

PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH



Mohamed Boudiaf University of M'sila
Faculty of Mathematics and Computer Science
Department of Mathematics



Order Number :

THESIS

Presented to obtain the degree of **Doctorate in Science**

Field : Mathematics

Specialty : Applied Mathematics

By : SEGHIRI FAKHREDDINE

Title

On The Orthogonal Rational Functions

Publicly defended on __/__/2026, before the jury composed of :

Mr. GASMI Abdelkader	Professor	University of M'sila	President
Mr. NADIR Mostefa	Professor	University of M'sila	Thesis Supervisor
Mr. RAHMOUNE Azedine	Professor	University of Setif 1	Examiner
Mr. MEROUANI Abdelbaki	Professor	University of Setif 1	Examiner
Mr. BOUKAROURA Ilyas	MCA	University of Setif	Examiner
Mr. GAGUI Bachir	MCA	University of M'sila	Examiner

Academic Year : 2025/2026

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Numéro d'ordre :

THÈSE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT en Sciences**

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Par : SEGHIRI FAKHREDDINE

Sujet

Sur Les Fonctions Rationnelles Orthogonales

Soutenue publiquement, le _/_/2026, devant le jury composé de :

M. GASMI Abdelkader	Professeur	Université de M'sila	Président
M. NADIR Mostefa	Professeur	Université de M'sila	Directeur de thèse
M. RAHMOUNE Azedine	Professeur	Université de Sétif 1	Examineur
M. MEROUANI Abdelbaki	Professeur	Université de Sétif 1	Examineur
M. BOUKAROURA Ilyas	MCA	Université de Sétif	Examineur
M. GAGUI Bachir	MCA	Université de M'sila	Examineur

Année Universitaire : 2025/2026

Dédicaces

À la mémoire de ma chère mère, **Gauraya**— **Allah yarhamha** —, dont la douceur, les sacrifices et l'amour continuent d'éclairer ma vie. Son souvenir restera à jamais gravé dans mon cœur.

Qu'Allah l'accueille en Son vaste paradis.

À mon père, **Messaoud (dit Said)**, pour son amour, sa sagesse et ses prières, qui m'ont toujours accompagné sur le chemin de la réussite. Puisse Dieu le garder en bonne santé et prolonger ses jours dans la paix.

À mon épouse, **Chelali Hadjer**, mon pilier, ma confidente et ma plus belle source d'inspiration. Tu as su allier avec grâce ton rôle d'épouse, de mère et de directrice, en m'apportant un soutien indéfectible et une foi inébranlable en mes capacités. Ta présence a donné sens et équilibre à ce parcours. Merci pour ton amour, ta patience et ton engagement sans faille. Tu es la lumière qui éclaire ma route.

À mes chères filles, **Khadija, Abir, Rania et Ola**, pour la joie, la tendresse et la motivation que vous m'apportez chaque jour. Puissiez-vous toujours croire en vos rêves et marcher avec confiance sur vos propres chemins.

À mes frères et sœurs, pour leur affection et leur soutien constants. Vous restez ma famille, ma force et mon repère.

À la mémoire de mon beau-père, **El Hadj Chelali Abdekrim (dit Mohamed)** — **Allah yarhamhou** —, dont la bienveillance, la sagesse et les conseils ont profondément marqué nos vies. Que Dieu l'accueille en Sa miséricorde et lui accorde une place au Paradis.

À ma belle-famille, pour leur affection, leur confiance et leur présence chaleureuse. Vous avez été un véritable soutien tout au long de ce parcours.

Enfin, à mes amis et collègues, pour leur amitié, leur confiance et leurs encouragements. Merci d'avoir fait partie de ce parcours humain et professionnel.

Remerciements

Je rends grâce à Dieu, le Tout-Puissant, pour la santé, la patience et la volonté qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

*Mes sincères remerciements vont à Monsieur le Professeur **NADIR Mostefa**, directeur de cette thèse, pour sa confiance, son encadrement rigoureux, sa disponibilité et ses précieux conseils, qui ont grandement contribué à la réussite de ce travail.*

*Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur **GASMI Abdelkader**, de l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury et pour ses remarques constructives.*

*J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur **RAHMOUNE Azedine**, de l'Université de Sétif, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail et pour le temps qu'il a consacré à son évaluation attentive.*

*Mes remerciements s'adressent également aux Professeurs **MEROUANI Abdelbaki** et **BOUKAROURA Ilyas**, de l'Université de Sétif 1, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer au jury.*

*Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur **GAGUI Bachir**, de l'Université de M'sila, pour son amitié sincère, ses orientations éclairées et ses encouragements constants, ainsi que pour l'honneur d'avoir accepté de faire partie du jury.*

J'adresse mes sincères remerciements à l'ensemble des professeurs du département de mathématiques pour leur soutien, conseils, leurs encouragements tout au long de ce travail.

Je n'oublie pas mes amis et camarades, dont la présence, l'aide et la bonne humeur ont accompagné chaque étape de ce parcours.

*Je souhaite conclure ces remerciements en adressant une pensée particulière à **Monsieur le Professeur Lakhali Belkacem**, aujourd'hui à la retraite, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour l'accompagnement bienveillant qu'il m'a offert tout au long de sa réalisation.*

Résumé

Depuis plus d'un siècle, les **polynômes orthogonaux (PO)** constituent un pilier de l'analyse fonctionnelle et numérique. Ils interviennent dans l'**approximation**, l'**interpolation**, la **quadrature** et la **résolution d'équations intégrales**. Leur cadre théorique, solide et bien établi, a permis le développement de nombreuses méthodes numériques performantes. Cependant, leur rigidité structurelle limite parfois leur efficacité, notamment face à des intégrales présentant des singularités ou des comportements non réguliers.

Les **fonctions rationnelles orthogonales (FRO)** apparaissent alors comme une **extension naturelle et plus flexible** des PO. En introduisant des **pôles ajustables**, elles conservent l'orthogonalité tout en offrant une meilleure adaptation aux caractéristiques du problème étudié. Elles ouvrent ainsi de nouvelles perspectives pour le calcul scientifique moderne, en particulier dans la **résolution d'équations intégrales**.

Cette thèse s'organise autour de deux grands axes complémentaires :

1. La **construction théorique et analytique** des FRO dans différents espaces fonctionnels (Hilbert, Lebesgue pondérés, Hardy) et le développement de **formules de quadrature rationnelle** de type Gauss–Chebyshev ;
2. Leur **application à la résolution d'équations intégrales** de Fredholm et de Volterra par des **méthodes de projection et de collocation**, avec une **analyse détaillée de la convergence, de la stabilité et de l'efficacité numérique**.

Les FRO sont exploitées comme une **base fonctionnelle adaptative** pour approximer les solutions d'équations intégrales. Les résultats obtenus montrent une **amélioration notable en précision, stabilité et rapidité de convergence** par rapport aux approches classiques fondées sur les polynômes orthogonaux.

Ce travail établit ainsi un **lien clair entre théorie et calcul numérique**, confirmant le potentiel des FRO comme outils performants pour l'approximation rationnelle et la résolution d'équations intégrales complexes.

Mots-clés : polynômes orthogonaux, fonctions rationnelles orthogonales, quadrature rationnelle, équations intégrales, équations de Volterra–Fredholm, approximation numérique.

Abstract

For more than a century, **orthogonal polynomials (OP)** have been a cornerstone of functional and numerical analysis. They play a fundamental role in **approximation, interpolation, quadrature**, and the **numerical solution of integral equations**. Their well-established theoretical framework has enabled the development of many efficient computational methods. However, their rigid structure sometimes limits their efficiency, especially when dealing with integrals involving singularities or irregular behaviors.

Orthogonal rational functions (ORF) then emerge as a **natural and more flexible extension** of OPs. By introducing **adjustable poles**, they preserve orthogonality while providing better adaptability to the characteristics of the problem under study. They thus open new perspectives for modern scientific computing, particularly in the **solution of integral equations**.

This thesis is organized around two main complementary directions :

1. The **theoretical and analytical construction** of ORFs in various functional spaces (Hilbert, weighted Lebesgue, Hardy), and the development of **rational quadrature formulas** of the Gauss–Chebyshev type ;
2. Their **application to the numerical solution of Fredholm and Volterra integral equations** through **projection and collocation methods**, accompanied by a **detailed analysis of convergence, stability, and numerical performance**.

The ORFs are used as an **adaptive functional basis** to approximate the solutions of integral equations. The results demonstrate a **significant improvement in accuracy, stability, and convergence rate** compared with classical approaches based on orthogonal polynomials.

This work thus establishes a **clear link between theory and numerical computation**, confirming the potential of ORFs as efficient tools for rational approximation and the numerical solution of complex integral equations.

Keywords : orthogonal polynomials, orthogonal rational functions, rational quadrature, integral equations, Volterra–Fredholm equations, numerical approximation.

ملخص البحث

منذ أكثر من قرن، تُعدُّ كثريات الحدود المتعامدة أحد الأعمدة الأساسية في التحليلين الرياضي والعددي. فقد لعبت دورًا محوريًا في مجالات التقريب والاستيفاء والتكامل العددي وحل المعادلات التكاملية. وقد أتاح إطارها النظري المتين تطوير العديد من الأساليب العددية الفعالة. ومع ذلك، فإن بنيتها الصارمة تحدُّ أحيانًا من فعاليتها، خاصة عند التعامل مع تكاملات تحتوي على تفردات أو سلوكيات غير منتظمة.

في هذا السياق، تظهر الدوال الكسرية المتعامدة بوصفها امتدادًا طبيعيًا وأكثر مرونة لهذه كثريات الحدود. فهي تحافظ على خاصية التعامد مع إدخال أقطاب قابلة للضبط تمنحها قدرة أعلى على التكيف مع طبيعة المسألة المدروسة. وبهذا تفتح آفاقًا جديدة أمام الحوسبة العلمية الحديثة، خصوصًا في حل المعادلات التكاملية.

تتمحور هذه الأطروحة حول محورين أساسيين:

1. **البناء النظري والتحليل الرياضي** للدوال الكسرية المتعامدة في فضاءات دالية مختلفة، مثل فضاءات هيلبرت ولبغ الموزونة وفضاءات هاردي، مع تطوير صيغ تكامل كسرية من نوع غاوس-تشببشيف؛
2. **تطبيق هذه الدوال في حل المعادلات التكاملية** لفريدمولم وفولتيرا باستخدام طرق الإسقاط والتوفيق العددي، مع تقديم تحليل دقيق للتقارب والثبات والكفاءة الحسابية.

تُستخدم هذه الدوال كأساس دالي متكيف لتقريب حلول المعادلات التكاملية، وقد أظهرت النتائج تحسنًا واضحًا في الدقة والاستقرار وسرعة التقارب مقارنة بالطرق التقليدية المعتمدة على كثريات الحدود المتعامدة.

تُرسخ هذه الدراسة صلة متينة بين النظرية والتطبيق العددي، مؤكدةً الدور الفعال للدوال الكسرية المتعامدة كأداة قوية في التقريب الكسري وحل المعادلات التكاملية المعقدة.

الكلمات المفتاحية:

كثريات الحدود المتعامدة، الدوال الكسرية المتعامدة، التكامل الكسري، المعادلات التكاملية، معادلات فولتيرا-فريدمولم، التقريب العددي.

Table des matières

Dédicaces

Remerciements

Liste des tableaux i

Table des figures ii

Notations iii

Introduction Générale 1

1 L'orthogonalité dans les espaces fonctionnels 5

1.1 Espaces fonctionnels 5

1.1.1 Espaces de Hilbert 5

1.1.2 Espaces de Lebesgue pondérés L_w^2 6

1.1.3 Espaces de Hardy 7

1.2 Orthogonalité et approximation 8

1.2.1 Orthogonalité 8

1.2.2 Projections orthogonales 9

1.2.3 Approximation 11

1.3 Les polynômes orthogonaux 12

1.3.1 Théories générale des polynômes orthogonaux 13

1.3.2 Polynômes orthogonaux classiques et de Szegő 14

1.3.3 Applications des polynômes orthogonaux : la quadrature de Gauss . 16

2 Les Fonctions Rationnelles Orthogonales 19

2.1 Cadre fonctionnel et définitions fondamentales 19

2.1.1 Définition et construction des espaces de fonctions rationnelles . . . 19

2.1.2 Fondations théoriques des fonctions rationnelles orthogonales 24

2.1.3 Construction des fonctions rationnelles orthogonales 25

2.1.4	Propriétés analytiques et orthogonales fondamentales des FRO	27
2.2	Familles classiques des FRO	29
2.2.1	FRO sur le cercle unité et le demi-axe réel	29
2.2.2	Bases classiques des FRO	32
2.3	Application : quadratures rationnelles et orthogonales	34
2.3.1	Quadratures rationnelles de type Gauss	34
2.3.2	Quadrature rationnelle orthogonale	36
3	Fondements théoriques des équations intégrales	40
3.1	Introduction aux équations intégrales	40
3.1.1	Définition générale et notations	40
3.1.2	Classification des équations intégrales	41
3.2	Fondements théoriques et opérateurs	42
3.2.1	Opérateurs linéaires	42
3.2.2	Opérateurs Intégraux	44
3.2.3	Opérateurs adjoints	45
3.2.4	Existence et unicité des solutions des équations intégrales	46
3.3	Résolution des équations intégrales	50
3.3.1	Présentation des méthodes de résolution	50
3.3.2	Méthode itératives de résolution	52
3.3.3	Méthode d'approximation de Nyström	53
3.3.4	Méthodes de projection : collocation et Galerkin	55
4	Résolution des équations intégrales par les fonctions rationnelles orthogonales	58
4.1	Fonctions rationnelles de Chebyshev	59
4.2	Développement des fonctions rationnelles sur l'intervalle [0,1]	60
4.3	Application aux équations intégrales de Volterra-Fredholm	61
4.3.1	Approximation de la solution	61
4.3.2	Méthode de collocation	62
4.3.3	Analyse théorique	62
4.4	Exemples numériques	64
	Conclusion Générale	71
	Bibliographie	72

Liste des tableaux

1.1	Exemples de poids classiques dans les espaces de Lebesgue L_w^2	7
1.2	Variétés classiques de la quadrature de Gauss	17
2.1	Quadrature rationnelle pour $I_1(2)$ [Gau93]	35
4.1	Solutions exactes et approchées de l'exemple 1	64
4.2	Solutions exactes et approchées de l'exemple 2	66
4.3	Solutions exactes et approchées de l'exemple 3	67
4.4	Solutions exactes et approchées de l'exemple 4	68
4.5	Solutions exactes et approchées de l'exemple 5	69

Table des figures

1.1	Polynômes de Chebyshev de première espèce $T_n(x)$ pour $n = 1$ à 5	15
4.1	Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 1 ($N = 8$).	65
4.2	Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 2 ($N = 8$).	66
4.3	Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 3 ($N = 8$).	67
4.4	Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 4 ($N = 8$).	68
4.5	Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 5 ($N = 8$).	69

Notations

Liste des symboles

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
$\overline{\mathbb{R}}$	ensemble des réels étendus, incluant $-\infty$ et $+\infty$, soit $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels (incluant 0)
\mathbb{C}_0	ensemble des complexes privés de 0, i.e. $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\overline{\mathbb{C}}$	plan complexe étendu : $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
\mathbb{T}	cercle unité, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$
\mathbb{D}	disque unité, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$
$[a, b]$	intervalle réel fermé
i	unité imaginaire, $i^2 = -1$
z	variable complexe dans \mathbb{D} ou sur \mathbb{T}
$C([a, b])$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
$\ f\ _\infty$	norme uniforme, $\ f\ _\infty = \sup_{x \in [a, b]} f(x) $
$L^2(\Omega)$	espace des fonctions carrées intégrables sur Ω
$w(x)$	fonction de poids mesurable vérifie : $w > 0$ p.p. et localement intégrable
$L^2_w(\Omega)$	espace L^2 pondéré avec poids w
$H^2(\mathbb{D})$	espace de Hardy sur le disque unité
\mathcal{P}_n	espace des polynômes de degré au plus n
$\langle f, g \rangle$	produit scalaire (classique ou pondéré)
$\ f\ $	norme associée au produit scalaire, $\ f\ = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
$f \perp g$	orthogonalité entre deux fonctions f et g
$P_V(f)$	projection orthogonale de f sur un sous-espace V
\bigoplus	somme directe d'espaces vectoriels
δ_{ij}	symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, sinon 0
$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	base orthonormale dans un espace de Hilbert
$\hat{f}(n)$	coefficient de Fourier de f selon ϕ_n , $\hat{f}(n) = \langle f, \phi_n \rangle$
A	suite de pôles dans $\overline{\mathbb{C}_0}$, $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$

α_j	nombre complexe dans $\overline{\mathbb{C}_0}$, en dehors de $\text{supp}(\mu)$
\mathcal{L}_n	espace des fonctions rationnelles de degré $\leq n$ avec pôles dans A $\mathcal{L}_n = \left\{ \frac{p_n}{\pi_n} \mid p_n \in \mathcal{P}_n \right\}, \mathcal{L}_{-1} = \{0\}$
\mathcal{L}	espace total des fonctions rationnelles : $\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$
$T_n(x)$	polynômes de Tchebychev (1re espèce)
$P_n(x)$	polynômes de Legendre
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	polynômes de Jacobi
$L_n^{(\alpha)}(x)$	polynômes de Laguerre
$H_n(x)$	polynômes de Hermite
$\Phi_n(z)$	polynômes de Szegő, orthogonaux sur \mathbb{T}

Abréviations

PO	polynômes orthogonaux
FRO	fonctions rationnelles orthogonales
mFRO	FRO moniques (coefficient principal égal à 1)
nFRO	FRO orthonormées (norme L^2 égale à 1)
mnFRO	FRO moniques et orthonormées (moniques et de norme unitaire)

Introduction Générale

1. Contexte général

Depuis le XIX^e siècle, les **polynômes orthogonaux (PO)** occupent une place essentielle dans l'analyse mathématique et numérique. Les travaux de Stieltjes, Chebyshev, Legendre, Hermite ou Szegő [Sze75] ont permis de construire une théorie solide, fondée sur l'orthogonalité, les relations de récurrence et un comportement asymptotique bien maîtrisé. Ces polynômes sont devenus des outils fondamentaux pour *l'approximation de fonctions, l'interpolation, l'analyse spectrale* et surtout le *calcul d'intégrales* grâce aux quadratures de Gauss [Tre13, Gau99].

Leur rôle est particulièrement important dans la résolution numérique des **équations intégrales**, où ils fournissent des bases efficaces pour les méthodes de projection ou de collocation [Atk97, Nad14a]. Cependant, ces approches classiques montrent leurs limites lorsque les intégrales comportent des singularités, des noyaux oscillants ou des fonctions à décroissance lente. De tels cas apparaissent souvent en mécanique quantique, en électromagnétisme ou en physique computationnelle, où la précision et la stabilité numérique deviennent cruciales.

Dans ce contexte, les **fonctions rationnelles orthogonales (FRO)** apparaissent comme une extension naturelle et puissante des polynômes orthogonaux. En introduisant des pôles ajustables et une orthogonalité définie par rapport à des mesures plus générales, elles offrent une flexibilité supplémentaire pour représenter des phénomènes complexes. Elles conservent les principales propriétés des polynômes classiques — relations de récurrence, quadratures et comportements asymptotiques — tout en élargissant le champ d'application des méthodes d'approximation et de calcul intégral.

Deux cadres principaux structurent cette théorie :

- Dans le **cas complexe**, les pôles sont situés à l'extérieur du disque unité et la mesure d'orthogonalité est portée par le cercle unité \mathbb{T} , prolongeant la théorie des polynômes de Szegő.
- Dans le **cas réel**, les pôles appartiennent à la droite réelle étendue $\widehat{\mathbb{R}}$, généralisant les familles classiques de Legendre, Laguerre, Jacobi et Hermite [Ger61].

Ces deux approches reposent sur des idées communes : l'orthogonalité rationnelle, les transformées de Pick–Nevanlinna [BD79, Sim05] et des suites récurrentes adaptées. Elles ont donné lieu à des développements théoriques et numériques importants, notamment pour les problèmes de quadrature, d'interpolation et de moments généralisés.

