



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDP et application

## Thème

---

*Approximation numériques des opérateurs intégraux fractionnaires basés sur une interpolation linéaire et quadratique*

---

**Présentée par :**  
BAKOUR Sana

**Composition du jury :**

Arioua Yasmine	M.C.A	Université de M'sila	<b>Président.</b>
Merzougui Abdelkrim	Prof.	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
Saadi Abderachid	M.C.A	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2019/2020

---

# Remerciements

---

*Au nom d'ALLAH le clément et le miséricordieux.*

*Je tiens tout d'abord Ã remercier mon dieu ALLAH, qui a donne le courage  
et la persévérance pour la réalisation de  
ce modeste mémoire.*

*Je remercie porofondément mon encadreur le prafesseur Merzougui Abdelkrim  
qui a toujours été attentif et très disponible tout au long de  
la réalisation de ce mémoire*

*Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième  
anné master EDPs et applications.*

*De tout mon coeur je remercie mes parents, **ma mère** et **mon père** et mes prières  
que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.*

*Enfn, j'adrèse un grande remerciments Ã **mon marie, mes frères , mes soeurs,**  
et tout ma famille, qui m'ont donné beaucoup de soutien  
constant et d'encouragement.*

---

# Dédicaces

---

*Au nom d'ALLAH le clément et le miséricordieux.*

*Je dédie ce modeste mémoire*

*à la personne la plus chère de ma vie, mon exemple éternel,*

*que le Dieu le protège et lui procure longue vie à mon père **Saadi Bakour**.*

*à la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur,*

*ma vie et mon bonheur, maman **H. Laifaoui**.*

*à la personne la plus proche de mon cœur, qui m'a aidé toujours à avancer*

*à mon cher mari **D.Gendouz***

*à mes frères **Abdelfattah , Abdelnour** mes soeurs*

*à toute la famille et mes amies.*

---

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Calcul fractionnaire</b>	<b>8</b>
1.1	Fonctions spéciales . . . . .	8
1.1.1	Fonction Gamma d'Euler . . . . .	8
1.1.2	Fonction Bêta . . . . .	10
1.2	L'intégrale fractionnaire . . . . .	11
1.2.1	L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$ . . . . .	11
1.2.2	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	12
1.3	Dérivées fractionnaires . . . . .	13
1.3.1	Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville . . . . .	13
1.3.2	Dérivées fractionnaires de type Caputo . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Approximation numériques des opérateurs intégraux fractionnaires</b>	<b>15</b>
2.1	Méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale . . . . .	15
2.1.1	Méthode des rectangles . . . . .	16
2.1.2	Méthode de Trapèze . . . . .	16
2.1.3	Méthode de Simpson . . . . .	16
2.2	Approximations des intégrales fractionnaires . . . . .	16
2.2.1	Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville . . . . .	17
2.2.2	Méthode de Trapèze pour l'approximation l'intégrale de Riemann-Liouville	18
2.2.3	Méthode de Simpson pour l'approximation l'intégrale de Riemann-Liouville . . . . .	21
2.3	Approximations de la dérivée fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	26
2.3.1	Méthode des rectangles pour l'approximation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	26
2.3.2	Méthode de Trapèze pour l'approximation des dérivées fractionnaires de Caputo . . . . .	27

2.3.3	Méthode de Simpson pour l'approximation des dérivées fractionnaires de Caputo . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Résultats Numériques</b>	<b>36</b>
3.1	Exemples sur l'approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville . . . . .	36
3.2	Exemples sur les approximation des dérivées fractinnaire de Caputo . . . . .	40

---

# Introduction générale

---

Le calcul fractionnaire est un champ d'étude mathématique qui sort du traditionnel définitions des opérateurs intégrales et dérivées : définir l'intégrale fractionnaire comme simple généralisation de l'intégrale d'ordre entier, et la dérivée fractionnaire comme l'opération inverse ; c'est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique connu aujourd'hui.

En 1695 L'Hôpital a posé la question quant à la signification de  $\frac{dy^n}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  c'est "et si  $n$  est fractionnaire ?"; Leibniz a répondu que " $d^{\frac{1}{2}}x$  sera égal à  $x\sqrt{dx \div x}$ ". Cet événement a été aujourd'hui considéré comme le début de l'émergence et le développement de ce branche, et le fait que la question posée spécifiquement pour  $n = \frac{1}{2}$  c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques. Des recherches ultérieures et d'autres développements, entre autres, ont conduit Riemann à la construction de l'opérateur intégral fractionnaire Riemann-Liouville, basé sur l'intégrale qui a été la pierre angulaire précieuse dans le calcul fractionnaire depuis lors. Avant Liouville et Riemann, Euler a fait le premier pas quand il a étudié le cas simple d'intégrales fractionnaires des monômes d'ordre réel arbitraire dans le mode heuristique de l'époque. Aujourd'hui il existe de nombreuses formes d'opérateurs intégraux fractionnaires, mais l'opérateur de Riemann-Liouville est toujours le plus fréquemment utilisé.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques pures sans applications aux autre domaines, pourtant un exemple simple de mécanique de fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparait tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

Dans ce travail on ce propose d'étudier numériquement l'approximation des opérateurs intégraux fractionnaire, on va approximer l'intégrale de Riemann-Liouville et les dérivées de Caputo en utilisant les méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale .

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

**Le premier chapitre** sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux relatives au calcul fractionnaire, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma , la fonction Bêta et les définitions de la dérivation et l'intégration fractionnaire au sens Riemann-Liouville et Caputo.

Dans **le second chapitre**, on traite les méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale pour obtenir des approximations de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo en utilisant la méthode des rectangles, méthode de Trapèze et méthode de Simpson .

Dans **le troisième chapitre** de notre travail, on donne des exemples numérique pour comparer les valeurs exactes avec les valeurs approchées obtenues par les méthode numériques étudiées pour l'approximations de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo.

# CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les résultats fondamentales du calcul fractionnaire, nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire (fonction Gamma, fonction Bêta), on définit ensuite la dérivation et l'intégration au sens de Riemann-Liouville et Caputo et leur propriétés.

## 1.1 Fonctions spéciales

### 1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

En mathématique, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 1.1.1.** la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0). \quad (1.1.1)$$

**Exemples 1.1.1.**

1. Pour  $z = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{+\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Soit  $z = \frac{1}{2}$ , pour calculer  $\Gamma(\frac{1}{2})$  on utilise un changement de variable on pose que  $s = \sqrt{t}$ ,

on obtient

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\
 &= 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad (\text{d'après l'intégrale de Gauss}) \\
 &= \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

**Lemme 1.1.1.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on a

1.  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ .
2.  $\Gamma(n + 1) = (n)!$ .
3.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ .

**preuve.**

1. Représentons  $\Gamma(z + 1)$  par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z + 1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\
 &= [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= z\Gamma(z).
 \end{aligned}$$

2. Il suffit de poser dans le lemme ( 1.1.1 (1)  $z = n - 1$

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) \\
 &= (n)(n - 1)\Gamma(n - 2) \\
 &= n(n - 1)(n - 2) \dots \Gamma(1) \\
 &= n!.
 \end{aligned}$$

3. Nous allons démontré la formule  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$  par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$ .

— Pour  $n = 0$ , on a

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$$

— Supposons que la formule est vérifiée pou  $(n-1)$ .

c-à-d supposons que  $\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$ , est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) \\ &= (n - \frac{1}{2}) \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n}{2n}\right) \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n(n)!}.\end{aligned}$$

C.Q.F.D

### 1.1.2 Fonction Bêta

**Définition 1.1.2.** La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, (p, q \in \mathbb{C}, \text{Re}(p) > 0, \text{Re}(q) > 0). \quad (1.1.2)$$

**Proposition 1.1.1.** La fonction Beta est exprimée là l'aide de la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.1.3)$$

**preuve.**

Soit  $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x} dx\right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y} dy\right) \\ &= \int \int_D (x)^{p-1}(y)^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy\end{aligned}$$

En utilisant un changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

Le domaine correspondant à  $D$  dans les coordonnées  $u, v$  est

$$D' = \{(u, v)/u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \int \int_{D'} (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u du dv \\ &= \int \int_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \left( \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

**Propriétés 1.1.1.**

1.  $B(p, q) = B(q, p)$ , (symétrique).
2.  $B(p, 1) = \frac{1}{p}$ .

