.15) et (2.20), on obtient

$$u_n(x, t) = C_n \sin \left[\frac{\beta d_n}{2} \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\ell - \beta x} \right) \right] \left\{ J_{id_n} \left(\mu \sqrt{\frac{\ell^2 - \beta^2 x^2}{\beta^2}} \right) + Y_{id_n} \left(\mu \sqrt{\frac{\ell^2 - \beta^2 x^2}{\beta^2}} \right) \right\}. \quad (2.21)$$

Remarques 2.1.

1. On peut démontrer que la formule (2.19) et (2.21) sont égaux (à une constante près).
2. par le principe de superposition, la série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n u_n(x, t),$$

est aussi solution de (2.19) et (2.21). Les C_n sont choisis pour satisfaire les conditions initiales (2.3).

Le cas $\mu = 0$ (Équation d'onde)

Si nous posons maintenant $\mu = 0$, alors, comme on peut le voir à partir de (2.18-a) et (2.18-b), tous les coefficients A_m et B_j , aussi A_0 et B_0 , seront nuls. On obtient la même solution donnée par [2], on a :

$$k(t) = C_n \exp \left[\pm \frac{id_n}{2} \ln \left(\frac{\ell^2 - \beta^2 x^2}{\beta^2} \right) \right],$$

et

$$h(x) = c_1 \exp \left[\frac{id_n}{2} \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\ell - \beta x} \right) \right] + c_2 \exp \left[-\frac{id_n}{2} \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\ell - \beta x} \right) \right].$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Dans ce cas

$$u_n(x, t) = C_n \exp \left[\pm \frac{id_n}{2} \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\beta} \right)^2 \right] + D_n \exp \left[\pm \frac{id_n}{2} \ln \left(\frac{\ell - \beta x}{\beta} \right)^2 \right].$$

Ainsi :

$$u_n(x, t) = C_n \exp \left[\pm id_n \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{\beta} \right) \right] + D_n \exp \left[\pm id_n \ln \left(\frac{\ell - \beta x}{\beta} \right) \right],$$

on multiplie par :

$$\exp \left[\ln \left(\frac{\beta}{a_0} \right) \right] \exp \left[-\ln \left(\frac{\beta}{a_0} \right) \right],$$

on déduit que :

$$u_n(x, t) = C_n \exp \left[\pm id_n \ln \left(\frac{\ell + \beta x}{a_0} \right) \right] + D_n \exp \left[\pm id_n \ln \left(\frac{\ell - \beta x}{a_0} \right) \right].$$

2.3 Solution du problème par changement de variables II

On peut utiliser une transformation hyperbolique qui fournit de manière simple la solution générale de l'équation de K-G linéaire. On utilise ici l'approche de Koehn [4].

Premièrement on prend comme temps initiale $t_0 > 0$. Le problème que nous étudions dans ce cas est décrit par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u, & 0 < x < \ell(t), \quad t > t_0, \\ u(0, t) = u(\ell(t), t) = 0, \\ u(x, t_0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = g(x), \quad 0 < x < \ell(t_0), \end{cases} \quad (2.22)$$

avec la fonction de longueur

$$\ell(t) = l_0 + \alpha(t - t_0),$$

où α satisfait toujours :

$$0 < \alpha < 1.$$

Ensuite, on considère le changement de variable hyperbolique.

Explicitement, le changement est donné par :

$$t = \rho\gamma_t \quad \text{et} \quad x = \rho\gamma_x, \quad (2.23)$$

soumis à la contrainte

$$(\gamma_t)^2 - (\gamma_x)^2 = 1. \quad (2.24)$$

Ce qui implique que

$$\rho^2 = t^2 - x^2. \quad (2.25)$$

Puisque les coordonnées γ_t et γ_x décrivent une hyperbole, on peut aussi les définir par un paramètre v en posant :

$$\gamma_t = \frac{v^2 + 1}{2v}, \quad \gamma_x = \frac{v^2 - 1}{2v}, \quad v = \gamma_t + \gamma_x. \quad (2.26)$$