Sur le plan historique, les premières constructions remontent aux travaux de TAKE-NAKA [Tak25] et MALMQUIST [Mal26], qui ont introduit des familles rationnelles orthogonales sur le cercle unité. Plus tard, DJRBAŠIAN [Djr62, Djr66] a formulé une théorie analytique complète, posant les bases modernes des FRO. La synthèse la plus aboutie est due à BULTHEEL, GONZÁLEZ-VERA, HENDRIKSEN et NJÅSTAD [BGVHN99], qui ont unifié les approches réelle et complexe et établi les outils fondamentaux : relations de type Szegő–Favard, fonctions du second genre, quadratures rationnelles et approximants de Padé multipoints [BGM96]. Depuis, plusieurs auteurs [LP96, DBGV06] ont exploré les conditions de convergence, la régularité et les applications des FRO, notamment en quadrature numérique et en identification de systèmes dynamiques.

2. Problématique et motivations

Dans la continuité de ces travaux, les **fonctions rationnelles orthogonales** ne se limitent pas à corriger les limites des méthodes classiques. Elles offrent de nouvelles approches numériques, plus souples et mieux adaptées aux problèmes complexes ou singuliers. Leur structure flexible et leurs propriétés d'orthogonalité précises en font des outils efficaces pour développer des méthodes fiables de résolution d'équations intégrales.

Dès lors, une question centrale se pose :

Comment construire, analyser et exploiter des familles de fonctions rationnelles orthogonales pour surmonter les limites des approches classiques, notamment en intégration numérique et dans la résolution d'équations intégrales ?

Cette question soulève plusieurs défis complémentaires :

- **Sur le plan théorique** : définir et analyser les FRO dans des espaces fonctionnels adaptés, en étudiant leurs propriétés de convergence, de récurrence et de complétude ;
- **Sur le plan numérique** : concevoir des méthodes stables et précises, capables de traiter des intégrales singulières ou oscillantes ;
- **Sur le plan appliqué** : adapter ces outils à des modèles issus de la physique ou de l'ingénierie, notamment les équations de Fredholm et de Volterra.

Ainsi, cette recherche se situe à l'intersection de l'analyse fonctionnelle, de l'approximation numérique et de l'algorithmique scientifique. Elle vise à construire un pont entre la théorie des FRO et leurs applications concrètes en calcul scientifique.

3. Objectifs et plan de la thèse

L'objectif principal de ce travail est de **développer un cadre théorique et numérique cohérent** pour les fonctions rationnelles orthogonales et d'en démontrer l'efficacité dans la résolution d'équations intégrales. Plus précisément, la recherche poursuit les objectifs suivants :

1. Construire et étudier les FRO dans différents cadres fonctionnels, en analysant leurs propriétés analytiques et asymptotiques ;
2. Développer des formules de *quadrature rationnelle* adaptées à l'évaluation d'intégrales difficiles ;
3. Élaborer des méthodes de projection fondées sur les FRO pour la discrétisation et la résolution d'équations intégrales ;
4. Implémenter ces méthodes et évaluer leurs performances numériques par comparaison avec les approches classiques.

Pour atteindre ces objectifs, la thèse est organisée en quatre chapitres.

Le Chapitre 1, *L'orthogonalité dans les espaces fonctionnels*, présente les bases mathématiques nécessaires à l'étude des fonctions rationnelles orthogonales. Il introduit les principaux espaces fonctionnels utilisés, ainsi que les notions essentielles d'orthogonalité et de projection. Le chapitre se conclut par un aperçu des polynômes orthogonaux classiques et de leurs applications en quadrature.

Le Chapitre 2, intitulé *Les fonctions rationnelles orthogonales*, constitue le noyau théorique de ce travail. Il présente la construction des FRO, leurs propriétés analytiques essentielles, ainsi que leurs principales familles classiques et leurs applications numériques, notamment les quadratures rationnelles.

Le Chapitre 3, *Fondements des équations intégrales*, qui présente leur typologie, les opérateurs associés et les principaux théorèmes d'existence et d'unicité, ainsi que les méthodes classiques de résolution, telles que celles de Nyström, de collocation et de Galerkin.

Le Chapitre 4, *Résolution des équations intégrales par les FRO*, applique les fonctions rationnelles orthogonales de Tchebychev à la résolution numérique des équations intégrales de Volterra–Fredholm. Fondée sur une méthode de collocation, l'approche proposée assure une approximation stable et précise, validée par des résultats numériques comparatifs.

La thèse se conclut par une synthèse des résultats obtenus et des perspectives ouvertes pour la recherche future.

En définitive, les **fonctions rationnelles orthogonales** prolongent et enrichissent la théorie des polynômes orthogonaux. Elles associent rigueur mathématique et souplesse numérique, et offrent de nouvelles perspectives pour l'étude et la résolution de problèmes d'analyse et d'intégration complexes.

L'ORTHOGONALITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS

Ce chapitre pose les bases théoriques indispensables à l'étude des **fonctions rationnelles orthogonales (FRO)**. Il s'appuie sur les outils fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et de la théorie de l'approximation, en mettant en lumière le rôle structurant de l'**orthogonalité** dans la modélisation et le calcul scientifique.

La première partie présente les **espaces fonctionnels** qui serviront de cadre à tout le manuscrit — les espaces de Hilbert, les espaces de Lebesgue pondérés L_w^2 , ainsi que les espaces de Hardy, où se rencontrent analyse réelle et complexe. La seconde aborde les notions de **base orthogonale**, de **projection** et de **meilleure approximation**, concepts centraux pour la construction des schémas numériques. Enfin, la troisième section introduit les **polynômes orthogonaux**, modèles classiques des bases fonctionnelles, dont les propriétés — récurrence, zéros, orthogonalité — conduisent naturellement aux **formules de quadrature de Gauss**, outil de référence en intégration numérique.

L'ensemble des résultats présentés s'appuie sur des ouvrages de référence reconnus, auxquels il sera régulièrement fait appel pour approfondir certains aspects théoriques. [Br0, Rud91, Con90, Dur70, Sze75, Fol99, Nad04].

1.1 Espaces fonctionnels

L'étude des fonctions rationnelles orthogonales s'appuie sur des cadres analytiques précis, où la notion d'orthogonalité prend tout son sens. Les espaces de Hilbert, les espaces de Lebesgue pondérés et les espaces de Hardy en constituent les piliers théoriques.

1.1.1 Espaces de Hilbert

Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel complexe H muni d'un produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C},$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

1. **Positivité** : $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
2. **Symétrie hermitienne** : $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. **Linéarité** : $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le produit scalaire induit la norme

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

et la complétude de H assure que toute suite de Cauchy converge vers un élément de H .

Proposition 1.1 (Inégalité de Cauchy–Schwarz, [Rud91]). *Pour tous $x, y \in H$,*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Exemple 1.2. L'exemple fondamental est l'espace $L^2([a, b])$, défini par

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Cet espace généralise la géométrie euclidienne au cadre fonctionnel et constitue la base des développements de Fourier et des méthodes de projection [Con90].

1.1.2 Espaces de Lebesgue pondérés L_w^2

Les espaces $L_w^2(a, b)$ généralisent les espaces L^2 en introduisant une **fonction de poids** $w(x) > 0$, qui modifie la mesure selon la nature du problème étudié [Fol99]. Ils regroupent les fonctions mesurables f telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty,$$

et le produit scalaire associé est donné par

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Ces espaces sont des Hilbert complets dès que $w(x) > 0$ presque partout, et constituent le cadre naturel de l'orthogonalité pondérée.

Le tableau suivant présente les poids classiques et leurs familles associées de polynômes orthogonaux [Sze75, Gau04] :

Poids $w(x)$	Intervalle	Famille associée
1	$[-1, 1]$	Polynômes de Legendre
$(1 - x^2)^{-1/2}$	$(-1, 1)$	Polynômes de Chebyshev (1 ^{re} espèce)
$(1 - x^2)^{1/2}$	$[-1, 1]$	Polynômes de Chebyshev (2 ^e espèce)
e^{-x^2}	\mathbb{R}	Polynômes d'Hermite
$x^\alpha e^{-x}$	$[0, \infty)$	Polynômes de Laguerre
$x^\alpha(1 - x)^\beta$	$[0, 1]$	Polynômes de Jacobi

TABLE 1.1 – Exemples de poids classiques dans les espaces de Lebesgue L_w^2 .

Le choix du poids influe sur la géométrie de l'espace et sur les propriétés d'orthogonalité, permettant d'adapter la base fonctionnelle à la nature du problème.

1.1.3 Espaces de Hardy

Les **espaces de Hardy** $H^2(\mathbb{D})$ regroupent les fonctions analytiques sur le disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

vérifiant

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Leur frontière naturelle est le cercle unité $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, sur lequel l'espace $H^2(\mathbb{T})$ est défini par la limite radiale :

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

Ces espaces, complets et séparables, sont fondamentaux dans l'analyse complexe et la théorie spectrale. Ils forment le cadre naturel des **polynômes de Szegő**, base orthogonale dans $H^2(\mathbb{T})$, et servent de support à la construction des fonctions rationnelles orthogonales [Dur70, Sze75].

Ainsi, les espaces de Hilbert, de Lebesgue pondérés et de Hardy constituent la charpente analytique sur laquelle reposent les développements ultérieurs des fonctions rationnelles orthogonales.

1.2 Orthogonalité et approximation

L'orthogonalité et l'approximation sont des concepts fondamentaux en analyse fonctionnelle, permettant de décomposer des fonctions complexes en combinaisons linéaires de fonctions plus simples, telles que des bases orthogonales. Cette section explore l'orthogonalité dans les espaces fonctionnels, les bases orthogonales, les séries de Fourier généralisées, ainsi que les techniques d'approximation, notamment les projections orthogonales et les théorèmes de densité. Ces notions sont essentielles pour comprendre les polynômes orthogonaux et rationnels développés dans les chapitres suivants [Rud91, Dav75].

1.2.1 Orthogonalité

Définitions et propriétés générales

Soit H un espace de Hilbert (complexe) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme induite est

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

On dit que $f, g \in H$ sont *orthogonaux* si $\langle f, g \rangle = 0$. S'ils sont en outre normalisés ($\|f\| = \|g\| = 1$), ils sont *orthonormaux* [Kre89].

Dans $L^2([a, b], w)$, où $w > 0$ p.p., on utilise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Le *complément orthogonal* d'un sous-espace $V \subset H$ est

$$V^\perp = \{f \in H : \langle f, v \rangle = 0, \forall v \in V\}, \quad \text{et} \quad H = V \oplus V^\perp \text{ [Rud91]}.$$

Bases orthogonales et orthonormales

Définition 1.3. Une famille $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ est *orthogonale* si $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$ pour $m \neq n$, et *orthonormale* si $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}$. où δ_{nm} est le symbole de Kronecker ($\delta_{nm} = 1$ si $n = m$, 0 sinon).

Théorème 1.4 (Pythagore). *Pour toute famille orthogonale ϕ_1, \dots, ϕ_n ,*

$$\|\phi_1 + \dots + \phi_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\phi_i\|^2.$$

Théorème 1.5 (Indépendance linéaire). *Toute famille finie de vecteurs non nuls et orthogonaux est linéairement indépendante.*

Remarque 1.6. À partir d'une famille libre, l'orthogonalisation de Gram–Schmidt construit une base orthogonale.

1.2.2 Projections orthogonales

Si $V \subset H$ est fermé, la *projection orthogonale* $P_V f$ est l'unique élément de V tel que

$$\langle f - P_V f, v \rangle = 0 \quad (\forall v \in V),$$

et elle minimise la distance à V :

$$\|f - P_V f\| = \inf_{v \in V} \|f - v\| \text{ [Rud91]}.$$

Si $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ est une base orthonormale de V ,

$$P_V f = \sum_{k=1}^n \langle f, \phi_k \rangle \phi_k,$$

et pour une base orthogonale $\{\varphi_k\}$,

$$P_V f = \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k \text{ [Boy01]}.$$

Processus de Gram–Schmidt

Partant de $\{f_0, \dots, f_N\}$ libre dans H :

$$\phi_0 = f_0, \quad \phi_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, \phi_j \rangle}{\|\phi_j\|^2} \phi_j, \quad k = 1, \dots, N,$$

puis normalisation si besoin $\varphi_k = \phi_k / \|\phi_k\|$.

Algorithme 1.1 Procédure de Gram-Schmidt

- 1: **Entrée** : Une famille linéairement indépendante $\{f_0, f_1, \dots, f_N\} \subset H$
- 2: **Sortie** : Une base orthogonale $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N\}$
- 3: $\phi_0 \leftarrow f_0$
- 4: **for** $k = 1$ to N **do**
- 5: $\phi_k \leftarrow f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, \phi_j \rangle}{\|\phi_j\|^2} \phi_j$
- 6: **end for**
- 7: **Normalisation (facultative)** : Pour obtenir une base orthonormale, poser $\varphi_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}$ pour tout $n = 0, 1, \dots, N$.

Exemple : dans $L_w^2([-1, 1])$ avec $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, l'algorithme appliqué aux monômes engendre les polynômes de Chebyshev, utiles pour la stabilité numérique.

Décomposition dans une base orthonormale

Définition 1.7 (Série de Fourier généralisée). Si $\{\phi_n\}$ est orthogonale,

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}.$$

Si la base est orthonormale, $f \sim \sum_{n \geq 0} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$.

Une base orthonormale est *complète* si ces séries convergent vers tout $f \in H$.

Théorème 1.8 (Hilbert). *Tout espace de Hilbert séparable admet une base orthonormale.*

Cette propriété fonde l'idée que l'on peut approximer toute fonction par une combinaison de vecteurs orthonormaux, ce qui est essentiel pour la construction des séries et la résolution numérique.

Théorème 1.9 (Convergence). *Pour $f \in H$,*

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N c_n \phi_n \right\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Théorème 1.10 (Parseval). *Pour une base orthogonale,*

$$\|f\|^2 = \sum_n \frac{|\langle f, \phi_n \rangle|^2}{\|\phi_n\|^2}; \quad \text{si elle est orthonormale,} \quad \|f\|^2 = \sum_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Exemple 1.11 (Série de Fourier classique). Dans $L^2([0, 2\pi])$, $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ est une base

orthonormale, et

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \hat{f}(n) = \langle f, \phi_n \rangle \text{ [You88]}.$$

Exemple 1.12 (Chebyshev). Dans $L^2([-1, 1], (1 - x^2)^{-1/2})$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x), \quad c_n = \frac{\langle f, T_n \rangle}{\langle T_n, T_n \rangle},$$

avec $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1.2.3 Approximation

L'approximation consiste à représenter f par des éléments d'un sous-espace plus simple (polynômes, rationnelles, bases orthogonales) [DL93, AH08].

Densité et convergence

Théorème 1.13 (Weierstrass [Tim63]). Pour tout $f \in C([a, b])$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que

$$\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Dans $L^2([a, b], w)$ ($w > 0$ p.p.), les polynômes sont denses au sens $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2},$$

d'où $\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_2} = L^2([a, b], w)$ [DR07]. La vitesse de convergence d'une série orthogonale dépend de la régularité de f ; pour des fonctions lisses, les coefficients de Chebyshev décroissent rapidement [Tre13].

Exemple 1.14. Dans $L^2([-1, 1], 1)$, pour $f(x) = \sin(\pi x)$ et les polynômes de Legendre P_n ,

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \sin(\pi x) P_n(x) dx,$$

et la série $\sum c_n P_n$ converge vers f en norme L^2 .

Meilleure approximation et erreur

Soit $V \subset H$ un sous-espace. La *meilleure approximation* de f dans V est $P_V f$, la projection orthogonale (§1.2.2) :

$$P_V f = \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad (\{\phi_n\} \text{ base orthonormale de } V),$$

avec l'optimalité

$$\|f - P_V f\| \leq \|f - v\| \quad (\forall v \in V),$$

et la formule d'erreur (Parseval) :

$$\|f - P_V f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Exemple 1.15 (Projection de Chebyshev). Dans $L^2([-1, 1], (1 - x^2)^{-1/2})$, pour $f(x) = x^4$,

$$P_N f = \sum_{n=0}^N \langle f, T_n \rangle T_n, \quad \langle f, T_n \rangle = \int_{-1}^1 x^4 T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

intégrales évaluables par quadrature de Gauss–Chebyshev [Riv90].

En pratique. Les projections orthogonales sous-tendent les quadratures de Gauss (choix des nœuds/poids optimaux) [Gau04] et les schémas de collocation/Galerkin en équations intégrales. Elles constituent le pont direct vers la section suivante, consacrée aux polynômes orthogonaux, puis aux bases rationnelles.

1.3 Les polynômes orthogonaux

Les polynômes occupent une place fondamentale en analyse, par leur simplicité et leur pouvoir d'approximation [Chi11]. L'espace $\mathcal{P} = \text{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ devient un cadre puissant lorsqu'il est muni d'un produit scalaire pondéré, permettant la construction de bases orthogonales adaptées aux besoins de l'analyse numérique et des méthodes spectrales [Sze75].

1.3.1 Théories générale des polynômes orthogonaux

Structure et cadre fonctionnel

Théorème 1.16 (Weierstrass). *Sur tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, l'espace des polynômes \mathcal{P} est dense dans $C([a, b])$ pour la norme uniforme.*

Définition 1.17 (Produit scalaire pondéré). Pour un poids $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\langle p, q \rangle_w = \int_a^b p(x)q(x)w(x) dx, \quad \|p\|_w = \left(\int_a^b |p(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}.$$

L'espace complété $L_w^2([a, b])$ est un espace de Hilbert, où les polynômes sont denses et forment le socle de nombreuses méthodes d'approximation.

Définition 1.18. Une suite $\{P_n\}$ est **orthogonale** sur $[a, b]$ si :

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x) dx = h_n \delta_{mn}.$$

Théorème 1.19 (Existence et unicité). *Il existe une suite de polynômes orthogonaux pour tout produit scalaire défini sur \mathcal{P} , construite par Gram–Schmidt. Elle est unique à un facteur constant près.*

Chaque suite $\{P_n\}$ constitue une base de \mathcal{P} , et tout polynôme p s'écrit :

$$p(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\langle p, P_k \rangle_w}{\langle P_k, P_k \rangle_w} P_k(x).$$

Relations et propriétés analytiques

Théorème 1.20 (Favard [Chi11, Sze75]). *Les polynômes orthogonaux satisfont une récurrence à trois termes :*

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad c_n > 0.$$

Théorème 1.21 ([Sze75]). *Leurs zéros sont réels, simples et inclus dans l'intervalle d'orthogonalité.*

Propriétés spectrales

Définition 1.22 (Noyau de Christoffel–Darboux). Pour un système orthonormal $\{p_n\}$:

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Définition 1.23 (Fonction de Christoffel).

$$\lambda_n(x) = (K_n(x, x))^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{p_k^2(x)}{\|p_k\|^2} \right)^{-1}.$$

Ces formules relient la structure orthogonale des polynômes à leurs applications spectrales et à la quadrature de Gauss, fondement de l'analyse numérique moderne.

1.3.2 Polynômes orthogonaux classiques et de Szegő

Les familles classiques (Legendre, Chebyshev, Jacobi, Laguerre, Hermite) illustrent le lien entre poids, orthogonalité, récurrence et zéros [Chi11, Sze75]. Elles servent de base aux méthodes spectrales et à la quadrature de Gauss.

Famille	Intervalle	Poids $w(x)$
Legendre P_n	$[-1, 1]$	1
Chebyshev (I) T_n	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$	$[-1, 1]$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1$
Laguerre $L_n^{(\alpha)}$	$[0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$
Hermite H_n	\mathbb{R}	e^{-x^2}

Legendre. Orthogonalité (poids 1) :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}.$$

Récurrence :

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Les zéros servent de nœuds Gauss–Legendre (degré $2n - 1$ exact).

Chebyshev (première espèce). $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, poids $(1 - x^2)^{-1/2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \pi & n = m = 0, \\ \pi/2 & n = m \geq 1. \end{cases}$$

Récurrence : $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Zéros : $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$. sont bien répartis sur $[-1, 1]$, ce qui minimise les oscillations dans l'interpolation polynomiale.