## 1.2 L'intégrale fractionnaire

### 1.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

**Définition 1.2.1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Notons par  $(\mathcal{I}_{a^+}^1 f)$  la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$  :

$$\forall t \in [a, b]; (\mathcal{I}_{a^+}^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

et  $(\mathcal{I}_{a^+}^2 f)$  est la primitive seconde de  $f$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^2 f)(t) &= \int_a^t \left( \int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En générale la  $n^{\text{ième}}$  primitive de  $f$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  peut s'écrire :

$$(\mathcal{I}_{a^+}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

## 1.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 1.2.2.** L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction  $f$  est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.2.1)$$

**Définition 1.2.3.** L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction  $f$

est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; (\mathcal{I}_b^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.2.2)$$

**Proposition 1.2.1.** Pour  $\alpha > 0, \beta > 0$  on a :

1.  $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \left( \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) \right) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).$
2.  $\left( \mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t - a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t - a)^{\alpha+\beta-1}.$

**preuve.**

1. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^\alpha \left( \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left( \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^\tau (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - s)^{\beta-1} d\tau ds \end{aligned}$$

On pose  $\tau = (t - s)u + s \Rightarrow d\tau = (t - s)du$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^\alpha \left( \mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) B(\alpha, \beta) ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t) \end{aligned}$$

2. On a :

$$(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1} d\tau$$

On pose  $\tau = s(t-a) + a \Rightarrow d\tau = (t-a)ds$ .

Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_a^t s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

## 1.3 Dérivées fractionnaires

### 1.3.1 Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

**Définition 1.3.1.** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$  est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.3.1)$$

**Définition 1.3.2.** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$  est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; (\mathcal{D}_b^-^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_b^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.3.2)$$

**Remarque 1.3.1.**

1. Pour  $\alpha = 0, n = 1, (\mathcal{D}_{a^+}^0 f)(t) = f(t)$ .
2. Pour  $\alpha = n, n \in \mathbb{N}^*$ . L'opérateur  $\mathcal{D}^\alpha$  donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entiers :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^{(n)}(t). \\ \mathcal{D}_b^-^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t) \end{cases}$$

### 1.3.2 Dérivées fractionnaires de type Caputo

**Définition 1.3.3.** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . La dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$  est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; ({}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.3.3)$$

**Définition 1.3.4.** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . La dérivée fractionnaire au sens de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f$  définie par :

$$\forall t \in [a, b]; ({}^c\mathcal{D}_b^\alpha f)(t) = \mathcal{I}_b^{n-\alpha} \circ \left( \frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.3.4)$$

**Proposition 1.3.1.** Pour  $\alpha > 0, \beta > 0$  on a :

$$(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

**preuve.**

Posons  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ , d'après la définition (1.3.3) on a

$$({}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left( \frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} ({}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau, \text{ posons } \tau-a = s(t-a) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \cdots (\beta-n) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

# APPROXIMATION NUMÉRIQUES DES OPÉRATEURS INTÉGRAUX FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, on va traiter des méthodes numériques pour obtenir des approximations numériques des opérateurs d'ordre fractionnaires basées sur l'interpolation polynômiale

## 2.1 Méthodes numériques basées sur l'interpolation polynômiale

Il s'agit d'une manière générale de déterminer une valeur approchée de l'intégrale :  $\int_a^b f(x)dx$ .

où  $a$  et  $b$  sont des réels. Lorsque la fonction  $f$  n'a pas de primitive explicite connue, Nous recourons à des méthodes numériques, parmi ces méthodes, les méthodes d'interpolation polynômiale, parceque les primitives de ces fonctions polynômes sont faciles à calculer.

Différentes fonctions d'interpolation polynomiale conduisent à des formules distinctes. Ceux qui sont fréquemment utilisés dans les applications sont donnés comme suit. On note  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  une subdivision ordonnée de l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  de même longueur  $h = \frac{b-a}{n}$ , et  $x_i = a + ih$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ .

L'objectif est de calculer l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

On a alors :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

### 2.1.1 Méthode des rectangles

Si  $f(x)$  est approximé par une fonction constante par morceaux,

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = f(x_i), x \in [x_i, x_{i+1}[$$

alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)dx$$

De même, lorsque  $f(x)$  est approché par la fonction constante par morceaux,

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = f(x_{i+1}), x \in ]x_i, x_{i+1}]$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})dx$$

### 2.1.2 Méthode de Trapèze

Dans la méthode de Trapèze, la fonction  $f$  est remplacée sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  par la droite joignant les points  $(x_i, f(x_i))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ .

La méthode s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

### 2.1.3 Méthode de Simpson

Dans cette méthode, la fonction  $f$  est remplacée sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  par un polynôme du second degré définissant un arc de parabole passant par les points  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ .

La méthode s'écrit sous la forme :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} \left[ f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right].$$

## 2.2 Approximations des intégrales fractionnaires

L'opérateur intégrale fractionnaire joue un rôle très important dans le calcul fractionnaire. Il faut donc étudier les méthodes numériques pour approximer les intégrales fractionnaire.

Supposons que  $f \in C([0, T])$ , soit  $h = \frac{T}{n}$ , et notons  $t_k = kh$ , avec  $k = 0, 1, \dots, n$ .

On va étudier comment calculer numériquement l'intégrale suivante :

$$(\mathcal{I}_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.2.1)$$

Une façon de calculer (2.2.1) consiste à approximer  $f(s)$  par une certaine fonction  $\tilde{f}(s)$  afin que (2.2.1) peut être calculer exactement.

Nous pensons à l'approximation de  $f(s)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ . Théoriquement (2.2.1) peut être calculé exactement si  $f(s)$  est un polynôme .

Pour  $t = t_n, n \in \mathbb{N}$ , (2.2.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s) ds \end{aligned}$$

### 2.2.1 Méthode des rectangles pour l'approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville

Dans cette méthode, on approxime  $f(s)$  par le polynôme de degré zéro (constante) sur chaque sous intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  par

$$f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = f(t_k),$$

dans ce cas l'équation (2.2.1) s'écrit

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx [\mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t)]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} f(t_k) ds \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons la formule rectangulaire fractionnaire gauche

$$[\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx [\mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t)]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k), \quad (2.2.2)$$

où les coefficients sont donnés par  $b_k$

$$b_k = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [(k + 1)^\alpha - k^\alpha] \quad (2.2.3)$$

De même, lorsque  $f(x)$  est approché par la fonction constante par morceaux

$$f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = f(x_{k+1}),$$

alors on obtient la formule rectangulaire droite

$$[\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx \left[ \mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_{k+1}) \quad (2.2.4)$$

d'après la formule rectangulaire gauche (2.2.2) et la formule rectangulaire droite (2.2.4), la formule rectangulaire fractionnaire pondérée est donnée par

$$[\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx \left[ \mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} [\theta f(t_k) + (1 - \theta) f(t_{k+1})], \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.2.5)$$

ou la formule similaire

$$[\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx \left[ \mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t) \right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k + (1 - \theta)h), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.2.6)$$

## 2.2.2 Méthode de Trapèze pour l'approximation l'intégrale de Riemann-Liouville

Dans cette Méthode,  $f(s)$  est approximée par le polynôme de degré 1 sur chaque sous-intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ ,

$$f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = \frac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - t_k} f(t_k) + \frac{s - t_k}{t_{k+1} - t_k} f(t_{k+1})$$

Alors

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx \left[ \mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t) \right]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \left[ \frac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - t_k} f(t_k) + \frac{s - t_k}{t_{k+1} - t_k} f(t_{k+1}) \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_1 - s}{t_1 - t_0} f(t_0) ds + \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{s - t_0}{t_1 - t_0} f(t_1) ds \right. \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_2 - s}{t_2 - t_1} f(t_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{s - t_1}{t_2 - t_1} f(t_2) ds + \dots \\ &\quad + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_{n-1} - s}{t_{n-1} - t_{n-2}} f(t_{n-2}) ds + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{s - t_{n-2}}{t_{n-1} - t_{n-2}} f(t_{n-1}) ds \\ &\quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_n - s}{t_n - t_{n-1}} f(t_{n-1}) ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{s - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n) ds \right] \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k,n} f(t_k). \end{aligned}$$

avec

$$a_{k,n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1 - s}{t_1 - t_0} (t_n - s)^{\alpha-1} ds, & k = 0. \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} ds, & 1 \leq k \leq n-1. \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds, & k = n. \end{cases}$$

Pour  $k=0$ , on a :

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1 - s}{t_1 - t_0} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)(t_n - s)^{\alpha-1} ds \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, posons

$$u = (t_1 - s) \Rightarrow u' = -1$$

$$v' = (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} (t_n - s)^\alpha$$

