



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP's et application

Thème

*Sur la stabilité d'une équation de diffusion nonlinéaire
avec une condition initiale perturbée*

Présentée par :

Chenene Soumia

Membres du jury :

Bounab Noura	MCB,	Université de M'sila	Président.
Sengouga Abdelmouhcene	MCA,	Université de M'sila	Encadreur.
Arioua Yacine	MCA,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2019 / 2020

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **ALLAH** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier Dr. A. Sengouga pour sa disponibilité ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à exprimer tout mes respects ma mère , mon frère et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

ملخص

ندرس في هذا العمل معادلة الانتشار اللاخطي :

$$u_t + \lambda f(u) = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, 0 < t,$$

مع شروط الحدود المتجانسة

$$u(0, t; \varepsilon) = u(\pi, t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0,$$

و اضطراب صغير في الحالة الاولية

$$u(x, 0; \varepsilon) = \varepsilon h(x).$$

و لدينا $\varepsilon > 0$ عبارة عن معامل صغير $\lambda > 0$ ثابت و f دالة فردية سلسلة.

نحصل على نشر مقارب للحل من خلال فصل المتغيرات و طريقة السلاالم المتعددة. ندرس الاستقرار بالنسبة الزمن للحلول التي تم الحصول عليها المتعلقة بالاضطراب البسيط في الحالة الاولية , و نتحقق من هذا الاستقرار من خلال حلول عددية الذي تحصلنا عليها باستخدام طريقة الفروق المحدودة.

Abstract

We study in this work following nonlinear diffusion equation

$$u_t + \lambda f(u) = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, 0 < t,$$

with the homogeneous boundary conditions

$$u(0, t; \varepsilon) = u(\pi, t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0,$$

and a small perturbation in initial condition

$$u(x, 0; \varepsilon) = \varepsilon h(x).$$

Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $\lambda > 0$ is a constant and f is a smooth odd function. We obtain an asymptotic solution by separating the variables and multiple scales method, we study the stability in time of the obtained solutions with respect to small perturbation in initial condition, and we check this stability with numerical solutions obtained by the finite difference method.

Résumé

Nous étudions dans ce travail l'équation de diffusion non linéaire

$$u_t + \lambda f(u) = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, 0 < t,$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$u(0, t; \varepsilon) = u(\pi, t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0,$$

et une petite perturbation en condition initiale

$$u(x, 0; \varepsilon) = \varepsilon h(x).$$

Ici $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, $\lambda > 0$ est une constante et f est une fonction régulière et impaire.

Nous obtenons une solution asymptotique en utilisant la méthode de séparation des variables et méthode des échelles multiples, nous étudions la stabilité dans le temps des solutions obtenues par rapport à la petite perturbation en condition initiale, et nous vérifierons cela avec des solutions numériques obtenue par la méthode des différences finies.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Equation différentielle du premier ordre non linéaire	3
1.1.1 Equation de Bernoulli	3
1.1.2 Equation de Landau	3
1.2 Série de Fourier	5
1.2.1 Série de complète de Fourier :	5
1.2.2 Série sinus de Fourier	6
1.3 Rappels d'analyse asymptotiques	6
1.3.1 Symboles d'ordre	6
1.3.2 Approximation asymptotiques	7
1.3.3 Développements asymptotiques	7
1.3.4 Uniformité	8
1.3.5 Méthode des échelles Multiples	8
2 Faible stabilité non linéaire	14
2.1 Formulation du Problème	14
2.2 Solution du problème linéarisé	15
2.3 Expansion à échelles multiples	18
2.3.1 Calcul de v_0	19
2.3.2 Equation de v_1	21
2.3.3 Calcul de $B_1(t_2)$	23

3	Quelques résultats numériques	26
3.1	Application des différences finis pour l'équation de la chaleur	27
3.2	Application des différences finis pour l'équation de diffusion nonlinéaire	29
3.3	Quelques exemples	34
	Bibliographie	39

Introduction

Dans ce travail, nous considérons un problème de diffusion relativement simple pour illustrer une méthode de traitement de stabilité des problèmes dynamique non linéaire. Plus précisément, nous considérons l'équation

$$u_t + \lambda f(u) = u_{xx}, \quad \lambda = \text{constant}$$

où t est le variable du temps, et $0 < x < \pi$, nous supposons que f est une fonction impaire régulière en u . Des conditions aux limites nulles sont imposé sur la solution à $x = 0$, π et de la condition initiale perturbée

$$u(x, 0; \varepsilon) = \varepsilon h(x),$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre.

Ce problème est un modèle mathématique de distribution de température dans une barre avec une source de chaleur non linéaire de grandeur $-\lambda f(u)$ et dont la température au extrémités est prescrite pour être nulle. Nous souhaitons étudier la stabilité de la distribution du température d'équilibre $u_0 = 0$. Pour cela, nous devons déterminer s'il peut se soutenir contre des perturbations dans les conditions initiales . C'est-à-dire que nous devons voir si toutes les perturbations convergent vers zéro, lorsque le temps t devient suffisamment grand, ou si certaines perturbations se développent pour donner peut être de nouvelles solutions stationnaires (indépendantes du temps) de ce problème. Nous étudions donc l'évolution temporelle de la solution avec une condition initiale représentant des perturbation d'ordre ε .

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des rappel sur quelques équations différentielles du premier ordre non linéaire, utilisé dans la suite, comme l'équation de Bernoulli et l'équation de Landau ainsi que leurs méthode de résolution. On rappelle aussi quelques notions d'analyse

asymptotique l'approximation et on explique la méthode des échelle multiple sur un exemple modèle.

Dans le deuxième chapitre, pour déterminer la stabilité d'une petite perturbation de l'équation diffusion non linéaire, nous utilisons deux modèles simples pour illustrer le comportement asymptotique des solutions , on convertie ce problème par un problème linéaire non perturbé par $\varepsilon = 0$, en appliquant la méthode de la séparation des variables pour résoudre la solution de l'équation linéaire et pour atteindre la stabilité hydrodynamique on utilise la méthode asymptotique qui est la méthode des échelles multiples.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique du problème considéré, Pour cela nous utilisons la méthode des différences finies de Crank-Nicolson basé sur une idée de [6]. Ensuite on vérifie cette stabilité sur quelques exemples avec différent conditions initiales.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equation différentielle du premier ordre non linéaire

1.1.1 Equation de Bernoulli

Definition 1.1 On appelle équation différentielle de type de Bernoulli tout équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (1.1)$$

où $r \in \mathbb{R}$; p et q sont deux fonctions définies continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Remark 1.1

1. Si $n = 0$ l'équation (1.1) devient une équation linéaire avec second nombre.
2. Si $n = 1$ l'équation (1.1) devient une équation linéaire homogène sous forme $y' + (a(x) - b(x))y = 0$.
3. Si $n \notin \{0, 1\}$ tout équation différentielle de type de Bernoulli peut être transformée a une équation linéaire.

1.1.2 Equation de Landau

Landau a décrit l'instabilité par l'équation

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4 \quad (1.2)$$

Pour l'amplitude $|A|$ du mode dominant. Ici l est appelé *constante de Landau*. L'équation (1.2) est appelée équation de Landau.

Remark 1.2

1. Si $l = 0$, (1.2) est une équation linéaire.
2. Le deuxième terme sur la coté droit de (1.2) est la non-linéarité et peut modérer ou accélérer le taux de croissance exponentielle de la perturbation linéaire selon le signe de σ et l .

Récriture (1.2) en équation linéaire

$$\frac{d|A|^{-2}}{dt} + 2\sigma|A|^{-2} = l$$

on trouve sa solution comme

$$|A|^{-2} = \frac{l}{2\sigma} + (A_0^{-2} - \frac{l}{2\sigma})e^{-2\sigma t} \tag{1.3}$$

ou

$$|A|^2 = \frac{A_0^2}{\frac{1}{2\sigma}A_0^2 + (1 - \frac{1}{2\sigma}A_0^2)e^{-2\sigma t}}. \tag{1.4}$$

Constante de Landau $l > 0$

Considérons d'abord $\sigma < 0$ et (1.4) montre que

$$|A| \sim A_0 e^{\sigma t}.$$

Ainsi $|A| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ quelle que soit la valeur de A_0 . Ceci confirme la théorie linéaire.

Par contre supposons que $l > 0$ mais $\sigma > 0$. Alors a solution de (1.4) donne

$$|A| \longrightarrow \text{constante } A_e = (2\sigma/l)^{1/2} \quad \text{lorsque } t \longrightarrow \infty, \tag{1.5}$$

quelle que soit la valeur de A_0 . Cela s'appelle la stabilisation supercritique. On dit que la perturbation s'équilibre parce que son amplitude tend vers A_e après une longue période.

