UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

BENSADOK Hibat Errhmane

Sujet

Espaces de Herz-type Lizorkin-Triebel

Devant le jury :

Mr. DJERIOU Aissa	M.C.B. Univ. de M'sila	Président
Mr. HERAIZ Rabah	M.C.B. Univ. de M'sila	Encadreur
Mr. TALLAB Abdelhamid	M.C.B. Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

REMERCIEMENT

*Tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant de ma savoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire Mr : **HERAIZ Rabah**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail,
*Mr : **DJERIOU Aissa** en étant président du jury*
*et Mr : **TALLAB Abd elhamid**. D'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents : **BLHDJAMI Hadda** ma mère qui a regardé et fatigué et sacrifié le précieux et le bine pour moi. **BENSADOK Djamel** mon père qui n'ont pas rejeté ma demande. Je remercie mon frère (Aicha, Asseme, chaima) et mon deuxiéme père **Mohamed Kamer eddin**.*

*je voudrais remercier mon mari, **khedidji Adel ,**pour sa motivation et son soutien, je n'oublier pas le soutient et l'encouragement de ma famille, mes frères, et mes amies pour ses présences dans les moments difficiles et grâce à qui j'ai passé d'excellents moments.*

Enfin, je remercie toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Notations

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

• La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1.....\partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.

• Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, alors $x \cdot \xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

• Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \ (\forall f \in A_1).$$

• p' est l'exposant conjugué de p où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

•$B(x,r)$, la boule de centre x et de rayon r; définit par

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| \leq r\}.$$

•$B_k := B(0, 2^k)$, $\quad R_k := B_k \setminus B_{k-1}$ $\quad$ et $\quad \chi_k = \chi_{R_k}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

• Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, $\operatorname{supp} f$ est le support de f, telle que

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0\}}.$$

• E' est l'espace dual de E.

• Soit $0 < p < \infty$, L^p l'espace des fonctions mesurables f, telle que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

• Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < p \leq \infty$, on définit $L^p_{loc}(\Omega)$ par

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \text{ muserabe} : \ f \in L^p(K) \ \text{ pour tout } K \subset \Omega, \, K \text{ compact}\}.$$

• Nous utilisons c pour différentes constantes positives, c'est-à-dire une constante dont la valeur peut varier d'une apparence à l'autre.

• On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Son inverse est noté$\mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont étendus à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la manière habituelle.

• ℓ^q : est l'espace des suites $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, telle que

$$\left\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

• Soient $0 < p \leq \infty,\ 0 < q < \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace des suites $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\left\|\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides .

• $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: l'espace des distributions tempérées.

• Soit E un ensemble, on définit

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in E \\ 0, & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}.$$

• $\lesssim$: Inférieure ou équivalente ($<$ ou $\approx$).

• $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de potentiel de Bessel définit par

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H_2^s} = \left\|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f\right\|_{L^2} < +\infty \right\}.$$

•$\mathcal{W}_p^n$ (Espace de Sobolev) est l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{\mathcal{W}_p^n} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_p < \infty \qquad (1 \leq p \leq \infty, m = 1, 2, 3...)$$

Introduction

Les espaces fonctionnels ont une longue histoire. Ils jouent un rôle important dans les mathématiques classiques et modernes. Les espaces dont les éléments sont des fonctions continues ou différentiables ou p-intégrables sont intéressants en eux-mêmes. Ce sont également des outils utiles pour l'étude des équations différentielles ordinaires et partielles. Depuis les années trente, les espaces fonctionnels ont été utilisés dans la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple les espaces de Sobolev. En les années cinquante et soixante de nombreux nouveaux espaces ont été créés, e. g. Espaces de Besov, Lizorkin-Triebel, Herz.....

Ce mémoire constitu une introduction à trois espaces fondamentaux de l'analyse fonctionnelle, d'une part l'espace de Herz, deuxième part, espace de Lizorkin-Triebel et troisième part l'espace Herz-type Lizorkin-Triebel.

L'histoire du premier espace remonte aux auteurs Beurling et Herz dans les années soixante du siècle dernier. En 1964, Beurling introduisit pour la première fois une forme fondamentale d'espaces de Herz pour étudier les algèbres de convolution qui sont maintenant appelées les algèbres de Beurling. Plus tard en 1968, Herz généralisa ces espaces pour étudier la convergence absolue des transformées de Fourier. Ces espaces de fonctions généralisés ne sont que le prototype des espaces de Herz. Depuis lors, la théorie de ces espaces a connu un développement remarquable, en partie du fait de son utilité dans des applications à d'autres domaines des mathématiques appliquées.

Le deuxième type est les espaces de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}$(et de Besov $B^s_{p,q}$) définis sur $\mathbb{R}^n$ ou bien sur les domaines où les paramètres s, p et q nombres définis par

$$s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty \text{ et } 0 < q < \infty.$$

Ces espaces ont été introduits entre 1959 et 1975. Ils couvrent de nombreux espaces de fonctionnelles en analyse classiques bien connus ayant leur propre histoire (comme les L^p).

Le troisième type est espaces mixtes (Herz-type Lizorkin-Triebel), ces espaces fonctionnelles atturés plusieur auteurs au cours des trois dernières décennies. En fait, de nombreux résultats dans les espaces classiques ont été généralisés aux ces espaces.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres.

En le premier et le deuxième chapitre, on s'intéresse principalement aux définitions, quelques propriétés fondamentaux et les notations essentielles des espaces de Herz et de Lizorkin-Triebel respectivement où nous donnons aussi quelques résultats en ces espaces.

Le troisième chapitre, on rappel quelques définitions et notations essentielles de l'espace Herz-type Lizorkin-Triebel avec quelques propriétes de base (injections, densité...).

Chapitre 1

Espaces de Herz

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et notations essentielles des espaces de Herz classiques avec quelques propriétés principales.

1.1 Définitions

Nous commençons par une définition de l'espace de Herz homogène et non homogène.
Pour simplifier l'écriture, on a la notation suivante

$$B_k := B(0, 2^k)\,, \quad R_k := B_k \setminus B_{k-1} \quad \text{et} \quad \chi_k = \chi_{R_k}\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$*

(i) On définit l'espace de Herz homogène par

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

(ii) On définit l'espace de Herz non homogène par

$$K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_{K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Avec les modifications lorsque $p = \infty$ et /ou $q = \infty$.

1.2 Quleques résultas dans l'espace de Herz

Dans cette section, nous présentons quelques résultats dans l'espace de Herz.

1.2.1 Inclusions et quelques remarques

Dans cette partie, nous présentons quelques remarques et inclusions dans l'espace de Herz classique.