Alors

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \left[ \frac{-1}{\alpha} (t_1 - s)(t_n - s)^\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^\alpha ds \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha h\Gamma(\alpha)} \left\{ n^\alpha h^{\alpha+1} + \left[ \frac{1}{\alpha+1} (t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_0}^{t_1} \right\} \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [(n-1)^{\alpha+1} - n^\alpha(n-\alpha-1)] \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a :

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \right\} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s)(t_n - s)^{\alpha-1} ds}_{I_2} \right\} \end{aligned}$$

On a

$$I_1 = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds$$

on pose

$$\begin{aligned} u &= (s - t_{k-1}) \Rightarrow u' = 1 \\ v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[ \frac{-1}{\alpha} (s - t_{k-1})(t_n - s)^\alpha \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \frac{1}{\alpha} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^\alpha ds \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ -(n - k)^\alpha h^{\alpha+1} - \left[ \frac{1}{\alpha + 1} (t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} \right\} \\ &= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} [-(\alpha + 1)(n - k)^\alpha - (n - k)^{\alpha+1} + (n - k + 1)^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

Et

$$I_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s)(t_n - s)^{\alpha-1} ds$$

on pose

$$\begin{aligned} u &= (t_{k+1} - s) \Rightarrow u' = -1 \\ v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[ \frac{-1}{\alpha} (t_{k+1} - s)(t_n - s)^\alpha \right]_{t_k}^{t_{k+1}} - \frac{1}{\alpha} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^\alpha ds \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ (n - k)^\alpha h^{\alpha+1} + \left[ \frac{1}{\alpha + 1} (t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \right\} \\ &= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} [(\alpha + 1)(n - k)^\alpha - (n - k)^{\alpha+1} + (n - k - 1)^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} [I_1 + I_2] \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} [(n - k + 1)^{\alpha+1} + (n - k - 1)^{\alpha+1} - 2(n - k)^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

et pour  $k = n$ , on a :

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} u &= (s - t_{n-1}) \Rightarrow u' = 1 \\ v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} (t_n - s)^\alpha \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)} \left\{ \left[ \frac{-1}{\alpha} (s - t_{n-1})(t_n - s)^\alpha \right]_{t_{n-1}}^{t_n} + \frac{1}{\alpha} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^\alpha ds \right\} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha+1)} \left[ \frac{-1}{\alpha+1} (t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$a_{k,n} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} (n-1)^{\alpha+1} - n^\alpha(n-\alpha-1), & k=0. \\ (n-k+1)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1}, & 1 \leq k \leq n-1. \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

### 2.2.3 Méthode de Simpson pour l'approximation l'intégrale de Riemann-Liouville

Méthode de Simpson consiste à approximer  $f(s)$  par le polynôme de degré 2 sur chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$

$$f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = \sum_{i \in S} L_{k,i}(s) f(t_{k+i})$$

tel que  $\{L_{k,i}(s)\}$  polynômes de Lagrange défini par

$$L_{k,i}(s) = \prod_{j \in S, j \neq i} \frac{s - t_{k+j}}{t_{k+i} - t_{k+j}}, i \in S.$$

avec  $S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ , et  $t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_k+t_{k+1}}{2}$ .

Alors

$$\begin{aligned} f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} &= \frac{(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})}{(t_k - t_{k+\frac{1}{2}})(t_k - t_{k+1})} f(t_k) + \frac{(s - t_k)(s - t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})} f(t_{k+\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_k)}{(t_{k+1} - t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1} - t_k)} f(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Donc l'intégrale (2.2.1) devient

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx [\mathcal{I}_0^\alpha \tilde{f}(t)]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \left[ \frac{(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})}{(t_k - t_{k+\frac{1}{2}})(t_k - t_{k+1})} f(t_k) \right. \\ &+ \left. \frac{(s - t_k)(s - t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})} f(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_k)}{(t_{k+1} - t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1} - t_k)} f(t_{k+1}) \right] ds \\ &= \frac{2}{h^2 \Gamma(\alpha)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{\alpha-1} \left[ (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1) f(t_0) - 2(s - t_0)(s - t_1) f(t_{\frac{1}{2}}) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_0) f(t_1) \right] ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n - s)^{\alpha-1} \left[ (s - t_{\frac{3}{2}})(s - t_2) f(t_1) \right. \right. \\ &- \left. \left. 2(s - t_1)(s - t_2) f(t_{\frac{3}{2}}) + (s - t_{\frac{3}{2}})(s - t_1) f(t_2) \right] ds + \dots \right. \\ &+ \left. \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \left[ (s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_n) f(t_{n-1}) \right. \right. \\ &- \left. \left. 2(s - t_{n-1})(s - t_n) f(t_{n-\frac{1}{2}}) + (s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_{n-1}) f(t_n) \right] ds \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n c_{k,n} f(t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{c}_{k,n} f(t_{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

avec

$$c_{k,n} = \frac{2}{h^2 \Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1)(t_n - s)^{\alpha-1} ds, & k = 0. \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds, & 1 \leq k \leq n-1. \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_{n-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds, & k = n. \end{cases}$$

et

$$\hat{c}_{k,n} = \frac{-4}{h^2 \Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k)(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Pour  $k = 0$ , on a

$$c_{0,n} = \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1)(t_n - s)^{\alpha-1} ds.$$

on utilise l'intégration par partie, on pose :

$$u = (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1) \Rightarrow u' = 2s - t_{\frac{1}{2}} - t_1.$$

$$v' = (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned} c_{0,n} &= \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1)(t_n - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \left[ -(t_n - s)^\alpha (s - t_{\frac{1}{2}})(s - t_1) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^\alpha (2s - t_{\frac{1}{2}} - t_1) ds \right\} \\ &= \frac{n^\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha+2)} \left\{ \left[ (2s - t_{\frac{1}{2}} - t_1)(t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_0}^{t_1} + 2 \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{\alpha+1} ds \right\} \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} \left\{ 4 [n^{\alpha+2} - (n-1)^{\alpha+2}] - (\alpha+2) [3n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}] + (\alpha+1)(\alpha+2)n^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$

$$c_{k,n} = \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)} \left\{ \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds}_{I_3} + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds}_{I_4} \right\}$$

On a

$$I_3 = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds.$$

On pose

$$u = (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1}.$$

$$v' = (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \left[ -(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^\alpha \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^\alpha ds \right\} \\
&= \frac{-h^{\alpha+2}(n-k)^\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left\{ \left[ (2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha+1} ds \right\} \\
&= \frac{h^{\alpha+2}}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ -(\alpha+1)(\alpha+2)(n-k)^\alpha - 3(\alpha+2)(n-k)^{\alpha+1} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha+2)(n-k+1)^{\alpha+1} - 4(n-k)^{\alpha+2} + 4(n-k+1)^{\alpha+2} \right].
\end{aligned}$$

Et

$$I_4 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds.$$

On, pose

$$\begin{aligned}
u &= (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1}. \\
v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \left[ -(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^\alpha \right]_{t_k}^{t_{k+1}} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})(t_n - s)^\alpha ds \right\} \\
&= \frac{h^{\alpha+2}(n-k)^\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left\{ \left[ (2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} + 2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha+1} ds \right\} \\
&= \frac{h^{\alpha+2}}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ (\alpha+1)(\alpha+2)(n-k)^\alpha - 3(\alpha+2)(n-k)^{\alpha+1} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha+2)(n-k-1)^{\alpha+1} - 4(n-k-1)^{\alpha+2} + 4(n-k)^{\alpha+2} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
c_{k,n} &= I_3 + I_4 \\
&= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} \left\{ -(\alpha+2) \left[ (n-k+1)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1} + 6(n-k)^{\alpha+1} \right] \right. \\
&\quad \left. + 4 \left[ (n-k+1)^{\alpha+2} - (n-k-1)^{\alpha+2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Pour  $k = n$

$$c_{n,n} = \frac{2}{h^\alpha\Gamma(\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_{n-1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds.$$

On pose

$$\begin{aligned}
u &= (s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_{n-1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{n-\frac{1}{2}} - t_{n-1}. \\
v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
c_{n,n} &= \frac{2}{h^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \left[ -(s - t_{n-\frac{1}{2}})(s - t_{n-1})(t_n - s)^\alpha \right]_{t_{n-1}}^{t_n} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (2s - t_{n-\frac{1}{2}} - t_{n-1})(t_n - s)^\alpha ds \right\} \\
&= \frac{2}{h^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \left\{ \left[ -(2s - t_{n-\frac{1}{2}} - t_{n-1})(t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} + 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha+1} ds \right\} \\
&= \frac{2}{h^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \left\{ \frac{-h^{\alpha+2}}{2} - \left[ \frac{2}{\alpha + 2} (t_n - s)^{\alpha+2} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \right\} \\
&= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 3)} (2 - \alpha).
\end{aligned}$$