Ainsi, lorsque $\sigma \ll 1$, A_e est petit même si des termes d'ordre supérieur ont été inclus dans le coté droit de (1.2). Par analyse de stabilité locale de l'état $|A| = 0$ et $|A| = A_e$ on voit que $|A| = 0$ stable pour $\sigma < 0$ et instable pour $\sigma > 0$ où A_e est stable pour $\sigma > 0$ (Mettez $A = A_e + A'$ et linéariser en rejetant les termes d'ordre quadratique et supérieur).

Constante de Landau $l < 0$

Si $\sigma > 0$ et que les deux termes sur le coté droit de (1.2) sont positif et donc $|A|$ augmente super exponentiellement. . Equation (1.4) montre que la solution se décompose après un temps fini $|A|$ devient infini à

$$t = \frac{1}{2\sigma} \ln\{1 + 2\sigma/(-lA_0^2)\}.$$

Bien entendu, ce type de panne ne se produit pas dans la pratique; il souligne plutôt la nécessité de termes d'ordre supérieur (qui ont été négligés jusqu'à présent) dans (1.2).

Si $\sigma < 0$ et les deux termes sur le coté droit de (1.2) sont de signe opposé. La première ou la seconde étant de plus ou moins grande ampleur selon que $|A|$ est respectivement inférieur ou supérieur à

$$A_e \equiv \{(-2\sigma)/(-l)\}^{1/2}.$$

En réalité (1.4) montre que $A_0 < A_e$ alors

$$|A| \sim \frac{A_0 A_e e^{\sigma t}}{A_e^2 - A_0^2} \quad \text{pour } t \rightarrow \infty$$

et si $A_0 > A_e$ et $|A| \rightarrow \infty$ alors

$$t = \frac{1}{2\sigma} \ln\left(\frac{A_0^2}{A_0^2 - A_e^2}\right).$$

Dans ce cas A_e est un valeur seuil car si $A_0 < A_e$ alors $|A| \rightarrow 0$ comme $t \rightarrow \infty$ et si $A_0 > A_e$ alors la solution se décompose après un temps fini. L'inclusion de termes d'ordre supérieur pourrait rendre cette désintégration moins irréaliste. Ce cas est appelé *instabilité sous-critique* car l'instabilité peut se produire avec une amplitude finie $|A| > A_e$ lorsque toutes les perturbations infinitésimales sont stables.

1.2 Série de Fourier

1.2.1 Série de complète de Fourier :

1/ La série complète de Fourier, ou simplement la série de Fourier, d'une fonction $f \in L^1(-l, l)$ définie sur l'intervalle $-l < x < l$, est définie comme

$$A_0 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.6)$$

et A_0, A_n et B_n sont données par :

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (1.7)$$

où

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.8)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.9)$$

2/ Si $f \in L^2(-l; l)$, on a le résultat classique suivant

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l |f(x) - \sum_{n=1}^N (A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l})|^2 dx = 0.$$

Dans ce sens, on écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l}).$$

1.2.2 Série sinus de Fourier

La série sinus de Fourier, d'une fonction $f \in L^2(0, l)$ définie sur l'intervalle $0 < x < l$, est définie comme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (1.10)$$

1.3 Rappels d'analyse asymptotiques

1.3.1 Symboles d'ordre

Pour définir une approximation asymptotique, nous devons d'abord introduire des symboles d'ordre. La raison en est que nous nous intéresserons à la façon dont les fonctions se comportent lorsque un paramètre, typiquement ε , devient petit.

Definition 1.2

1. $f(x) = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ signifie qu'il y a des constantes A et ε_1 (indépendantes de ε) de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq A|\phi(\varepsilon)| \text{ pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Nous disons que " f " est grand O de " ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. $f(x) = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ signifie que pour tout α positif il y a un ε_1 (indépendant de ε), de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq \alpha |\phi(\varepsilon)|. \quad \text{pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Nous disons que " f " est petit o de " ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.3.2 Approximation asymptotiques

Definition 1.3 Etant donné $f(\varepsilon)$ et $\phi(\varepsilon)$, nous disons que $\phi(\varepsilon)$ est une approximation asymptotique à $f(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, chaque fois que $f(\varepsilon) = \phi(\varepsilon) + o(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ce cas, nous écrivons

$$f \sim \phi, \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En particulier, nous avons cela $f \sim \phi$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 1.$$

Theorem 1.1

1. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L \quad \text{telle que } -\infty < L < +\infty,$$

alors, $f(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

2. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0,$$

alors, $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

1.3.3 Développements asymptotiques

Definition 1.4

1. Les fonctions $\phi_0(\varepsilon), \phi_1(\varepsilon), \dots$, forment une séquence asymptotique ou sont bien ordonnées, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ si, et seulement si $\phi_{m+1} = o(\phi_m)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour tous m .

2. Si $\phi_0(\varepsilon), \phi_1(\varepsilon), \dots$, est une séquence asymptotique, alors $f(\varepsilon)$ a une développement asymptotique à n termes, par rapport à cette séquence si, et seulement si

$$f = \sum_{k=0}^m a_k \phi_k + o(\phi_m), \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, n \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

où les a_k sont indépendants de ε . Dans ce cas, nous écrivons

$$f \sim a_0\phi_0(\varepsilon) + a_1\phi_1(\varepsilon) + \cdots + a_n\phi_n(\varepsilon), \quad \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0 \quad (1.12)$$

les ϕ_k sont appelés les fonctions d'échelle.

1.3.4 Uniformité

Definition 1.5 Supposons que $f(x; \varepsilon)$ et $\phi(x; \varepsilon)$ sont des fonctions continues pour $x \in I$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Dans ce cas, $\phi(x, \varepsilon)$ est une approximation asymptotique uniformément valide de $f(x; \varepsilon)$ pour $x \in I$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ si, étant donné une constante positive δ , il y a un ε_0 (indépendant de x et ε), tel que

$$|f - \phi| \leq \delta|\phi|, \quad \text{pour } x \in I \text{ et } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Le point critique dans cette définition, est qu'il est possible de trouver un intervalle ouvert près de $\varepsilon = 0$ (spécifiquement, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$), de sorte que l'inégalité est valable pour toutes les valeurs de x qui sont à l'étude. C'est essentiellement l'idée utilisée pour définir la convergence uniforme.

1.3.5 Méthode des échelles Multiples

Nous allons étudier les idées sous-jacentes de la méthode en passant par un exemple relativement simple [2]. Le problème à considérer est de trouver la fonction $y(t)$ qui satisfait

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0 \quad \text{pour tout } t > 0 \quad (1.13)$$

et

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1. \quad (1.14)$$

Expansion régulière

On suppose que

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots. \quad (1.15)$$

En substituant dans 1.13, on obtient

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon y_0' + y_0 + \varepsilon y_1 = 0.$$

Pour $\varepsilon = 0$, on trouve

$$y_0'' + y_0 = 0,$$

et pour l'ordre ε , on trouve

$$y_1'' + y_1 = -y_0'.$$

Pour les conditions initiales, en remplaçant (1.15) dans (1.14), on vient

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 1.$$

alors, il faut trouver

$$y_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_0'(0) = 1,$$

$$y_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_1'(0) = 0.$$

Maintenant on peut trouver y_0 la solution de le problème

$$O(1) : \begin{cases} y_0'' + y_0 = 0 \\ y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \end{cases} . \quad (1.16)$$

On calcule la solution de cette équation différentielle :

l'équation caractéristique donne par

$$r^2 + 1 = 0 \implies r^2 = -1$$

alors, la solution de (1.16) est

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

et dans les conditions initiales, on trouve $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$, donc,

$$y_0(t) = \sin t. \quad (1.17)$$

En cherchant y_1 la solution de le problème

$$O(\varepsilon) : \begin{cases} y_1'' + y_1 = -\cos t \\ y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

la solution générale de cette équation différentielle est donnée par

$$y_1(t) = y_{1h}(t) + y_{1p}(t).$$

On calcule $y_{1h}(t)$ et $y_{1p}(t)$:

De même manière dans le problème $O(1)$; on obtient la solution homogène

$$y_{1h}(t) = 0,$$

et pour trouver la solution particulière $y_{1p}(t)$ on suppose qu'il prend la forme

$$y_{1p}(t) = t(A \cos t + B \sin t).$$

alors.

$$y_{1p}'' = -2A \sin t + 2B \cos t - t(A \cos t + B \sin t).$$

on remplace ces deux dernières expressions dans l'équation (1.18), il vient

$$y_{1p}(t) = -\frac{1}{2}t \sin t,$$

donc,

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}t \sin t,$$

et enfin, on a à partir de cette dernière avec (1.15) et (1.17), on trouve une approximation $O(\varepsilon)$ donné par

$$\boxed{y(t) \sim \sin t - \frac{t}{2}\varepsilon \sin t.} \quad (1.19)$$

Expansion à échelles multiples

Il est évident que la méthode ne donne pas une bonne approximation de la solution pour $0 \leq t < +\infty$. En effet, le second terme de l'expansion (1.19) est plus grand que le premier terme lorsque $\varepsilon t \approx 1$. Pour cette raison, le second terme est dit être un terme séculaire, et pour que l'expansion soit bien ordonné, c. -à-d. nous devons avoir $\varepsilon t \ll 1$. Le problème avec cette méthode vient du faite que la solution exacte du problème (1.13) décroissant, mais on a si $t \rightarrow +\infty$ le premier terme de (1.19) ne décroît pas, Le second terme tente de compenser pour cela, et dans le processus, il devient finalement aussi grand que le premier terme.