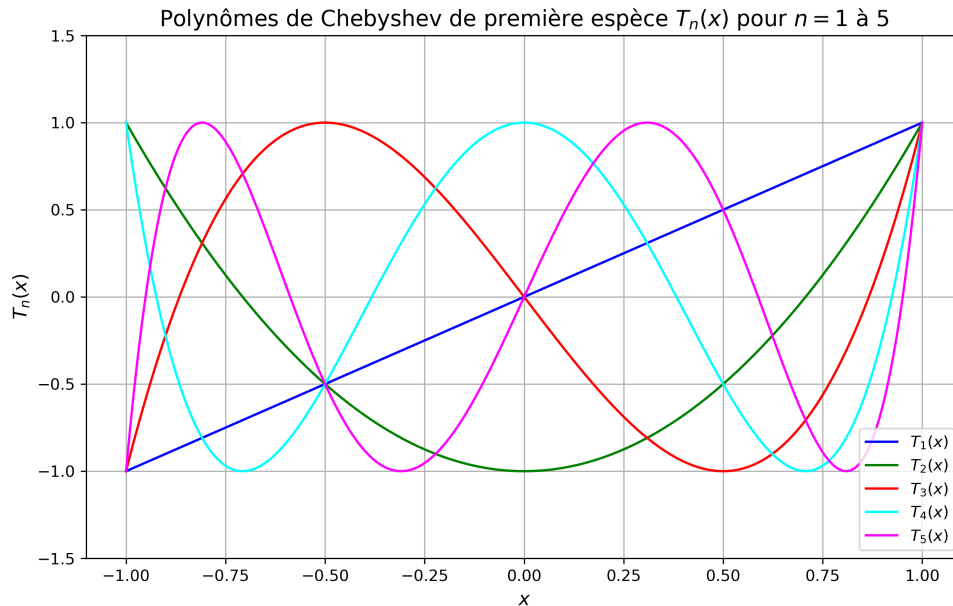


FIGURE 1.1 – Polynômes de Chebyshev de première espèce $T_n(x)$ pour $n = 1$ à 5.

Jacobi. Poids $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$:

$$\langle f, g \rangle_{\alpha, \beta} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx.$$

Récurrance (coefficients explicites en α, β, n) :

$$a_n P_{n+1}^{(\alpha, \beta)} = (b_n + c_n x) P_n^{(\alpha, \beta)} - d_n P_{n-1}^{(\alpha, \beta)},$$

avec $P_0^{(\alpha, \beta)} = 1$, $P_1^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x)$.

Hermite. Poids e^{-x^2} sur \mathbb{R} :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_0 = 1, \quad H_1 = 2x.$$

Laguerre. Poids $x^\alpha e^{-x}$ sur $[0, \infty)$:

$$(n + 1)L_{n+1}^{(\alpha)} = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)} - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}, \quad L_0^{(\alpha)} = 1, \quad L_1^{(\alpha)} = \alpha + 1 - x.$$

Dans tous les cas, les zéros sont réels, simples et contenus dans l'intervalle d'orthogonalité, propriété cruciale pour l'interpolation et la quadrature [Sze75].

Polynômes de Szegő sur le cercle

Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, les polynômes de Szegő sont orthogonaux pour une mesure de probabilité $d\mu$:

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_n(z) \overline{\phi_m(z)} d\mu(z) = \delta_{nm},$$

avec versions moniques Φ_n [Sze75, Sim05]. Pour la mesure de Lebesgue normalisée, $p_n(z) = z^n$.

Relation de récurrence

$$\phi_{n+1}(z) = z \phi_n(z) - \overline{\alpha_n} \phi_n^*(z), \quad \phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/z)}, \quad \alpha_n \in \mathbb{D}.$$

Les zéros de Φ_n sont strictement dans le disque unité (mesure non dégénérée).

Lien cercle–intervalle (Joukowski) et exemple

La transformation de Joukowski $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ relie le cadre réel $[-1, 1]$ au cercle \mathbb{T} et transfère mesures et orthogonalité [Sze75]. Exemple (Chebyshev I) :

$$T_n\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}),$$

ce qui identifie T_n à la partie réelle de z^n (via $z = e^{i\theta}$).

Ces familles, sur l'intervalle réel ou le cercle, forment l'ossature des méthodes d'approximation et des quadratures.

1.3.3 Applications des polynômes orthogonaux : la quadrature de Gauss

Les polynômes orthogonaux fournissent le socle des *quadratures de Gauss* : leurs zéros donnent des nœuds optimaux et assurent l'exactitude maximale sur les polynômes (degré $\leq 2n - 1$) pour n points [DR07, Gau04, Tre13].

Définitions générales

Définition 1.24. Une formule de quadrature numérique en générale vise à approximer une intégrale définie par une somme pondérée :

$$I_w(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx \approx I_{n,w}(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1.3.1)$$

où $w(x)$ est une fonction de poids, $\{x_i\}_{i=1}^n$ sont les points (ou nœuds) de quadrature, et $\{w_i\}_{i=1}^n$ sont les poids correspondants [DR07].

Définition 1.25. Une quadrature de Gauss à n points est une formule d'intégration numérique qui est exacte pour tout polynôme de degré au plus $2n - 1$. $E_{n,w}(p) = 0$, si $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$

Propriétés essentielles. (i) Exacte sur \mathbb{P}_{2n-1} ; (ii) convergence rapide, exponentielle pour f analytique; (iii) erreur classique

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \left[\prod_{i=1}^n (x - x_i) \right]^2 w(x) dx, \quad \xi \in (a, b),$$

et, pour Gauss–Legendre, $|E_n(f)| = \mathcal{O}(\rho^{-2n})$ si f est analytique dans une ellipse de Tchebychev [Tre13, Gau04].

Construction. Soient $\{p_k\}$ polynômes orthogonaux pour $\langle p, q \rangle = \int_a^b p q w$. Les nœuds sont les zéros de p_n et les poids s'obtiennent via

$$w_i = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \frac{1}{p_{n-1}(x_i) p'_n(x_i)},$$

où γ_n est le coefficient principal de p_n [GW69, Gau04].

Théorème. Les nœuds de Gauss à n points sont exactement les zéros de p_n [Gau04].

Exemple (Gauss–Legendre). Sur $[-1, 1]$ ($w \equiv 1$), P_n sont les polynômes de Legendre. Pour $n = 2$:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1 = w_2 = 1.$$

TABLE 1.2 – Variétés classiques de la quadrature de Gauss

Variété	Intervalle	Poids $w(x)$	Nœuds
Gauss–Legendre	$[-1, 1]$	1	Zéros de P_n
Gauss–Chebyshev (I)	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-1/2}$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$
Gauss–Chebyshev (II)	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{1/2}$	$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$
Gauss–Jacobi	$[-1, 1]$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$	Zéros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$
Gauss–Laguerre	$[0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	Zéros de $L_n^{(\alpha)}$
Gauss–Hermite	\mathbb{R}	e^{-x^2}	Zéros de H_n

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a établi les fondations théoriques nécessaires à l'étude des fonctions rationnelles orthogonales. Nous avons rappelé les notions d'orthogonalité et d'approximation dans les espaces de Hilbert, montré comment les projections et les séries de Fourier généralisées fournissent un cadre rigoureux pour l'approximation fonctionnelle, puis introduit la théorie des polynômes orthogonaux — leurs propriétés structurelles, leurs familles classiques et leurs applications à la quadrature de Gauss.

Au-delà de leur rôle en intégration numérique, ces polynômes illustrent la puissance des structures orthogonales dans la modélisation et le calcul. Leur lien naturel avec la précision des schémas de quadrature ouvre la voie à une généralisation : les *fonctions rationnelles orthogonales*, capables d'intégrer dans un même cadre l'orthogonalité, les singularités et le comportement asymptotique des fonctions.

C'est cette extension, au cœur de l'analyse complexe et des méthodes numériques avancées, qui constituera l'objet du chapitre suivant.

LES FONCTIONS RATIONNELLES ORTHOGONALES

Introduction

Ce chapitre introduit les *fonctions rationnelles orthogonales* (FRO), une extension naturelle de la théorie des polynômes orthogonaux aux fonctions comportant des pôles prescrits. Construites dans des espaces de Hilbert pondérés, ces fonctions offrent un cadre d'approximation plus souple, adapté aux phénomènes singuliers, oscillatoires ou à décroissance non polynomiale, où les approches purement polynomiales atteignent leurs limites.

Les développements présentés s'appuient principalement sur les travaux de *Bultheel et al.* [BGVHN99], complétés par les contributions de *Van Deun* [DBGV06] et *Deckers* [DB09a], qui ont structuré l'analyse théorique et numérique des FRO.

La **Section 2.1** établit le cadre fonctionnel des espaces rationnels associés à des familles de pôles, ainsi que les définitions et propriétés analytiques fondamentales. La **Section 2.2** présente les principales constructions de FRO selon le domaine d'orthogonalité — cercle unité, axe réel ou intervalle fini — et introduit les bases classiques de *Takenaka–Malmquist* et de type *Chebyshev rationnel*. Enfin, la **Section 2.3** montre comment ces fonctions permettent de construire des formules de quadrature rationnelle et orthogonale, adaptées à l'intégration de fonctions singulières ou non analytiques.

2.1 Cadre fonctionnel et définitions fondamentales

2.1.1 Définition et construction des espaces de fonctions rationnelles

Définition 2.1 (Fonction rationnelle). Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ avec $Q(x) \neq 0$. Elle s'écrit généralement sous la forme :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

Si P et Q n'ont pas de facteur commun, R est dite irréductible. Le degré de R est défini par $\max(\deg P, \deg Q)$.

Définition 2.2 (Espace de fonctions rationnelles). Soit $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble de pôles distincts situés en dehors d'un intervalle réel compact $[a, b]$. L'espace des fonctions rationnelles ayant ces pôles simples est défini par :

$$\mathcal{R}_n(A) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} : \deg P < n, Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right\}$$

Ce cadre peut être généralisé à des pôles de multiplicités quelconques en considérant une séquence $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, où certaines valeurs peuvent se répéter. Nous allons à présent construire des espaces rationnels associés à une telle séquence.

Construction des espaces de fonctions rationnelles

Définition 2.3 (Séquence de pôles). Soit $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une suite de pôles exclue du support d'une mesure μ , c'est-à-dire $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$. Cette condition garantit que les fonctions construites seront bien définies sur le domaine d'intégration.

Définition 2.4 (Facteurs de base). Pour chaque pôle α_n , on définit un facteur de base :

$$Z_n(x) = \frac{x}{1 - x/\alpha_n} = \frac{x\alpha_n}{\alpha_n - x}$$

Ce facteur possède un zéro à l'origine et un pôle simple en $x = \alpha_n$.

Définition 2.5 (Fonctions de base). À partir des $Z_n(x)$, on construit récursivement une famille de fonctions :

$$b_0(x) = 1, \quad b_n(x) = b_{n-1}(x)Z_n(x)$$

ce qui donne, par récurrence :

$$b_n(x) = \prod_{k=1}^n Z_k(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x\alpha_k}{\alpha_k - x}$$

Espace des fonctions rationnelles

Définition 2.6 (Espace \mathcal{L}_n [BGVHN99]). L'espace vectoriel des fonctions rationnelles engendré par les fonctions de base jusqu'à l'indice n est défini par :

$$\mathcal{L}_{-1} = \{0\}, \quad \mathcal{L}_n = \text{span}\{b_0, \dots, b_n\}, \quad n \geq 0,$$

On note $\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ l'espace total des fonctions rationnelles construites à partir des pôles de A .

Un élément $f \in \mathcal{L}_n$ s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k b_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Représentation alternative de l'espace \mathcal{L}_n

Définition 2.7 (Polynômes caractéristiques). Soit $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ une séquence de pôles complexes (ou réels) non nuls.

On définit les polynômes caractéristiques associés à cette séquence par :

$$\pi_0(x) \equiv 1, \quad \pi_k(x) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x}{\alpha_j}\right), \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Chaque facteur peut s'écrire sous forme fractionnaire :

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_j}\right) = \frac{\alpha_j - x}{\alpha_j} \quad \Rightarrow \quad \pi_k(x) = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha_j - x}{\alpha_j}$$

Proposition 2.8 (Lien entre $b_n(x)$ et $\pi_n(x)$). Soit la famille de fonctions de base rationnelles définie par récurrence :

$$b_0(x) = 1, \quad b_n(x) = b_{n-1}(x) \cdot \frac{x}{1 - x/\alpha_n}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$b_n(x) = \frac{x^n}{\prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \pi_n(x)}.$$

Démonstration. Par définition des facteurs élémentaires :

$$Z_k(x) = \frac{x}{1 - x/\alpha_k} = \frac{x\alpha_k}{\alpha_k - x}.$$

Donc :

$$b_n(x) = \prod_{k=1}^n Z_k(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x\alpha_k}{\alpha_k - x} = x^n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_k - x}.$$

Mais :

$$\prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_k - x} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k - x}{\alpha_k}} = \frac{1}{\pi_n(x)}.$$

D'où :

$$b_n(x) = x^n \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \pi_n(x)} = \frac{x^n}{\prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \pi_n(x)}.$$

□

Théorème 2.9 (Caractérisation rationnelle de l'espace \mathcal{L}_n). *L'espace vectoriel des fonctions rationnelles engendré par les $b_k(x)$, pour $0 \leq k \leq n$, admet la représentation suivante :*

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\},$$

où \mathcal{P}_n désigne l'espace des polynômes complexes (ou réels) de degré au plus n , et $\pi_n(x)$ est le polynôme caractéristique défini par :

$$\pi_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x/\alpha_k).$$

Démonstration. Par définition, tout élément $f \in \mathcal{L}_n$ s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions de base :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k b_k(x).$$

Or, d'après la relation démontrée précédemment, chaque $b_k(x)$ peut s'écrire comme :

$$b_k(x) = \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k \alpha_j \cdot \pi_k(x)}.$$

Remarquons que $\pi_k(x) \mid \pi_n(x)$ pour $k \leq n$, donc on peut écrire chaque $b_k(x)$ sous la forme :

$$b_k(x) = \frac{q_k(x)}{\pi_n(x)} \quad \text{où } q_k(x) \in \mathcal{P}_n.$$

Ainsi, toute combinaison $f(x) = \sum c_k b_k(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)}, \quad \text{où } p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x) \in \mathcal{P}_n.$$

Réciproquement, si $f(x) = \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)}$ avec $\deg p_n \leq n$, alors il existe une base polynomiale

(x^k) telle que :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k,$$

et donc

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)} = \sum_{k=0}^n d_k \cdot \frac{x^k}{\pi_n(x)}.$$

Comme $\frac{x^k}{\pi_n(x)}$ est combinaison linéaire des $b_j(x)$, on en déduit que $f(x) \in \mathcal{L}_n$. \square

Proposition 2.10 (Propriétés structurelles fondamentales [BGVHN99, Chap. 2]). *Les espaces rationnels \mathcal{L}_n vérifient les propriétés suivantes :*

1. **Inclusion croissante** : $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_n \subset \dots$
2. **Dimension** : $\dim(\mathcal{L}_n) = n + 1$
3. **Décomposition directe** : $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} \oplus \text{span}\{b_n(x)\}$
4. **Inclusion polynomiale** : $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}_n$

Démonstration. Les propriétés découlent directement des définitions :

- L'inclusion résulte de l'ajout progressif des facteurs $Z_k(x)$.
- La base $\{b_0, \dots, b_n\}$ est de dimension $n + 1$ par construction.
- La fonction $b_n(x) \notin \mathcal{L}_{n-1}$, ce qui justifie la décomposition directe.
- Le cas polynômial correspond à la limite où tous les pôles tendent vers l'infini, donc $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}_n$.

\square

Cas particulier : le cas polynomial

Proposition 2.11. *Si tous les pôles $\alpha_k \rightarrow \infty$, alors :*

$$Z_k(x) \rightarrow x, \quad b_n(x) \rightarrow x^n, \quad \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$$

Démonstration.

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow \infty} Z_k(x) = \frac{x}{1 - x/\alpha_k} \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad b_n(x) = \prod_{k=1}^n Z_k(x) \rightarrow x^n$$

D'où $\mathcal{L}_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\} = \mathcal{P}_n$.

\square

2.1.2 Fondations théoriques des fonctions rationnelles orthogonales

En introduisant une structure d'orthogonalité dans les espaces rationnels précédemment définis, on obtient les fonctions rationnelles orthogonales, qui allient flexibilité rationnelle et propriétés analytiques des bases orthogonales.

Produit scalaire sur les espaces rationnels

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, et soit $d\mu(x) = w(x) dx$ une mesure positive, où $w(x) > 0$ est une fonction poids localement intégrable sur I . On considère une suite de pôles $A \subset \mathbb{C}$ disjointe du support de la mesure, c'est-à-dire $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$. Les fonctions rationnelles associées à A appartiennent alors à $L^2(\mu)$, et le produit scalaire est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Définition des fonctions rationnelles orthogonales

Une FRO est de la forme

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{\pi_n(x)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n,$$

où π_n provient des pôles $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{C} \setminus I$. La suite $\{R_n\}$ est orthogonale si

$$\langle R_n, R_m \rangle = \delta_{nm} h_n, \quad h_n > 0.$$

On travaille dans $\mathcal{L}_n = \{P/\pi : P \in \mathcal{P}_n, \pi \text{ fixé}\}$.

Moniques et orthonormales

Définition 2.12 (mFRO). R_n est *monique* si, dans la base rationnelle $\{b_0, \dots, b_n\}$,

$$R_n(x) = b_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} b_k(x).$$

Définition 2.13 (nFRO). R_n est *orthonormale* si $\langle R_n, R_n \rangle = 1$.

Définition 2.14 (m-nFRO). $R_n = \psi_n / \|\psi_n\|$ avec ψ_n monique (donc $\langle R_n, R_n \rangle = 1$).

Remarque 2.15. On note classiquement ψ_n (monique) et φ_n (orthonormée).

Base orthogonale et projections

Les $\{R_0, \dots, R_n\}$ forment une base orthogonale de \mathcal{L}_n ; tout $f \in \mathcal{L}_n$ s'écrit

$$f = \sum_{k=0}^n c_k R_k, \quad c_k = \frac{\langle f, R_k \rangle}{\langle R_k, R_k \rangle}.$$

Exemple 2.16. Pour $\pi(x) = x - c$ et $n = 2$,

$$\{R_0, R_1, R_2\} = \left\{ \frac{1}{x-c}, \frac{x-a_1}{x-c}, \frac{x^2 + b_1x + b_2}{x-c} \right\},$$

avec a_1, b_1, b_2 issus de l'orthogonalisation.

Unicité

Théorème 2.17 (Unicité [BGVHN99], Chap. 2). *Pour une suite de pôles A et un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur les espaces rationnels, il existe une unique suite $\{R_n\}_{n \geq 0}$ telle que*

$$R_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}, \quad \langle R_n, R_m \rangle = \delta_{nm},$$

avec coefficient directeur (dans $\{b_0, \dots, b_n\}$) réel et > 0 .

Idée. Procédé de Gram–Schmidt sur $\{b_0, b_1, \dots\}$ puis normalisation; le signe du coefficient directeur fixe l'unicité. \square

Limite polynomiale

Proposition 2.18 (Pôles à l'infini [BGVHN99], Chap. 2). *Si $\alpha_k \rightarrow \infty$ pour tout k , alors $R_n(x) \rightarrow p_n(x)$, polynôme orthogonal de degré n pour le même produit scalaire.*

Démonstration. $Z_k(x) = \frac{x}{1-x/\alpha_k} \rightarrow x$, donc $b_n \rightarrow x^n$ et $\mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$; continuité de Gram–Schmidt. \square

2.1.3 Construction des fonctions rationnelles orthogonales

Après avoir posé les fondations théoriques des fonctions rationnelles orthogonales, notamment leur définition, leurs propriétés fondamentales et leur caractère unique, nous abordons maintenant la question centrale de la construction explicite des FRO.