Dans ces coordonnées hyperboliques, nous pouvons trouver un ensemble complet des solutions exactes si nous exigeons comme étape intermédiaire que :

$$t_0 = \frac{l_0}{\alpha}.$$

Après la transformation en espace hyperbolique, la limite droite dépend uniquement de la vitesse constante. En employant (2.26), nous pouvons déterminer la position de la limite droite dans l'espace hyperbolique. On a :

$$v = \frac{t+x}{\rho},$$

donc

$$v^2 = \frac{(t+x)^2}{t^2-x^2},$$

finalement, on obtient :

$$v^2 = \frac{t+x}{t-x}. \quad (2.27)$$

Pour $x = \alpha t$, sur l'extrémité variable dans les coordonnées (x,t) dans les coordonnées hyperbolique, on a :

$$v = \sqrt{\frac{t+\alpha t}{t-\alpha t}} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = \Lambda(\alpha).$$

2.3.1 Équations a variables séparées

En remplaçant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dans l'équation de K-G en termes de dérivées de $u(v, \rho) = u(x, t)$, par rapport aux nouvelles variables.

Où :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{t^2}{v^3(t-x)^4} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{t^2}{v^2(t-x)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - \frac{xt}{\rho v(t-x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v \rho} - \frac{xt}{\rho v(t-x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v \rho} + \frac{x^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{t^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{t^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{xt}{\rho v(t-x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v \rho} - \frac{xt}{\rho v(t-x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v \rho} + \frac{x^2}{v^3(t-x)^4} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{x^2}{v^2(t-x)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}.$$

On obtient l'équation :

$$\frac{t^2-x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{t^2-x^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{t^2-x^2}{v^2(t-x)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{t^2-x^2}{v^3(t-x)^4} \frac{\partial u}{\partial v} - \mu^2 u, \quad (2.28)$$

où :

$$\frac{t^2-x^2}{v^3(t-x)^4} = \frac{t^2-x^2}{v^2 \left(\frac{t+x}{t-x} \right) (t-x)^4} = \frac{1}{v(t-x)^2},$$

et comme :

$$(t-x)^2 = \frac{(t+x)^2}{v^4} = \frac{\rho^2}{v^2},$$

donc

$$\frac{t^2 - x^2}{v^3(t-x)^4} = \frac{1}{v} \frac{v^2}{\rho^2} = \frac{v}{\rho^2},$$

et on déduit que :

$$\frac{t^2 - x^2}{v^2(t-x)^4} = \frac{v^2}{\rho^2}.$$

En remplaçant dans (2.28), et en multipliant la résultat par ρ^2 , on obtient l'équation suivante :

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^2 \mu^2 u = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + v \frac{\partial u}{\partial v}. \quad (2.29)$$

Pour résoudre cette dernière équation, on utilise la méthode de séparation des variables, on pose :

$$u(v, \rho) = V(v) \Phi(\rho).$$

En injectant formellement cette formule dans l'équation (2.29). Ensuite, nous continuons comme avant. On obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} v^2 V''(v) + v V'(v) + k^2 V(v) = 0, \\ \rho^2 \Phi''(\rho) + \rho \Phi'(\rho) + (\mu^2 \rho^2 + k^2) \Phi(\rho) = 0, \end{cases}$$

où k est la constante de séparation.

2.3.2 Détermination de la fonction V

On pose $V(v) = v^r$, donc

$$V' = r v^{r-1} \quad \text{et} \quad V'' = r(r-1) v^{r-2}.$$

Si en substituant ces expressions V, V', V'' dans l'équation et après la simplification, on obtient l'équation indicelle suivante :

$$r^2 + k^2 = 0.$$

Donc,

$$V(v) = C_1 \cos(k \ln v) + C_2 \sin(k \ln v), \quad (2.30)$$

où : C_1 et C_2 sont des constantes.

On appliquant les condition aux limites :

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow v = 1 \implies C_1 = 0,$$

et

$$\text{si } x = \ell(t) = \alpha t \Rightarrow v = \Lambda(\alpha) \implies \begin{cases} C_2 = 0, \\ \text{ou} \\ k \ln(v) = n\pi, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donc, pour ne pas avoir une solution nulle, on a

$$C_1 = 0, \quad k = k_n = \frac{n\pi}{\ln \Lambda(\alpha)}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

2.3.3 Détermination de la fonction Φ

Si on pose : $x^2 = \mu^2 \rho^2$ et $-\nu^2 = k_n^2$. On a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \mu \frac{\partial k}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2},$$

en substituant dans l'équation de Φ :

$$(x^2 \mu^{-2})(\mu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (x \mu^{-1}) \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) \Phi = 0.$$

On obtient l'équation de Bessel d'indice ν suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) \Phi = 0.$$

Alors

$$\Phi(\rho) = D_1 J_{ik_n}(\mu\rho) + D_2 Y_{ik_n}(\mu\rho).$$

Où : D_1 et D_2 sont des constantes.