Proposition 1.2.1 ([1]) *Soient* $0 < p < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $q, \theta \in]0, \infty]$. *Si* $q \geq \theta$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. L'injection précédente est une conséquence simple de l'injection

$$\ell^{\theta}\left(L^p\right) \hookrightarrow \ell^p\left(L^p\right).$$

■

Remarque 1.2.1 *Les espaces* $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*et* $K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *sont des espaces quasi-Banach et si* $\min(p,q) \geq 1$, *alors* $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*et* $K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *sont des espaces de Banach.*
La relation entre Herz homogène et non homogène est donnée par

$$K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n), \textit{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ et } 0 < q \leq \infty \textit{ et } 0 < p < \infty.$$

La proposition suivante est sa preuve dans [1], lorsque l'exposent p est constant.

Proposition 1.2.2 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p_0, p_1 < \infty$ *et* $q \in (0, \infty]$. *Si* $p_0 \leq p_1$ *et* $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha + \frac{n}{p_0} - \frac{n}{p_1}}_{p_1,q} \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p_0,q}.$$

Preuve. Soit $f \in \dot{K}^{\alpha + \frac{n}{p_0} - \frac{n}{p_1}}_{p_1,q}$

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p_0,q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|^q_{p_0}\right)^{\frac{1}{q}},$$

et par inégalité de Hölder dans $L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p_0,q}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{p_0}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{p_1}^q \|\chi_k\|_t^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ avec } \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{t} \\
&\leq c \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\| 2^{k(\alpha+n/p_0-n/p_1)} f\chi_k \right\|_{p_1}^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{\dot{K}^{\alpha+\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p_1}}_{p_1,q}}.
\end{aligned}$$

■

1.2.2 Décomposition atomique des espaces de Herz classiques

La décomposition atomique joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique, c'est un outil puissant pour traiter les théorèmes de dualité, les théorèmes d'interpolation et certaines inégalités fondamentales dans l'analyse harmonique.
La décomposition atomique est l'une des méthodes les plus importantes pour étudier la bornitude de certains opérateurs sur les espaces de Herz.
Tout d'abord, nous présentons la notation de base de la décomposition atomique.

Définition 1.2.1 *Soient* $0 < \alpha < \infty$,$s > 0$, $p \in [1, \infty[$. *Une fonction a est dite* (α, p)*-atome central, si*
(i) supp$a \subset \overline{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}, r > 0.$
(ii) $\|a\|_p \leq |\overline{B}(0, r)|^{-\alpha/n}$,
(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x)dx = 0, \quad |\beta| \leq s.$

Pour montrer quelques résultats dans ce mémoire, Nous avons besoin le lemme de Hardy suivant.

Lemme 1.2.1 ([3]) *Soient* $0 < a < 1$ *et* $0 < q \leq \infty$. *Soit* $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *une suite des nombres réelles positifs, tels que*

$$\left\| \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q} = I < \infty.$$

Alors la suite $\left\{\delta_k : \delta_k = \sum_{j\leq k} a^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *et* $\left\{\eta_k : \eta_k = \sum_{j\geq k} a^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *appartient à* ℓ^q, *et*

$$\left\|\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q} + \left\|\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q} \leq c\,I,$$

avec $c > 0$ *dépendant uniquement par* a *et* q.

Maintenant, nous établissons la caractérisation des espaces $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ en termes de décompositions atomiques centrales, ce qui permet d'étudier la bornitude de quelques opérateurs sur ces espaces.

Théorème 1.2.1 ([6]) *Soient* $0 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$, *et* $q \in \,]0, +\infty[$. *Alors les deux assertions suivante sont équivalentes*

(i)- $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

(ii)- f *peut représenter par*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \tag{1.2.1}$$

où les séries sont convergentes au sens de distributions, $\lambda_k \geq 0$, *chaque* a_k *est un* (α, p)*-atome central de support Contenu dans* B_k *et*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, les normes $\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ *et* $\inf(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ *sont équivalentes où le minimum pris dans toutes les décompositions de* f *comme dans (1.2.1).*

Preuve. Notre preuve utilise partiellement certaines techniques de décomposition déjà utilisées dans [10]. Nous prouvons premièrement (i) implique (ii). Pour toute $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x)\,\chi_k(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha}\,\|f\chi_k\|_p \,\frac{f(x)\,\chi_k(x)}{2^{k\alpha}\,\|f\chi_k\|_p} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x), \end{aligned}$$

où $\lambda_k = \left\|2^{k\alpha} f\chi_k\right\|_p$et $a_k(x) = \frac{f(x)\chi_k(x)}{2^{k\alpha}\|f\chi_k\|_p}$. Il est clair que supp$a_k \subset B_k$ et

$$\|a_k\|_p = 2^{-k\alpha}.$$

Ainsi, chacun a_k est un (α, p)-atome central avec le support inclu dans B_k et

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\|2^{k\alpha} f\chi_k\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Nous montrons que (ii) implique (i). Soit $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_k(x)$ une décomposition de f qui satisfait l'hypothèse (ii) du théoreme 1.2.1. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, par l'inégalité de Minkowski

$$\left\|f\chi_j\right\|_p \leq \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda_k| \, \|a_k\|_p . \tag{1.2.2}$$

En utilisant la formule (1.2.2), on trouve

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| \, \|a_j\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| \, |\overline{B}(0,2^k)|^{-\alpha/n}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k\alpha q} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} |\lambda_j| \, 2^{-\alpha j/n}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=k}^{-1} |\lambda_j| \, 2^{-(j-k)\alpha}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Et comme $0 < \alpha < \infty$, donc par le lemme de Hardy avec $0 < a = 2^{-\alpha} < 1$, nous avons

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=k}^{-1} |\lambda_j| \, 2^{-(j-k)\alpha}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Conclusion

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

La preuve est déterminée. ■

1.2.3 Opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund

Dans cette section, on va étudier la continuité des opérateurs intégraux du type Caldéron-Zygmund sur les espaces de Herz.

Définitions

Premièrement, on donne la définition d'un opérateur intégraux du type Caldéron-Zygmund, puis on donne quelques résultats dans espaces de Herz classiques.

Définition 1.2.2 *Un opérateur est dit opérateur de Caldéron-Zygmund de noyau K s'il est borné dans L^2 et*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund de noyan $K(x) \in \mathcal{C}^\infty$ loin de l'origine, satisfait

1- $|K(x)| \leq c\,|x|^{-n}$, si $x \neq 0$,

2- $\left|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\left(K(x-y) - K(x)\right)\right| \leq c_\beta \frac{|y|}{|x|^{n+|\beta|+1}}$ si $|x| \geq 2\,|y|$, où $\beta = (\beta_1, \beta_2 ..., \beta_n)$ est un multi-indice.

Définition 1.2.3 *Un opérateur Ţ est dit sous-linéaire s'il satisfait la condition*

$$|\text{Ţ}f(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\,dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f \tag{1.2.3}$$

pour toute fonction intégrable f de support compact.