La construction explicite des FRO repose sur l'adaptation du procédé de Gram–Schmidt aux bases rationnelles associées aux pôles prescrits. Ce processus, dit *Gram–Schmidt rationalisé*, fournit une suite orthogonale structurée à partir d'une base $\{b_k\}$.

Méthode de Gram–Schmidt rationalisée

On applique la méthode classique à la base $\{b_0, \dots, b_n\} \subset \mathcal{L}_n$, avec le produit scalaire défini par μ . On obtient des fonctions $R_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ vérifiant

$$\langle R_n, R_k \rangle = \delta_{nk}.$$

Procédure.

$$\psi_0 = b_0, \quad R_0 = \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|},$$

puis pour $n \geq 1$:

$$\psi_n = b_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle b_n, R_k \rangle R_k, \quad R_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}.$$

Remarque 2.19. Les ψ_n sont les FRO moniques (*mFRO*), les R_n ou φ_n les versions orthonormées (*nFRO*).

Algorithme 2.1 Procédure de Gram-Schmidt rationalisée

- 1: **Entrée** : Une base rationnelle initiale $\{b_0, b_1, \dots, b_N\} \subset \mathcal{L}_N$, une mesure μ sur un intervalle I
 - 2: **Sortie** : Une base orthogonale $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N\}$, ou orthonormale $\{R_0, R_1, \dots, R_N\}$
 - 3: $\psi_0 \leftarrow b_0$
 - 4: **for** $k = 1$ to N **do**
 - 5: $\psi_k \leftarrow b_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle b_k, R_j \rangle}{\|R_j\|^2} R_j$
 - 6: **end for**
 - 7: **Normalisation (facultative)** : Pour obtenir une base orthonormale, poser $R_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, N$.
-

Exemple

Pour $I = [-1, 1]$, $\mu(x) = dx$, et $\alpha = 2$:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{x}{x-2}, \quad \langle b_1, b_0 \rangle = 2 - 2 \ln 3.$$

Ainsi

$$\psi_1 = b_1 - (2 - 2 \ln 3), \quad R_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}.$$

R_1 est alors une FRO normalisée explicite.

Méthode des polynômes orthogonaux modifiés

On construit ici des FRO à partir de polynômes orthogonaux classiques p_n , divisés par des dénominateurs prescrits $\pi_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)$.

Procédure.

$$\phi_n(x) = \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)}, \quad r_n = \phi_n - \sum_{k < n} \frac{\langle \phi_n, r_k \rangle}{\langle r_k, r_k \rangle} r_k.$$

Exemple : polynômes de Legendre, pôle réel $\alpha = 2$.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{1}{x-2}, & \phi_1 &= \frac{x}{x-2}, \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle &= 2 - 2 \ln 3, & \|\phi_0\|^2 &= \frac{2}{3}, \\ r_0 &= \phi_0, & r_1 &= \phi_1 - 3(1 - \ln 3) \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

Les $\{r_n\}$ forment une base orthogonale adaptée à $[-1, 1]$, utile pour les quadratures et approximations rationnelles.

2.1.4 Propriétés analytiques et orthogonales fondamentales des FRO

1. Récurrences rationnelles à trois termes

Comme pour les polynômes orthogonaux, les FRO satisfont des récurrences à trois termes. Pour une famille classique (P_n) (Chebyshev, Legendre, *etc.*) et des pôles hors du support, le passage $R_n(x) = P_n(x)/Q_n(x)$ entraîne (par simple division des récurrences polynomiales) des coefficients rationnels en x . Exemples (schéma) :

$$\begin{aligned} \text{Chebyshev I : } R_{n+1} &= \frac{2x}{x-p} R_n - \frac{1}{(x-p)^2} R_{n-1}, \quad p \notin [-1, 1], \\ \text{Chebyshev II : } R_{n+1} &= \frac{2x}{x-\xi_n} R_n - \frac{1}{(x-\xi_{n-1})(x-\xi_n)} R_{n-1}, \\ \text{Legendre : } R_{n+1} &= \frac{2n+1}{n+1} \frac{x}{x-\xi_n} R_n - \frac{n}{n+1} \frac{1}{(x-\xi_{n-1})(x-\xi_n)} R_{n-1}. \end{aligned}$$

Idée clé : l'introduction de pôles déforme les coefficients, pas la structure à trois termes [BGVHN99].

1.1. Cadre général et régularité

Écrivons $\phi_n(z) = p_n(z)/\pi_n(z)$, $\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 - \frac{z}{\alpha_k})$, et $Z_k(z) = \frac{z}{1-z/\alpha_k}$ (ou $Z_k(z) = z$ si $\alpha_k = \infty$). On dit que ϕ_n est *régulière* si $p_n(\alpha_{n-1}) \neq 0$. Si tous les pôles sont à l'extérieur de l'enveloppe convexe du support de μ , la suite est globalement régulière (existence d'une 3-termes pour tout n) [DB09b, BGVHN99].

Théorème 2.20 (Récurrence FRO [BGVHN99]). *Sous régularité de ϕ_{n-1} et ϕ_n , il existe $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\phi_n = \left(A_n Z_n + B_n \frac{Z_n}{Z_{n-2}} \right) \phi_{n-1} + C_n \frac{Z_n}{Z_{n-2}} \phi_{n-2},$$

avec $E_n := A_n + \frac{B_n}{Z_{n-2}(\alpha_{n-1})} \neq 0$ et $C_n \neq 0$. Si $\alpha_k = \infty$ pour tout k , on retrouve la forme polynomiale classique.

Forme canonique. En posant $D_n = \frac{1}{Z_{n-2}(\alpha_{n-1})}$ et $\frac{1}{Z_{n-2}} = D_n + \frac{1}{Z_{n-1}}$, on obtient l'écriture compacte

$$\phi_n = \left(E_n Z_n + F_n \frac{Z_n}{Z_{n-1}} \right) \phi_{n-1} - \frac{E_n}{E_{n-1}} \frac{Z_n}{Z_{n-2}} \phi_{n-2}, \quad E_n := A_n + B_n D_n, \quad F_n := B_n,$$

utile numériquement et pour les quadratures rationnelles [BGVHN99, Chap. 11]; voir aussi [DB04] pour les aspects calculatoires.

2. Identité de Christoffel–Darboux rationnelle

$$\text{Avec } k_n(z, w) = \sum_{j=0}^n \phi_j(z) \phi_j(w) \text{ et } H(z, w) = \frac{1}{Z_{n-1}(z)} - \frac{1}{Z_{n-1}(w)} = \frac{z-w}{zw},$$

$$\frac{\phi_n(w) \phi_{n-1}(z)}{Z_n(w) Z_{n-1}(z)} - \frac{\phi_n(z) \phi_{n-1}(w)}{Z_n(z) Z_{n-1}(w)} = H(z, w) E_n \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(z) \phi_k(w).$$

Par confluent $w \rightarrow z$: $\phi'_n \phi_{n-1} - \phi_n \phi'_{n-1} = E_n k_{n-1}(z, z)$. Lorsque $\alpha_k \rightarrow \infty$, on retrouve la formule polynomiale standard [BGVHN99].

Zéros : réalité, localisation et interlacement

Si $A \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ et que les pôles sont situés à l'extérieur du convexe de $\text{supp}(\mu)$, alors les zéros de ϕ_n sont réels, simples, contenus dans le convexe de $\text{supp}(\mu)$, et ceux de ϕ_{n-1} s'intercalent strictement avec ceux de ϕ_n .

Conséquence : ces zéros constituent les nœuds naturels des formules de quadrature de type Gauss rationnelles [DB03, BGVHN99, DB04].

2.2 Familles classiques des FRO

2.2.1 FRO sur le cercle unité et le demi-axe réel

Plusieurs familles classiques de polynômes orthogonaux ne sont pas définies sur le cercle unité ou la droite réelle complète, mais sur des intervalles finis ou des demi-axes. La généralisation rationnelle de ces cadres a longtemps été limitée par des difficultés techniques, notamment lorsque les pôles des fonctions rationnelles sont placés dans le support même de la mesure d'orthogonalité.

Or, lorsqu'on restreint le support de la mesure à un intervalle compact ou une demi-droite, il devient possible de placer les pôles réels *en dehors* de ce support, ce qui permet une construction plus stable et une analyse plus fine [VDB03]. Cela ouvre de nouvelles perspectives sur :

- la localisation des zéros des fonctions rationnelles orthogonales,
- la construction de quadratures rationnelles adaptées,
- et les problèmes de moments associés.

Pour traiter ces situations, nous introduisons deux transformations fondamentales :

- la transformation de **Joukowski** : $x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, qui relie l'intervalle $[-1, 1]$ au cercle unité \mathbb{T} ;
- la transformation de **Cayley** (ou ses variantes réelles) : $z = \frac{x-i}{x+i}$, qui établit une correspondance conforme entre la droite réelle \mathbb{R} et l'intervalle $[-1, 1]$.

Ces transformations permettent de transporter les fonctions rationnelles orthogonales vers des domaines plus larges tout en conservant leur structure analytique. Nous étudions successivement ces deux cadres dans les sous-sections suivantes.

1. Fonctions rationnelles orthogonales sur le cercle unité

Les fonctions rationnelles orthogonales (FRO) sur le cercle unité \mathbb{T} prolongent les polynômes de Szegő en remplaçant la base polynomiale par une base rationnelle à pôles prescrits dans le disque unité \mathbb{D} . La transformation de Joukowski relie les FRO sur $[-1, 1]$ à celles sur \mathbb{T} , et les travaux de Bultheel et Van Deun [BVDGV05b, BVDGV05a] établissent une correspondance analytique via les produits de Blaschke.

Cadre analytique Sur $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, muni d'une mesure μ , on définit :

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z).$$

Lorsque μ provient d'une mesure sur $[-1, 1]$, on utilise la transformation $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.

Espaces rationnels et Blaschke Pour des pôles $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{D}$:

$$\zeta_k(z) = \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}, \quad B_n(z) = \prod_{k=1}^n \zeta_k(z), \quad \mathcal{L}_n^c = \text{span}\{B_0, \dots, B_n\}.$$

Transformations et superstar Pour f méromorphe :

$$f^c(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad f_\star(z) = f(1/\overline{z}), \quad f^*(z) = B_n(z)f_\star(z).$$

Si tous les pôles sont nuls, alors $p^*(z) = z^n \overline{p(1/\overline{z})}$.

Base de Takenaka–Malmquist Pour $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{D}$:

$$\psi_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_k|^2}}{1 - \overline{\alpha_k}z} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j}z},$$

base orthonormale de $H^2(\mathbb{D})$ si $\sum_k (1 - |\alpha_k|) < \infty$.

Fonctions orthogonales et récurrence Les FRO $\phi_n \in \mathcal{L}_n^c \setminus \mathcal{L}_{n-1}^c$ vérifient :

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\mu = \delta_{nm}, \quad \phi_n(z) = d_n \frac{z - \alpha_{n-1}}{z - \alpha_n} [\zeta_{n-1}(z)\phi_{n-1}(z) + \lambda_n \phi_{n-1}^*(z)].$$

Noyaux et zéros Le noyau reproduisant :

$$k_n(z, w) = \sum_{k=0}^n \phi_k(z) \overline{\phi_k(w)}$$

satisfait la relation de Christoffel–Darboux :

$$k_{n-1}(z, w) = \frac{\phi_n^*(z) \overline{\phi_n^*(w)} - \phi_n(z) \overline{\phi_n(w)}}{1 - \zeta_n(z) \overline{\zeta_n(w)}}.$$

Les zéros de ϕ_n sont dans \mathbb{D} , ceux de σ_n sur \mathbb{T} .

2. Fonctions rationnelles orthogonales sur le demi-axe réel

Sur l'intervalle borné $[-1, 1]$, la théorie des fonctions rationnelles orthogonales (FRO) est bien établie. Pour traiter le cas non borné $[0, \infty)$, Van Deun et Bultheel [VDB04] proposent une approche fondée sur une transformation bijective ramenant le demi-axe à un intervalle fini, permettant de transférer les propriétés analytiques et numériques du cadre classique.

Transformation de Möbius et transport On considère une mesure $\tilde{\mu}$ sur $[0, \infty)$ et des pôles $\tilde{\alpha}_n \in (-\infty, 0)$. La transformation de Möbius :

$$\tau(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in [0, \infty),$$

envoie bijectivement $[0, \infty)$ sur $[-1, 1]$. Sous cette correspondance :

$$\mu(E) = \tilde{\mu}(\tau(E)), \quad \mu'(y) = \frac{2}{(1+y)^2} \tilde{\mu}'\left(\frac{1-y}{1+y}\right), \quad \alpha_n = \tau(\tilde{\alpha}_n).$$

Ainsi, $(\tilde{\mu}, \tilde{A})$ sur $[0, \infty)$ correspond à (μ, A) sur $[-1, 1]$.

Construction et orthogonalité Si $\{\varphi_n\}$ désigne les FRO sur $[-1, 1]$ associées à (μ, A) , on définit :

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \pm \varphi_n(\tau(x)), \quad x \in [0, \infty),$$

ce qui assure

$$\int_0^\infty \tilde{\varphi}_n(x) \tilde{\varphi}_m(x) d\tilde{\mu}(x) = \delta_{nm}.$$

La structure rationnelle et la régularité sont préservées puisque τ est rationnelle et les pôles transformés $\tilde{\alpha}_k$ restent négatifs.

Relations de récurrence Les FRO sur $[-1, 1]$ satisfont :

$$\varphi_{n+1}(x) = (E_n x + F_n) \varphi_n(x) + G_n \varphi_{n-1}(x),$$

et, par composition avec τ , les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(\tau(x))$ obéissent à une récurrence analogue :

$$\tilde{\varphi}_{n+1}(x) = (\tilde{E}_n x + \tilde{F}_n) \tilde{\varphi}_n(x) + \tilde{G}_n \tilde{\varphi}_{n-1}(x),$$

où les coefficients $(\tilde{E}_n, \tilde{F}_n, \tilde{G}_n)$ sont obtenus explicitement à partir de (E_n, F_n, G_n) via la transformation des pôles.

Cas particulier : poids de Laguerre et pôle constant Pour

$$d\tilde{\mu}(x) = e^{-x} dx, \quad \tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha} < 0,$$

la transformation $\tau(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ramène le problème sur $[-1, 1]$ avec

$$d\mu(y) = \frac{2}{(1+y)^2} e^{-\tau^{-1}(y)} dy, \quad \alpha = \tau(\tilde{\alpha}),$$

et les FRO s'obtiennent par $\tilde{\varphi}_n(x) = \pm \varphi_n(\tau(x))$. La famille $\{\tilde{\varphi}_n\}$ est alors orthonormée dans $L^2([0, \infty), e^{-x} dx)$, constituant une extension rationnelle des polynômes de Laguerre au cadre non borné.

2.2.2 Bases classiques des FRO

Les fonctions rationnelles orthogonales (FRO) admettent peu de familles à formules fermées. Deux classes jouent un rôle central : (i) les bases de Takenaka–Malmquist sur le cercle unité, (ii) les FRO de type Chebyshev sur $[-1, 1]$. Elles servent de modèles théoriques et d'outils numériques (zéros, quadratures, récurrence), voir [Mal26, Tak25, Sze75, DBGV06].

Bases de Takenaka–Malmquist

Étant donnée une suite de pôles $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{D}$, on pose

$$\zeta_k(z) = \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}, \quad B_0 \equiv 1, \quad B_k(z) = \prod_{j=0}^{k-1} \zeta_j(z).$$

La base orthonormale (dans $H^2(\mathbb{D})$) s'écrit

$$\psi_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_k|^2}}{1 - \overline{\alpha_k}z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j}z}, \quad k \geq 1,$$

et forme une base de $H^2(\mathbb{D})$ si la condition de Blaschke $\sum_k (1 - |\alpha_k|) < \infty$ est satisfaite [Tak25, Mal26, Sze75]. Applications : traitement du signal, contrôle, séries de Walsh–Malmquist.

FRO de type Chebyshev sur $[-1, 1]$

On fixe des pôles réels $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ et on utilise la transformation de Joukowski

$$x = J(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \beta_k = J^{-1}(\alpha_k) \in \mathbb{D},$$

d'où les facteurs de Blaschke $\zeta_k(z) = \frac{z - \beta_k}{1 - \beta_k z}$ et $B_n(z) = \prod_{k=1}^n \zeta_k(z)$. Avec les poids de type Jacobi (cas *Chebyshev*)

$$w^{(1)}(x) = (1 - x^2)^{-1/2}, \quad w^{(2)}(x) = (1 - x^2)^{1/2}, \quad w^{(3)}(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2},$$

on obtient des *formules fermées* pour des FRO normalisées $\varphi_n^{(i)}$ (avec $x = J(z)$) [DBGV06, Th. 3.4] :

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 - \beta_n^2} \left[\frac{z B_{n-1}(z)}{1 - \beta_n z} + \frac{1}{(z - \beta_n) B_{n-1}(z)} \right], \\ \varphi_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - \beta_n^2} \frac{z}{z^2 - 1} \left[\frac{z^2 B_{n-1}(z)}{1 - \beta_n z} - \frac{1}{(z - \beta_n) z B_{n-1}(z)} \right], \\ \varphi_n^{(3)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{1 - \beta_n^2}}{z - 1} \left[\frac{z^2 B_{n-1}(z)}{1 - \beta_n z} - \frac{1}{(z - \beta_n) B_{n-1}(z)} \right]. \end{aligned}$$

Elles vérifient $\int_{-1}^1 (\varphi_n^{(i)}(x))^2 w^{(i)}(x) dx = 1$ et fournissent des bases explicites pour $\mathcal{L}_n \subset L^2([-1, 1], w^{(i)})$; voir aussi [Sze75, Sect. 3].

Réurrence rationnelle (synthèse)

Les FRO rationnelles admettent une récurrence triterminée [DBGV06, Th. 2.1, Th. 3.5] :

$$\varphi_n(x) = \left(E_n Z_n(x) + F_n \frac{Z_n(x)}{Z_{n-1}(x)} \right) \varphi_{n-1}(x) - \frac{E_n}{E_{n-1}} \frac{Z_n(x)}{Z_{n-2}(x)} \varphi_{n-2}(x), \quad Z_k(x) = 1 - \frac{x}{\alpha_k},$$

avec conditions initiales usuelles $\varphi_{-1} \equiv 0$, $\varphi_0 \equiv 1/\sqrt{\mu([-1, 1])}$. Les coefficients E_n, F_n s'expriment explicitement en fonction des pôles via $\beta_k = J^{-1}(\alpha_k)$ [DBGV06].

2.3 Application : quadratures rationnelles et orthogonales

2.3.1 Quadratures rationnelles de type Gauss

Les fonctions rationnelles orthogonales (FRO) permettent de construire des quadratures adaptées à des intégrandes méromorphes (pôles hors de l'intervalle), en exploitant les zéros/structures des FRO. Elles généralisent Gauss polynomiale et offrent souvent une convergence accélérée pour des poids singuliers ou des domaines non bornés [BGVHN99, DBGV06, DB09a, Gau93].

Principe général

On cherche une formule

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} f(\tau_{\nu}) + R_n(f), \quad (2.3.1)$$

exacte pour un espace mixte

$$\mathbb{S}_{2n} = \mathbb{Q}_m \oplus \mathbb{P}_{2n-1-m}, \quad 0 \leq m \leq 2n,$$

où

$$\mathbb{Q}_m = \text{span} \left\{ \frac{1}{(1 + \zeta_{\mu}t)^s} : s = 1, \dots, s_{\mu}, \mu = 1, \dots, M \right\}, \quad \sum_{\mu=1}^M s_{\mu} = m,$$

avec ζ_{μ} distincts et $1 + \zeta_{\mu}t \neq 0$ sur $[a, b]$. On impose $R_n(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{S}_{2n}$. Les cas limites récupèrent Gauss polynomiale ($m = 0$) et une règle purement rationnelle ($m = 2n$).