Solution avec les variables originales

En revenant aux anciennes variables et en utilisant les équations (2.25) et (2.27), on obtient :

$$u_n(x, t) = C_n \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \left(D_1 J_{ik_n}\left(\mu\sqrt{t^2-x^2}\right) + D_2 Y_{ik_n}\left(\mu\sqrt{t^2-x^2}\right)\right). \quad (2.32)$$

Remarque 2.1. Pour $a_0 = 1$ dans le premier changement de variable, dans ce cas $\beta = \alpha$ et $d_n = k_n$ et on peut vérifier que solution (2.21) et (2.32) ont la même forme.

SOLUTION AVEC DIFFÉRENCES FINIES

Dans ce chapitre, on introduit un schéma de différences finies explicite pour l'équation de Klein-Gordon, et quelques exemples numériques sont présentés.

3.1 Le problème avec longueur variable

On considère le problème (2.1), (2.2) et (2.3), pour fixé la longueur

$$\ell(t) = 1 + \alpha t, \quad 0 < \alpha < 1,$$

en faisant le changement de variable :

$$y = \frac{x}{\ell(t)},$$

et en remplaçant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dans l'équation (2.1) en termes de dérivées de $u(y, t) = u(x, t)$, par rapport aux nouvelles variables, où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{y \ell'^2}{\ell^2} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{y \ell'}{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{y \ell'^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

On obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(u, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + \mu^2 u = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

$$a(y, t) = \frac{y\alpha - 1}{\ell^2}, \quad b(y, t) = \frac{-2y\alpha}{\ell} \quad \text{et} \quad c(y, t) = \frac{2y\alpha^2}{\ell^2},$$

3.2 Différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées exactes par des dérivées approchées discrètes au moyen de la formule de Taylor.

Discrétisation du domaine

Le domaine $[0, T]$ temporel est représenté par un nombre fini de points du maillage

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t-1} < t_{N_t} = T,$$

de même, le domaine $[0, 1]$ spatial est remplacé par un ensemble de points du maillage

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y-1} < y_{N_y} = 1.$$

On peut voir le maillage comme bidimensionnel dans le plan y, t , constitué de points (y_i, t_n) , avec $i = 0, \dots, N_y$ et $n = 0, \dots, N_t$.

Pour les points du maillage uniformément distribués, nous avons introduire les espacements du maillage constants Δy et Δt . Nous avons cela

$$y_i = i\Delta y \quad i = 0, \dots, N_y, \quad t_n = n\Delta t \quad n = 0, \dots, N_t.$$

Nous avons aussi que $\Delta y = y_i - y_{i-1} \quad i = 1, \dots, N_y$ et $\Delta t = t_n - t_{n-1} \quad n = 1, \dots, N_t$.

la figure 3.1, déplace un maillage dans le plan y, t avec $N_t = 5 \quad N_y = 5$, et des espacements du maillage constants.

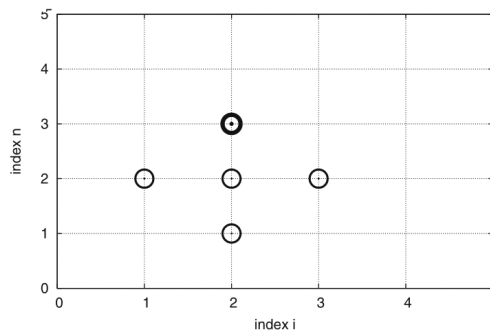


FIGURE 3.1 – Maillage dans l’espace et le temps, les cercles indiquent les points connectés dans l’équation aux différences finies.

La solution discrète

La solution $u(y, t)$ est recherchée aux points du maillage. Nous introduisons la fonction u_i^n , qui se rapproche de la solution exacte au point de maillage (y_i, t_n) pour $i = 0, \dots, N_y$ et $n = 0, \dots, N_t$.

En utilisant la méthode des différences finies, nous allons développer une équation algébrique pour calculer la fonction du maillage.