Le théorème suivant présente la continuité d'un opérateur sous-linéaire Ţ sur les espaces de Herz classiques.

Remarque 1.2.2 *La condition (1.2.3) est satisfaite par plusieurs opérateurs classiques dans l'analyse Harmonique, comme l'opérateur de Calderón-Zygmund, l'opérateur maximal de Carleson et l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood. Alors on conclut que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont des opérateurs bornés sur les espaces de Herz.*

Continuité des opérateurs de type Caldéron-Zygmund sur l'espaces de Herz classiques

On présente dans cette section la continuité des opérateurs Ţ satisfait la condition (1.2.3) (en particulier les opérateurs de type Caldéron-Zygmund) sur les espaces de Herz non homogène.

Théorème 1.2.2 ([1]) *Soient* $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty, 0 < \alpha < \infty$

$$-\frac{n}{p} < \alpha < n(1 - \frac{1}{p}). \tag{1.2.4}$$

Chaque opérateur sous-linéaire Ţ satisfait la condition (1.2.3). Si Ţ est un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$*, alorsŢ est aussi borné sur* $K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*.*

Preuve. Notre preuve utilise partiellement certaines techniques de décomposition déjà utilisées dans [1].

lorsque p est un exposent fixé. Nous divisons l'operateur en

$$|Ţf(x)| \leq |Ţ\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)| + |Ţ\left(f\chi_{B_{k-2}\backslash B_{-2}}\right)(x)| + |Ţ\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)(x)| + |Ţ\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)(x)|,$$

avec

$$\tilde{R}_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 2^{k-2} \leq |x| < 2^{k+2}\right\}, k \in \mathbb{N}$$

• **Estimation de** $Ţ(f\chi_{B_{-2}})$.

Pour $x \in R_k$ et $y \in B_{-2}$, nous avons $|x - y| \geq |x| - |y| > 2^{k-2}$, alors

$$\left|Ţ\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)\right| \lesssim 2^{-kn} \int_{B_{-2}} |f(y)|\, dy,$$

Par l'inégalité de Hölder, la dernière estimation est majorée par

$$\begin{aligned} \left|Ţ\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)\right| &\lesssim 2^{-kn} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_p \left\|\chi_{B_{-2}}\right\|_{p'} . \\ &\lesssim 2^{-kn} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_p, \qquad x \in R_k \end{aligned}$$

avec une constante indépendante de k et x, en prenant la norme L^p, on obtient

$$2^{k\alpha} \left\|\chi_k Ţ\left(f\chi_{B_{-2}}\right)\right\|_p \lesssim 2^{k\left(\alpha - n + \frac{n}{p}\right)} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_p,$$

où nous avons utilise

$$\left\|\chi_k \text{Ţ}\left(f\chi_{B_{-2}}\right)\right\|_p \approx |R_k|^{\frac{1}{p}} \approx 2^{\frac{kn}{p}},$$

en prenant maintenant la quasi-norme ℓ^q et en observant que

$$\left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_p \leq \left\|f\chi_{B_0}\right\|_p,$$

on obtient

$$\left(\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha q}\left\|\chi_k \text{Ţ}\left(f\chi_{B_{-2}}\right)\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim c_0\left\|f\chi_{B_0}\right\|_p \leq c_0\left\|f\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}},$$

avec

$$c_0^q = \sum_{k\geq 1} 2^{kq\left(\alpha - n + \frac{n}{p}\right)} < \infty.$$

En tenant compte de l'hypothèse (1.2.4).

- **Estimation de Ţ**$\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in R_k$, alors

$$\begin{aligned}\left|\text{Ţ}\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right| &\lesssim \int_{B_{k-2}\setminus B_{-2}} |x-y|^{-n}\,|f(y)|\,dy \\ &= \sum_{-1\leq j\leq k-2}\int_{R_j} |x-y|^{-n}\,|f(y)|\,dy.\end{aligned}$$

Pour estimer la dernière intégrale nous notons que $|x-y| \geq |x| - |y| > \frac{2^k}{4}$, si $x \in R_k, y \in R_j$, d'où nous arrivons à l'inégalité

$$2^{k\alpha}\left|\text{Ţ}\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)(x)\right| \lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha - kn} 2^{j\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\chi_j(y)\,dy, \quad x \in R_k.$$

L'inégalité de Hölder implique que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\chi_j(y)\,dy \leq 2\left\|f\chi_j\right\|_p \left\|\chi_j\right\|_{p'}.$$

Prendre la norme L^p (par rapport à x) dans l'estimation précédente, on a

$$2^{k\alpha}\left\|\chi_k \text{Ţ}\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right\|_p \lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha - kn} 2^{j\alpha}\left\|f\chi_j\right\|_p \left\|\chi_j\right\|_{p'} \left\|\chi_k\right\|_p.$$

On a

$$\left\|\chi_j\right\|_{p'} \approx |R_j|^{\frac{1}{p'}} \qquad \text{et} \quad \left\|\chi_k\right\|_p = |R_j|^{\frac{1}{p}}.$$

Donc pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$2^{k\alpha} \left\| \chi_k \mathrm{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_p \lesssim \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \left\| f \chi_j \right\|_p .$$

Notons que $\delta = \alpha - n + \frac{n}{p}$, et en prenant maintenant le quasi-norme ℓ^q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \chi_k \mathrm{T} \left(f \chi_{B_{k-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim &\left\{ \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \left\| f \chi_j \right\|_p \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim &\sum_{k \geq 1} \left(2^{(k+1)\delta} 2^{-\alpha} \left\| f \chi_{-1} \right\|_p + 2^{k\delta} \left\| f \chi_0 \right\|_p + \sum_{-1 \leq j \leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \left\| f \chi_j \right\|_p \right)^q .
\end{aligned}$$

Puisque α est fixé et $\chi_{-1}, \chi_0 \leq \chi_{B_0}$, la côté droite de la dernière inégalité est bornée par

$$c_0 \left\| f \chi_{B_0} \right\|_p + \left\{ \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{1 \leq j \leq k} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha} \left\| f \chi_j \right\|_p \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} .$$

Avec $c_0^q = \sum_{k \geq 1} 2^{k\delta q} < +\infty$, par hypothèse (1.2.4), le lemme de Hardy est donne

$$\begin{aligned}
\left\{ \sum_{k \geq 1} 2^{k\alpha q} \left\| \chi_k \mathrm{T} \left(f \chi_{B_{K-2} \setminus B_{-2}} \right) \right\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} &\lesssim \left\| f \chi_{B_0} \right\|_p + \left\{ \sum_{j \geq 1} 2^{j\alpha q} \left\| f \chi_j \right\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\| f \right\|_{K_{p,q}^{\alpha}} .
\end{aligned}$$

• **Estimation de $\mathrm{T}(f \chi_{\tilde{R}_k})$** .