Pour construire une approximation valable pour t de l'ordre $O(\frac{1}{\varepsilon})$ on utilise la méthode des échelles multiples de temps dans le problème on introduit les variables

$$t_1 = t \quad (1.20)$$

et

$$t_2 = \varepsilon^\alpha t. \quad (1.21)$$

Sur la base de la discussion précédente de la solution exacte, il est prévu que $\alpha = 1$. Cependant, nous en déduirons plus tard lors de la construction de l'expansion de la solution. Ces deux échelles de temps seront traitées comme indépendantes. Une conséquence de ceci est que la dérivée temporelle d'origine se transforme comme suit :

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{dt_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial t_2}.$$

La substitution en (1.13) et (1.14) donne

$$(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon^\alpha \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^{2\alpha} \partial_{t_2}^2)y + \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon^\alpha \partial_{t_2})y + y = 0, \quad (1.22)$$

où

$$y = 0 \quad \text{et} \quad (\partial_{t_1} + \varepsilon^\alpha \partial_{t_2})y = 0 \quad \text{pour} \quad t_1 = t_2 = 0. \quad (1.23)$$

Pour simplifier la notation, nous utilisons le symbole ∂_{t_1} à la place de $\frac{\partial}{\partial t_1}$ (et même pour ∂_{t_2}). Les avantages de l'introduction de ces deux variables temporelles ne sont pas encore. En fait, on pourrait faire valoir que nous avons rendu le problème plus difficile depuis que l'équation différentielle ordinaire d'origine a été transformé en une équation partielle. Les raisons de ce choix deviendront évidentes dans la discussion qui suit. Il convient de souligner que la solution de (1.22) et (1.23) n'est pas unique et que nous devons imposer plus de conditions d'unicité à la solution. Cette liberté nous permettra de terme séculier dans l'expansion (au moins sur les échelles de temps nous allons utiliser).

Nous allons maintenant utiliser une expansion en série de puissance de la forme

$$y \sim y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \dots$$

La remplaçant par (1.22) donne

$$(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon^\alpha \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^{2\alpha} \partial_{t_2}^2)(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon^\alpha \partial_{t_2})(y_0 + \dots) + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0. \quad (1.24)$$

Dans cette expression et (1.23) on obtient le premier problème

$$O(1) : \quad \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_0 = 0 \\ y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} y_0 = 0 \quad \text{où} \quad t_1 = t_2 = 0. \end{cases}$$

La solution générale du problème est

$$y_0 = a_0(t_2) \sin t_1 + b_0(t_2) \cos t_1, \quad (1.25)$$

où

$$a_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad b_0(0) = 0. \quad (1.26)$$

Pour le moment, les coefficients $a_0(t_2)$ et $b_0(t_2)$ sont des fonctions arbitraires de t_2 sauf qu'ils sont nécessaires pour satisfaire la valeur initiale conditions données en (1.26).

Pour aller loin, nous devons déterminer l'échelle de temps lent (1.21). Pour ce faire, notons que dans l'équation $O(\varepsilon)$ obtenue à partir de (1.24) nous aurons le terme $\partial_{t_1} y_0$. Il n'est difficile de vérifier que cela entraînera l'apparition d'un terme séculaire dans l'extension. Cependant, cela peut être évité si nous utilisons la dépendance de y_0 sur l'échelle de temps t_2 . Dans (1.24), le seul terme à notre disposition qui peut être utilisé pour empêcher un terme particulier est $2\varepsilon^\alpha \partial_{t_1} \partial_{t_2} y_0$. En équilibrant cela avec $\varepsilon \partial_{t_1} y_0$ nous donne $\alpha = 1$. Avec ceci et les conditions initiales dans (1.23), nous obtenons le problème suivant :

$$O(\varepsilon) : \quad \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = -2\partial_{t_1} \partial_{t_2} y_0 - \partial_{t_1} y_0 \\ y_1 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{t_1} y_1 = -\partial_{t_2} y_0 \quad \text{où} \quad t_1 = t_2 = 0. \end{cases}$$

Dans (1.25), l'équation différentielle de y_1 est

$$(\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = (2b'_0 + b_0) \sin t_1 - (2a'_0 + a_0) \cos t_1.$$

La solution générale de ce problème donne par

$$y_1 = a_1(t_2) \sin t_1 + b_1(t_2) \cos t_1 - \frac{1}{2}(2b'_0 + b_0) \cot t_1 - \frac{1}{2}(2a'_0 + a_0) \sin t_1, \quad (1.27)$$

où

$$a_1(0) = a'_0(t_2) \quad \text{et} \quad b_1(0) = 0. \quad (1.28)$$

Dans (1.27), nous avons la possibilité de termes séculaires dans l'expansion.

Cependant, les fonctions a_0 et b_0 peuvent être choisies pour éviter cela. (1.27) et (1.26) nous trouvons que

$$2b'_0 + b_0 = 0 \quad \text{et} \quad 2a'_0 + a_0 = 0.$$

Alors

$$b_0(t_2) = \beta_0 e^{-t_2/2} \quad \text{et} \quad a_0(t_2) = \alpha_0 e^{-t_2/2}.$$

Donc

$$b_0(t_2) = 0 \text{ et } a_0(t_2) = e^{-t_2/2}.$$

Dans le dernière étape, nous imposons les conditions initiales données en (1.26).

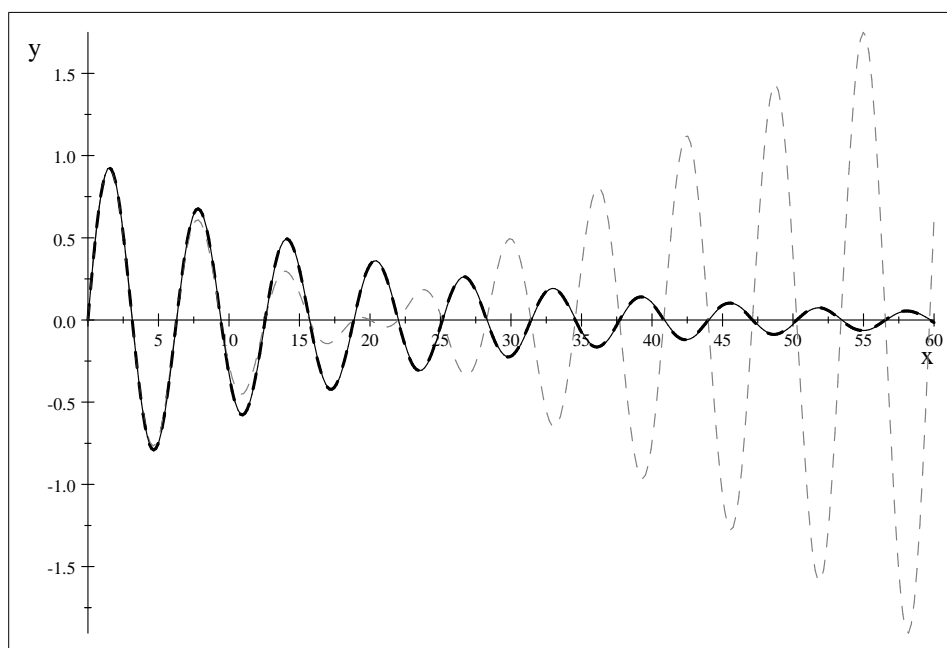
En rassemblant nos résultats, nous avons trouvé que

$$y \sim e^{-\varepsilon t/2} \sin t.$$

Il s'agit d'une approximation de premier terme valable jusqu'à au moins $\varepsilon t = O(1)$. Cette approximation et la solution exacte

$$y_{exact} = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}} \sin \left(t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right).$$

sont représentées sur la figure 1 pour $\varepsilon = 0.1$, à partir de laquelle il est clair que le résultat à plusieurs échelles est assez bon. En fait, on peut prouver qu'il s'agit d'une approximation asymptotique uniformément valide de la solution pour $0 \leq t \leq O(\frac{1}{\varepsilon})$.