3.2.1 Discrétisation du problème

On approche :

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y_i, t_n)$ par une différence finie centrée d'ordre 2 en temps

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}.$$

2. $\frac{\partial u}{\partial y}(y_i, t_n)$ par une différence finie centrée d'ordre 1 en espace

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta y}.$$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_i, t_n)$ par une différence finie centrée d'ordre 2 en espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta y^2}.$$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}$ par une différence finie centrée d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}(y_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^{n-1} - u_{i+1}^{n-1}}{4\Delta y \Delta t}$$

Donc on peut approcher le problème linéaire (3.1), par le problème discrétisé ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + a_i^n \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta y^2} + b_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^{n-1} - u_{i+1}^{n-1}}{4\Delta y \Delta t} \\ + c_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta y} + \mu^2 u_i^n = 0, \\ u_0^n = u_i^n = 0, \\ u_i^0 = f(y_i), u_i^1 = u_i^0 + \Delta t * g(y_i). \end{cases}$$

Où :

$$a_i^n = a(i\Delta y, n\Delta t), \quad b_i^n = b(i\Delta y, n\Delta t) \quad \text{et} \quad c_i^n = c(i\Delta y, n\Delta t).$$

Si on prend $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta y}$, on obtient l'équation explicite suivante :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + \frac{\beta}{4} b_i^n u_{i+1}^{n+1} - \frac{\beta}{4} b_i^n u_{i-1}^{n+1} &= [2 + 2\beta^2 a_i^n - \mu^2 \Delta t^2] u_i^n - \left[\beta^2 a_i^n + \frac{\beta}{2} \Delta t c_i^n \right] u_{i+1}^n \\ &+ \left[-\beta^2 a_i^n + \frac{\beta}{2} \Delta t c_i^n \right] u_{i-1}^n - u_i^{n-1} + \frac{\beta}{4} b_i^n u_{i+1}^{n-1} - \frac{\beta}{4} b_i^n u_{i-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1. On prend $\alpha = 0.7$, et les conditions initiales :

$$f(x) = \sin(2\pi x)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}, \quad g(x) = 0,$$

et on choisit trois différentes valeurs de μ , on obtient les graphes suivants :