Puisque T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\chi_{\tilde{R}_k} = \sum_{j=-1}^{2} \chi_{k+j}$,

$$\left\| \mathrm{T} \left(f \chi_{\tilde{R}_k} \right) \chi_k \right\|_p \lesssim \left\| \mathrm{T} \left(f \chi_{\tilde{R}_k} \right) \chi_k \right\|_p \lesssim \left\| f \chi_{\tilde{R}_k} \right\|_p \lesssim \sum_{j=-1}^{2} \left\| f \chi_{k+j} \right\|_p ,$$

en prenant la quasi-norme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha q}\left\|\text{Ţ}\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\chi_k\right\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim\ & \left\{\sum_{k\geq 1}\sum_{-1\leq j\leq 2} 2^{(k+j)\alpha q}\left\|f\chi_{k+j}\right\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim\ & \left\{\|f\chi_0\|_p^q+\sum_{k\geq 2} 2^{(k-1)\alpha q}\left\|f\chi_{k-1}\right\|_p^q+\sum_{0\leq j\leq 2}\sum_{i\geq 1} 2^{i\alpha q}\|f\chi_i\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim\ & \left\|f\chi_{B_0}\right\|_p+\left\{\sum_{i\geq 1} 2^{i\alpha q}\|f\chi_i\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \|f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

• **Estimation de** $\text{Ţ}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)$.

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $x\in R_k$

$$\left|\text{Ţ}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)(x)\right|\lesssim\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}|x-y|^{-n}|f(y)|\,dy=\sum_{j\geq k+3}\int_{R_j}|x-y|^{-n}|f(y)|\,dy.$$

Notons que $|x-y|>2^{j-3}$ pour $x\in R_k$ et $y\in R_j$, nous appliquons l'inégalité de Hölder pour obtenir l'estimation

$$2^{k\alpha}\left\|\chi_k\text{Ţ}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{K+2}}\right)\right\|_p\lesssim\sum_{j\geq k+3} 2^{(k-j)\left(\alpha+\frac{n}{p\infty}\right)}2^{j\alpha}\left\|f\chi_j\right\|_p.$$

Comme $\alpha+\frac{n}{p}>0$ par (1.2.4), nous appliquons le lemme de Hardy, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha q}\left\|\chi_k\text{Ţ}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)\right\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} &\lesssim \left\{\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j\geq 1} 2^{(k-j)\left(\alpha+\frac{n}{p}\right)}2^{j\alpha}\left\|f\chi_j\right\|_p\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left\{\sum_{j\geq 1} 2^{j\alpha q}\left\|f\chi_j\right\|_p^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Rappellent la définition de $\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}$, il reste de montrer que $\left\|\left(\text{Ţ}f\right)\chi_{B_0}\right\|_p\lesssim\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}$, pour compléter la preuve

$$\left|\text{Ţ}f(x)\right|\leq\left|\text{Ţ}\left(f\chi_{B_0}\right)(x)\right|+\left|\text{Ţ}\left(f\chi_1\right)(x)\right|+\left|\text{Ţ}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_1}\right)(x)\right|.$$

Par l'hypothèse $\mathfrak{T}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, on sépare les trois termes, telles que

$$\left\|\mathfrak{T}\left(f\chi_0\right)\chi_{B_0}\right\|_p \lesssim \left\|\mathfrak{T}\left(f\chi_{B_0}\right)\right\|_p \lesssim \left\|f\chi_{B_0}\right\|_p \lesssim \|f\|_{K^\alpha_{p,q}},$$

$$\left\|\mathfrak{T}\left(f\chi_1\right)\chi_{B_0}\right\|_p \lesssim \left\|\mathfrak{T}\left(f\chi_1\right)\right\|_p \lesssim 2^\alpha \left\|f\chi_1\right\|_p \lesssim \|f\|_{K^\alpha_{p,q}},$$

pour le terme reste nous notons que $|x-y| \geq 2^{k-2}, x \in B_0, y \in R_j$

$$\left|\mathfrak{T}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right| \lesssim \sum_{k\geq 2} 2^{-kn}\int_{R_k}|f(y)|\,dy,$$

appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{T}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right| &\lesssim \sum_{k\geq 2} 2^{-k\left(\alpha+\frac{n}{p_\infty}\right)}2^{k\alpha}\left\|f\chi_k\right\|_p \\ &\lesssim c_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\alpha}\left\|f\chi_j\right\|_p,\end{aligned}$$

telle que

$$c_1 = \sum_{k\geq 2} 2^{-k\left(\alpha+\frac{n}{p_\infty}\right)} < \infty,$$

comme $\alpha + \frac{n}{p} > 0$, alors

$$\begin{aligned}\left\|\mathfrak{T}\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)\chi_{B_0}\right\| &\lesssim 2^{j\alpha}\left\|f\chi_j\right\|_p\left\|\chi_{B_0}\right\|_p \\ &\lesssim \|f\|_{K^\alpha_{p,q}}.\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Chapitre 2

Espaces de Lizorkin-Triebel

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et notations essentielles des espaces de Lizorkin-Triebel classiques avec quelques propriétés principales.
Nous commencerons par rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

2.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Lettlewood-Paley d'une distribution tempérée .

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que
(i) $\mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$.
(ii) $\varphi(\xi) > 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$.
(iii) $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
On pose $\phi(\xi) = 1 - \sum\limits_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi)$, on obtient une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, portée par la boule $|\xi| < 3$.
Dans tout ce qui suite, on fixe la partition de l'unité qui résulte.

$$\phi(\xi) + \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{pour toute } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution $\Delta_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par

$$\mathcal{F}(\Delta_k f)(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)\mathcal{F}f(\xi), \quad \text{pour} \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{F}(\Delta_0 f)(\xi) = \phi(\xi)\mathcal{F}f(\xi).$$

On définit de même les opérateurs Q_j par

$$\mathcal{F}(Q_j f)(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)\mathcal{F}f(\xi) \quad \text{pour } j \geq 1.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décompositon de Littlewood-Paley de f est alors l'identité

$$f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f. \tag{2.1.1}$$

La série (2.1.1) converge au sens des distributions tempérées. (2.1.1) peut s'écrire aussi sous la forme

$$f = Q_k f + \sum_{j \geq k+1} \Delta_j f \tag{2.1.2}$$

valable pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Ici on donne un autre exemple sur la décomposition de l'unité.