— Solution Exact,
 - - - Solution obtenue par multiple scales,
 - . - . Solution obtenue par expansion régulière.

Chapitre 2

Faible stabilité non linéaire

Dans ce chapitre, nous utilisons un modèle mathématiques simples pour illustrer le comportement asymptotique des solutions pour une classe nonlinéaire de problèmes qui se posent dans la stabilité hydrodynamique, voire [1].

2.1 Formulation du Problème

On étudie l'équation de diffusion non linéaire du modèle

$$u_t + \lambda f(u) = u_{xx}, \quad \lambda = \text{constant}$$

en fonction du paramètre λ dans l'intervalle $0 < x < \pi$ avec des conditions aux limites nulles à $x = 0, \pi$, et a *petite perturbation initiale*.

Pour être plus précis, supposons que f est impair en u et ne gardons que deux termes dans son expansion de Taylor, c'est à dire, nous supposons que $f(u)$ peut être étendu dans une série de *Taylor* en u au voisinage de $u = 0$ avec

$$f(0) = 0, f'(0) < 0, f''(0) = 0 \text{ et } f'''(0) > 0.$$

Remettons aussi les variables

$$t \mapsto |\lambda f'(0)| t \text{ et } u \mapsto \sqrt{\frac{6 |f'(0)|}{f'''(0)}} u$$

de sorte que l'équation s'écrit de la forme (en conservant la notation de la solution par u)

$$\lambda |f'(0)| (u_t - u + u^3) = u_{xx}, \quad \lambda = \text{constant}$$

et on notant

$$R = \lambda |f'(0)|,$$

l'équation s'écrit avec un paramètre qui multiplie le terme u_{xx} . Ainsi, considérons

$$u_t - u + u^3 = \frac{1}{R}u_{xx}, \quad R = \text{constant} > 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$u(0, t; \varepsilon) = u(\pi, t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

et condition initiale

$$u(x, 0; \varepsilon) = \varepsilon g(x). \quad (2.3)$$

Ici ε est un petit paramètre positif qui mesure l'amplitude de la perturbation initiale et le paramètre R est $O(1)$. Il est commode de redimensionner la variable dépendante

$$u = \varepsilon v \text{ avec } v = O(1)$$

pour que (2.1) s'écrit

$$\varepsilon v_t - \varepsilon v + \varepsilon^3 v^3 = \varepsilon \frac{1}{R} v_{xx}.$$

Dans la suite on s'intéresse l'équation de diffusion suivant

$$\begin{cases} v_t - v + \varepsilon^2 v^3 = \frac{1}{R} v_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t, \\ v(0, t; \varepsilon) = v(\pi, t; \varepsilon) = 0, & t > 0 \\ v(x, 0; \varepsilon) = g(x). \end{cases} \quad (2.4)$$

où le terme nonlinéaire est multiplié par ε^2 .

2.2 Solution du problème linéarisé

Considérons d'abord le problème linéaire non perturbé pour $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} v_t - v = \frac{1}{R} v_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t, \\ v(0, t; 0) = v(\pi, t; 0) = 0, & t > 0 \\ v(x, 0; 0) = g(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

Séparation des variables : On suppose que

$$v(x, t, 0) = X(x)T(t)$$

et en calculant les dérivées, on obtient

$$v_t = XT', v_x = X'T, v_{xx} = X''T$$

La substitution des expressions dans (2.5), on trouve

$$XT' - XT = \frac{1}{R}X''T,$$

on divise par XT , on trouve

$$\frac{T'}{T} - 1 = \frac{X''}{RX}$$

donc

$$R\frac{T'}{T} - R = \frac{X''}{X}$$

En fixant chaque coté égal à la constante $-\lambda^2$, on trouve

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{et} \quad T' + \left(\frac{\lambda^2}{R} - 1\right)T = 0.$$

la première équation est une équations différentielles ordinaire linéaires du second ordre, elle donne l'équation caractéristique associée

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

donc

$$X = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Et la deuxième équation est une EDO du première ordre, en utilisant la séparation des variables, on obtient

$$\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{R}\right)dt,$$

d'où

$$T(t) = ce^{(1-\frac{\lambda^2}{R})t}.$$

Alors

$$v(x, t, 0) = e^{(1-\frac{\lambda^2}{R})t}(a \cos \lambda x + b \sin \lambda x),$$

et on a les conditions aux limites $v(0, t; 0) = v(\pi, t; 0) = 0 \quad \forall t > 0$ donnent

$$v(0, t; 0) = ae^{(1-\frac{\lambda^2}{R})t} = 0$$

d'où $a = 0$ et

$$v(\pi, t; 0) = be^{(1-\frac{\lambda^2}{R})t} \sin \lambda\pi = 0$$

donc $b = 0$ est donne la solution évident, alors $\sin \lambda\pi = 0$, donc

$$\lambda_n = n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et nous développons $v(x, t; 0)$ dans une série de sinus de Fourier

$$v(x, t; 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t) \sin nx.$$

on a

$$v_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{dw_n}{dt} \sin nx \quad \text{et} \quad v_{xx} = - \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 w_n(t) \sin nx$$

En remplaçant dans (2.5), on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{dw_n}{dt} + \left(\frac{n^2}{R} - 1 \right) w_n \right) \sin nx = 0,$$

donc

$$\frac{dw_n}{dt} + \left(\frac{n^2}{R} - 1 \right) w_n = 0,$$

par séparation des variables, on obtient

$$\frac{dw_n}{w_n} = \left(1 - \frac{n^2}{R} \right) dt,$$

donc

$$w_n(t) = Ce^{(1-\frac{n^2}{R})t},$$

alors,

$$w_n(t) = w_n(0)e^{\sigma_n t}, \quad \sigma_n = 1 - \frac{n^2}{R}$$

et dans la condition initiale

$$v(x, 0; 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(0) \sin nx = g(x).$$

Alors

$$w_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx.$$

On remarque que si $0 < R < 1$ tous les w_n décroissent exponentiellement. Soit maintenant R une constante fixe supérieure à un. Il existe un entier critique n_R égal au premier entier qui est plus grand que \sqrt{R} , de sorte que le w_n décroissant exponentiellement pour tout $n \geq n_R$. Cependant, chacun de w_n pour $n < n_R$ croissant exponentiellement, et le plus grand taux de croissance σ_n correspond à $n = 1$. Ainsi, nous disons que w_1 est le mode le plus instable linéairement.

La théorie linéaire n'est pas très intéressante. Il prédit que tous les modes décroissent exponentiellement ($R < 1$) ou que certains modes croissent exponentiellement ($R > 1$), invalidant ainsi l'hypothèse de linéarisation. La question se pose de savoir si la faible non-linéarité peut stabiliser une solution marginalement instable du problème linéaire.

Pour étudier cette question, supposons que R est légèrement plus grand que l'unité, rendant ainsi w_1 légèrement instable. Nous fixons

$$R = 1 + \varepsilon^\alpha a,$$

telles que a est une constante positive indépendante de ε et α doit être déterminé.

2.3 Expansion à échelles multiples

Nous supposons que v a une expansion à plusieurs échelles de la forme

$$v(x, t; \varepsilon) = v_0(x, t_1, t_2) + \varepsilon^\gamma v_1(x, t_1, t_2) + o(\varepsilon^\gamma),$$

où $t_1 = t$ et $t_2 = \varepsilon^\beta t$. Les constantes β et γ doivent également être déterminées.