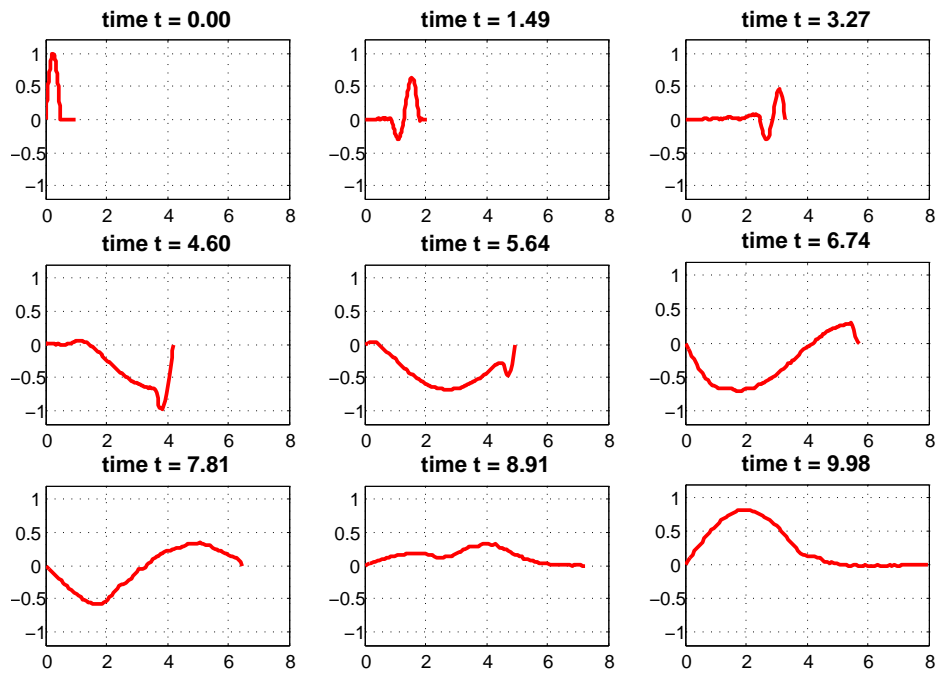
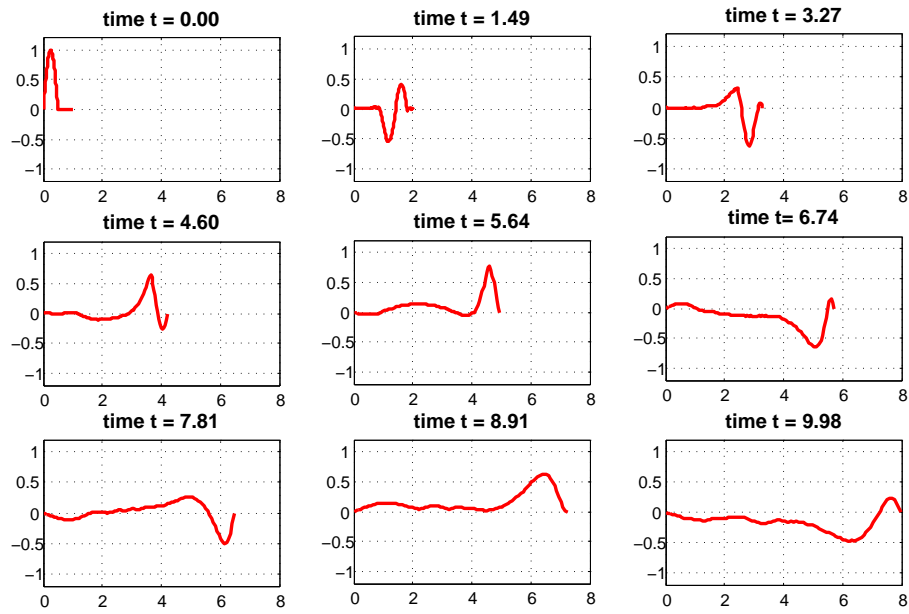
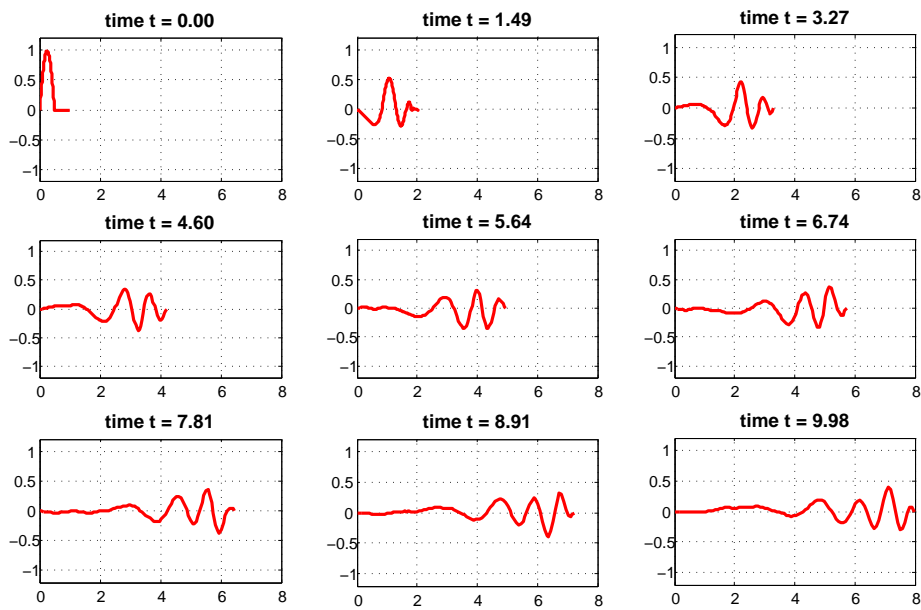


FIGURE 3.2 – Solution pour $\mu = 0.1$.

FIGURE 3.3 – Solution pour $\mu = 2$.FIGURE 3.4 – Solution pour $\mu = 5$.