Exemple 2.1.1 *Soit ψ une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que $0 \leq \psi(x) \leq 1$,et*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \textit{pour} \quad |x| \geq 3/2 \end{cases}.$$

On définit le systeme $\left\{\varphi_j(\cdot)\right\}_{j\geq 0}$ par

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \psi(x) \\ \varphi_1(x) &= \psi(\frac{x}{2}) - \psi(x) \\ \varphi_j(x) &= \varphi_1(2^{1-j}x), \end{aligned}$$

on trouve

$$\sum_{j=0}^{M}\varphi_j(x)=\psi(\frac{x}{2^M})\ \textit{pour}\ M=0,1,2....$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)\to\psi(0)=1.$$

2.2 Espaces de Lizorkin-Triebel

L'espace de Lizorkin-Triebel est une généralisation des epaces de petontiel de Bessel. on commence cette section par la définition de ces espaces.

Définition 2.2.1 *Soient $s\in\mathbb{R},p\in\,]0,\infty[$ et $q\in\,]0.\infty]$. $F^s_{p,q}$ est l'ensemble des $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}}=\begin{cases}\left\|(\sum_{j\geq 0}2^{sjq}\left|\Delta_j f\right|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p<\infty & \textit{pour}\quad q\neq\infty\\ \left\|\sup_{j\geq 0}(2^{sj}\left|\Delta_j f\right|)\right\|_p<\infty & \textit{pour}\quad q=\infty\end{cases}.$$

2.3 Quleques résultas dans l'espaces de Lizorkin-Triebel

Dans cette section, nous donnons quelques résultats sur espaces de Lizorkin-Triebel .

Remarque 2.3.1 ([7]) *Outre l'égalité triviale lorsque $p=q$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel coincide sur l'espace de Besov. Nous avons toujours la diversité. Plus exactement, il tient*

$F^{s_1}_{p_1,q_1}=F^{s_2}_{p_2,q_2}$ implique que $s_1=s_2,p_1=p_2$ et $q_1=q_2$.

2.3.1 Inclusions

Dans cette sous-section, nous rappelons quelques égalités et inclusions au sens des normes dans l'espace $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.1 *On a les propriétés suivantes :*

- $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *(l'espace de Lebesgue),*
- $F^m_{p,2}(\mathbb{R}^n) = W^m_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *(l'espace de Sobolev),*
- $F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *(l'espace de Besov),*
- $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *(l'espace de potentiel de Bessel).*

Preuve. *Voir le livre de Hans- Triebel [7].* ■

Proposition 2.3.2 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et supposons* $q_0 < q_1$*. Alors*

1-

$$F^s_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n),$$

2-

$$F^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n),$$

3- Soient $p_1 \leq p_2$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$*, alors*

$$F^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. L'injection (i) c'est une consequence simple de l-injection suivante dans ℓ^q

$$\ell^{q_0} \hookrightarrow \ell^{q_1}.$$

Pour l'injection (ii), on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| (\sum_{j\geq 0} 2^{sjq_1} |\Delta_j f|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} \right\|_p \\
&= \left\| (\sum_{j\geq 0} 2^{(s+\varepsilon-\varepsilon)jq_1} |\Delta_j f|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} \right\|_p \\
&\leq \sup_{j\geq 0} 2^{-\varepsilon j q_1} \left\| (\sum_{j\geq 0} 2^{(s+\varepsilon-\varepsilon)jq_1} |\Delta_j f|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} \right\|_p \\
&\leq \left\| \sup_{j\geq 0} (2^{(s+\varepsilon)j} |\Delta_j f|) \right\|_p \quad \text{car } \ell^{q_1} \hookrightarrow \ell^{q_1} \\
&= \|f\|_{F^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

De même pour (iii) ■

Proposition 2.3.3 *Pour* $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq \infty$ *et* $0 < p < \infty$, *alors*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

et plus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $F^s_{p,q}$ *si* $q < \infty$.

Définition 2.3.1 *On dit que l'espace de Lizorkin-Triebel* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est une Algébre s'il existe une constant* $C > 0$, *telle que*

$$\|f.g\|_{F^s_{p,q}} \leq C\|f\|_{F^s_{p,q}}\|g\|_{F^s_{p,q}},$$

pour toutes f *et* g *appartiennent à* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.4 *Pour* $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$, *on a*

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

telle que
(1) $F^s_{p,q}$ *est algèbre,*
(2) $F^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty$,
(3) $s > \frac{n}{p}$ *ou* $s = \frac{n}{p}$ *et* $0 < p \leq 1$.

2.3.2 Interpolation (complèxe)

Un espace d'interpolation ou espace interpolé est un espace qui se trouve entre deux autres espaces. qui sert comme un outil pour étudier certaine proprietes des opérateurs. dans cette section on présente quelques résultats connus sur l'interpolation des espaces de Lizorkin-triebel.

Définition 2.3.2 *Soient* A_0, A_1 *deux espace de Banach* $0 < \theta < 1$.

On dit que $a \in A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_\theta$ *si et seulement s'il existe une fonction* $f = f(z)$, *où* $z = x + iy$, *telle que*

1- $f(z)$ *est analytique sur la bande* $0 < x < 1$ *et à valeur dans* $A_0 + A_1$, *continue et bornée sur la bonde* $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

2- $f(iy)$ *est continue et bornée sur* A_0.

3- $f(1+iy)$ est continue et bornée sur A_1.

4- f tend vers 0 si $|y| \to \infty$.

5- $a = f(\theta)$.

On muni $A_{[\theta]}$ par la norme

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max\left(\sup \|f(iy)\|_{A_0}, \sup \|f(1+iy)\|_{A_1}\right).$$

Remarque 2.3.2 *$A_{[\theta]}$ est dit un espace d'interpolation de l'espace de Banach.*

Théorème 2.3.1 *Soit $-\infty < s_0 < s_1 < +\infty, 0 < q_0, q_1, q < \infty$, et $0 < \theta < 1$.Si $0 < p_0, p_1 < \infty$ et si $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Alors*

$$\left(F^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_\theta = F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Chapitre 3

Espaces de Herz-type Lizorkin-Triebel

Dans ce chapitre, nous présentons les espaces Herz type Lizorkin-Triebel où nous donnons certaines propriétés de base dans ces espaces. En particulier, nous présentons quelques résultats de D. Drihem dans [2].

3.1 Définitions des espaces de Herz-type Lizorkin-Triebel

Nous allons commencer à donner la définition des espaces de Herz-type Lizorkin-Triebel et nous présentons quelques propriétés sur ces espaces.

Définition 3.1.1 *Soient $\alpha, s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q, \beta \leq \infty$. L'espace de Herz-type Lizorkin-Triebel $\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.*

(i) On définit l'espace de Herz homogène type Lizorkin-Triebel par

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} \left| \Delta_j f \right|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

(ii) On définit l'espace de Herz non homogène type Lizorkin-Triebel par

$$\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} \left| \Delta_j f \right|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\|_{K_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Avec la modification évidente si $\beta = \infty$.