Construction (Gautschi)

Théorème 2.21 ([Gau93, Gau01]). *Soit*

$$\omega_m(t) = \prod_{\mu=1}^M (1 + \zeta_{\mu}t)^{s_{\mu}}.$$

Si la mesure modifiée $\frac{d\lambda(t)}{\omega_m(t)}$ admet une quadrature de Gauss polynomiale à n points

$$\int p(t) \frac{d\lambda(t)}{\omega_m(t)} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu}^G p(\tau_{\nu}^G) \quad (p \in \mathbb{P}_{2n-1}),$$

alors la règle rationnelle (2.3.1) avec

$$\tau_\nu = \tau_\nu^G, \quad \lambda_\nu = \lambda_\nu^G \omega_m(\tau_\nu^G)$$

est exacte sur \mathbb{S}_{2n} .

Remarque 2.22. Des variantes pour $\zeta_\mu \in \mathbb{R}$ et multiplicités spécifiques (cas $m = 2n$ ou $m = 2n - 1$) sont dues à Van Assche–Vanherwegen [VAV93].

Cas des pôles réels simples

Si $s_\mu = 1$ et $\zeta_\mu = \xi_\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors

$$\omega_m(t) = \prod_{\mu=1}^m (1 + \xi_\mu t),$$

ne s'annule pas sur $[a, b]$; la mesure $d\lambda/\omega_m$ est bien définie et la quadrature de Gauss associée existe de façon unique, avec nœuds dans $[a, b]$.

Calcul pratique des nœuds/poids

1. **Fractions partielles** [Gau93] : décomposer $1/\omega_m$ et former les moments modifiés de $d\lambda/\omega_m$ pour obtenir les coefficients de récurrence (Stieltjes/Cholesky). Rapide sur $[a, b]$ compact mais peut devenir instable si des pôles sont proches de $[a, b]$.
2. **Discrétisation** [Gau93] : produit scalaire discret (Stieltjes/Lanczos) pour estimer les coefficients de Jacobi de $d\lambda/\omega_m$. Plus stable pour domaines non bornés, plus coûteux pour haute précision.

Exemple numérique (intégrande méromorphe)

Pour $I_1(\omega) = \int_{-1}^1 \frac{\pi t/\omega}{\sin(\pi t/\omega)} dt$ ($\omega > 1$), les pôles sont en $\pm k\omega$. En choisissant $m = 2n$ avec des ξ_ν alternés comme dans [Gau93], on obtient, pour $\omega = 2$ (valeur exacte = $8C/\pi$, $C \approx 0.915965$) : La convergence surpasse nettement Gauss–Legendre à n fixé.

TABLE 2.1 – Quadrature rationnelle pour $I_1(2)$ [Gau93]

n	Valeur	Erreur relative
4	2.332 487 220 0	7.18×10^{-5}
7	2.332 487 232 2	2.73×10^{-8}
10	2.332 487 232 2	1.02×10^{-11}

Convergence et stabilité

Pour $m = 2n$, des instabilités numériques peuvent apparaître (coefficients alternants en fractions partielles) [Gau93]. La stratégie par discrétisation est en général plus robuste mais plus coûteuse lorsque des pôles sont proches de l'intervalle. Des extensions via FRO permettent de traiter des configurations de singularités plus complexes [BGVHN99, DBGV06, VAV93].

2.3.2 Quadrature rationnelle orthogonale

Idée. Les quadratures rationnelles orthogonales (QRO) généralisent Gauss en rendant la règle exacte sur un espace rationnel

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \frac{p_n}{\pi_n} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\}, \quad \pi_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_k} \right), \quad \alpha_k \notin [-1, 1],$$

ce qui les rend efficaces pour des intégrandes avec singularités proches de $[-1, 1]$ [DBGV06, VA18, VAV93].

Principe & construction. Pour $I_\mu(f) = \int_{-1}^1 f(x)w(x) dx$, on cherche

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}),$$

où les nœuds $x_{n,k}$ sont les zéros des ORF $\{\varphi_j\}$ associées à $(w, \{\alpha_k\})$, et

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_{n,k})|^2}$$

(provenant du noyau reproducteur). La règle est exacte pour $f \in \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1}$ [DBGV06, Th. 3.4–3.5].

Deux voies pratiques. (i) *Gram–Schmidt rationnel* sur $\{(1 + t_\ell x)^{-1}\}$ ($t_\ell \notin [-1, 1]$) : $x_{n,k}$ = zéros de la dernière ORF, $\lambda_{n,k}$ via conditions d'exactitude; bonne flexibilité [VAV93]. (ii) *ORF de type Chebyshev* (formules fermées via Joukowski & Blaschke) : nœuds/poids explicites et calculs stables [DBGV06].

Lien avec Gauss rationnelle. Si $\omega_m(x) = \prod_\mu (1 + \zeta_\mu x)^{s_\mu}$, la Gauss polynomiale pour $d\lambda/\omega_m$ donne une QRO pour $d\lambda$ en rééchelonnant les poids; les nœuds coïncident [Gau93,

[Gau01](#)].

Convergence & stabilité (en bref). Convergence rapide pour intégrandes analytiques hors des pôles (choix de $\{\alpha_k\}$ crucial). Les schémas à $m = 2n$ ou des pôles proches de $[-1, 1]$ peuvent être numériquement sensibles ; préférer les ORF à formules fermées quand c'est possible [[Gau93](#), [DBGV06](#)].

Quadratures rationnelles sur la demi-droite

Idée. Sur $[0, \infty)$, les quadratures rationnelles adaptées aux singularités se construisent à partir de FRO avec pôles fixés hors du support. Elles généralisent Gauss–Laguerre et conservent l'exactitude sur un espace rationnel approprié [[BGVHN99](#), [VDB05](#)].

Cadre rationnel. Pour des pôles $\{\alpha_k\} \subset (-\infty, 0)$, poser

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \frac{p_n(x)}{\pi_n(x)} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\}, \quad \pi_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_k} \right),$$

et l'orthogonalité dans $L^2([0, \infty), d\mu)$. Les FRO $\{\varphi_n\}$ (issues d'une base rationnelle) donnent une quadrature de type Gauss rationnelle

$$\int_0^\infty f d\mu \approx \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}), \quad x_{n,k} : \varphi_n(x_{n,k}) = 0, \quad \lambda_{n,k} = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x_{n,k})^2 \right]^{-1},$$

exacte pour $f \in \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1}$ [[BGVHN99](#)].

Réduction par Möbius (construction pratique). La transformation

$$\tau(x) = \frac{1-x}{1+x} : [0, \infty) \rightarrow [-1, 1]$$

transportant $\tilde{\mu}$ vers μ et les pôles $\tilde{\alpha}_k$ vers $\alpha_k = \tau(\tilde{\alpha}_k)$, met en correspondance les ORF :

$$\tilde{\varphi}_n = \pm \varphi_n \circ \tau, \quad \text{récurrences } (\tilde{E}_n, \tilde{F}_n) \text{ déduites de } (E_n, F_n),$$

voir [[VDB05](#), Lem. 3.2, Th. 3.4]. Ainsi, si $x_{n,k}$ sont les zéros de φ_n sur $(-1, 1)$, alors

$$\xi_{n,k} = \tau^{-1}(x_{n,k}) = \frac{1-x_{n,k}}{1+x_{n,k}} \in (0, \infty), \quad \Lambda_{n,k} = \lambda_{n,k},$$

et

$$\int_0^\infty f d\tilde{\mu} \approx \sum_{k=1}^n \Lambda_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

est exacte pour $\tilde{\mathcal{L}}_n \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{n-1}$ [VDB05, Cor. 4.2].

Remarques numériques. Choisir des pôles $\{\alpha_k\}$ (ou $\{\tilde{\alpha}_k\}$) en phase avec les singularités de l'intégrande améliore la précision; la stabilité est favorisée par la construction via la réduction à $[-1, 1]$ plutôt que par des moments modifiés [VDB05, BGVHN99].

Conclusion du chapitre

Les fonctions rationnelles orthogonales (FRO) prolongent naturellement la théorie des polynômes orthogonaux classiques. En introduisant explicitement des pôles dans leur construction, elles offrent une souplesse accrue pour l'approximation de fonctions présentant des singularités, des comportements asymptotiques ou des structures spectrales fines. Cette approche permet d'adapter la base d'approximation à la nature analytique de la fonction étudiée.

La théorie des FRO relie plusieurs champs fondamentaux : analyse complexe, approximation rationnelle, théorie du moment, méthodes spectrales et algèbre numérique structurée. Ces bases théoriques solides trouvent des applications directes en traitement du signal, en modélisation de systèmes dynamiques, dans la résolution d'équations différentielles sur des domaines non bornés, ou encore en réduction de modèles de grande dimension.

Les avancées récentes ouvrent de nombreuses perspectives : optimisation de la sélection des pôles, extension aux cas multivariés ou matriciels, et intégration des FRO dans des cadres adaptatifs et des algorithmes d'apprentissage automatique.

Parmi les applications majeures, la construction de formules de quadrature rationnelle occupe une place essentielle. Ces quadratures généralisent les formules de Gauss classiques en exploitant les zéros des FRO comme nœuds d'intégration optimaux, mieux adaptés à la structure analytique de l'intégrande. Ce prolongement rationnel du cadre polynomial constitue une avancée significative pour l'intégration numérique, notamment dans les cas où la présence de pôles complexes améliore la précision sur des fonctions à comportement singulier ou asymptotique.

Au-delà de leur intérêt pour le calcul d'intégrales, les quadratures rationnelles introduites dans ce chapitre s'inscrivent aussi dans un cadre plus large : celui de la résolution

des équations intégrales. En effet, plusieurs méthodes numériques, dont la méthode de Nyström, reposent sur des approximations de type quadrature.

Ainsi, les outils présentés — fonctions rationnelles orthogonales et quadratures rationnelles — forment une base solide pour l'étude des équations intégrales, où l'intégration devient un élément constitutif du problème. Le chapitre suivant abordera la typologie de ces équations intégrales, leurs propriétés d'existence et d'unicité, ainsi que les principales approches numériques pour leur résolution.

FONDEMENTS THÉORIQUES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

3.1 Introduction aux équations intégrales

Les équations intégrales constituent des outils mathématiques puissants pour modéliser des phénomènes non locaux dans des domaines aussi variés que la physique, l'ingénierie, l'analyse numérique. Contrairement aux équations différentielles, qui traduisent des relations locales, les équations intégrales expriment des interactions globales via des intégrales, capturant ainsi l'influence d'un champ ou d'un signal sur l'ensemble d'un domaine.

Elles interviennent dans des contextes très divers, tels que la diffusion de chaleur, les champs électromagnétiques. Ces équations sont à la fois d'un grand intérêt théorique — notamment via la théorie des opérateurs — et d'une pertinence pratique croissante.

Ce chapitre introduit les fondements théoriques des équations intégrales. La première section présente les définitions, classifications et notations usuelles. La seconde développe les outils fonctionnels indispensables : opérateurs linéaires, intégraux, adjoints, et les conditions d'existence et d'unicité des solutions. Enfin, la troisième section est consacrée aux méthodes de résolution, allant de la méthode de Nyström aux techniques de projection, avec une attention particulière aux équations singulières et à l'analyse d'erreur.

Pour une étude approfondie, nous recommandons les ouvrages de référence de Atkinson [Atk97], Kress [Kre99], Porter et Stirling [PS90], ainsi que le classique *Functional Analysis* de Rudin [Rud91].

3.1.1 Définition générale et notations

Définition 3.1. Une équation intégrale est une équation où la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît sous une intégrale. Sa forme générale est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (3.1.1)$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, λ est un paramètre constant, $K(x, t)$ est le noyau intégral, et $a(x), b(x)$ sont les bornes d'intégration, qui peuvent être fixes ou variables.

3.1.2 Classification des équations intégrales

La **classification** des équations intégrales (3.1.1) repose sur plusieurs caractéristiques. Cette section examine en détail les types d'équations intégrales, en identifiant les propriétés qui les caractérisent.

• Type ou Espèce de l'équation

On distingue deux types :

- **Première espèce** : La fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît uniquement sous le signe intégral $\int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$.
- **Deuxième espèce** : La fonction inconnue apparaît à la fois sous et en dehors du signe intégral $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$.

• Bornes d'intégration

Les équations intégrales sont classées selon les bornes d'intégration :

- **Équations de Fredholm** : Les bornes d'intégration sont fixes

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (3.1.2)$$

- Première espèce : $\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$.
- Seconde espèce : $\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$.
- **Équations de Volterra** : Borne supérieure variable, souvent x .

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (3.1.3)$$

- Première espèce : $\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$.
- Seconde espèce : $\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$.
- **Équations de Volterra–Fredholm** : Combinaison des intégrales de Volterra et de Fredholm.

$$\varphi(x) = \gamma_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t) dt + \gamma_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t) dt + f(x) \quad (3.1.4)$$

— Première espèce :

$$\int_a^x k_1(x, t)\varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

— Seconde espèce :

$$\varphi(x) - \gamma_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t) dt - \gamma_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t) dt = f(x)$$

• **Terme libre $f(x)$**

— **Homogène** : Une équation intégrale est dite homogène si $f(x) = 0$.

— **Non homogène (ou Inhomogène)** : Si $f(x) \neq 0$.

• **Nature du noyau**

Le noyau $K(x, t)$ peut être :

— **Régulière** : Si le noyau $k(x, t)$ est continu ou borné.

— **Singulière** : Si l'une des bornes d'intégration est infinie ou si le noyau est non borné sur l'intervalle d'intégration.

— **Faiblement singulière** : Le noyau a une singularité intégrable, par exemple $k(x, t) = \frac{g(x, t)}{|x-t|^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ et g bornée.

Les noyaux logarithmiques, comme $k(x, t) = g(x, t) \ln|x-t|$, sont aussi considérés faiblement singuliers.

— **Fortement singulière** : Par exemple, le noyau de Cauchy $k(x, t) = \frac{g(x, t)}{x-t}$.

3.2 Fondements théoriques et opérateurs

Cette section examine les cadres mathématiques pour analyser les équations intégrales, en mettant l'accent sur les espaces fonctionnels et les opérateurs, et l'analyse de l'existence et l'unicité de solutions.

3.2.1 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $A : E \rightarrow F$ une application. On dit que A est un **opérateur linéaire** s'il vérifie la propriété suivante : pour tous vecteurs

$\varphi_1, \varphi_2 \in E$ et pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ on a :

$$A(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1A(\varphi_1) + \lambda_2A(\varphi_2). \quad (3.2.1)$$

Autrement dit, l'opérateur A préserve l'addition vectorielle et la multiplication scalaire.

Opérateurs linéaires continus. Soient E et F des espaces normés, et soit A un opérateur linéaire défini sur une partie $G \subset E$, à valeurs dans F . On dit que A est **continu au point** $x_0 \in G$ si la condition suivante est vérifiée :

— Pour toute suite (x_n) dans G telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a $A(x_n) \rightarrow A(x_0)$.

Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0). \quad (3.2.2)$$

L'opérateur A est dit **continu sur l'ensemble** G s'il est continu en tout point $x_0 \in G$.

Opérateurs linéaires bornés

Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire entre deux espaces normés. On dit que A est **borné** s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E. \quad (3.2.3)$$

Autrement dit, la norme de $A(x)$ dans F est uniformément contrôlée par la norme de x dans E .

La **norme de l'opérateur** A , définie comme la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (3.2.3), est donnée par :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0, \|x\| \leq 1}} \|A(x)\|_F. \quad (3.2.4)$$

Un opérateur linéaire est **continu** si et seulement s'il est **borné**.

Opérateurs linéaires compacts

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit **compact** (ou complètement continu) si, pour tout sous-ensemble borné $B \subset E$, l'image $A(B)$ est relativement compacte dans F , c'est-à-dire que la clôture de $A(B)$ est compacte dans F .

Cas d'un espace de départ de dimension finie. Supposons que A soit un opérateur linéaire borné défini de E dans F , et que $\dim E < \infty$. Alors, A est automatiquement compact.

Combinaison linéaire d'opérateurs compacts. Soient A_1 et A_2 deux opérateurs compacts. Alors, pour tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, l'opérateur

$$A = \alpha A_1 + \beta A_2 \quad (3.2.5)$$

est également compact.

Remarque importante. L'opérateur identité Id sur un espace normé E est compact **si et seulement si** E est de dimension finie.

En revanche, un opérateur borné n'est pas nécessairement compact. Par exemple, l'opérateur identité Id sur un espace normé de dimension infinie est borné mais **non compact**.

3.2.2 Opérateurs Intégraux

Définition 3.2. Soit $D \subset \mathbb{R}^m$ un domaine borné et $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction noyau, généralement continue ou intégrable au sens de L^2 .

Un *opérateur intégral* T est un opérateur linéaire défini sur un espace fonctionnel, tel que $C(D)$ (fonctions continues avec la norme $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in D} |\varphi(x)|$) ou $L^2(D)$ (fonctions à module carré intégrable avec la norme $\|\varphi\|_2 = (\int_D |\varphi(x)|^2 dx)^{1/2}$), par la formule :

$$T : \varphi \in C(D) \mapsto T\varphi \in C(D), \quad \text{avec} \quad T\varphi(x) = \int_D k(x, t)\varphi(t) dt, \quad \forall x \in D,$$

Cet opérateur est continu, de norme :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(C(D);C(D))} \leq \max_{x \in D} \left\{ \int_D |k(x, y)| dy \right\}.$$

Les opérateurs intégraux interviennent naturellement dans l'étude des équations intégrales (3.1.1). On peut réécrire cette équation sous la forme opérateur :

$$\varphi = f + \lambda T\varphi \quad (3.2.6)$$

où T est l'opérateur intégral défini par le noyau k . Résoudre l'équation intégrale revient donc à trouver φ qui satisfait cette relation.

Remarque 1. Les opérateurs intégraux traduisent les équations intégrales en équations opérationnelles dans des espaces de Banach ou de Hilbert, facilitant leur analyse via des outils comme la théorie spectrale ou les méthodes numériques.

3.2.3 Opérateurs adjoints

Définition 3.3 (Opérateur adjoint). Soit A un opérateur linéaire défini de l'espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 . L'opérateur linéaire A^* défini de H_2 dans H_1 est appelé **opérateur adjoint** de A s'il vérifie, pour tout $\varphi \in H_1$ et tout $\psi \in H_2$:

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

Théorème 3.4 (Existence de l'opérateur adjoint). Soit A un opérateur linéaire borné de H_1 dans H_2 , où H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert. Alors, il existe un unique opérateur linéaire borné $A^* : H_2 \rightarrow H_1$ tel que :

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}, \quad \forall \varphi \in H_1, \psi \in H_2.$$

De plus, on a :

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Proposition 3.5. Soit A un opérateur intégral défini à partir d'un noyau continu K sur $[a, b] \times [a, b]$, selon :

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

Alors, A admet un unique adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de $L^2([a, b])$, défini par :

$$A^*\psi(x) = \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt.$$

Corollaire 3.6. Soit A un opérateur intégral de noyau K . Alors, son adjoint A^* est aussi un opérateur intégral, de noyau K^* défini par :

$$K^*(t, x) = K(x, t).$$

Théorème 3.7. Si A est un opérateur linéaire compact de H_1 dans H_2 , alors son adjoint A^* est également un opérateur linéaire compact de H_2 dans H_1 .

Définition 3.8 (Opérateur auto-adjoint). Un opérateur linéaire A défini dans un espace de

Hilbert H est dit **auto-adjoint** si :

$$A = A^*,$$

ou encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$:

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Corollaire 3.9. *L'opérateur intégral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau est symétrique :*

$$K(x, t) = K(t, x), \quad \forall x, t \in [a, b].$$

3.2.4 Existence et unicité des solutions des équations intégrales

L'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des équations intégrales est une étape préalable cruciale à toute tentative de résolution numérique. Ces équations, en particulier celles de seconde espèce, s'écrivent sous la forme :

$$\varphi = f + \lambda T\varphi,$$

où T est un opérateur intégral défini sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^m$ avec un noyau $k(x, t)$. L'analyse de l'existence repose sur plusieurs approches complémentaires : la compacité des opérateurs (la théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm), la méthode du point fixe (contraction). Ces méthodes s'appliquent dans des espaces fonctionnels usuels comme $C(D)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$) ou $L^2(D)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$) [Kre99, Rud91].