Exemple 3.2. On prend $\mu = 3$, et les conditions initiales :

$$f(x) = \sin(2\pi x)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}, \quad g(x) = 0,$$

et on choisit trois différentes valeurs de α , on obtient les graphes suivants :

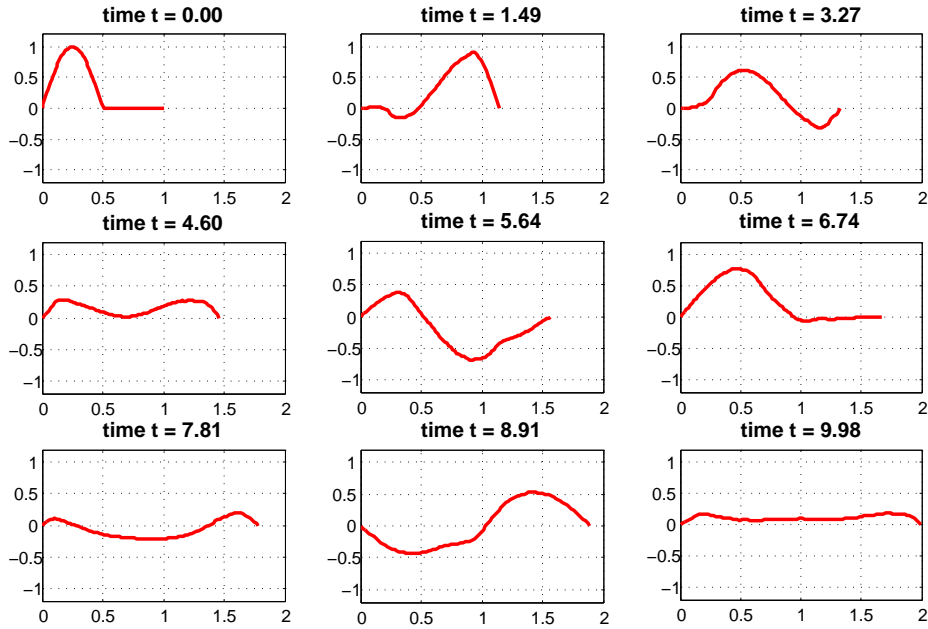
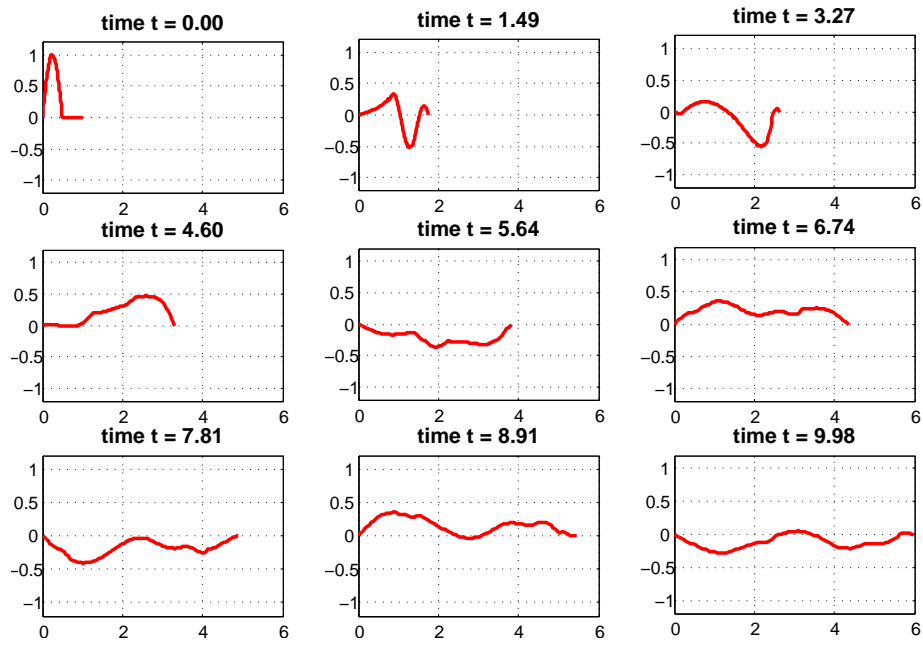
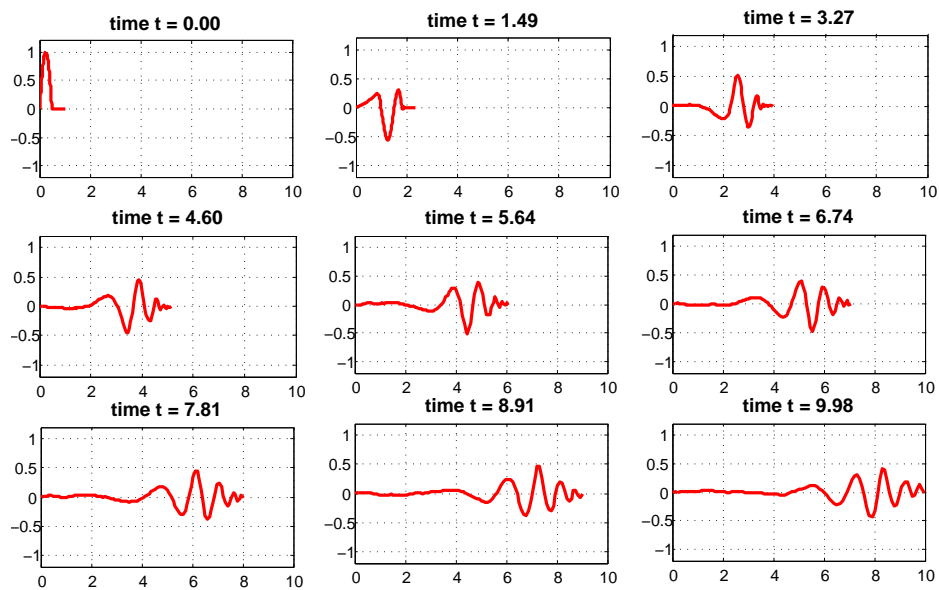