Remarque 3.1.1 *(i) Pour* $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq \infty$ *et* $0 < \beta \leq \infty$, *on a*

$$K_{q.q}^{0} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n}) = \dot{K}_{q,q}^{0} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n}) = F_{q,\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n}).$$

(ii) Les espaces de Herz type Lizorkin-Triebel $\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}$ *sont des espace quasi-Banach et sont Banach si* $p, q, \beta \geq 1$.

Le résultat suivant présente que les espaces de Herz-type Lizorkin-Triebel sont indépendent du choix de la décomposition de l'unité, c-à-dire si $\{\varphi_j\}_{j\geq 0}$, $\{\psi_j\}_{j\geq 0}$ deux décompositions de l'unité avec $\alpha + \frac{n}{q} > 0$, alors

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\varphi} \approx \|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi}.$$

Théorème 3.1.1 ([13]) *Soient* $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *et* $\psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *deux décompositions de l'unités. Si* $s \in \mathbb{R}, 0 < \beta \leq \infty, 0 < q < \infty, 0 < p < \infty$ *et* $\alpha + \frac{n}{q} > 0$ *alors*
(i) $\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\varphi}$ *et* $\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi}$ *sont des quasi normes équivalentes sur* $K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})$,
(ii) $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\varphi}$ *et* $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi}$ *sont des quasi normes équivalentes sur* $\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})$.

Pour la démonstration du théorème nous avons besoin le lemme suivant

Lemme 3.1.1 ([13]) *Soient* $0 < \beta \leq \infty, 0 < p, q < \infty$ *et* $\Omega = \{\Omega_j\}_{j\geq 0}$ *une suite de sous-ensembles compacts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f_j \in L^p(\Omega_j)$ *pour* $j \in \mathbb{N}_0$. *soit* d_j *le diametre de* Ω_j. *Si* $\alpha + \frac{n}{q} > 0$ *et* $\mu > \frac{n}{2} + \max(\alpha + n/q, \frac{n}{\min(\beta,q)})$, *alors il existe une constante c, telle que*

$$\left\|\left(\mathcal{F}^{-1} M_j * f_j\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\ell^{\beta})} \leq c\sup_{j} \left\|M_j(d_j \cdot)_{v\geq 0}\right\|_{H^{\frac{\mu}{2}}} \left\|(f_j)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\ell^{\beta})}.$$

Pour tout $(M_j)_{j\geq 0} \in H^{\frac{\mu}{2}}$ *et tout* $(f_j)_{j\geq 0} \in \dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\ell^{\beta})$.

Preuve du théorème. *3.1.1 Concernant (i). Il est facile de voir que* $\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\varphi}$ *et* $\|f\|_{K_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi}$ *sont deux quasi-normes.*
Pour (ii). Il est suffisant de montrer que pour tout $f \in \dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})$, *telle que* $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi}$ *est finie, on a*

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\varphi} \leq c\,\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha} F_{\beta}^{s}(\mathbb{R}^{n})}^{\psi},$$

avec $c > 0$. *Par le changement de roles de* ψ *et* φ *on obteint le résultat. Si* $\varphi_{-1} = 0$, *on a*

$$\varphi_v = \varphi_v \sum_{k=-1}^{k=1} \psi_{v+k},$$

pour tout $v \in \mathbb{N}_0$*. Par la proprietes de la transformée de Fourier*

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f = \sum_{k=-1}^{k=1} \mathcal{F}^{-1}\varphi_v * \mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f.$$

Fixons $0 < r < \min(q, \beta)$, *tel que*

$$\frac{-n}{q} < \alpha < n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right),$$

et on choisit aussi

$$\mu > \frac{n}{2} + \frac{n}{r}.$$

Si on remplace f_j *et* M_j *dans le lemme précédent, on obtient*

$$\left\|\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * \mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \leq c\left\|\varphi_v\left(2^v\cdot\right)_{v\geq 0}\right\|_{H^{\frac{\mu}{2}}}\left\|\mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})}.$$

Et comme $(\varphi_v)_{v\geq 0}$ *une décomposition de l'unité, alors*

$$\left\|\varphi_v\left(2^v\cdot\right)_{v\geq 0}\right\|_{H^{\frac{\mu}{2}}} < +\infty,$$

il existe une constante positive c sachant que pour tout $r = -1, 0, +1,$ *on a*

$$\left\|\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * \mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \leq c\left\|\mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})}.$$

On utilise le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned}
\|f\|^{\varphi}_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}F^{s}_{\beta}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta}\left|\Delta_j f\right|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \\
&= \left\|\left(2^{vs}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \\
&= \left\|\left(2^{vs}\sum_{k=-1}^{k=1}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * \mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \\
&\leq c\left\|\left(2^{vs}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * \mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \\
&\leq c\left\|2^{vs}\mathcal{F}^{-1}\psi_{v+k} * f_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta})} \\
&\leq c\,\|f\|^{\psi}_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}F^{s}_{\beta}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

■

3.2 Inclusions

Le théorème suivant donne quelques résultats conçernant les injections dans les espaces de Herz type Lizorkin-Triebel .

Théorème 3.2.1 ([2]) *Soient* $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$ *et* $\alpha + \frac{n}{q} > 0$

(i) *Si* $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \infty$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s}_{\beta_1} (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s}_{\beta_2} (\mathbb{R}^n) .$$

(ii) *Si* $0 < \beta_1, \beta_2 \leq \infty$ *et* $\varepsilon > 0$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s+\varepsilon}_{\beta_1} (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s}_{\beta_2} (\mathbb{R}^n) .$$

(iii) *Si* $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p_1,q} F^{s}_{\beta} (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p_2,q} F^{s}_{\beta} (\mathbb{R}^n) .$$

(iv) *Si* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, *alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2} F^{s}_{\beta} (\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{r}_{p,q_1} F^{s}_{\beta} (\mathbb{R}^n) .$$

où $r = \alpha - n(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2})$.

Preuve. (i)-

L'injection (i) c'est une conséquence de l'injection

$$\ell^{\beta_1} \hookrightarrow \ell^{\beta_2}.$$

(ii)- Soit $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s+\varepsilon}_{\beta_1} (\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s}_{\beta_2}} &= \left\| \left(2^{vs} \mathcal{F}^{-1} \varphi_v * f\right)_{v \geq 0} \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\ell^{\beta_2})} \\
&= \left\| \left\| \left(2^{vs} \mathcal{F}^{-1} \varphi_v * f\right)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta_2}} \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&= \left\| \left\| \left(2^{-v\varepsilon} 2^{v(s+\varepsilon)} \mathcal{F}^{-1} \varphi_v * f\right)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta_2}} \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq c \sup_{v \geq 0} \left\| \left(2^{v(s+\varepsilon)} \mathcal{F}^{-1} \varphi_v * f\right) \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq c \left\| \left(2^{v(s+\varepsilon)} \mathcal{F}^{-1} \varphi_v * f\right)_{v \geq 0} \right\|_{\ell^{\beta_2}(\dot{K}^{\alpha}_{p,q})} .
\end{aligned}$$