• Analyse par compacité et alternative de Fredholm

La compacité des opérateurs intégraux, combinée à la théorie de Riesz et à l'alternative de Fredholm, fournit un cadre robuste pour analyser les solutions de l'équation $\varphi = f + \lambda T\varphi$.

Théorème 3.10 (Compacité des opérateurs à noyau). *Soit $T : C(D) \rightarrow C(D)$ défini par $(T\varphi)(x) = \int_D k(x, y)\varphi(y) dy$, avec k continu. Alors T est compact dans $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$ par le théorème d'Arzelà-Ascoli. Dans $L^2(D)$, si $k \in L^2(D \times D)$, T est de Hilbert-Schmidt, donc compact [Kre99, Rud91].*

La compacité de T implique un spectre dénombrable, accumulé au plus en zéros, facilitant l'analyse de l'opérateur $L = I - \lambda T$. La théorie de Riesz exploite cette propriété pour établir que :

- Le noyau $\text{Ker}(L) = \{\varphi \in X : L\varphi = 0\}$ est de dimension finie.
- L'image $\text{Im}(L) = \{L\varphi : \varphi \in X\}$ est un sous-espace fermé de codimension finie.
- Il existe un entier r , dit nombre de Riesz, tel que $X = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$ [Atk97].

En conséquence des théorèmes de Riesz, on a :

Théorème 3.11. Soit $T : X \rightarrow X$ un opérateur compact sur un espace de Banach X et $L = I - T$, on a :

1. L est injectif si et seulement s'il est surjectif.
2. Si L est injectif, alors l'opérateur inverse $L^{-1} : X \rightarrow X$ est borné.

Théorème 3.12 (Alternative de Fredholm). Soit $T : X \rightarrow X$ compact sur un espace de Banach X et $\lambda \neq 0$. Pour l'équation $\varphi = f + \lambda T\varphi$:

1. Si l'équation homogène $\varphi = \lambda T\varphi$ n'admet que la solution triviale, alors $\varphi = f + \lambda T\varphi$ a une solution unique $\varphi = (I - \lambda T)^{-1}f$, dépendant continûment de f .
2. Si l'équation homogène a des solutions non triviales, elles forment un espace de dimension finie. Une solution à $\varphi = f + \lambda T\varphi$ existe si $f \in \text{Im}(I - \lambda T)$, avec des conditions d'orthogonalité par rapport à $\text{Ker}(I - \lambda T^*)$ dans les espaces de Hilbert.

Corollaire 3.13. Si l'équation homogène $\varphi = \lambda T\varphi$ n'admet que la solution triviale, alors $\varphi = f + \lambda T\varphi$ a une solution unique. Sinon, la solution générale est $\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j$, où $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq m}$ forme une base du noyau de $I - \lambda T$ [Atk97].

Ce théorème est particulièrement puissant pour les équations de deuxième espèce et s'étend aux espaces de Hilbert via l'orthogonalité du produit scalaire [PS90].

• Approche par contraction (Méthode du point fixe)

Définition 3.14 (Application contractante). Soit T un opérateur d'un espace de Banach X dans lui-même. On dit que T est une **contraction** (ou application contractante) s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Théorème 3.15 (Théorème du point fixe de Banach). Soit T une contraction sur un espace de Banach X . Alors, T admet un **unique point fixe** $x^* \in X$ tel que :

$$T(x^*) = x^*.$$

Remarque 3.16. On note T^n l'opérateur obtenu en composant T avec lui-même n fois, c'est-à-dire :

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque 3.17. Le théorème du point fixe de Banach repose sur la continuité de l'application contractante. Une question naturelle est de savoir si cette hypothèse peut être relâchée. En 1968, R. Kannan a proposé une condition alternative de contraction, désormais connue sous le nom de *contraction de Kannan*, permettant d'établir l'existence et l'unicité d'un point fixe même sans continuité de l'opérateur.

Définition 3.18 (Contraction de Kannan). [Lak22] Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application. On dit que T est une **contraction de Kannan** s'il existe une constante $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ telle que :

$$d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad \forall x, y \in X. \quad (3.2.7)$$

Théorème 3.19 (Point fixe de Kannan). [Nad22] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction de Kannan. Alors T admet un unique point fixe $a \in X$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $a \in X$ tel que :

$$T(a) = a.$$

Les théorèmes du point fixe, notamment ceux de Banach et de Kannan, garantissent l'existence et l'unicité de solutions sous des hypothèses de contractivité. Cependant, lorsque l'opérateur est linéaire et borné, une approche analytique plus explicite peut être obtenue à l'aide de la série de Neumann, qui fournit une expression fermée pour l'inverse de $(I - \lambda T)$.

Théorème 3.20 (Séries de Neumann). Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X , et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que :

$$|\lambda| \|T\| < 1 \quad (3.2.8)$$

Alors, l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible, et son inverse borné est donné par la série de Neumann suivante :

$$(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}.$$

De plus, on a l'inégalité suivante :

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\lambda\| - \|T\|}.$$

Applications sur les équations intégrales de Fredholm et Volterra et Volterra-Fredholm**Théorème 3.21** (Fredholm). *L'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y) dy \quad (3.2.9)$$

admet une solution unique dans $L^2([a, b])$ si k est continu, $f \in L^2([a, b])$, et $|\lambda|k < 1$, où $k = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy}$. [Kre99].

Théorème 3.22 (Volterra). *L'équation de Volterra*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, y)\varphi(y) dy \quad (3.2.10)$$

admet une solution unique dans $L^2([0, 1])$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si $k \in L^1([0, 1]^2)$ et $f \in L^2([0, 1])$. L'équation homogène n'admet que la solution triviale $\varphi = 0$ [Kre99].

Théorème 3.23 (Volterra–Fredholm). *L'équation linéaire de Volterra–Fredholm :*

$$\varphi(x) = \gamma_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t) dt + \gamma_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t) dt + f(x) \quad (3.2.11)$$

où :

- 1) $f \in C([a, b])$, $t_1(x, \mu) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x, \mu) \mid a \leq \mu \leq x \leq b\}$,
- 2) $t_2(x, \mu) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a, b] \times [a, b]$,
- 3) $M_1 = \max_{(x, \mu) \in D_1} |t_1(x, \mu)|$, $M_2 = \max_{(x, \mu) \in D_2} |t_2(x, \mu)|$.

Sous ces conditions de continuité, s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b - a))] < \frac{1}{3},$$

alors l'équation (3.2.11) possède une solution unique $\varphi \in C([a, b])$. [Lak22]

Remarque 3.24. La combinaison de la contraction, de l'analyse par compacité et Fredholm, et des cas particuliers (Fredholm et Volterra) offre une analyse adaptée aux caractéristiques de l'équation et du noyau, avec des applications en physique, tomographie et traitement du signal [Kre99].

L'analyse de l'existence et de l'unicité des solutions d'une équation intégrale constitue une étape théorique fondamentale, préalable indispensable à toute tentative de traitement numérique ou d'approximation.

Cette étude ne constitue donc pas une fin en soi, mais un préalable nécessaire à l'élaboration de méthodes numériques robustes, assurant la convergence des approximations vers la solution exacte.

Forts de ces garanties analytiques — existence, unicité et stabilité des solutions dans des espaces fonctionnels appropriés —, nous pouvons désormais aborder avec confiance la résolution numérique des équations intégrales.

Dans la prochaine section, nous entamerons une étude détaillée des méthodes de résolution.

3.3 Résolution des équations intégrales

Les équations intégrales, introduites dans la section précédente, jouent un rôle clé dans la modélisation de phénomènes non locaux en physique, ingénierie et analyse numérique. Leur résolution nécessite souvent des approches numériques, car les solutions analytiques sont rarement disponibles, surtout pour les équations avec noyaux complexes ou singuliers. Cette section explore les méthodes numériques pour résoudre ces équations, en mettant l'accent sur leur application dans le contexte des fonctions rationnelles orthogonales, qui seront détaillées dans la section suivante. Nous commençons par une introduction distinguant les approches directes et numériques, suivie de quatre sous-sections : la méthode d'approximation de Nyström, les méthodes spectrales (projection, incluant collocation et Galerkin), les techniques spécifiques pour les équations singulières, et l'analyse de l'erreur associée à ces méthodes.

3.3.1 Présentation des méthodes de résolution

La résolution des équations intégrales peut être abordée par des méthodes directes ou numériques, selon la nature de l'équation et les ressources disponibles.

Méthodes directes

Ces approches visent à obtenir une solution analytique exacte, souvent par des transformations explicites ou des techniques comme la méthode de séparation des variables. Par exemple, pour une équation de Fredholm de deuxième espèce avec un noyau séparable $K(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t)$, la solution peut être réduite à un système linéaire d'équations algébriques. Cependant, les méthodes directes sont limitées aux cas simples (noyaux spécifiques, domaines réguliers) et ne s'appliquent pas bien aux équations singulières ou complexes, comme celles de Cauchy ou avec des noyaux non séparables.

Méthodes numériques

Lorsque les solutions analytiques sont inaccessibles, les méthodes numériques offrent une alternative robuste. Elles consistent à approximer la solution $\varphi(x)$ par une représentation discrète, souvent en projetant l'équation sur un espace de dimension finie ou en discrétisant l'intégrale.

Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux équations intégrales de Fredholm, Volterra, ou singulières, et elles exploitent des outils comme les quadratures, les bases orthogonales, ou les méthodes spectrales. Leur efficacité dépend de la régularité du noyau, du choix de la base, et de la gestion des singularités, comme discuté dans [PS90] et [Atk97].

Représentation discrète de la solution Le principe général des méthodes numériques repose sur l'approximation du problème intégral dans un espace de dimension finie. Deux approches principales peuvent être distinguées :

- *Discrétisation directe* : on remplace l'opérateur intégral par une approximation quadratique fondée sur des formules de quadrature. Cela mène à la méthode de Nyström, qui ramène l'équation intégrale à un système linéaire d'équations algébriques.
- *Projection fonctionnelle* : on cherche une solution approchée dans un sous-espace de dimension finie en projetant l'équation sur un espace de test. Cela conduit aux méthodes dites de projection, comme les méthodes de Galerkin ou de Petrov–Galerkin.

Outils numériques utilisés Les méthodes numériques reposent sur plusieurs outils fondamentaux :

- Les formules de quadrature, utilisées pour approximer les intégrales du type $\int_D k(x, t)\varphi(t) dt$, doivent être choisies en fonction de la régularité de k et de φ .
- Les bases orthogonales (polynômes de Legendre, de Chebyshev, splines, ondelettes) permettent une représentation efficace de la solution, notamment dans le cadre des méthodes spectrales.
- Les méthodes spectrales, en particulier, exploitent l'orthogonalité dans $L^2(D)$ et offrent une convergence exponentielle lorsque la solution est régulière.

Facteurs influençant l'efficacité L'efficacité des méthodes numériques dépend de plusieurs paramètres :

- La régularité du noyau $k(x, t)$, qui conditionne le choix des quadratures et le comportement des erreurs.

- Le choix de la base fonctionnelle, qui affecte la condition numérique du système et la vitesse de convergence.
- La gestion des singularités, nécessaire pour garantir précision et stabilité en présence de comportements asymptotiques ou de discontinuités.

Ces aspects sont étudiés en profondeur dans les ouvrages de référence tels que [PS90] et [Atk97], qui fournissent une base rigoureuse ainsi que des techniques numériques adaptées aux diverses familles d'équations intégrales.

Avant de présenter les méthodes de discrétisation comme celles de Nyström ou de projection, il est utile de rappeler la méthode des approximations successives, qui constitue la base des schémas itératifs de résolution numérique des équations intégrales. Parmi les approches itératives les plus classiques :

3.3.2 Méthode itératives de résolution

Méthode d'approximations successives

La méthode des approximations successives, également appelée *méthode de Picard* ou *itération de Banach*, constitue à la fois un outil théorique et une méthode pratique de résolution des équations intégrales linéaires. Elle permet d'obtenir, de manière itérative, une solution approchée de l'équation

$$\varphi = f + \lambda T\varphi,$$

où $T : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach X . Cette approche repose sur le *théorème du point fixe de Banach*, garantissant l'existence et l'unicité de la solution lorsque l'opérateur $K(\varphi) = f + \lambda T\varphi$ est contractant, c'est-à-dire lorsque

$$|\lambda| \|T\| < 1.$$

Théorème 3.25 (Solution par approximations successives). *Si $|\lambda| \|T\| < 1$, l'opérateur K est une contraction sur X , et l'équation $\varphi = f + \lambda T\varphi$ admet une solution unique donnée par :*

$$\varphi = (I - \lambda T)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda T)^n f.$$

Cette série, appelée série de Neumann, converge dans X et relie directement la méthode d'itération

à l'inversion formelle de l'opérateur $(I - \lambda T)$. La suite récurrente

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda T \varphi_n, \quad n \geq 0,$$

converge vers la solution φ selon :

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi\| \leq \frac{|\lambda| \|T\|}{1 - |\lambda| \|T\|} \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|.$$

Application à une équation intégrale de Fredholm Pour une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy,$$

la méthode s'écrit explicitement sous la forme :

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi_n(y) dy.$$

La solution exacte peut alors être représentée à l'aide du noyau itéré $k_n(x, y)$, défini récursivement par :

$$k_1(x, y) = k(x, y), \quad k_n(x, y) = \int_a^b k(x, \xi) k_{n-1}(\xi, y) d\xi, \quad n \geq 2,$$

d'où

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x, y) \right) g(y) dy.$$

Remarque La méthode des approximations successives établit un lien étroit entre la théorie du point fixe et la série de Neumann. Elle constitue une passerelle naturelle entre l'analyse fonctionnelle et les méthodes numériques : les conditions de contraction assurent la convergence théorique, tandis que l'itération successive fournit un schéma de calcul explicite et stable pour approcher la solution des équations intégrales de Fredholm ou de Volterra [Atk97, Kre99].

3.3.3 Méthode d'approximation de Nyström

La méthode de Nyström [Atk97] est une approche numérique classique pour résoudre les équations intégrales, aussi appelée *méthode de quadrature* particulièrement adaptée aux

équations de Fredholm ou Volterra de deuxième espèce.

Principe de la méthode

La méthode de Nyström transforme l'équation intégrale en un système linéaire en approximant l'intégrale par une règle de quadrature. Considérons l'équation :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (3.3.1)$$

On choisit une règle de quadrature avec n points $\{t_j\}_{j=1}^n$ et poids $\{w_j\}_{j=1}^n$, (Gauss, Tchebychev, Clenshaw-Curtis, etc.) on prend la quadrature de Gauss-Legendre, l'intégrale est approximée par :

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt \approx \sum_{j=1}^n w_j K(x, t_j)\varphi(t_j). \quad (3.3.2)$$

En évaluant l'équation aux points de quadrature $x_i = t_i$, on obtient le système linéaire :

$$\varphi_i = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^n w_j K(x_i, t_j)\varphi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3.3)$$

où $\varphi_i \approx u(x_i)$. Ce système peut être écrit sous forme matricielle :

$$(I - \lambda A)\varphi = \mathbf{f}, \quad (3.3.4)$$

où $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$, $\mathbf{f} = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T$, et la matrice A a pour entrées $A_{ij} = w_j K(x_i, t_j)$. Une fois résolu, le système donne les valeurs φ_i , et une interpolation (par exemple, polynomiale) peut être utilisée pour approximer $\varphi(x)$ sur $[a, b]$.

Exemple

Pour l'équation :

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 (xt)\varphi(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (3.3.5)$$

on peut utiliser une quadrature de Gauss-Legendre avec $n = 4$ points. Le système linéaire résultant est résolu pour obtenir les valeurs $\varphi(x_i)$, puis une interpolation quadratique peut approximer $\varphi(x)$. Cet exemple, inspiré de [DR07], illustre la simplicité de la méthode pour les noyaux continus.

Remarque 3.26. La méthode de Nyström est simple à implémenter et efficace pour les noyaux continus ou faiblement singuliers. Elle bénéficie de la précision des règles de

quadrature modernes, comme Gauss-Legendre, qui offrent une convergence rapide pour les fonctions régulières [DR07]. Par contre pour les noyaux singuliers, comme $K(x, t) = \frac{1}{t-x}$, les quadratures standards échouent à cause de la non-intégrabilité. Des quadratures spécialisées sont nécessaires, ce qui complique l'implémentation. De plus, la méthode peut être coûteuse pour un grand nombre de points n , car elle génère une matrice dense.

Ces observations motivent le recours à une autre classe de méthodes numériques : les *méthodes de projection*. Celles-ci consistent à rechercher une solution approchée dans un sous-espace fonctionnel de dimension finie, et à projeter l'équation intégrale sur un espace de test. Cette approche permet une meilleure intégration des propriétés analytiques du problème et une approximation fonctionnelle plus contrôlée de la solution.

3.3.4 Méthodes de projection : collocation et Galerkin

Les méthodes spectrales, basées sur la projection, offrent une approche puissante pour résoudre les équations intégrales.

Cadre Théorique des Méthodes de Projection

Comme on a déjà vu dans (1.2.2) on peut poser un cadre théorique des méthodes de projection.

Soit X un espace de Banach, $T : X \rightarrow X$ un opérateur borné, et $\{X_n\}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de X . Un projecteur $P_n : X \rightarrow X_n$ satisfait $P_n^2 = P_n$, $P_n \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in X_n$, avec $P_n \neq 0$.

L'équation $T\varphi = f$, avec $f \in X$, est approximée par :

$$P_n T \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in X_n.$$

L'équation approchée est alors $\varphi_n = P_n T^{-1} f$. Si T est compact, injectif, et que $P_n \varphi \rightarrow \varphi$, alors la méthode de projection converge [Kre99]

De plus, si $\|P_n T - T\| \rightarrow 0$, on a :

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq M \|P_n \varphi - \varphi\|$$

Principe des méthodes de projection

Les méthodes de projection approximer la solution $\varphi(x)$ dans un espace de dimension finie $X_n = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, où $\{\phi_i\}$ est une base (par exemple, polynômes orthogonaux).

On pose :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x), \quad (3.3.6)$$

et on projette l'équation intégrale sur un espace de test pour déterminer les coefficients c_k .

Les deux approches principales sont la collocation et la méthode de Petrov-Galerkin (Galerkin).

• **Méthode de Collocation :**

Dans la méthode de collocation, l'équation est imposée en un ensemble de points de collocation $\{x_i\}_{i=1}^n$. Pour l'équation :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (3.3.7)$$

on substitue $\varphi_n(x)$ et on exige que l'équation soit satisfaite aux points x_i :

$$\varphi_n(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^b K(x_i, t) \varphi_n(t) dt, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3.8)$$

en d'autre terme le résidu

$$r_n(x_i) = (I - T)\varphi_n(x_i) - f(x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

s'annule en n points de collocation.

Cela donne un système linéaire pour les coefficients c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b K(x_i, t) \phi_k(t) dt. \quad (3.3.9)$$

Les points de collocation sont souvent choisis comme les nœuds de quadrature (par exemple, racines des polynômes orthogonaux).

• **Méthode de Petrov-Galerkin :**

Dans un espace de Hilbert, on cherche $\varphi_n \in X_n = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ tel que le résidu

$$r_n = (I - T)\varphi_n - f \quad (3.3.10)$$

soit orthogonal à un autre sous-espace $Y_n = \text{span}\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$, i.e.

$$\langle r_n, \chi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.3.11)$$

Si $X_n = Y_n$, c'est la méthode de Galerkin.

• Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin projette l'équation sur l'espace X_n en utilisant le produit scalaire de $L^2[a, b]$, défini par $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx$. On impose que le résidu soit orthogonal à chaque ϕ_i :

$$\langle \varphi_n - \lambda T\varphi_n - f, \phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3.12)$$

où $T\varphi_n = \int_a^b K(\cdot, t)\varphi_n(t) dt$. Cela conduit au système linéaire :

$$\sum_{k=1}^n c_k \langle \phi_k, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle + \lambda \sum_{k=1}^n c_k \langle T\phi_k, \phi_i \rangle. \quad (3.3.13)$$

Si la base $\{\phi_i\}$ est orthonormale, la matrice $\langle \phi_k, \phi_i \rangle$ est l'identité, simplifiant le système. La méthode de Galerkin est particulièrement adaptée aux équations dans $L^2[a, b]$ et offre une convergence optimale pour les noyaux continus ou faiblement singuliers [DM85].