Nous calculons

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial t_1}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial t_1} + \frac{\partial t_2}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial t_2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial t_1}{\partial t} \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial t_2}{\partial t} \frac{\partial v_1}{\partial t_2} \dots \\ v_x &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial v_1}{\partial x} + \dots \\ v_{xx} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial v_0}{\partial t_1} + \varepsilon^\beta \frac{\partial v_0}{\partial t_2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \dots \\ v_{xx} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Et on a par la développement limité

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1 + \varepsilon^\alpha a} = 1 - \varepsilon^\alpha a + \dots \quad (2.7)$$

La substitution des extension (2.6) ainsi que de l'extension (2.7), dans (2.4) donne

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_1} + \varepsilon^\beta \frac{\partial v_0}{\partial t_2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial v_1}{\partial t_1} - v_0 - \varepsilon^\gamma v_1 + \varepsilon^2 (v_0 + \varepsilon^\gamma v_1)^3 = (1 - \varepsilon^\alpha a) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \varepsilon^\gamma \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right),$$

alors,

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_1} - v_0 - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \varepsilon^\gamma \left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1} - v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) + \varepsilon^\beta \frac{\partial v_0}{\partial t_2} + \varepsilon^2 v_0^3 + \varepsilon^\alpha a \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \dots = 0,$$

où, dénote des termes qui tendent à zéro plus rapidement que n'importe lequel des termes retenus. Nous voyons que l'équation la plus riche pour v_1 nécessite que nous fixions $\beta = \gamma$ afin d'inclure la variation de v_0 par rapport à t_2 . Nous devons également définir $\gamma = 2$ pour inclure la contribution non linéaire v_0^3 . Enfin, nous devons définir $\alpha = \gamma$ pour tenir compte de l'écart entre R et la valeur neutre $R = 1$. Ces trois conditions donnent $\gamma = \beta = \alpha = 2$, c'est-à-dire

$$t_2 = \varepsilon^2 t, R = 1 + \varepsilon^2 a$$

et l'expansion car v a la forme

$$v(x, t; \varepsilon) = v_0(x, t_1, t_2) + \varepsilon^2 v_1(x, t_1, t_2) + \dots$$

2.3.1 Calcul de v_0

Les équations et les conditions initiales et limites régissant v_0 et v_1 sont alors données par

$$\left\{ \begin{array}{l} L(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial t_1} - v_0 - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \\ v_0(0, t_1, t_2) = v_0(\pi, t_1, t_2) = 0 \quad t > 0, \\ v_0(x, 0, 0) = g(x). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} L(v_1) = \frac{\partial v_1}{\partial t_1} - v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial v_0}{\partial t_2} - v_0^3 - a \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}, \\ v_1(0, t_1, t_2) = v_1(\pi, t_1, t_2) = 0, \quad t > 0, \\ v_1(x, 0, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

La solution de (2.8) on utilise la séparation des variables, on pose

$$v_0(x, t_1, t_2) = X(x)T_1(t_1)T_2(t_2).$$

Il vient

$$XT_1'T_2 - XT_1T_2 - X''T_1T_2 = 0$$

On divise par XT_1T_2 , on obtient

$$\frac{T_1'}{T_1} - 1 = \frac{X''}{X}$$

En fixant chaque coté égal à la constante $-\lambda^2$, on trouve

$$\frac{T_1'}{T_1} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

donc

$$\frac{T_1'}{T_1} - 1 = -\lambda^2, \quad (2.10)$$

et

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad (2.11)$$

alors, dans (2.10) :

$$T_1'' = (1 - \lambda^2)T_1$$

est une EDO, la solution après la séparation des variables est

$$T_1(t_1) = C(t_2)e^{(1-\lambda^2)t_1}.$$

Et dans (2.11), on trouve

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

donc la solution est donné par

$$X(x) = a(t_2) \cos \lambda x + b(t_2) \sin \lambda x,$$

avec a, b sont des fonctions par apport à t_2 . Alors

$$v_0(x, t_1, t_2) = e^{(1-\lambda^2)t_1}(A(t_2) \cos \lambda x + B(t_2) \sin \lambda x)$$

telles que

$$A(t_2) = C(t_2)a(t_2) \quad \text{et} \quad B(t_2) = C(t_2)b(t_2).$$

Et on a les conditions aux limites $v_0(0, t_1, t_2) = v_0(\pi, t_1, t_2) = 0, \forall t > 0$, d'où

$$v_0(0, t_1, t_2) = e^{(1-\lambda^2)t_1} A(t_2) \implies A(t_2) = 0,$$

et

$$v_0(\pi, t_1, t_2) = e^{(1-\lambda^2)t_1} B(t_2) \sin \lambda\pi = 0$$

on a $e^{(1-\lambda^2)t_1} \neq 0 \quad \forall x$, si $B(t_2) = 0$ nous avons seulement la solution évidente, donc on doit prendre

$$\sin \lambda\pi = 0,$$

d'où

$$\lambda_n = n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors

$$v_0(x, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t_2) e^{(1-n^2)t_1} \sin nx. \quad (2.12)$$

et la condition initiale $v_0(x, 0, 0) = g(x)$ donne

$$v_0(x, 0, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0) \sin nx. \quad (2.13)$$

i. e. $B_n(0)$ sont les coefficients de Fourier de $v_0(x, 0, 0)$ donnés par

$$B_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.3.2 Equation de v_1

Pour déterminer le $B_n(t_2)$, nous avons besoin de la solution de v_1 pour être cohérent. Bien qu'il soit simple de garder une trace de tous les B_n dans la partie droite de (2.9) et de dériver une équation d'évolution pour chacun, nous notons que tous sauf B_1 sont multipliés par l'exponentielle en décomposition $e^{(1-n^2)t_1}$ dans (2.12) et sont donc hors de propos après un court laps de temps. Pour souligner ce fait, gardons simplement une trace explicite de B_1 et B_2 (qui est multiplié par e^{-3t_1} dans la solution).

Après une algèbre, nous constatons que (2.9) réduit à

$$L(v_1) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{dB_n(t_2)}{dt_2} e^{(1-n^2)t_1} \sin nx - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t_2) e^{(1-n^2)t_1} \sin nx \right)^3 + a \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 B_n(t_2) e^{(1-n^2)t_1} \sin nx,$$

i. e.

$$L(v_1) = - \frac{dB_1}{dt_2} \sin x - \frac{dB_2}{dt_2} \sin 2x + \dots - (B_1 \sin x + B_2 e^{-3t_1} \sin 2x + B_3 e^{-8t_1} \sin 3x e^{-8t_1} + \dots)^3 + aB_1 \sin x + 4aB_2 e^{-3t_1} \sin 2x + \left(- \frac{dB_3}{dt_2} \sin 3x + 9aB_3 \sin 3x \right) e^{-8t_1} + \dots$$

En utilisant les formules

$$\sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t,$$

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} L(v_1) &= - \frac{dB_1}{dt_2} \sin x - \frac{dB_2}{dt_2} \sin 2x + \dots - (B_1 \sin x + B_2 e^{-3t_1} \sin 2x + \dots)^3 \\ &\quad + aB_1 \sin x + 4aB_2 e^{-3t_1} \sin 2x + \dots \\ &= - \frac{dB_1}{dt_2} \sin x - \frac{dB_2}{dt_2} \sin 2x - B_1^3 \sin^3 x - 3B_1^2 B_2 e^{-3t_1} \sin^2 x \sin 2x - (B_2 e^{-3t_1} \sin 2x)^3 \\ &\quad - 3B_1 B_2^2 e^{-6t_1} \sin x \sin^2 2x + \dots + aB_1 \sin x + 4aB_2 e^{-3t_1} \sin 2x + \dots \\ &= - \frac{dB_1}{dt_2} \sin x - B_1^3 \left(\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \right) + aB_1 \sin x - \left(\frac{dB_2}{dt_2} \sin 2x - 4aB_2 \sin 2x \right) e^{-3t_1} \\ &\quad - 3B_1^2 B_2 e^{-3t_1} \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right) \sin 2x + HS + HT. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} L(v_1) &= - \left(\frac{dB_1}{dt_2} + \frac{3}{4} B_1^3 - aB_1 \right) \sin x + \frac{1}{4} B_1^3 \sin 3x - \left(\frac{dB_2}{dt_2} - 4aB_2 \right) e^{-3t_1} \sin 2x \\ &\quad - 3B_1^2 B_2 e^{-3t_1} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \sin 2x \right) + HS + HT \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} L(v_1) &= - \left(\frac{dB_1}{dt_2} + \frac{3}{4} B_1^3 - aB_1 \right) \sin x + \frac{1}{4} B_1^3 \sin 3x - \left(\frac{dB_2}{dt_2} - 4aB_2 \right) e^{-3t_1} \sin 2x \\ &\quad - 3B_1^2 B_2 e^{-3t_1} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + HS + HT \end{aligned}$$

donc

$$L(v_1) = -\left(\frac{dB_1}{dt_2} + \frac{3}{4}B_1^3 - aB_1\right) \sin x - \left(\frac{dB_2}{dt_2} + \frac{3}{2}B_1^2B_2 - 4aB_2\right)e^{-3t_1} \sin 2x + SH + TsE$$

Ici SH désigne des solution homogènes de la forme $F_n(t_2)e^{(1-n^2)t_1} \sin nx$, et TsE désigne des termes sans effet considérable de la forme $G_n(t_2)e^{-rt_1} \sin nx$, où $0 < r \neq n^2 - 1$. Chacun des F_n pour $n \geq 2$ est une relation différentielle homogène linéaire pour B_n .