Et pour  $0 \leq k \leq n - 1$ , on a

$$\hat{c}_{k,n} = \frac{-4}{h^2 \Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k)(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1} ds.$$

On pose

$$\begin{aligned}
u &= (s - t_k)(s - t_{k+1}) \Rightarrow u' = 2s - t_k - t_{k+1}. \\
v' &= (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} (t_n - s)^\alpha.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{k,n} &= \frac{4}{h^2 \Gamma(\alpha)} \left\{ \left[ (s - t_k)(s - t_{k+1})\alpha(t_n - s)^\alpha \right]_{t_k}^{t_{k+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} (2s - t_k - t_{k+1})(t_n - s)^\alpha ds \right\} \\
&= \frac{4}{h^2 \Gamma(\alpha)} \left\{ \left[ (2s - t_k - t_{k+1})\alpha(t_n - s)^{\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} - 2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha+1} ds \right\} \\
&= \frac{4h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 3)} \left\{ (\alpha + 2) \left[ (n - k)^{\alpha+1} + (n - k - 1)^{\alpha+1} \right] - 2 \left[ (n - k)^{\alpha+2} - (n - k - 1)^{\alpha+2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$c_{k,n} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 3)} \begin{cases} 4 \left[ n^{\alpha+2} - (n - 1)^{\alpha+2} \right] - (\alpha + 2) \left[ 3n^{\alpha+1} + (n - 1)^{\alpha+1} \right] \\ \quad + (\alpha + 1)(\alpha + 2)n^\alpha, & k = 0. \\ -(\alpha + 2) \left[ (n - k + 1)^{\alpha+1} + (n - k - 1)^{\alpha+1} + 6(n - k)^{\alpha+1} \right] \\ \quad + 4 \left[ (n - k + 1)^{\alpha+2} - (n - k - 1)^{\alpha+2} \right], & 1 \leq k \leq n - 1. \\ 2 - \alpha, & k = n. \end{cases}$$

et pour  $0 \leq k \leq n - 1$

$$\hat{c}_{k,n} = \frac{4h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 3)} \left\{ (\alpha + 2) \left[ (n - k)^{\alpha+1} + (n - k - 1)^{\alpha+1} \right] - 2 \left[ (n - k)^{\alpha+2} - (n - k - 1)^{\alpha+2} \right] \right\}.$$

## 2.3 Approximations de la dérivée fractionnaires au sens de Caputo

Dans cette partie, on va présenter des approches numériques similaires utilisées dan la section précédente pour approcher les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Caputo .

Pour  $f \in C([0, T])$ , soit  $h$  le pas avec  $h = \frac{T}{n}$ , et notons  $t_k = kh$ , tel que  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Ensuite, nous étudions numériquement les valeurs de l'intégrale suivante avec  $m = [\alpha] + 1$  :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \quad (2.3.1)$$

Pour  $t = t_n, n \in \mathbb{N}$ , nous réécrivons  $[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \end{aligned}$$

### 2.3.1 Méthode des rectangles pour l'approximation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Sur chaque sous intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , on approxime  $f^{(m)}(s)$  par le polynôme de degré zéro :

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx g(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = f^{(m)}(t_k).$$

Dans ce cas l'équation (2.3.1) s'écrit

$$\begin{aligned} [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t_k) ds \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons la formule rectangulaire fractionnaire gauche

$$[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k-1} f^{(m)}(t_k), \quad (2.3.2)$$

avec

$$v_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} ds = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha + 1)} [(k + 1)^{m-\alpha} - k^{m-\alpha}] \quad (2.3.3)$$

De même, si  $f^{(m)}(s)$  est approché par la fonction constante par morceaux

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx g(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = f^{(m)}(t_{k+1}),$$

Alors on obtient la formule rectangulaire droite

$$[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k-1} f^{(m)}(t_{k+1}) \quad (2.3.4)$$

d'après la formule rectangulaire gauche (2.3.2) et la formule rectangulaire droite (2.3.4), la formule rectangulaire fractionnaire pondérée est donnée par

$$[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k-1} [\theta f(t_k) + (1-\theta)f(t_{k+1})], \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.3.5)$$

ou la formule similaire

$$[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k-1} f(t_k + (1-\theta)h), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.3.6)$$

### 2.3.2 Méthode de Trapèze pour l'approximation des dérivées fractionnaires de Caputo

Sur chaque sous-intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $g(s)$  est l'interpolation linéaire par morceaux pour  $f^{(m)}$  avec degré d'ordre 1.

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx g(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} = \frac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - t_k} f^{(m)}(t_k) + \frac{s - t_k}{t_{k+1} - t_k} f^{(m)}(t_{k+1})$$

Alors

$$\begin{aligned}
[{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[ \frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} f^{(m)}(t_k) + \frac{s-t_k}{t_{k+1}-t_k} f^{(m)}(t_{k+1}) \right] ds \\
&= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \left[ \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (t_1-s) f^{(m)}(t_0) ds \right. \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (s-t_0) f^{(m)}(t_1) ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (t_2-s) f^{(m)}(t_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (s-t_1) f^{(m)}(t_2) ds + \dots \\
&\quad + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (t_{n-1}-s) f^{(m)}(t_{n-2}) ds \\
&\quad + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (s-t_{n-2}) f^{(m)}(t_{n-1}) ds \\
&\quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (t_n-s) f^{(m)}(t_{n-1}) ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{m-\alpha-1} (s-t_{n-1}) f^{(m)}(t_n) ds \right] \\
&= \sum_{k=0}^n w_{k,n} f^{(m)}(t_k).
\end{aligned}$$

avec

$$w_{k,n} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1-s}{t_1-t_0} (t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & k=0. \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} ds \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} (t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & 1 \leq k \leq n-1. \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & k=n. \end{cases}$$

Pour  $k=0$ , on a :

$$\begin{aligned}
w_{0,n} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{t_1-s}{t_1-t_0} (t_n-s)^{m-\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, posons

$$u = (t_1 - s) \Rightarrow u' = -1$$

$$v' = (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha}$$

Alors

$$\begin{aligned} w_{0,n} &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \left[ \frac{-1}{m-\alpha} (t_1 - s)(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_0}^{t_1} - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{m-\alpha} ds \right\} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha+1)} \left\{ n^{m-\alpha} h^{m-\alpha+1} + \left[ \frac{1}{m-\alpha+1} (t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_0}^{t_1} \right\} \\ &= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)} [(n-1)^{m-\alpha+1} - n^{m-\alpha}(n-m+\alpha-1)] \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a :

$$\begin{aligned} w_{k,n} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} (t_n - s)^{m-\alpha-1} ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} ds \right\} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds}_{J_1} + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-s)(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds}_{J_2} \right\} \end{aligned}$$

On a

$$J_1 = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds$$

on pose

$$u = (s - t_{k-1}) \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha}$$

Alors

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[ \frac{-1}{m-\alpha} (s-t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \frac{1}{\alpha} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{m-\alpha} ds \\ &= \frac{1}{m-\alpha} \left\{ -(n-k)^{m-\alpha} h^{m-\alpha+1} - \left[ \frac{1}{m-\alpha+1} (t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} \right\} \\ &= \frac{h^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} [-(m-\alpha+1)(n-k)^{m-\alpha} - (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k+1)^{m-\alpha+1}] \end{aligned}$$

Et

$$J_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s)(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds$$

on pose

$$\begin{aligned} u &= (t_{k+1} - s) \Rightarrow u' = -1 \\ v' &= (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J_2 &= \left[ \frac{-1}{m-\alpha} (t_{k+1} - s)(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} - \frac{1}{m-\alpha} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha} ds \\ &= \frac{1}{m-\alpha} \left\{ (n-k)^{m-\alpha} h^{m-\alpha+1} + \left[ \frac{1}{m-\alpha+1} (t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \right\} \\ &= \frac{h^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} [(m-\alpha+1)(n-k)^{m-\alpha} - (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1}] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} w_{k,n} &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} [J_1 + J_2] \\ &= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)} [(n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1}]. \end{aligned}$$

et pour  $k = n$ , on a :

$$\begin{aligned} w_{n,n} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{s - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_{n-1})(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} u &= (s - t_{n-1}) \Rightarrow u' = 1 \\ v' &= (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} w_{n,n} &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \left[ \frac{-1}{m-\alpha} (s - t_{n-1})(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} + \frac{1}{m-\alpha} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{m-\alpha} ds \right\} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha+1)} \left[ \frac{-1}{m-\alpha+1} (t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\ &= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$w_{k,n} = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)} \begin{cases} (n-1)^{m-\alpha+1} - n^{m-\alpha}(n-m+\alpha-1), & k=0. \\ (n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1}, & 1 \leq k \leq n-1. \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