Remarque 3.27. Les méthodes de projections offrent une convergence exponentielle pour les solutions lisses, surpassant les méthodes de Nyström pour les problèmes bien conditionnés. Et elles nécessitent un choix judicieux de la base et des points de collocation. Pour les noyaux fortement singuliers, la computation des intégrales peut être complexe.

Remarque 3.28. La méthode de collocation impose que l'équation soit satisfaite en un nombre fini de points, ce qui rend le système simple à construire et à résoudre. Cependant, elle peut être sensible au choix des points et à la régularité de la solution.

En revanche, la méthode de Galerkin impose que le résidu soit orthogonal à un espace de fonctions, ce qui garantit une plus grande stabilité et rigueur. Cette approche est cependant plus complexe à mettre en œuvre, notamment à cause du calcul des intégrales.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

PAR LES FONCTIONS RATIONNELLES

ORTHOGONALES

Introduction

Les équations intégrales de Fredholm, de Volterra et de Volterra–Fredholm constituent un domaine de recherche en pleine expansion. Leur étude est motivée par le fait que de nombreux phénomènes en ingénierie, en physique et en sciences de la vie peuvent être modélisés à l’aide de telles équations. En particulier, les équations intégrales mixtes de Volterra–Fredholm apparaissent dans la modélisation de divers phénomènes des sciences appliquées tels que la diffusion non linéaire induite par des sources non linéaires, l’inflammation thermique des gaz, ou encore les processus de concentration dans les problèmes chimiques et biologiques.

De nombreux problèmes issus de la conduction thermique, des écoulements souterrains, de la thermoélectricité ou encore de la physique des plasmas peuvent être formulés sous la forme d’équations intégrales ou intégréo-différentielles de type Volterra–Fredholm avec conditions aux limites intégrales, généralement exprimées comme suit :

$$u(x) - \int_a^x k_1(x, t) u(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) u(t) dt = f(x), \quad (4.0.1)$$

où $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, le noyau $k(x, t)$ étant borné pour $a \leq x, t \leq b$, et la valeur 1 n’étant pas une valeur propre de cette équation. La fonction inconnue $u(x)$ est celle à déterminer.

Il est bien connu que les équations intégrales de Fredholm ou de Volterra ne possèdent généralement pas de solutions analytiques exactes. Dans le cas des équations mixtes de Volterra–Fredholm, la résolution explicite est encore plus complexe, voire impossible. Il devient donc nécessaire de recourir à des méthodes d’approximation numérique pour obtenir des solutions approchées stables et précises. Ainsi, plusieurs techniques numériques

ont été développées : la méthode des moindres carrés mobiles et les développements en polynômes de Tchebychev [Nad14a], la méthode de décomposition d'Adomian [Mal20], l'application des quatre polynômes de Chebyshev aux équations intégrales [Nad14b], l'application des quatre polynômes de Chebyshev aux équations intégrales de Volterra-Fredholm [LNN22], ou encore des approches basées sur les polynômes de Lucas, de Fibonacci et les séries d'Euler [Nad17, Nad18, ND17].

Dans ce contexte, ce chapitre est consacré à la présentation d'une méthode numérique efficace pour la résolution des équations de Volterra–Fredholm, fondée sur les **fonctions rationnelles orthogonales dérivées des polynômes de Tchebychev**. Ces fonctions présentent des propriétés remarquables d'orthogonalité et de convergence rapide, ce qui les rend particulièrement adaptées à l'approximation de fonctions définies sur des intervalles bornés. L'idée consiste à représenter la solution inconnue comme une combinaison linéaire de ces fonctions rationnelles, puis à déterminer les coefficients correspondants à l'aide d'une **méthode de collocation**. Cette approche transforme l'équation intégrale en un système d'équations linéaires de petite taille, aisément résoluble par des moyens numériques.

L'objectif de ce chapitre est double : d'une part, introduire le cadre théorique des fonctions rationnelles orthogonales issues des polynômes de Tchebychev, et d'autre part, démontrer leur efficacité pour la résolution numérique des équations intégrales mixtes de Volterra–Fredholm. Des exemples numériques seront présentés afin d'évaluer la précision et la rapidité de convergence de la méthode proposée, en comparaison avec d'autres approches classiques.

4.1 Fonctions rationnelles de Chebyshev

Polynômes de Chebyshev de première espèce

Soit $T_n(x)$ le polynôme de Chebyshev de première espèce, défini classiquement sur l'intervalle $[-1, 1]$ par la relation explicite :

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{lorsque } x = \cos \theta, \quad (2)$$

où $x \in [-1, 1]$, d'où $\theta \in [0, \pi]$. On a $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$, et la récurrence suivante est satisfaite :

$$\cos(n\theta) + \cos((n-2)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos((n-1)\theta),$$

ce qui conduit à la relation fondamentale :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Les fonctions $\{T_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ forment un système orthogonal sur $[-1, 1]$ avec le poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ainsi, le système orthonormal $S_n(x)$ défini par :

$$S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}T_0(x), \quad S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x), \quad n \geq 1,$$

vérifie

$$\langle S_k, S_l \rangle = \int_{-1}^1 \frac{S_k(x)S_l(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

On définit ensuite les fonctions $Q_n(x)$ par :

$$Q_n(x) = \frac{x+2}{(1-x^2)^{1/4}} S_n(x). \quad (4)$$

Les fonctions rationnelles $\frac{Q_n(x)}{x+2}$ sont alors orthogonales sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 \frac{Q_m(x)Q_n(x)}{(x+2)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{S_m(x)S_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Enfin, les fonctions rationnelles orthogonales $N_n(x)$ sont définies par :

$$N_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{3}} Q_n\left(\frac{-2x-1}{x+2}\right). \quad (5)$$

4.2 Développement des fonctions rationnelles sur l'intervalle [0,1]

Pour adapter les polynômes de Tchebychev à l'intervalle $[0, 1]$, on considère le changement de variable affine suivant :

$$x = 2t - 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (6)$$

Ainsi, les fonctions rationnelles $N_n(t)$ définies sur $[0, 1]$ peuvent être obtenues à partir de celles sur $[-1, 1]$ par :

$$N_n(t) = N_n(2t - 1). \tag{7}$$

Ces fonctions conservent la propriété d'orthogonalité et constituent donc une base rationnelle adaptée à l'approximation des fonctions définies sur $[0, 1]$. On peut alors développer une fonction $f(t)$ sur $[0, 1]$ sous la forme :

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^N a_n N_n(t), \tag{8}$$

où les coefficients a_n sont donnés par la relation :

$$a_n = \int_0^1 f(t) N_n(t) dt. \tag{9}$$

L'approximation ainsi obtenue converge uniformément vers $f(t)$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

4.3 Application aux équations intégrales de Volterra-Fredholm

Considérons l'équation intégrale mixte du second type :

$$u(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) u(t) dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) u(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{10}$$

Nous supposons que les noyaux k_1 et k_2 , ainsi que la fonction f , sont continus sur $[a, b] \times [a, b]$.

4.3.1 Approximation de la solution

La solution $u(x)$ est approchée par une combinaison linéaire finie des fonctions rationnelles $N_n(x)$:

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n N_n(x). \tag{11}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation intégrale (10), on obtient :

$$\sum_{n=0}^N a_n N_n(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \sum_{n=0}^N a_n N_n(t) dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \sum_{n=0}^N a_n N_n(t) dt = f(x). \tag{12}$$

On regroupe les termes et on introduit la notation suivante :

$$K_{mn}(x) = \int_a^x k_1(x, t)N_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t)N_n(t) dt, \quad (13)$$

de sorte que l'équation (12) devient :

$$\sum_{n=0}^N a_n [N_n(x) - \lambda_1 K_{1n}(x) - \lambda_2 K_{2n}(x)] = f(x). \quad (14)$$

4.3.2 Méthode de collocation

Pour déterminer les coefficients a_n , on impose que l'équation (14) soit vérifiée en un ensemble de $(N + 1)$ points distincts $x_i \in [a, b]$, dits *points de collocation*. Un choix naturel consiste à prendre les points de Tchebychev transformés dans l'intervalle $[a, b]$:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2N+2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

En appliquant la condition de collocation $x = x_i$ dans (14), on obtient un système linéaire de $(N + 1)$ équations à $(N + 1)$ inconnues :

$$\sum_{n=0}^N a_n [N_n(x_i) - \lambda_1 K_{1n}(x_i) - \lambda_2 K_{2n}(x_i)] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Ce système peut être écrit sous forme matricielle :

$$A\mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (17)$$

où $A = [A_{ij}]_{0 \leq i, j \leq N}$ avec

$$A_{ij} = N_j(x_i) - \lambda_1 K_{1j}(x_i) - \lambda_2 K_{2j}(x_i),$$

et $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N)^T$, $\mathbf{f} = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N))^T$.

La solution approchée $u_N(x)$ est alors obtenue à partir de la résolution du système (17).

4.3.3 Analyse théorique

Théorème 4.1.

Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur compact et considérons l'équation

$$(I - A)u = f, \quad (11)$$

qui admet une solution unique. Supposons que les projections $P_n : X \rightarrow X_n$ satisfont la condition $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Alors, pour n suffisamment grand, l'équation approchée

$$u_n - P_n A u_n = P_n f, \tag{12}$$

admet une solution unique pour tout $f \in X$, et l'on obtient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u_n\| \leq M \|u - P_n u\|, \tag{13}$$

où M est une constante positive dépendant de A .

Démonstration. Comme on le sait, pour tout n suffisamment grand, les opérateurs inverses $(I - P_n A)^{-1}$ existent et sont uniformément bornés voir [KA82, MNY07]. Pour vérifier la majoration de l'erreur, appliquons l'opérateur de projection P_n à l'équation (11), ce qui donne :

$$P_n u - P_n A u = P_n f, \tag{14}$$

ou encore :

$$u - P_n A u = P_n f + u - P_n u. \tag{15}$$

En soustrayant (15) de (12), on obtient :

$$(I - P_n A)(u - u_n) = (I - P_n)u.$$

Ainsi, l'estimation d'erreur (13) en découle directement. □

4.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons plusieurs exemples numériques illustrant l'efficacité et la précision de la méthode proposée basée sur les polynômes rationnels de Chebyshev. Chaque exemple consiste en une équation intégrale de Volterra-Fredholm dont la solution exacte est connue, ce qui permet d'évaluer la performance de l'approche en comparant les solutions exactes et approchées ainsi que les erreurs obtenues. Les résultats numériques démontrent la rapidité de convergence et la grande précision de la méthode pour différents types de noyaux et de fonctions données.

Exemple 1

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm :

$$u(x) - \int_0^x (x^2 + t^2) u(t) dt - \int_0^1 (xt) u(t) dt = f(x),$$

$$f(x) = \frac{2}{2x+3} + \left(x^2 + \frac{9}{4}\right) \left(\ln 3 - \ln 2 - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x(3 \ln 3 - 3 \ln 5 - 1),$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution $u(x)$ soit donnée par :

$$u(x) = \frac{2}{2x+2}$$

En appliquant le polynôme rationnel de Chebyshev $N_n(x)$ pour approximer la solution $u(x)$, c'est-à-dire $u_N(x)$, solution du système d'équations linéaires pour $n = 8$:

Pts de x	Sol. exacte	Sol. approchée	Erreur $N = 8$
0.000e+00	6.666e-01	6.666e-01	3.130e-09
2.500e-01	5.714e-01	5.714e-01	1.679e-09
3.750e-01	5.333e-01	5.333e-01	1.249e-09
5.000e-01	5.000e-01	5.000e-01	1.930e-10
7.500e-01	4.444e-01	4.444e-01	1.016e-09
8.750e-01	4.210e-01	4.210e-01	6.778e-10
1.000e+00	4.076e-01	4.076e-01	1.738e-09

TABLE 4.1 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 1

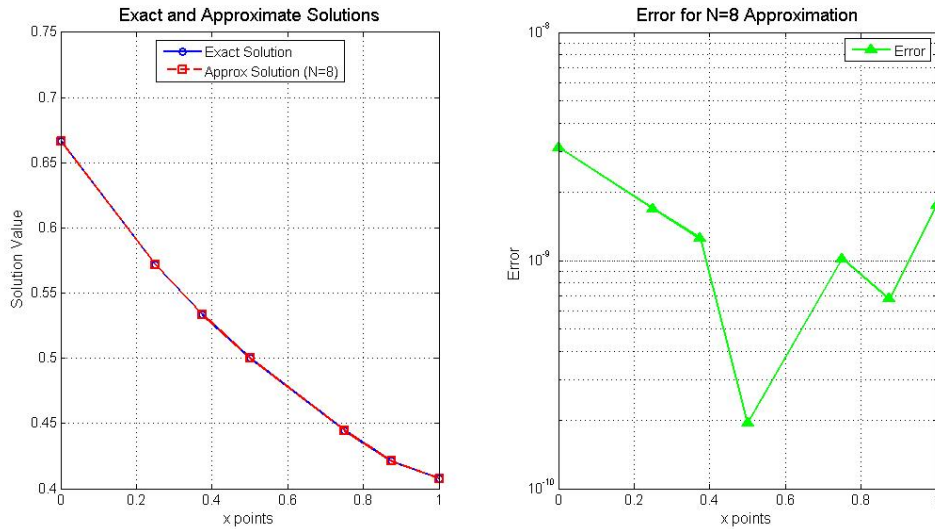


FIGURE 4.1 – Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l’erreur pour l’exemple 1 ($N = 8$).

Exemple 2

Considérons l’équation intégrale de Volterra-Fredholm :

$$u(x) - \int_0^x e^{(x-t)} u(t) dt - \int_0^1 (xe^{-t}) u(t) dt = f(x),$$

$$f(x) = x \left(3e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de sorte que la solution $u(x)$ soit donnée par :

$$u(x) = 2xe^{-x}$$

En appliquant le polynôme rationnel de Chebyshev $N_n(x)$ pour approximer la solution $u(x)$, c’est-à-dire $u_N(x)$, pour $n = 8$:

Pts de x	Sol. exacte	Sol. approchée	Erreur $N = 8$
0.000e+00	0.000e+00	1.001e-08	1.001e-08
2.500e-01	3.894e-01	3.894e-01	1.633e-09
3.750e-01	5.154e-01	5.154e-01	1.312e-09
5.000e-01	6.065e-01	6.065e-01	8.690e-09
7.500e-01	7.085e-01	7.085e-01	6.136e-09
8.750e-01	7.295e-01	7.295e-01	8.483e-09
1.000e+00	7.357e-01	7.357e-01	2.120e-08

TABLE 4.2 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 2

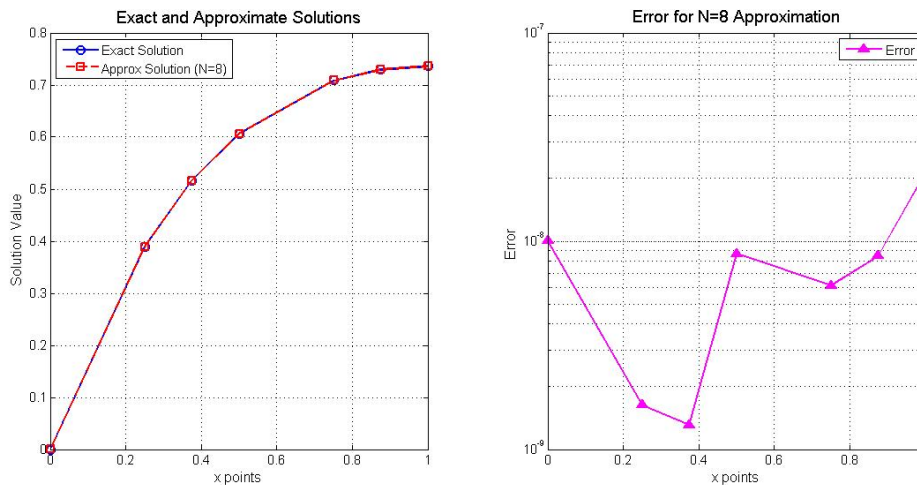


FIGURE 4.2 – Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 2 ($N = 8$).

Exemple 3

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm :

$$u(x) - \int_0^x (\sin t \cos x) u(t) dt - \int_0^1 (\sin x \cos t) u(t) dt = f(x),$$

$$f(x) = \frac{7}{8} \cos x + \frac{1}{8} \cos 3x - (\sin x) \left(\frac{1}{4} \sin 2 + \frac{1}{2} \right),$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution $u(x)$ soit :

$$u(x) = \cos x$$

En appliquant le polynôme rationnel de Chebyshev $N_n(x)$ pour approximer la solution $u(x)$, c'est-à-dire $u_N(x)$, pour $n = 8$:

Pts de x	Sol. exacte	Sol. approchée	Erreur $N = 8$
0.000e+00	1.000e+00	1.000e+00	2.329e-07
2.500e-01	9.689e-01	9.689e-01	2.933e-08
3.750e-01	9.305e-01	9.305e-01	9.446e-08
5.000e-01	8.775e-01	8.775e-01	1.582e-07
7.500e-01	7.316e-01	7.316e-01	1.592e-08
8.750e-01	6.409e-01	6.409e-01	7.878e-08
1.000e+00	5.403e-01	5.403e-01	3.665e-07

TABLE 4.3 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 3

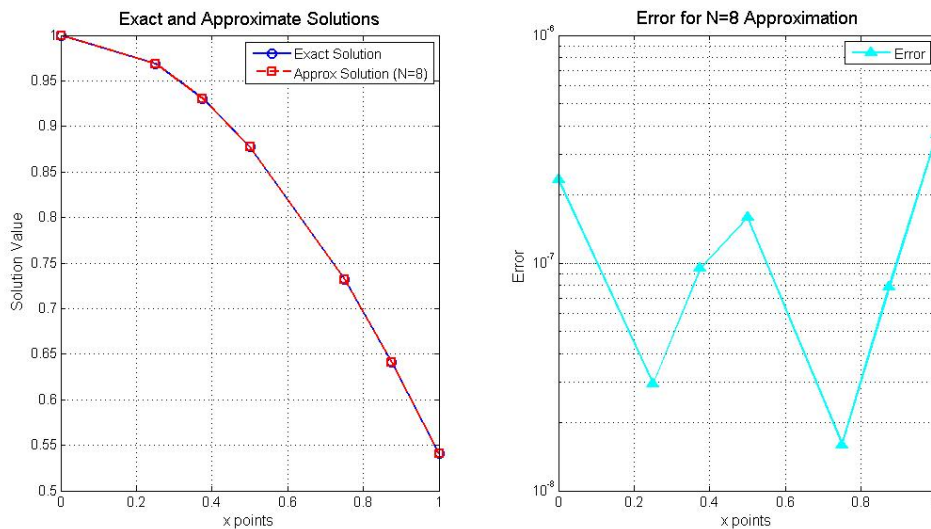


FIGURE 4.3 – Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 3 ($N = 8$).