2.3.3 Calcul de $B_1(t_2)$

Les TsE contribuent à la contribution parfaitement cohérente $G(e^{-rt} \sin nx)/(n^2 - r - 1)$ à v_1 , alors que chacun des SH apporte la contribution incohérente, i. e. donnent de termes séculaires de la forme $tF_n(t_2)e^{(1-n^2)t_1} \sin nx$. Par conséquent, nous devons mettre à zéro les coefficients de $\sin x$, $e^{-3t_1} \sin 2x$, $e^{-8t_1} \sin 3x$, \dots . Cela donne les équations suivantes pour B_1, B_2, \dots .

$$\frac{dB_1}{dt_2} = -\frac{3}{4}B_1^3 + aB_1. \quad (2.14)$$

$$\frac{dB_2}{dt_2} = -\frac{3}{2}B_1^2B_2 + 4aB_2. \quad (2.15)$$

$$\dots \quad (2.16)$$

On cherche la solution réelle de l'équation de Bernoulli (2.14) : on divise l'équation par B_1^3 , on trouve

$$B_1^3 B_1' - aB_1^{-2} = -\frac{3}{4}, \quad (2.17)$$

on pose $z = B_1^{-2}$, alors $z' = -2B_1' B_1^{-3}$ d'où $B_1' B_1^{-3} = -\frac{1}{2}z'$, en remplaçant ce résultat dans (2.17), on vient

$$-\frac{1}{2}z' - az = -\frac{3}{4}. \quad (2.18)$$

Nous cherchons la solution homogène

$$-\frac{1}{2}z_h' - az_h = 0$$

d'après la séparation des variables, on trouve

$$\frac{z_h'}{z_h} = 2a,$$

donc

$$z_h(t_2) = ce^{-2at_2} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

et on a la solution particulière de (2.18) est

$$z_p(t_2) = \frac{3}{4a}.$$

Alors, la solution générale

$$z(t_2) = z_p(t_2) + z_h(t_2) = ce^{-2at_2} + \frac{3}{4a} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$B_1^{-2} = ce^{-2at_2} + \frac{3}{4a}$$

alors

$$B_1(t_2) = \frac{1}{\sqrt{ce^{-2at_2} + \frac{3}{4a}}}$$

et on a $B_1(0) = 1/\sqrt{c + \frac{3}{4a}}$, i. e.

$$c = B_1^{-2}(0) - \frac{3}{4a}$$

et la fonction $B_1(t_2)$ est donné par

$$B_1(t_2) = \frac{1}{\sqrt{(B_1^{-2}(0) - \frac{3}{4a})e^{-2at_2} + \frac{3}{4a}}}.$$

qui peut être écrit sous la forme

$$B_1(t_2) = \frac{2B_1(0)\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sqrt{(\frac{3}{4a} - B_1^2(0))e^{-2at_2} + B_1^2(0)}}. \quad (2.19)$$

L'équation d'amplitude (2.14) est une équation de Landau . Nous voyons d'après (2.14) que $B_1 = 0$ est un point d'équilibre instable, alors que $B_1 = \pm 2\sqrt{a/3}$ sont des points stables.

Ainsi, toutes les solutions avec $B_1(0) > 0$ ont tendance à $B_1 = 2\sqrt{a/3}$ et toutes les solutions avec $B_1 < 0$ ont tendance à $B_1 = -2\sqrt{a/3}$. La solution réelle de (2.14) est (2.19).

Le comportement limite pour B_2 lorsque $t_2 \rightarrow \infty$ est maintenant facilement dérivé. Parce que $\frac{3}{2}B_1^2 \rightarrow -2a$, on voit que comme $t_2 \rightarrow \infty$, B_2 obéit l'équation

$$\frac{dB_2}{dt_2} = 2aB_2 + \dots,$$

donc

$$B_2 \sim e^{2at_2} + \dots$$

Cette croissance exponentielle sur l'échelle t_2 est dominée par le terme de décroissance exponentielle e^{-3t_1} qui multiplie B_2 . Par conséquent, $B_2(t_2)e^{-3t_1}$ se désintègre exponentiellement rapidement, comme le font $B_3e^{-8t_1}$, etc

En résumé, la solution linéaire marginalement instable ($R \sim 1 = O(\varepsilon^2)$) que nous avons étudiée est équilibrée par la non linéaire faible et tend vers l'état stationnaire

$$v_0 = \pm 2\sqrt{a/3} \sin x,$$

ou les signes plus ou moins correspondent respectivement aux signes de $B_1(0)$.

Chapitre 3

Quelques résultats numériques

Le but de cet chapitre est de présenter un schéma d'itération en deux temps pour construire des solutions approximatives pour le problème considéré dans le chapitre précédent. Un exemple simple est utilisée pour illustrer notre méthode d'itération à deux temps et afin de justifier nos résultats.

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'EDP. Elle consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points du segment proches les uns des autres. Une discrétisation des dérivées premières, secondes, \dots etc, peut être obtenue par les formules de Taylor.

Dans la suite, on considère un pas de discrétisation $\Delta x = h$, et un pas de discrétisation en temps $\Delta t = k$, avec

$$t = jk; x = ih, \quad \text{pour } j = 1, \dots, M, \quad \text{et } i = 1, \dots, N,$$

et

$$u_i^j = u(ih; jk) \approx u(x_i, t_j).$$

représente l'approximation numérique au point de grille (x_i, t_j) ,

3.1 Application des différences finis pour l'équation de la chaleur

D'abord, nous étudions l'équation de la chaleur

$$u_t = \kappa u_{xx} \quad (3.1)$$

Il s'agit de l'exemple classique d'une équation parabolique. Nous supposons $\kappa = 1$ pour plus de simplicité. Pour la conditions initiales

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (3.2)$$

ainsi que des conditions aux limites (de Dirichlet)

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall t > 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \pi. \quad (3.3)$$

Puisque l'équation de la chaleur est une équation d'évolution qui peut être résolue en avant dans le temps, nous configurons nos équations de différence sous une forme où nous pouvons avancer en saut, en déterminant les valeurs u_i^{j+1} pour tout i à partir des valeurs u_i^j à la précédent niveau de temps, ou peut-être en utilisant également des valeurs à des niveaux de temps plus serré avec une formule à plusieurs étapes.

Par exemple, une discrétisation naturelle de (3.1) serait

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Ceci utilise notre différence standard centrée dans l'espace et une différence directe dans le temps. Il s'agit d'une méthode *explicite* puisque nous pouvons calculer chaque u_i^{j+1} explicitement en fonction des données précédentes :

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$$

Il s'agit d'une méthode en une étape dans le temps, également appelée méthode à deux niveaux dans le contexte du EDPs car elle implique la solution à deux niveaux de temps différents.

Une autre méthode en une étape, qui est beaucoup plus utile dans la pratique, comme nous le verrons ci-dessous, est la méthode de *Crank-Nicolson*. Nous écrivons l'équation au point $(x_i, t^{j+\frac{1}{2}})$, alors

$$u_t(x_i, t^{j+\frac{1}{2}}) \approx \frac{u(x_i, t^{j+1}) - u(x_i, t^j)}{k}$$

est une approximation de différence centrée pour u_t en $(x_i, t^{j+\frac{1}{2}})$ et devrait donc $O(h^2)$.