### 2.3.3 Méthode de Simpson pour l'approximation des dérivées fractionnaires de Caputo

Dans cette méthode, on va approximer  $f^{(m)}(s)$  par un polynôme de degré 2 sur chaque sous intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ ,

$$\begin{aligned} f^{(m)}(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} \approx f(s)|_{[t_k, t_{k+1}]} &= \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})(t_k-t_{k+1})} f^{(m)}(t_k) + \frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1}-t_k)} f^{(m)}(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Donc l'intégrale (2.3.1) devient

$$\begin{aligned} [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &\approx [{}^c\mathcal{D}_0^\alpha g(t)]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[ \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})(t_k-t_{k+1})} f^{(m)}(t_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1}-t_k)} f^{(m)}(t_{k+1}) \right] ds \\ &= \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[ (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1) f^{(m)}(t_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(s-t_0)(s-t_1) f^{(m)}(t_{\frac{1}{2}}) + (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_0) f^{(m)}(t_1) \right] ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[ (s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_2) f^{(m)}(t_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(s-t_1)(s-t_2) f^{(m)}(t_{\frac{3}{2}}) + (s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_1) f^{(m)}(t_2) \right] ds + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[ (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_n) f^{(m)}(t_{n-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(s-t_{n-1})(s-t_n) f^{(m)}(t_{n-\frac{1}{2}}) + (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1}) f^{(m)}(t_n) \right] ds \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n e_{k,n} f^{(m)}(t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{e}_{k,n} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

avec

$$e_{k,n} = \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & k=0. \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & 1 \leq k \leq n-1. \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, & k=n. \end{cases}$$

et

$$\hat{e}_{k,n} = \frac{-4}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s-t_k)(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Pour  $k=0$ , on a

$$e_{0,n} = \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds.$$

on utilise l'intégration par partie, on pose :

$$\begin{aligned} u &= (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1) \Rightarrow u' = 2s - t_{\frac{1}{2}} - t_1. \\ v' &= (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha} (t_n-s)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} e_{0,n} &= \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds \\ &= \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha+1)} \left\{ \left[ -(t_n-s)^{m-\alpha} (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha} (2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1) ds \right\} \\ &= \frac{n^{m-\alpha} h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} - \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha+2)} \left\{ \left[ (2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1)(t_n-s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_0}^{t_1} + 2 \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha+1} ds \right\} \\ &= \frac{h^{m\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} \left\{ 4 \left[ n^{m-\alpha+2} - (n-1)^{m-\alpha+2} \right] - (m-\alpha+2) \left[ 3n^{m-\alpha+1} + (n-1)^{m-\alpha+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + (m-\alpha+1)(m-\alpha+2)n^{m-\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} e_{k,n} &= \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} (s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds}_{J_3} \\ &\quad + \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds}_{J_4}. \end{aligned}$$

On a

$$J_3 = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds.$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1}. \\ v' &= (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n - s)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{m-\alpha} \left\{ \left[ -(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha} ds \right\} \\ &= -\frac{1}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} \left\{ \left[ (2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_{k-1}}^{t_k} + 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{m-\alpha+1} ds \right\} \\ &\quad - \frac{h^{m-\alpha+2}(n-k)^{m-\alpha}}{2(m-\alpha)} \\ &= \frac{h^{m-\alpha+2}}{2(m-\alpha)(m-\alpha+1)(\alpha+2)} \left[ -(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha} - 3(\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha+1} \right. \\ &\quad \left. - (m-\alpha+2)(n-k+1)^{m-\alpha+1} - 4(n-k)^{m-\alpha+2} + 4(n-k+1)^{m-\alpha+2} \right]. \end{aligned}$$

Et

$$J_4 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{m-\alpha-1} ds.$$

On, pose

$$\begin{aligned} u &= (s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1}. \\ v' &= (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n - s)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{2}{h^2 \Gamma(m-\alpha+1)} \left\{ \left[ -(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{m-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})(t_n - s)^{m-\alpha} ds \right\} \\ &= -\frac{1}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)} \left\{ \left[ (2s - t_{k+\frac{1}{2}} - t_{k+1})(t_n - s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} + 2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha+1} ds \right\} \\ &\quad + \frac{h^{m-\alpha+2}(n-k)^{m-\alpha}}{2(m-\alpha)} \\ &= \frac{h^{m-\alpha+2}}{2(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)} \left[ (m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha} + 4(n-k)^{m-\alpha+2} \right. \\ &\quad \left. - (m-\alpha+2)(n-k-1)^{m-\alpha+1} - 4(n-k-1)^{m-\alpha+2} - 3(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha+1} \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} e_{k,n} &= J_3 + J_4 \\ &= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} \left\{ -(m-\alpha+2) [(n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} + 6(n-k)^{m-\alpha+1}] \right. \\ &\quad \left. + 4 [(n-k+1)^{m-\alpha+2} - (n-k-1)^{m-\alpha+2}] \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $k = n$

$$e_{n,n} = \frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds.$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{n-\frac{1}{2}} - t_{n-1}. \\ v' &= (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} e_{n,n} &= \frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+1)} \left[ -(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\ &\quad + \frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+1)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha} ds \\ &= \frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)} \left[ -(2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\ &\quad + \frac{4}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{m-\alpha+1} ds \\ &= \frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)} \left\{ \frac{-h^{m-\alpha+2}}{2} - \left[ \frac{2}{m-\alpha+2}(t_n-s)^{m-\alpha+2} \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \right\} \\ &= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} (2-m+\alpha). \end{aligned}$$

Et pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on a

$$\hat{e}_{k,n} = \frac{-4}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s-t_k)(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1} ds.$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= (s-t_k)(s-t_{k+1}) \Rightarrow u' = 2s - t_k - t_{k+1}. \\ v' &= (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{k,n} &= \frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \left[ (s-t_k)(s-t_{k+1})m - \alpha(t_n-s)^{m-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\
&\quad - \frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (2s-t_k-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha} ds \\
&= \frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \left\{ \left[ (2s-t_k-t_{k+1})m - \alpha(t_n-s)^{m-\alpha+1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} - 2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{m-\alpha+1} ds \right\} \\
&= \frac{4h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} \left\{ (m-\alpha+2) \left[ (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[ (n-k)^{m-\alpha+2} - (n-k-1)^{m-\alpha+2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$e_{k,n} = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} \begin{cases} 4 \left[ n^{m-\alpha+2} - (n-1)^{m-\alpha+2} \right] \\ \quad - (m-\alpha+2) \left[ 3n^{m-\alpha+1} + (n-1)^{m-\alpha+1} \right] \\ \quad + (m-\alpha+1)(m-\alpha+2)n^{m-\alpha}, & k=0. \\ \\ \quad - (m-\alpha+2) \left[ (n-k+1)^{m-\alpha+1} \right. \\ \quad \left. + (n-k-1)^{m-\alpha+1} + 6(n-k)^{m-\alpha+1} \right] \\ \quad + 4 \left[ (n-k+1)^{m-\alpha+2} - (n-k-1)^{m-\alpha+2} \right], & 1 \leq k \leq n-1. \\ \\ \quad 2-m+\alpha, & k=n. \end{cases}$$

et pour  $0 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{k,n} &= \frac{4h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)} \left\{ (m-\alpha+2) \left[ (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[ (n-k)^{m-\alpha+2} - (n-k-1)^{m-\alpha+2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

# RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, on donne des exemples numériques pour comparer les résultats exactes avec les résultats approchés obtenus par la méthode des rectangles, la méthode de Trapèze et la méthode de Simpson pour approximer l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

## 3.1 Exemples sur l'approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville

**Exemple 3.1.1.** Soit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction  $f$  :

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (3.1.1)$$

Considérer la fonction  $f(t) = t^{\beta}$ ,  $t \in [0, 1]$ . L'intégrale de de Riemann-Liouville de  $f$  est donnée par :

$$\mathcal{I}_0^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1, \alpha > 0. \quad (3.1.2)$$

En utilisant les méthodes numériques précédentes pour trouver des approximation numérique de l'intégrale de Riemann-Liouville de  $f$  pour  $\beta = 3.5$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$ .