(iii)- La troisième injection est une consequence de l'injection

$$\dot{K}^{\alpha}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n).$$

(iv)- Soit $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$. Si en appliquant l'inégalité de Bernstein dans l'espace de Herz, on trouve

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq c2^{v(\frac{n}{q_1}-\frac{n}{q_2})}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{K}^{r}_{p,q_1}F^s_\beta} &= \left\|\left(2^{vr}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_1}(\ell^\beta)} \\
&= \left\|\left(2^{v(\alpha-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}))}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}(\ell^\beta)} \\
&\leq \left\|\left(2^{v\alpha}\mathcal{F}^{-1}\varphi_v * f\right)_{v\geq 0}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}(\ell^\beta)} \\
&= \|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}F^s_\beta}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.2 ([13]) *Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p, q, \beta < \infty$, et $\alpha + \frac{n}{q} > 0$. Alors on a*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p,q}F^s_\beta \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.1}$$

Preuve. Soit $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = \left\{\varphi_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ une décomposition de l'unité.

On rappel que la transformation de Fourier est une bijection définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, en particulier la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ engendrée par $P_N(\mathcal{F}\varphi)$ avec $N \in \mathbb{N}$. Si L, M et N sont des nombres naturels suffisamment grands, alors

$$\begin{aligned}
\|f\|^{\varphi}_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}F^s_\infty} &= \left\|\sup_j \mid 2^{js}\varphi_j\mathcal{F}f \mid\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq \sup_j \left\|\mid 2^{js}\left(1+|x|^2\right)\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f \mid_{L^\infty}\right\| \left\|\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{2L}}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq c\sup_j 2^{js}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+(-\Delta)^2\right)\varphi_j\mathcal{F}f\right\|_{L^\infty} \\
&\leq c\sup_j 2^{js}\left\|\left(1+(-\Delta)^2\right)\mathcal{F}f\right\|_{L^1} \\
&\leq c\|\left(1+|x|\right)^M\left(1+(-\Delta)^2\right)\varphi_j\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq cp_N(\mathcal{F}f).
\end{aligned}$$

On rappel que si $\alpha - 4L + \frac{n}{q} < 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{2L}} \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp\alpha} \left[\int_{C_K} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{2Lq}} dx \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{ \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{kp\alpha} \left[\int_{C_K} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{2Lq}} dx \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{kp\alpha} \left[\int_{C_K} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{2Lq}} dx \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{kp\left(\alpha - 4L + \frac{n}{q}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kp\left(\alpha - 4L + \frac{n}{q}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c < \infty.
\end{aligned}$$

La preuve de la deuxième injection est similaire à celle de l'étape 5 dans [7, Page 49] ■

Le lemme suivant est la version de l'inégalité de Plancherel-Polya-Nikolskij en $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ (Inégalité de Berntein) peut être trouvée dans [2].

Lemme 3.2.1 *Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $0 < s, p, q, r \leq \infty$. On suppose que $\alpha_1 + n/s > 0, 0 < q \leq s \leq \infty$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Alors il existe une constante positive $c > 0$ independente de R, telle que pour tout $f \in \dot{K}^{\alpha_2}_{p,q} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset \overline{B}(0, R)$, on a*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1}_{s,r}} \leq c\ R^{n/q - n/s + \alpha_2 - \alpha_1}\ \|f\|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{\theta,q}},$$

où

$$\theta = \begin{cases} r & si \quad \alpha_2 = \alpha_1 \\ p & si \quad \alpha_2 > \alpha_1. \end{cases}.$$

Le lemme suivant aussi joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème suivant.

Lemme 3.2.2 ([2]) *Soient les nombres réelles $s_1 < s_0$ donnés, et $\sigma \in]0;1[$. Pour*

$$0 < q \leq +\infty$$

il existe $c > 0$, tel que

$$\| \left\{ 2^{(\sigma s_0 + (1-\sigma)s_1)j} a_j \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \ell^q \| \leq \| \left\{ 2^{s_0 j} a_j \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \ell^\infty \|^\sigma \| \left\{ 2^{s_1 j} a_j \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \mid \ell^\infty \|^{1-\sigma}$$

valable pour toute suite $\{2^{s_0 j} a_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ dans ℓ^∞.

Théorème 3.2.3 ([2]) *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q, r, \beta < \infty, \alpha_1 + n/s > 0$ *et* $\alpha_2 + n/q > 0$. *Supposons que*

$$s_1 - n/s - \alpha_1 \leq s_2 - n/q - \alpha_2. \tag{3.2.2}$$

tel que

$$\begin{aligned} \alpha_2 + n/q &= \alpha_1 + n/s, \quad 0 < s \leq q < \infty \qquad \text{ou bien} \\ \alpha_2 + n/q &> \alpha_1 + n/s, \quad \max(0, \alpha_1 + n/s) \leq \alpha_2 \leq (\alpha_1 + n/s)\frac{r}{p} - \frac{n}{q}, \end{aligned}$$

alors

$$\dot{K}^{\alpha_2}_{\theta,q} F^{s_2}_{\infty} \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha_1}_{s,r} F^{s_1}_{\beta}.$$

Preuve. Soit $f \in \dot{K}^{\alpha_2}_{\theta,q} F^{s_2}_{\infty}$. Le cas $\alpha_2 + n/q = \alpha_1 + n/s$ et $s \leq q$ peuvent ètre trouvés dans [13]. L'aidé de deuxiéme cas est de [4].

Soit $s_0 = s_2 - n/q - \alpha_2$ puisque $\alpha_2 + n/q > \alpha_1 + n/s$, il existe $\sigma \in]0, 1[$ pour que

$$\sigma (n/q + \alpha_2) = \alpha_1 + n/s.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma s_2 + (1 - \sigma) s_0 &= \sigma s_2 + (1 - \sigma)(s_2 - n/q - \alpha_2) \\ &\geq s_1 - n/s - \alpha_1 + \sigma (n/q + \alpha_2) \\ &= s_1. \end{aligned}$$

Le lemme 3.2.2 donne pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_k$.

$$\begin{aligned} &\| \left\{ 2^{s_1 j} \Delta_j f(x) \right\}_{j \geq 0} \|_{\ell^\infty} \\ \leq &\| \left\{ 2^{s_2 j} \Delta_j f(x) \right\}_{j \geq 0} \|^{\sigma}_{\ell^\infty} \| \left\{ 2^{s_0 j} \Delta_j f(x) \right\}_{j \geq 0} \|^{1-\sigma}_{\ell^\infty}. \end{aligned}$$

D'aprés le lemme 3.2.1, nous abtenons pour tout $x \in \mathbb{R}^n, \alpha_2 \geq 0$ et $0 < p, q \leq \infty$,

$$| \Delta_j f(x) | \leq C 2^{j(\alpha_2 + n/q)} \| \Delta_j f(x) \|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p,q}}.$$