Pour approcher le terme $u_{xx}(x_i, t^{j+\frac{1}{2}})$ nous utilisons la moyenne des deuxièmes différences centrées pour $u_{xx}(x_i, t^{j+1})$ et $u_{xx}(x_i, t^j)$, c'est à dire

$$u_{xx}(x_i, t^{j+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2} \frac{u(x_{i+1}, t^{j+1}) + 2u(x_i, t^{j+1}) + u(x_{i-1}, t^{j+1})}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u(x_{i+1}, t^j) + 2u(x_i, t^j) + u(x_{i-1}, t^j)}{h^2}.$$

Revenons au problème (3.1)–(3.3), on trouve

$$u_i^0 = u_0(x_i) \quad i = 0, \dots, N$$

et les conditions aux bord

$$u_0^{j+1} = u_N^{j+1} = 0, \text{ pour tout } j = 0, 1, \dots.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} &= \frac{1}{2}(D^2 u_i^j + D^2 u_i^{j+1}) \\ &= \frac{1}{2h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}). \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

qui peut être réécrit comme

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{2h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}),$$

alors

$$-\alpha u_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\alpha)u_i^{j+1} - \alpha u_{i-1}^{j+1} = \alpha u_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)u_i^j + \alpha u_{i-1}^j,$$

où $\alpha = \frac{k}{2h^2}$. Il s'agit d'une méthode *implicite* et donne un système tridiagonale d'équations à

résoudre pour toutes les valeurs u_i^{j+1} simultanément. Sous forme matricielle, c'est

$$\begin{pmatrix} (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & & 0 & -\alpha & (1+2\alpha) & -\alpha \\ 0 & & & 0 & -\alpha & (1+2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ u_3^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{j+1} \\ u_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_0^j (1-2\alpha) u_1^j + \alpha u_2^j \\ \alpha u_1^j + (1-2\alpha) u_2^j + \alpha u_3^j \\ \alpha u_2^j + (1-2\alpha) u_3^j + \alpha u_4^j \\ \vdots \\ \alpha u_{N-3}^j + (1-2\alpha) u_{N-2}^j + \alpha u_{N-1}^j \\ \alpha u_{N-2}^j + (1-2\alpha) u_{N-1}^j + \alpha u_N^j \end{pmatrix}$$

Remarquez comment les conditions aux limites

$$u(0, t) \approx u_0^j = 0 \quad \text{et} \quad u(\pi, t) \approx u_{N+1}^j = 0$$

entrent dans ces équation. Puisqu'un système tridiagonale d'équations N peut être résolu avec un travail de $O(N)$, cette méthode est essentiellement aussi efficace par pas de temps qu'une méthode explicite. Donc cette méthode implicite, qui permet de prendre des pas de temps beaucoup plus grands qu'un méthode explicite, est une méthode très efficace pour l'équation de la chaleur.

3.2 Application des différences finis pour l'équation de diffusion nonlinéaire

Soit le problème de diffusion non linéaire

$$\begin{cases} u_t - u + u^3 = \frac{1}{R} u_{xx} & R > 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t, \\ u(0, t, \varepsilon) = u(\pi, t, \varepsilon) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = \varepsilon g(x). \end{cases}$$

On posant $u = \varepsilon v$ et on remplace dans le problème précédente, on obtient

$$\begin{cases} v_t - v + \varepsilon^2 v^3 = \frac{1}{R} v_{xx} & R > 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t, \\ v(0, t, \varepsilon) = v(\pi, t, \varepsilon) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0, \varepsilon) = g(x), \end{cases} \quad (3.4)$$

où $R = 1 + \varepsilon^2 a$. On va appliquant la méthode de Crank-Nicolson sur ce dernier problème en approchant v par

$$v \approx v_i^j$$

telles que

$$t = jk, x = ih, \quad j = 0, 1, \dots, i = 0, \dots, N.$$

on trouve la condition initiale

$$v_i^0 = g(ih) \quad i = 0, \dots, N$$

et les conditions aux limites

$$v_0^{j+1} = v_N^{j+1} = 0.$$

On obtient

$$(v_t)_i^{j+\frac{1}{2}} - v_i^{j+\frac{1}{2}} + (\varepsilon^2 v^3)^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} (v_{xx})_i^{j+\frac{1}{2}},$$

alors,

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{k} - v_i^{j+\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 (v_i^j)^3 = \frac{1}{2Rh^2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j + v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}),$$

avec $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots$.

$$v_i^{j+1} - v_i^j - kv_i^{j+\frac{1}{2}} + k\varepsilon^2 (v_i^j)^3 = \frac{k}{2Rh^2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j + v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1})$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2Rh^2} v_{i+1}^{j+1} + (1 + \frac{2k}{2Rh^2}) v_i^{j+1} - \frac{k}{2Rh^2} v_{i-1}^{j+1} \\ = \frac{k}{2Rh^2} v_{i+1}^j + (1 - \frac{2k}{2Rh^2}) v_i^j + \frac{k}{2Rh^2} v_{i-1}^j + kv_i^{j+\frac{1}{2}} - k\varepsilon^2 (v_i^{j+\frac{1}{2}})^3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots$.

En posant $\alpha = \frac{k}{2Rh^2}$, on obtient

$$-\alpha v_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\alpha) v_i^{j+1} - \alpha v_{i-1}^{j+1} = \alpha v_{i+1}^j + (1 - 2\alpha) v_i^j + \alpha v_{i-1}^j + kv_i^{j+\frac{1}{2}} - k\varepsilon^2 (v_i^{j+\frac{1}{2}})^3.$$

avec $i = 1, 2, \dots, N - 1, j = 0, 1, \dots$.

Comme dans [6], le terme non linéaire $k(u_i^j)^3$ est différencié par

$$k(v_i^{j+\frac{1}{2}})^3 \sim \frac{k}{2}(v_i^j)^2(v_i^{j+1} + v_i^j),$$

et

$$kv_i^{j+\frac{1}{2}} \sim \frac{k}{2}(v_i^{j+1} + v_i^j),$$

qui préserve la symétrie de l'ensemble des équations de différence et a l'erreur de troncature $O(\Delta t) + O(\Delta t)^2$.

Le système complet d'équation de différence devient

$$-\alpha v_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\alpha)v_i^{j+1} - \alpha v_{i-1}^{j+1} = \alpha v_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)v_i^j + \alpha v_{i-1}^j + \frac{k}{2}(v_i^{j+1} + v_i^j) - \frac{k}{2}\varepsilon^2(v_i^j)^2(v_i^{j+1} + v_i^j)$$

et on a

$$v_0^{j+1} = v_N^{j+1} = 0. \quad (3.6)$$

En posant

$$f_i^j = (\varepsilon v_i^j)^2,$$

on a enfin

$$-\alpha v_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_i^j)v_i^{j+1} - \alpha v_{i-1}^{j+1} = \alpha v_{i+1}^j + (1 - 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_i^j)v_i^j + \alpha v_{i-1}^j.$$

Remark 3.1 Notez que nous ne pouvons plus résoudre pour v_1^{j+1} , alors v_2^{j+1} même si nous connaissons la solution au pas de temps précédent. Au lieu de cela, nous devons résoudre pour toutes les valeurs à un pas de temps spécifique à la fois, c'est-à-dire que nous devons résoudre un système d'équations linéaires. Schéma est appelé schéma implicite.

De (3.5) et (3.6) nous posons $v_i^0 = \varepsilon \sin ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$ et pour chaque valeur

de $j = 0, 1, \dots$ résoudre le système

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_1^j & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_2^j & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_{N-1}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_1^j & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_2^j & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_{N-1}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1}^j \end{pmatrix} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

En effet, sur le coté droit de la première et de la dernière équations, les termes impliquant

$$v_0^{j+1}, v_N^{j+1}, v_i^0$$

sont nuls en raison des conditions aux limites homogènes.

Le système (3.7) peut être écrit symboliquement comme

$$Av^{j+1} = Bv^j$$

telles que A et B une matrice tridiagonale et symétrique définie positive, définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_1^j & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_2^j & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}f_{N-1}^j \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_1^j & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_2^j & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 + 2\alpha + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}f_{N-1}^j \end{pmatrix}.$$

Algorithme numérique

Données initiales :

n (nombre de discrétisation), k (le pas de t)

h (le pas de x), tf (le temps finale), a donné

$0 < x < \pi$ (l'espace de discrétisation),

eps (ε valeur plus petite),

$R \leftarrow 1 + \varepsilon^2 a$,

$\alpha \leftarrow \frac{k}{2Rh^2}$,

$v_0 \leftarrow 1.2x \sin x$ (la condition initiale),

$v_{00} \leftarrow 2\sqrt{a/3} \sin x$,

$I \leftarrow eye(n)$ (matrice diagonale),

$D1 \leftarrow diag(ones(1, n-1), 1)$

L (fonction de trapèze),

$L \leftarrow 0$,

$f \leftarrow 1, 2x \sin^2 x$,

Résolution :

pour $0 \leq k \leq n-1$

$x \leftarrow k * h$,

$f1 \leftarrow f$,

$x \leftarrow (k+1) * h$,

$f2 \leftarrow f$,

$L \leftarrow L + f1 + f2$,

fin

$L \leftarrow \frac{2}{\pi}(L \times \frac{h}{2})$,

pour $1 \leq t_n \leq tf/k$

$f \leftarrow (\varepsilon v)^2$, $F \leftarrow diagonal(f)$

$A \leftarrow (-\alpha D1 + (1 - \frac{k}{2} + 2\alpha)I + (\frac{k}{2})F - \alpha(D1)^t$,

$B \leftarrow (\alpha D1 + (1 + \frac{k}{2} - 2\alpha)I - (\frac{k}{2})F + \alpha(D1)^t$,

$w \leftarrow B \times v$,

$v \leftarrow inv(A) \times B$,

$V \leftarrow [0; v; 0]$,

écrire V ,

$$L1 \leftarrow \frac{2L\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sqrt{(\frac{3}{4a}-L^2)e^{-2ae^2t} + L^2}},$$

$vasy \leftarrow \sin xL1*$,

Dessiner (v_0 , V , v_{00} , $vasy$),

écrire ('les solutions pour $t =$ et $g(x) =$ '),

fin.