☞ On applique la **méthode des rectangles** et on obtient les résultats suivantes :

n	t	Val.exact	Val.app	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.000001	0.000008	$6.553217 \times 10^{-6}$
3	0.200	0.000031	0.000099	$6.784414 \times 10^{-5}$
4	0.300	0.000236	0.000525	$2.896758 \times 10^{-4}$
5	0.400	0.000993	0.001829	$8.361424 \times 10^{-4}$
6	0.500	0.003029	0.004959	$1.929581 \times 10^{-3}$
7	0.600	0.007537	0.011388	$3.850548 \times 10^{-3}$
8	0.700	0.016291	0.023229	$6.937801 \times 10^{-3}$
9	0.800	0.031762	0.043351	$1.158829 \times 10^{-2}$
10	0.900	0.057237	0.075494	$1.825716 \times 10^{-2}$

TABLE 3.1 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchés obtenus par la méthode des rectangles de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

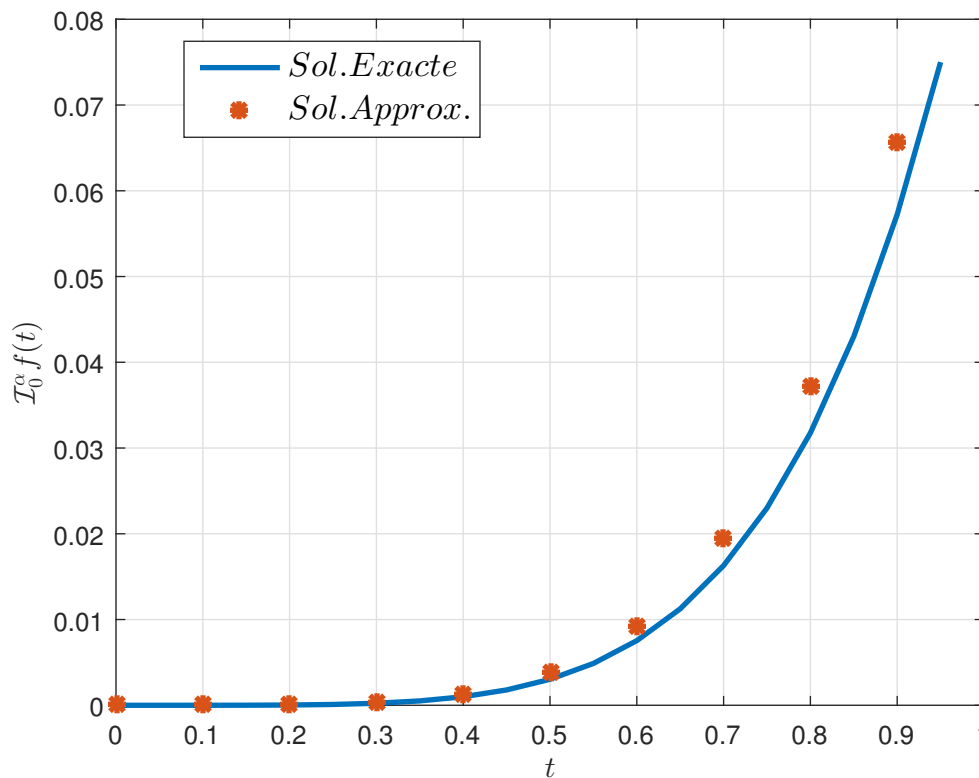


FIGURE 3.1 – Comparaison graphique des résultats exactes et numériques obtenus par la méthode des rectangles de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

☞ la méthode de Trapèze donne les résultats dans le tableau suivant :

n	t	Vall.exact	Val.app	Err $\alpha = \frac{3}{2}$
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.000001	0.000000	$9.693107 \times 10^{-7}$
3	0.200	0.000031	0.000045	$1.402865 \times 10^{-5}$
4	0.300	0.000236	0.000281	$4.553736 \times 10^{-5}$
5	0.400	0.000993	0.001099	$1.062296 \times 10^{-4}$
6	0.500	0.003029	0.003235	$2.057828 \times 10^{-4}$
7	0.600	0.007537	0.007891	$3.538798 \times 10^{-4}$
8	0.700	0.016291	0.016851	$5.602063 \times 10^{-4}$
9	0.800	0.031762	0.032597	$8.344500 \times 10^{-4}$
10	0.900	0.057237	0.058423	$1.186299 \times 10^{-3}$
11	1.000	0.096931	0.098557	$1.625444 \times 10^{-3}$

TABLE 3.2 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchés obtenus par la méthode de Trapèze de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

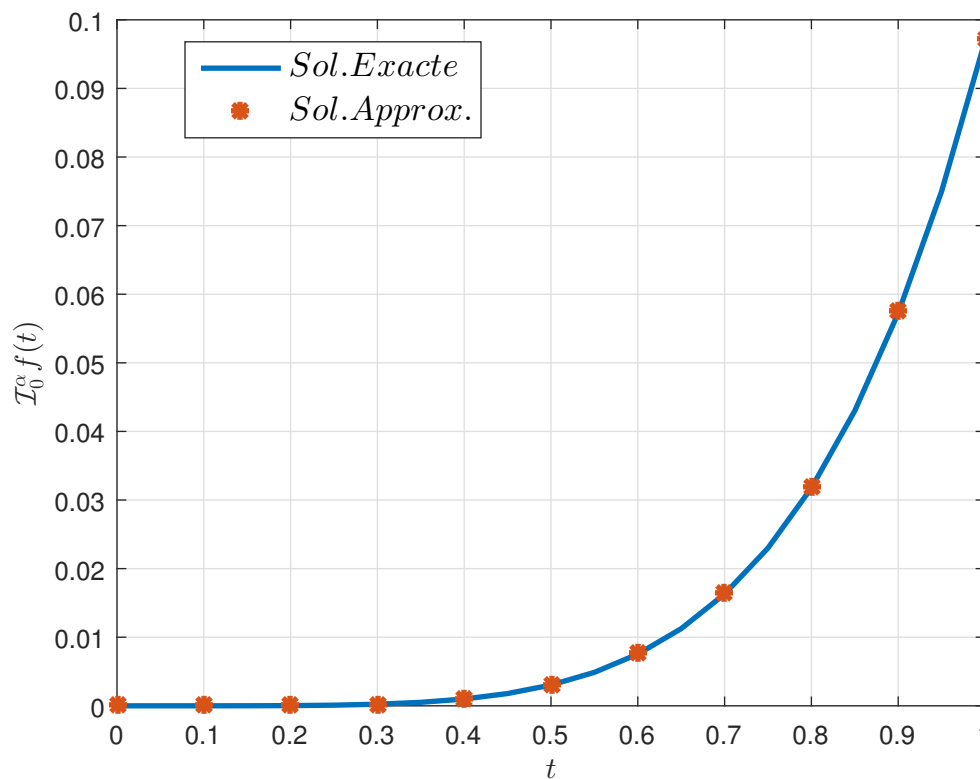


FIGURE 3.2 – Comparaison graphique des résultats exactes et numériques obtenus par la méthode de Trapèze de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

☞ Par la **méthode de Simpson** on obtient :

n	t	Vall.exact	Val.app	Err $\alpha = \frac{3}{2}$
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.000001	0.000000	$5.133767 \times 10^{-7}$
3	0.200	0.000031	0.000031	$1.899137 \times 10^{-7}$
4	0.300	0.000236	0.000235	$2.996659 \times 10^{-7}$
5	0.400	0.000993	0.000992	$4.111822 \times 10^{-7}$
6	0.500	0.003029	0.003029	$5.238315 \times 10^{-7}$
7	0.600	0.007537	0.007537	$6.372882 \times 10^{-7}$
8	0.700	0.016291	0.016290	$7.513581 \times 10^{-7}$
9	0.800	0.031762	0.031762	$8.659146 \times 10^{-7}$
10	0.900	0.057237	0.057236	$9.808692 \times 10^{-7}$
11	1.000	0.096931	0.096930	$1.096158 \times 10^{-6}$

TABLE 3.3 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchés obtenus par la méthode de Simpson de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