Exemple 4

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm :

$$u(x) - \int_0^x (x - t) u(t) dt - \int_0^1 (x + t) u(t) dt = f(x),$$

$$f(x) = x(2 \ln 2 - \ln 3 - \ln(x + 2) + 1) + \frac{1}{x + 2} + 2 \ln 3 - 2 \ln(x + 2) - 1,$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de manière à ce que la solution $u(x)$ soit :

$$u(x) = \frac{1}{x + 2}$$

En appliquant le polynôme rationnel de Chebyshev $N_n(x)$ pour approximer la solution $u(x)$, c'est-à-dire $u_N(x)$, pour $n = 8$:

Pts de x	Sol. exacte	Sol. approchée	Erreur $N = 8$
0.000e+00	5.000e-01	5.000e-01	2.289e-10
2.500e-01	4.444e-01	4.444e-01	7.998e-11
3.750e-01	4.210e-01	4.210e-01	1.218e-10
5.000e-01	4.000e-01	4.000e-01	2.023e-11
7.500e-01	3.636e-01	3.636e-01	1.235e-10
8.750e-01	3.478e-01	3.478e-01	8.831e-12
1.000e+00	3.333e-01	3.333e-01	2.423e-10

TABLE 4.4 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 4

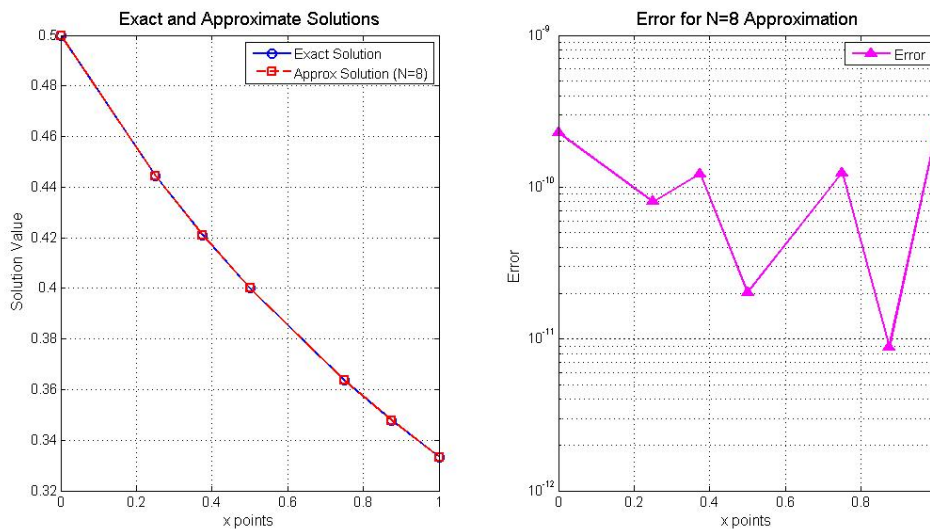


FIGURE 4.4 – Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 4 ($N = 8$).

Exemple 5

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm :

$$u(x) - \int_0^x \frac{x}{(t+1)} u(t) dt - \int_0^1 \frac{t}{(x+1)} u(t) dt = f(x),$$

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{4x+4} - \frac{1}{2}x \ln^2(x+1),$$

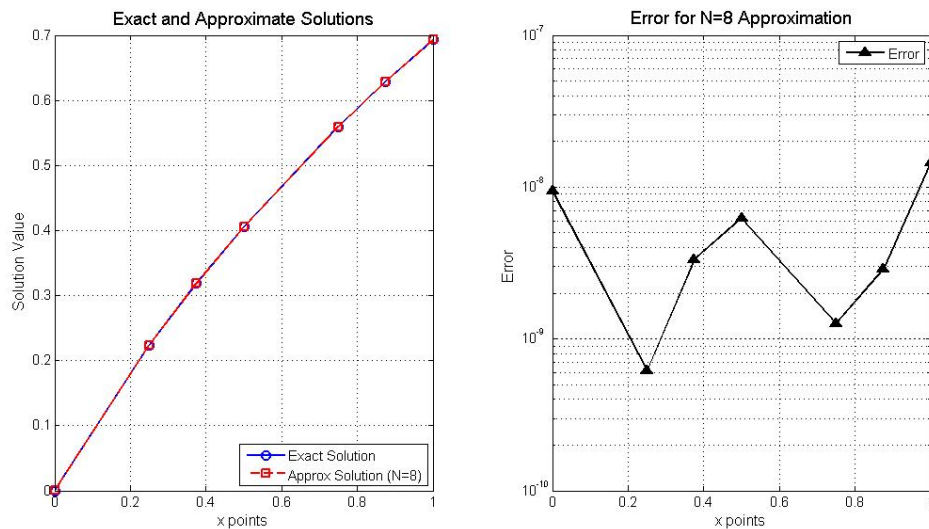
où la fonction $f(x)$ est choisie de manière à ce que la solution $u(x)$ soit :

$$u(x) = \ln(x+1)$$

En appliquant le polynôme rationnel de Chebyshev $N_n(x)$ pour approximer la solution $u(x)$, c'est-à-dire $u_N(x)$, pour $n = 8$:

Pts de x	Sol. exacte	Sol. approchée	Erreur $N = 8$
0.000e+00	0.000e+00	9.440e-09	9.440e-09
2.500e-01	2.231e-01	2.231e-01	6.131e-10
3.750e-01	3.184e-01	3.184e-01	3.321e-09
5.000e-01	4.054e-01	4.054e-01	6.222e-09
7.500e-01	5.596e-01	5.596e-01	1.255e-09
8.750e-01	6.286e-01	6.286e-01	2.870e-09
1.000e+00	6.931e-01	6.931e-01	1.444e-08

TABLE 4.5 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 5

FIGURE 4.5 – Comparaison entre la solution exacte, la solution approchée et l'erreur pour l'exemple 5 ($N = 8$).

Les résultats numériques confirment la stabilité et la précision de la méthode basée sur les fonctions rationnelles des polynômes de Tchebychev.

Conclusion

Dans cet chapitre, nous avons introduit une nouvelle approche numérique pour la résolution des équations intégrales de Volterra–Fredholm du second type, basée sur les fonctions rationnelles dérivées des polynômes de Tchebychev de première espèce. La méthode de collocation utilisée permet de transformer l'équation intégrale en un système linéaire de petite taille, facilement résoluble.

Les exemples numériques étudiés montrent que la solution approchée converge rapidement vers la solution exacte, avec une erreur très faible pour des degrés d'approximation

modérés. Cette approche est donc à la fois simple à mettre en œuvre, stable numériquement et très efficace.

Dans des travaux futurs, nous prévoyons d'étendre cette méthode aux équations intégrales non linéaires et aux systèmes d'équations intégrales de type Volterra–Fredholm.

Conclusion Générale

Cette thèse a développé un cadre théorique et numérique fondé sur les **fonctions rationnelles orthogonales (FRO)** pour l'approximation et la résolution d'équations intégrales. En prolongeant la théorie des polynômes orthogonaux, les FRO se sont révélées plus flexibles et mieux adaptées aux contextes présentant des singularités, des poids non standards ou des domaines irréguliers.

Sur le plan **théorique**, la recherche a établi une construction rigoureuse des FRO dans différents espaces fonctionnels, notamment ceux de Hilbert et de Lebesgue pondérés. Plusieurs approches complémentaires ont été étudiées — procédés de Gram–Schmidt rationalisés, polynômes modifiés et transformations de Möbius — permettant de caractériser leurs propriétés essentielles : récurrence, convergence et comportement asymptotique.

Sur le plan **numérique**, des formules de quadrature rationnelle ont été élaborées et intégrées dans la résolution d'équations de Fredholm et de Volterra. L'approche, basée sur la projection sur les FRO et sur des schémas de collocation adaptés, a montré une stabilité et une précision élevées. Les expériences numériques confirment la fiabilité et la rapidité de convergence de la méthode face aux approches classiques.

Ces travaux ouvrent plusieurs perspectives de recherche. Un prolongement naturel consisterait à développer la théorie des FRO dans le **plan complexe**, en élargissant les résultats obtenus à des mesures non réelles et à des pôles situés hors de l'axe réel. Cette extension permettrait d'approfondir les liens entre **quadrature rationnelle orthogonale** et **équations intégrales complexes**, offrant ainsi de nouvelles possibilités pour la résolution de problèmes à noyaux analytiques ou oscillants. Dans la continuité, nous prévoyons également d'appliquer cette approche à des **équations intégrales non linéaires** et à des **systèmes de type Volterra–Fredholm**, afin d'en élargir le champ d'application numérique.

En conclusion, les fonctions rationnelles orthogonales se révèlent être un outil prometteur à l'interface de l'analyse fonctionnelle et du calcul numérique. Leur potentiel théorique et leur efficacité pratique ouvrent la voie à de nouvelles stratégies de modélisation et de résolution pour des problèmes complexes.

Bibliographie

- [AH08] Kendall E. Atkinson and Weimin Han. *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer, 2008.
- [Atk97] Kendall E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.
- [BB98] Mario Bertero and Patrizia Boccacci. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1998.
- [BD79] A. Bultheel and P. Dewilde. Orthogonal functions related to the nevanlinna-pick problem. In *Proc. 4th Int. Conf. on Math. Theory of Networks and Systems at Delft*, pages 207–212. Western Periodicals, 1979.
- [BF15] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.
- [BGM96] George A. Baker and Peter Graves-Morris. *Padé Approximants*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [BGVHN92] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad. The computation of orthogonal rational functions and their interpolating properties. *Numer. Algorithms*, 2(1) :85–114, 1992.
- [BGVHN95] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad. Convergence of orthogonal rational functions. *Computational Methods and Function Theory (CMFT'94)*, pages 111–123, 1995.
- [BGVHN97] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad. Orthogonal rational functions and nested disks. *J. Approx. Theory*, 89 :344–371, 1997.
- [BGVHN99] Adhemar Bultheel, Pablo González-Vera, Erik Hendriksen, and Olav Njåstad. *Orthogonal Rational Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [BGVHN01] Adhemar Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and Olav Njåstad. Quadrature and orthogonal rational functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127 :67–91, 01 2001.

- [Bha04] Manjul Bhargava. Higher composition laws i : A new view on gauss composition, and quadratic generalizations. *Annals of Mathematics*, 159(1) :217–250, 2004.
- [Bla15] Wilhelm Blaschke. Eine erweiterung des satzes von *Vitali* über folgen analytischer funktionen. *Leipziger Berichte*, Band 67, Seiten 194–200, 1915. JFM 45.0638.01, zbMATH 02616881.
- [Boy01] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, 2001.
- [Br0] Haim Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2010.
- [BVDGV05a] A. Bultheel, J. Van Deun, and P. González-Vera. An extended relation between orthogonal rational functions on the unit circle and the interval $[1,1]$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 182 :29–52, 2005.
- [BVDGV05b] A. Bultheel, J. Van Deun, and P. González-Vera. A relation between orthogonal rational functions on the unit circle and the interval $[-1,1]$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 178(1-2) :105–120, 2005.
- [BW16] Richard Beals and Roderick Wong. *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [Chi11] Theodore S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, New York, 2011.
- [CL01] E. W. Cheney and W. A. Light. *A Course in Approximation Theory*. Brooks/Cole, 2001.
- [Con90] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, New York, 1990.
- [Dav75] Philip J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, dover reprint edition edition, 1975.
- [DB03] Joris Van Deun and Adhemar Bultheel. Orthogonal rational functions and quadrature on an interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162(2) :371–392, 2003.
- [DB04] J. Van Deun and A. Bultheel. The computation of orthogonal rational functions on an interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164–165 :723–735, 2004. Special Issue on Orthogonal Polynomials.
- [DB09a] Karl Deckers and Adhemar Bultheel. Orthogonal rational functions with complex poles : The favard theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 356(2) :764–768, 2009.

- [DB09b] Karl Deckers and Adhemar Bultheel. Recurrence and asymptotics for orthonormal rational functions on an interval. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 29(1) :1–23, 2009.
- [DBGV06] J. Van Deun, A. Bultheel, and P. González-Vera. On computing rational gauss-chebyshev quadrature formulas. *Mathematics of Computation*, 75(253) :307–326, 2006.
- [DBPP12] Katrien Deckers, Adhemar Bultheel, and Francisco Perdomo-Pío. Rational gauss-chebyshev quadrature formulas for complex poles outside $[-1, 1]$. *Mathematics of Computation*, 81(278) :1011–1039, 2012.
- [Det98] Holger Dette. Propriétés des zéros des polynômes orthogonaux. *Revue de Mathématiques Appliquées*, 18 :45–60, 1998.
- [DG12] H. L. Dastjerdi and F. M. Ghaini. Numerical solution of volterra-fredholm integral equations by moving least square method and chebyshev polynomials. *Applied Mathematical Modelling*, 36 :3283–3288, 2012.
- [Djr62] M.M. Djrbashian. Expansions in systems of rational functions on a circle with a given set of poles. *Soviet Math. Dokl.*, 3 :315–319, 1962.
- [Djr66] M.M. Djrbashian. Orthogonal systems of rational functions on the circle. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1 :3–24, 1966.
- [Djr67] M.M. Djrbashian. Expansions by systems of rational functions with fixed poles. *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 2 :3–51, 1967.
- [DL93] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer, 1993.
- [DM85] L. M. Delves and J. L. Mohamed. *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge University Press, 1985.
- [DR07] Philip J. Davis and Philip Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Courier Corporation, Mineola, NY, 2007.
- [Dun13] Tyrone E. Duncan. Linear-exponential-quadratic gaussian control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(11) :2910–2911, 2013.
- [Dur70] Peter L. Duren. *Theory of H^p Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1970.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, 1999.
- [For94] André Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses internationales Polytechnique, Montréal, 1994.

- [Fre71] Géza Freud. *Orthogonal Polynomials*. Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [Gar07] John B. Garnett. *Bounded Analytic Functions*. Springer, New York, 2007.
- [Gau93] Walter Gautschi. Gauss-type quadrature rules for rational functions. In H. Brass and G. Hämmerlin, editors, *Numerical Integration IV*, volume 112 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 105–120. Birkhäuser, Basel, 1993.
- [Gau99] Walter Gautschi. Algorithm 793 : Gqrat – gauss quadrature for rational functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25(2) :213–239, June 1999.
- [Gau01] Walter Gautschi. The use of rational functions in numerical quadrature. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 133 :111–126, 2001.
- [Gau02] Walter Gautschi. Gauss-type quadrature rules for rational functions. *Numerical Algorithms*, 31(1-4) :1–21, 2002.
- [Gau04] Walter Gautschi. *Orthogonal Polynomials : Computation and Approximation*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [Gau11] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam*. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [GB03] P. Van Gucht and A. Bultheel. Using orthogonal rational functions for system identification : Numerical aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4) :705–709, 2003.
- [Ger61] Ya. L. Geronimus. *Orthogonal Polynomials*. Consultants Bureau, 1961.
- [GW69] Gene H. Golub and John H. Welsch. Calculation of gauss quadrature rules. *Mathematics of Computation*, 23(106) :221–230, 1969.
- [GW90] Claude Gasquet and Patrick Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Masson, Paris, 1990.
- [Hal82] Paul R. Halmos. *A Hilbert Space Problem Book*. Springer, New York, 1982.
- [Hen77] Peter Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2*. Wiley, 1977.
- [Ism05] Mourad E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

- [Jed05] Franck Jedrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, Berlin, 2005.
- [KA82] L. Kantorovich and G. Akilov. *Functional Analysis*. Pergamon Press, University of Michigan, 1982.
- [KMN89] David Kahaner, C. Moler, and Stephen Nash. *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, 1989.
- [Kre89] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.
- [Kre99] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer, New York, 2 edition, 1999.
- [Lak22] Aissa Lakhal. *Étude du point fixe de Kannan sur les équations fonctionnelles*. Thèse de doctorat en sciences, Université [à compléter], Algérie, 2022.
- [Lau01] Dirk P. Laurie. Computation of gauss-type quadrature formulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127(1) :201–217, 2001.
- [Leg09] Guillaume Legendre. *Méthodes Numériques : Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique*. Université Paris-Dauphine, Paris, 2009.
- [Lio72] Jacques-Louis Lions. Espaces de hardy et applications en analyse fonctionnelle. *Annales de l'Institut Fourier*, 22(3) :1–42, 1972.
- [LNN22] A. Lakhal, M. Nadir, and M. N. Nadir. Application of chebyshev polynomials to volterra-fredholm integral. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 19(2) :1–8, 2022.
- [LP96] X. Li and K. Pan. Strong and weak convergence of rational functions orthogonal on the unit circle. *J. London Math. Soc.*, 53 :289–301, 1996.
- [Mal26] J. Malmquist. Sur les polynômes orthogonaux de laguerre. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 17(9) :1–11, 1926.
- [Mal20] H. M. Malaikah. The adomian decomposition method for solving volterra-fredholm integral equation using maple. *Applied Mathematics*, 11 :779–787, 2020.
- [MH02] John C. Mason and David C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.
- [MH18] Michèle Marie-Hélène. *Méthodes numériques : Algorithmes numériques, fondements théoriques et analyse pratique*. Editions Ellipses, Paris, 2018.
- [MNY07] K. Maleknejad, K. Nouri, and M. Youse. Discussion on convergence of legendre polynomial for numerical solution of integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 193 :335–339, 2007.

- [Nad04] Mostefa Nadir. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Université de M'sila, M'sila, Algérie, 2004.
- [Nad14a] M. Nadir. Solving fredholm integral equations using chebyshev polynomial approximations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 260 :45–54, 2014.
- [Nad14b] M. Nadir. Solving fredholm integral equations with application of the four chebyshev polynomials. *Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics*, 4 :15–20, 2014.
- [Nad17] M. Nadir. Lucas polynomials for solving linear integral equations. *Journal of Theoretical and Applied Computer Science*, 11(1) :13–19, 2017.
- [Nad18] M. Nadir. Solving linear integral equations with fibonacci polynomials. *Malaya Journal of Matematik*, 6(4) :711–715, 2018.
- [Nad22] M. N. Nadir. Sur la solution numérique des Équations intégrales de volterra–fredholm en utilisant les polynômes de chebyshev. Mémoire de master, Université de M'sila, Algérie, 2022.
- [ND17] M. Nadir and M. Dilmi. Euler series solutions for linear integral equations. *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 14(2) :1–7, 2017.
- [Pan95] K. Pan. Extensions of szegő's theory of rational functions orthogonal on the unit circle. *J. Comput. Appl. Math.*, 62 :321–331, 1995.
- [Pow81] M. J. D. Powell. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, UK; New York, NY, 1981.
- [PS90] D. Porter and D.S.G. Stirling. *Integral Equations : A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1990.
- [Riv90] Theodore J. Rivlin. *Chebyshev Polynomials : From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*. Wiley, 1990.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [SCH15] Ye-Peng Sun, Xiang-Ke Chang, and Yi He. On three-term recurrence and christoffel–darboux identity for orthogonal rational functions on the real line. *Applied Mathematics and Computation*, 253 :207–218, 2015.
- [Sim05] Barry Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle : Classical Theory*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

- [SO17] Richard M. Slevinsky and Sheehan Olver. A fast and well-conditioned spectral method for singular integral equations. *Journal of Computational Physics*, 332 :290–315, 2017.
- [Str71] A. H. Stroud. *Approximate Integration*. Prentice-Hall, 1971.
- [Str06] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA, 2006.
- [STW11] Jie Shen, Tao Tang, and Li-Lian Wang. *Spectral Methods : Algorithms, Analysis and Applications*. Springer, Berlin, 2011.
- [Sze75] Gábor Szegő. *Orthogonal Polynomials*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
- [Tak25] Shigeki Takenaka. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation. *Japanese Journal of Mathematics*, 2 :129–145, 1925.
- [Tim63] A.F. Timan. *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*. Pergamon Press, 1963.
- [Tre08] Lloyd N. Trefethen. Is gauss quadrature better than clenshaw–curtis? *SIAM Review*, 50(1) :67–87, 2008.
- [Tre13] Lloyd N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, Philadelphia, 2013.
- [VA18] Walter Van Assche. *Orthogonal Polynomials and Rational Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2018.
- [Val00] Ludovic Valet. Généralités sur les polynômes orthogonaux. *Cours DEA*, page 49, 2000.
- [VAV93] Walter Van Assche and Ingrid Vanherwegen. Quadrature formulas based on rational interpolation. *Mathematics of computation*, 61(204) :765–783, 1993.
- [VDB03] J. Van Deun and A. Bultheel. The computation of orthogonal rational functions on an interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164–165 :723–735, 2003.
- [VDB04] J. Van Deun and A. Bultheel. Computing orthogonal rational functions on a halfline. *Numerical Algorithms*, 36 :243–267, 2004.
- [VDB05] J. Van Deun and A. Bultheel. Computing orthogonal rational functions on a halfline. 2005. Document fourni.
- [You88] Robert M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press, 1988.