Donc

$$\| \left\{ 2^{s_0 j} \Delta_j f(x) \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \|_{\ell^\infty} \leq C \| f \|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p,q} F^{s_2}_{\infty}}.$$

puisque $1/\sigma s = 1/q + (\alpha_2 - \alpha_1/\sigma)/n$ et $\alpha_2 \geq \alpha_1/\sigma$, et l'inégalite de Hölder donne

$$\begin{aligned} 2^{k\alpha_1} & \| \quad \| \left\{2^{s_2 j}\Delta_j f\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{\ell_\infty} \chi_k \|_s \\ &= 2^{k\alpha_1} \|\|\| \left\{2^{s_2 j}\Delta_j f\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{\ell_\infty} \chi_k \|_{\sigma s}^{\sigma} \\ &\leq 2^{k\sigma\alpha_2} \|\|\| \left\{2^{s_2 j}\Delta_j f\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{\ell_\infty} \chi_k \|_q^{\sigma} . \end{aligned}$$

Par l'injection $\dot{K}^{\alpha_2}_{p,q} \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha_2}_{\sigma r,q}$ (car $p(\alpha_2 + n/q) \leq r(\alpha_1 + n/s)$), la dernière expression en ℓ_r-norme est bornée par

$$\begin{aligned} & \| \quad \| \left\{2^{s_2 j}\Delta_j f\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{\ell_\infty} \|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{\sigma r,q}}^{\sigma} \\ \leq & \; c \|\|\| \left\{2^{s_2 j}\Delta_j f\right\}_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{\ell_\infty} \|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p,q}}^{\sigma} \\ \leq & \; c \| f \|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p,q} F^{s_2}_{\infty}}^{\sigma} . \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.1 *Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $p = q$ et $r = s$, le théorème précédent se réduit à un résultat connu sur $F^s_{p,q}$. Aussi sous l'hypothèse de ce théorème, nous avons $s_1 \leq s_2$.*

Théorème 3.2.4 ([2]) *Soient $\alpha, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 < s, p, q \leq \infty, s_1 - n/s \leq s_2 - n/q - \alpha$ et $0 < \beta \leq \infty$.*
Si $0 < s, p, q < \infty$ et $\alpha \geq 0$, tel que $n/s - n/q < \alpha \leq n/p - n/q$, alors

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s_2}_{\infty} \hookrightarrow F^{s_1}_{s,\beta}.$$

Preuve. Pour montrer le théorème 3.2.4 il suffit de poser $\alpha_1 = 0$ et $r = s$ dans le théorème 3.2.3 car $\dot{K}^{0}_{s,s} F^{s_1}_{\beta}(\mathbb{R}^n) = F^{s_1}_{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$. ■

Soit $\overline{q} = \max(1, q)$. En utilisant les théorèmes précédents, nous avons la conséquence suivante.

Proposition 3.2.1 ([2]) *Soient $0 < \alpha \leq n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}), 0 < s, p, q < \infty$ et $0 < \beta \leq \infty$. Si $(s > n/q - n + \alpha et 0 < q \leq 1)$ ou $(s \geq \alpha et 1 < q < \infty)$. Alors*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q} F^{s}_{\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n).$$

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier les espaces de Herz type Lizorkin-Triebel. Comme ces espaces (Herz, Lizorkin-Triebel et Herz type Lizorkin-Triebel) sont des généralisations des espaces de Lebesgue classiques.La théorie de ces espaces joue un rôle important dans l'analyse fonctionnelle, la théorie de équations aux dérivées partielles et mécanique des fluides. En fait,la plusieur de propriétés dans les espaces classiques de Lebesgue ont été généralisées aux ces espaces.

Bibliographie

[1] A. Almeida and D. Drihem.: Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 394, no. 2, pp.781–795, 2012.

[2] D. Drihem, Embeddings properties on Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Math. Ineq and Appl. 16 (2013), 439-460.

[3] R. Heraiz, Some properties of variable Herz type-Besov spaces and application, thése de doctorat, univ. de Msila, algerie.2017

[4] J. Johnsen and W. Sickel, A direct proof of Sobolev embeddings for quasi-homogeneous Lizorkin-Triebel spaces with mixed norms, J. Funct. Spaces Appl. 5, 183–198 (2007).

[5] S. Lu, D. Yang and G. Hu, Herz Type Spaces and Their Applications, Beijing: Science Press, 2008.

[6] S. Lu and D. Yang, The decomposition of weighted Herz space on $\mathbb{R}^n$ and its applications, Sci. China (Ser. A). 38 (1995), 147-158.

[7] H. Triebel, Theory of function spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.

[8] H. Triebel, Theory of function spaces, II, Birkhäuser, Basel, 1992.

[9] H. Triebel, Theory of function spaces, III, Birkhäuser, Basel, 2006.

[10] H. B. Wang, Anisotropic Herz spaces with variable exponents, Funct. Approx. Comment. Math, 18 (2015), pp1-15.

[11] H. Wang, L. Zongguang and F. Zunwei.: Boundedness of Fractional Integrals on Herz-type Hardy Spaces with variable exponent, Advances in Mathematics(China) 2017 Vol.46 (2): 252-260.

[12] J. Xu and D. Yang, Applications of Herz-type Triebel-Lizorkin spaces, Acta. Math. Sci (Ser. B). **23** (2003), 328-338.

[13] J. Xu and D. Yang, Herz-type Triebel-Lizorkin spaces I, Acta Math. Sci (English) (Ed.). **21** (2005), 643-654.

ملخص :

في هذه المذكرة درسنا فضاءات "هارز " و فضاءات " لزوركان تريبيال" الكلاسكية أين قمنا بتبيان بعض الخصائص الاساسية.

في الأخير قمنا بدراسة فضاءات "هارز نوع لزوركان- تريبيال" حيث ذكرنا بعض الخصائص الاساسية .

الكلمات المفتاحية: فضاءات "هارز", فضاءات" لزوركان تريبيال", فضاءات "هارز نوع لزوركان- تريبيال"

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié les espaces de Herz et de
où nous avons donné certaines propriétés de Lizorkine-Triebel classiques, base de ces espaces .

Finalement, nous avons étudié les espaces de Herz –type Lizorkine-Triebel.

Mots clés : Espaces de Herz, Espaces de Lizorkine-Triebel, Espaces de Herz type de Lizorkine-Triebel.

Abstract :

In this memory, we studied Herz and Lizorkine-Triebel spaces classic where we mentioned some basic properties of these spaces.
Finally, we studied Herz-type Lizorkine-Triebel spaces.

Key words: Herz spaces, Lizorkine-Triebel spaces, Herz-type Lizorkine-Triebel.