FIGURE 3.5 – Solution pour $\alpha = 0.1$.

FIGURE 3.6 – Solution pour $\alpha = 0.5$.FIGURE 3.7 – Solution pour $\alpha = 0.9$.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a étudié l'équation de Klein-Gordon en dimension un suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu^2 u, & 0 < x < \ell(t), \\ u(0, t) = u(\ell(t), t) = 0, \\ u(x, t_0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = g(x) & 0 < x < \ell(t_0), \end{cases}$$

où l'extrémité $\ell(t)$ dépend du temps. On a obtenu la solution exacte, sous forme d'une série de fonctions spéciales, et nous avons aussi pu résoudre cette équation par différences finies.

Bibliographie

- [1] R.P.Agarwal Donal O'Regan. *Ordinary and Partial Differential Equation*. Springe, 2009.
- [2] N.L.Balazs. On the solution of the wave Equation with Moving Boundaries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3 :472-474, 1961.
- [3] E.L.Ince. *Ordinary Differential Equation*. New York, 1956.
- [4] M.Kohoen. Solution of the Klein-Gordon equation in an infinite square-well potential with a moving wall. *EPL*, 60008 : 1-2, 2012.
- [5] H.P.Langtangen, and S.Linge. *Finite Difference Computing with PDEs*. Springe, 2017.
- [6] N.Lerner. *Foncctions spéciales. Cours de master 1, 4M004*. Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [7] I.Liu, and M.A.Rincon. Effect of moving boundaries on the vibrating elastic string. *Elsevier B.V*, 47 :159-163, 2003.
- [8] R.Nagle, B.Saff, and D.S. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Greg Tobin, 2012.
- [9] A.I.Vesnitskii. Propagation Of Electromagnetic Waves In A Waveguide With Movable Boundaries. *Gorky state university*, 12 :744-747, 1969.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les vibrations d'une corde tendue de longueur variable avec une vitesse constante. Le modèle mathématique considéré est une équation de Klein-Goron linéaire. Le but de ce travail c'est pour trouver la solution exacte du problème, sous forme d'une série de fonctions spéciales. On a aussi donné une approche numérique par différences finies.

Mots-Clés : Équation de Klein-Gordon linéaire, méthode de Frobenius , fonction de Bessel, solution sous forme de série, différences finies.

Abstract

In this work, we study the vibrations of a stretched string of variable length with a constant speed. The mathematical model considered is a linear Klein-Gordon equation. The goal of this work is to find the exact solution of the problem, in the form of a series of some special functions. We also give a numerical approach by finite differences.

Keywords : Linear Klein-Gordon equation, Frobenius method, Bessel equation, solution in the form of a series, finite differences.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة اهتزاز الحبل المشدود ذو الطول المتغير بسرعة ثابتة. والنموذج الرياضي الذي تم بحثه هو معادلة كلاين غوردن الخطية . الهدف من هذا العمل هو إيجاد الحل الدقيق للمسألة ، على شكل سلسلة من الدوال الخاصة . لقد قدمنا أيضا مقاربة رقمية باستخدام الفروق المحدودة.

كلمات مفتاحية: معادلة كلاين غوردن الخطية، طريقة فروبينوس، دالة بسل، الحل على شكل سلسلة، الفروق المحدودة.