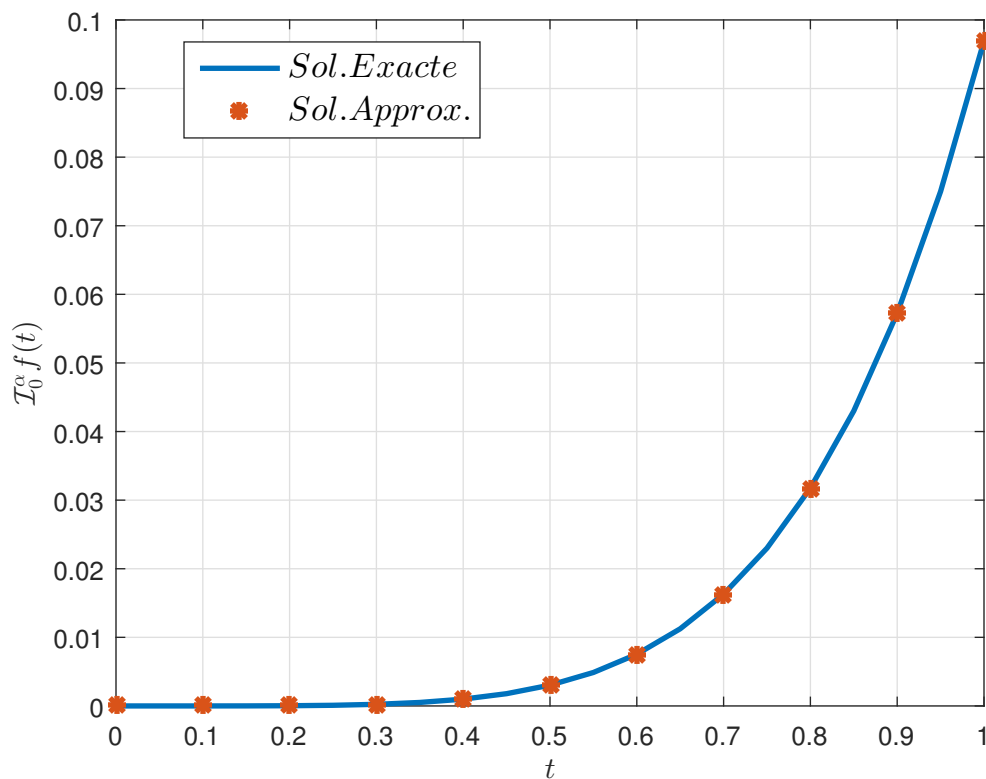


FIGURE 3.3 – Comparaison graphique des exactes et numériques obtenus par la méthode de Simpson de  $(\mathcal{I}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

## 3.2 Exemples sur les approximation des dérivées fractinnaire de Caputo

**Exemple 3.2.1.** Soit dérivées fractinnaire de Caputo d'ordre  $\alpha > 0$  de  $f$  :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \quad (3.2.1)$$

Considérer la fonction  $f(t) = t^\beta$ ,  $t \in [0, 1]$ . L'intégrale de de Riemann-Liouville de  $f$  est donnée par :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \quad \beta > -1, \alpha > 0. \quad (3.2.2)$$

Nous utilisons les méthodes numériques précédentes, nous trouvons les résultats d'approximation de la dérivée fractinnaire au sens de Caputo de  $f$  pour  $\beta = 3.5$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$  listés dans les tableaux suivant.

☞ Par la méthode des rectangle on obtient les résultats suivantes :

n	t	Val.exact	Val.app	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.058159	0.098733	$4.057454 \times 10^{-2}$
3	0.200	0.232635	0.320156	$8.752165 \times 10^{-2}$
4	0.300	0.523428	0.660087	$1.366591 \times 10^{-1}$
5	0.400	0.930538	1.117585	$1.870468 \times 10^{-1}$
6	0.500	1.453966	1.692239	$2.382734 \times 10^{-1}$
7	0.600	2.093711	2.383825	$2.901138 \times 10^{-1}$
8	0.700	2.849773	3.192202	$3.424288 \times 10^{-1}$
9	0.800	3.722153	4.117278	$3.951251 \times 10^{-1}$
10	0.900	4.710850	5.158986	$4.481364e-001 \times 10^{-1}$

TABLE 3.4 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchées obtenus par la méthode des rectangle de  $({}^c\mathcal{D}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

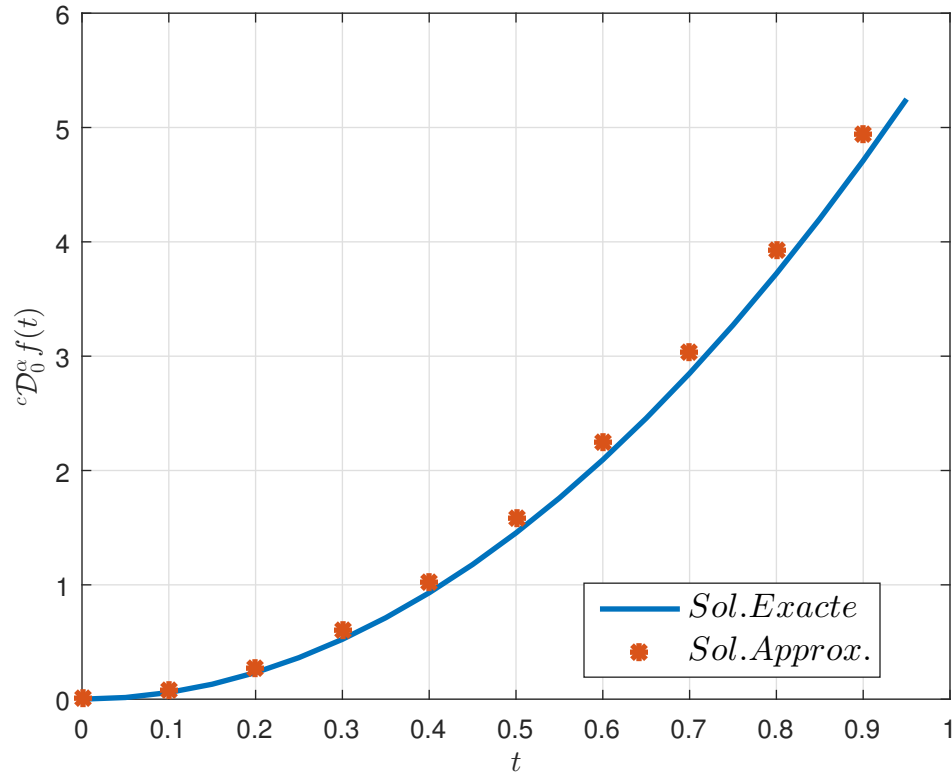


FIGURE 3.4 – Comparaison graphique des résultats exactes et numériques obtenus par la méthode des rectangle de  $({}^cD_0^{1.5} t^{3.5})$ .

☞ la méthode de Trapèze donne les résultats suivantes :

n	t	Vall.exact	Val.app	Err $\alpha = \frac{3}{2}$
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.058159	0.000000	$5.815864 \times 10^{-2}$
3	0.200	0.232635	0.240702	$8.067324 \times 10^{-3}$
4	0.300	0.523428	0.531750	$8.322545 \times 10^{-3}$
5	0.400	0.930538	0.939026	$8.488060 \times 10^{-3}$
6	0.500	1.453966	1.462572	$8.605679 \times 10^{-3}$
7	0.600	2.093711	2.102406	$8.694617 \times 10^{-3}$
8	0.700	2.849773	2.858538	$8.764857 \times 10^{-3}$
9	0.800	3.722153	3.730975	$8.822130 \times 10^{-3}$
10	0.900	4.710850	4.719720	$8.869980 \times 10^{-3}$
11	1.000	5.815864	5.824775	$8.910734 \times 10^{-3}$

TABLE 3.5 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchées obtenus par la méthode de Trapèze de  $({}^cD_0^{1.5} t^{3.5})$ .

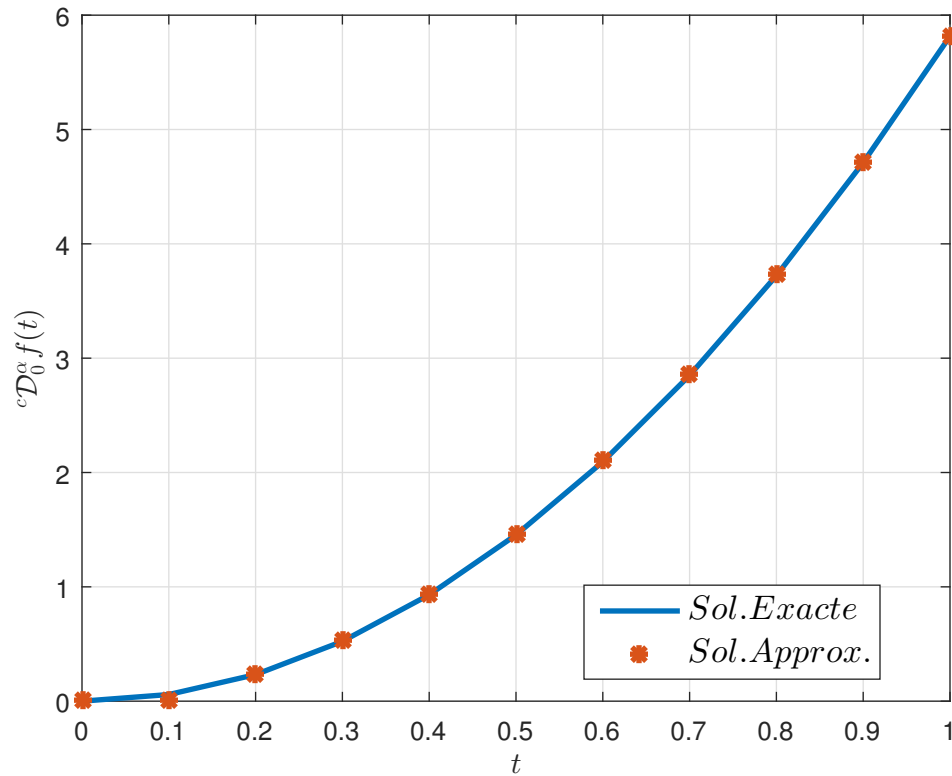


FIGURE 3.5 – Comparaison graphique des résultats exactes et numériques obtenus par la méthode de Trapèze de  $({}^cD_0^{1.5} t^{3.5})$ .

☞ Par la méthode de Simpson on a :

n	t	Vall.exact	Val.app	Err $\alpha = \frac{3}{2}$
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.100	0.058159	0.018617	$3.954134 \times 10^{-2}$
3	0.200	0.232635	0.232673	$3.833954 \times 10^{-5}$
4	0.300	0.523428	0.523473	$4.530507 \times 10^{-5}$
5	0.400	0.930538	0.930583	$4.495969 \times 10^{-5}$
6	0.500	1.453966	1.454009	$4.321822 \times 10^{-5}$
7	0.600	2.093711	2.093752	$4.126128 \times 10^{-5}$
8	0.700	2.849773	2.849813	$3.938883 \times 10^{-5}$
9	0.800	3.722153	3.722191	$3.767508 \times 10^{-5}$
10	0.900	4.710850	4.710886	$3.612743 \times 10^{-5}$
11	1.000	5.815864	5.815899	$3.473324 \times 10^{-5}$

TABLE 3.6 – Comparaison entre les résultats exactes et les résultats approchés obtenus par la méthode de Simpson de  $({}^cD_0^{1.5} t^{3.5})$ .

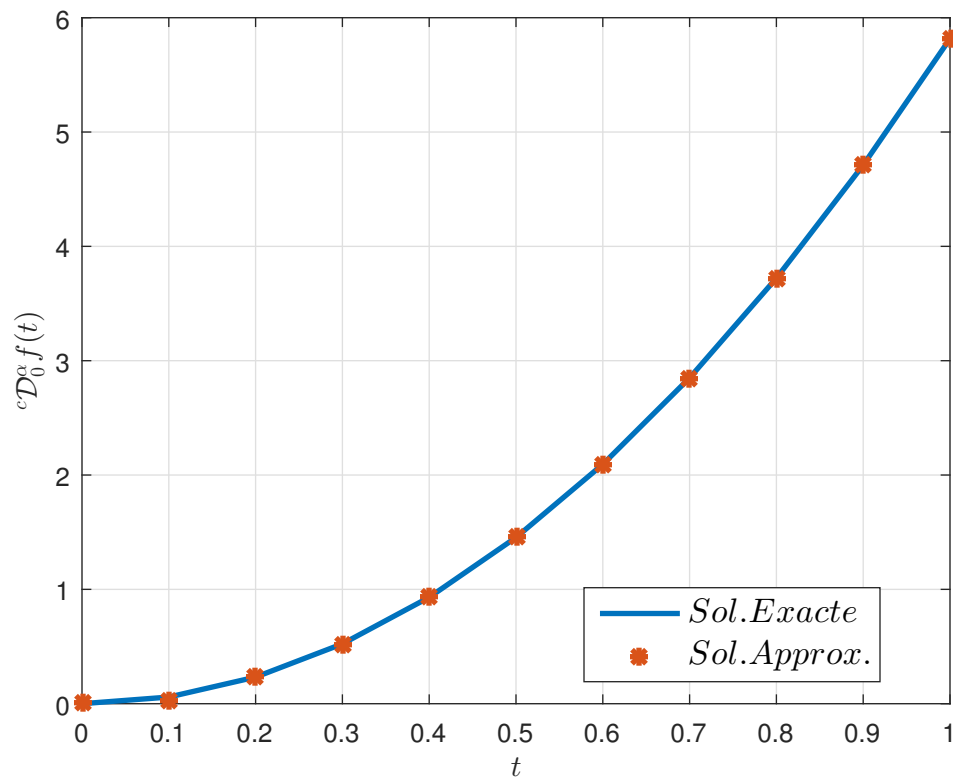


FIGURE 3.6 – Comparaison graphique des résultats exactes et numériques obtenus par la méthode de Simpson de  $({}^c\mathcal{D}_0^{1.5} t^{3.5})$ .

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire on a traité les méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale pour trouver des approximations de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de la dérivée au sens Caputo à savoir, méthode des Rectangle, méthode de Trapèze et méthode de Simpson. Cette étude est illustrée à la fin de ce mémoire par des exemples numérique.

---

# Bibliographie

---

- [1] T. Blaszczyk, J. Siedlecki, M. Ciesielski, Numerical algorithms for approximation of fractional integral operators based on quadratic interpolation. *Math Meth Appl Sci*, 1-11 , 2018.
- [2] I. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko, Algorithms for the Fractional Calculus :A Selection of Numerical Methods, *Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17 March 2003.
- [3] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, *L'école polytechnique de Montréal*.
- [4] M.K. Ishteva, Praperties and Applications of the Caputo Fractional Operator, *Department of Mathematics, Karlsruhe University, Bulgaria*, February 2005.
- [5] F. Jędrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. Springer, Paris 2005.
- [6] A. J. Jerri, Introduction to integral equations with applications. *John Wiley and Sons, INC*, 1999.
- [7] K. Kamlesh, K. Rajesh, Pancley, Shiva Sharma. Approximtions of fractional integrals and Caputo derivatives with appliction in solving Abel's integral equations. *Journal of King Saud University*, 2018.
- [8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujllo. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [9] R. Kress. An approximation of the fractional integrals using quadratic interpolation. *New York*. 1998.
- [10] C. Li, M. Cai, Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives. *Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia. Shanghai University*, February 2019.
- [11] Mujeeb ur Rehman, I. Amna, S. Umer, A quadrature method for numerical solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 307 : 38 - 49, 2017.
- [12] Z. Odibat. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, *Applied mathematics and computation* 178 : 527 - 533, 2006.

## ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة التكاملات الكسرية عدديا باستخدام طرق عددية تستند إلى تعدد الحدود و ذلك لإيجاد قيم تقريبية لتكامل ريمان-ليوفيل الكسري ومشتق كابوتو باستعمال طريقة المستطيل ، طريقة ترابيز وطريقة سيمبسون . و في الأخير ترفق النتائج المحصل عليها بأمثلة عددية توضيحية .

**كلمات مفتاحية:** التكامل الكسري لريمان-ليوفيل ، المشتقات الكسرية لكابوتو، التقريب العددي ، طريقة المستطيل، طريقة ترابيز ، طريقة سيمبسون

---

## Résumé :

l'objectif de ce mémoire est d'étudier numériquement les opérateurs intégraux d'ordre fractionnaires en utilisant des méthodes basées sur l'interpolation polynomiale pour obtenir des solutions approximatives de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo, en utilisant la méthode des rectangle, la méthode de Trapèze et La méthode de Simpson. Enfin, les résultats obtenus sont accompagnés par des exemples numériques illustratifs.

**Mots-Clés :** intégral fractionnaire de Riemann-Liouville, Dérivée fractionnaire de Caputo, approximation numérique, Méthode des rectangles, Méthode de Trapèze, Méthode de Simpson

---

## Abstract :

The objective of this memory is to study the fractional order integral operators using numerical methods based on the polynomial interpolation to obtain the approximate values of Riemann-Liouville fractional integral and Caputo fractional derivative using the rectangular method , the Tzapezoidal method , and Simpson's method. Finally, the results obtained are accompanied by illustrative numerical examples

**Keywords :** Riemann-Liouville fractional integral, Caputo fractional derivative, Numerical approximations,rectangular method, Tzapezoidal method, Simpson's method