3.3 Quelques exemples

Dans la suite on résout le problème (3.4) pour différentes valeurs dans la condition initiale g .

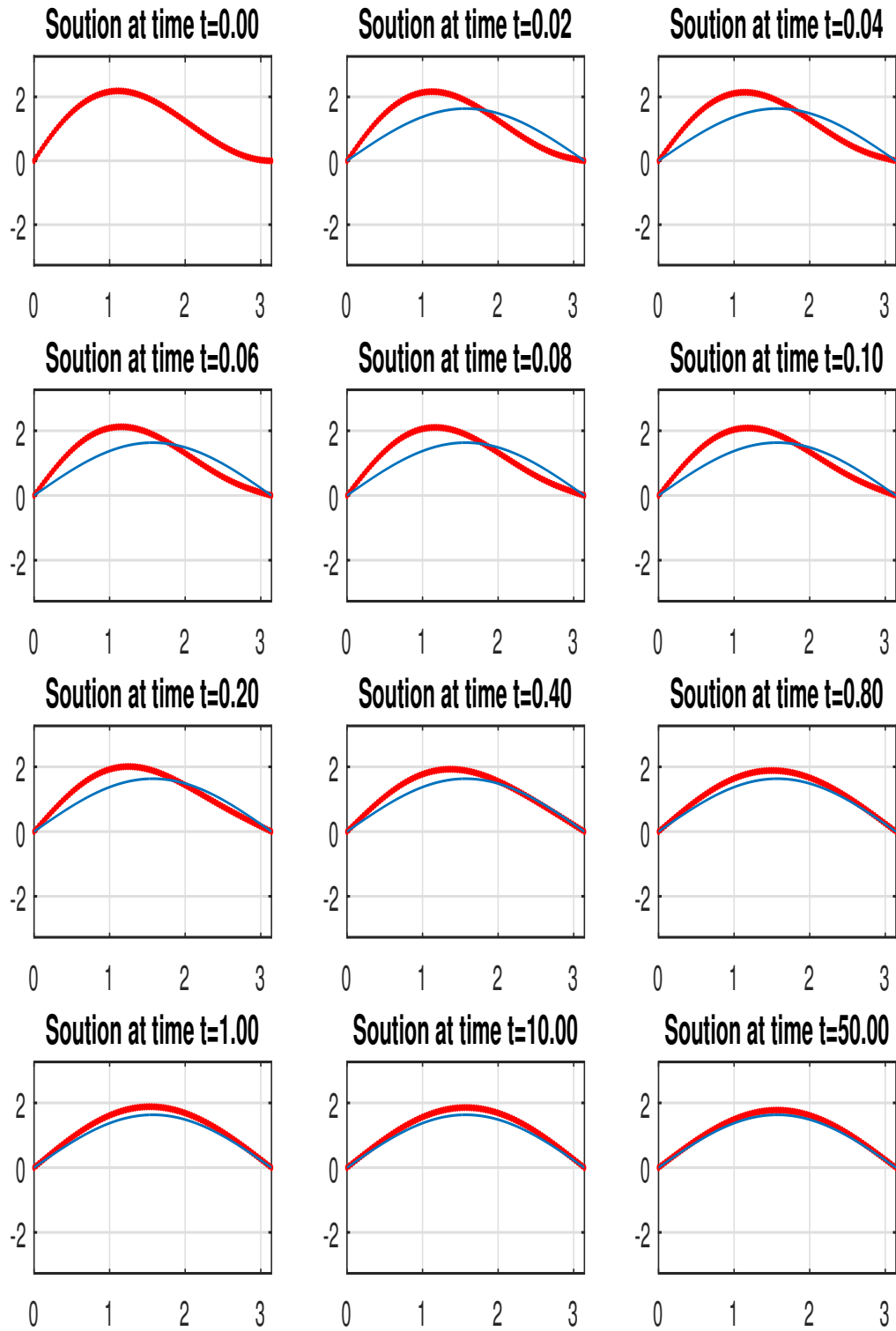


FIGURE 3.1 – Solution pour $g(x) = 1.2(\pi - x) \sin x$ et $a = 2$, elle devient décroissante et converge vers $v_\infty = 2\sqrt{a/3} \sin x$ (courbe bleu).

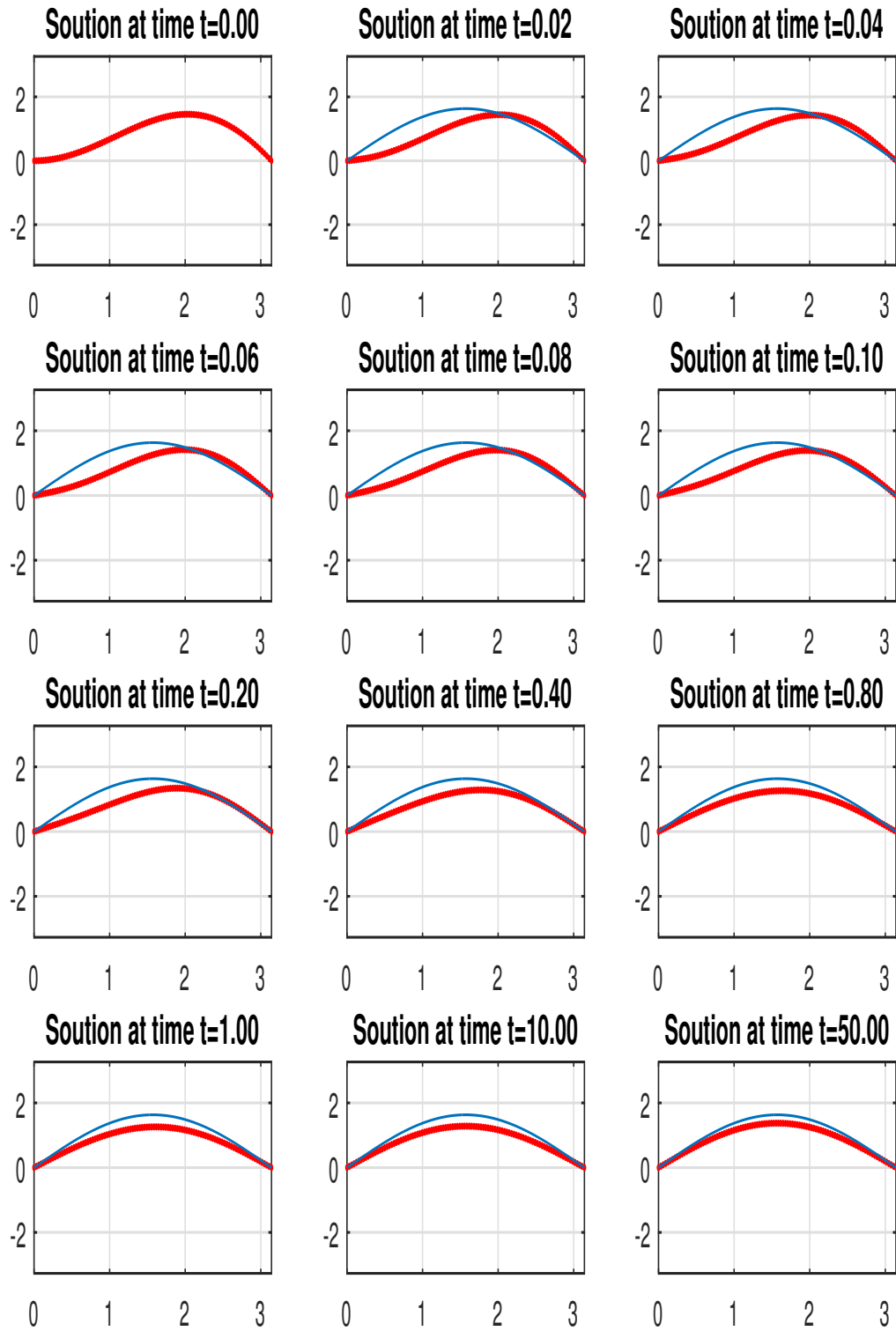


FIGURE 3.2 – Solution pour $g(x) = 0.8x \sin x$ et $a = 2$, elle devient croissante et converge vers $v_\infty = 2\sqrt{a/3} \sin x$ (courbe bleu).

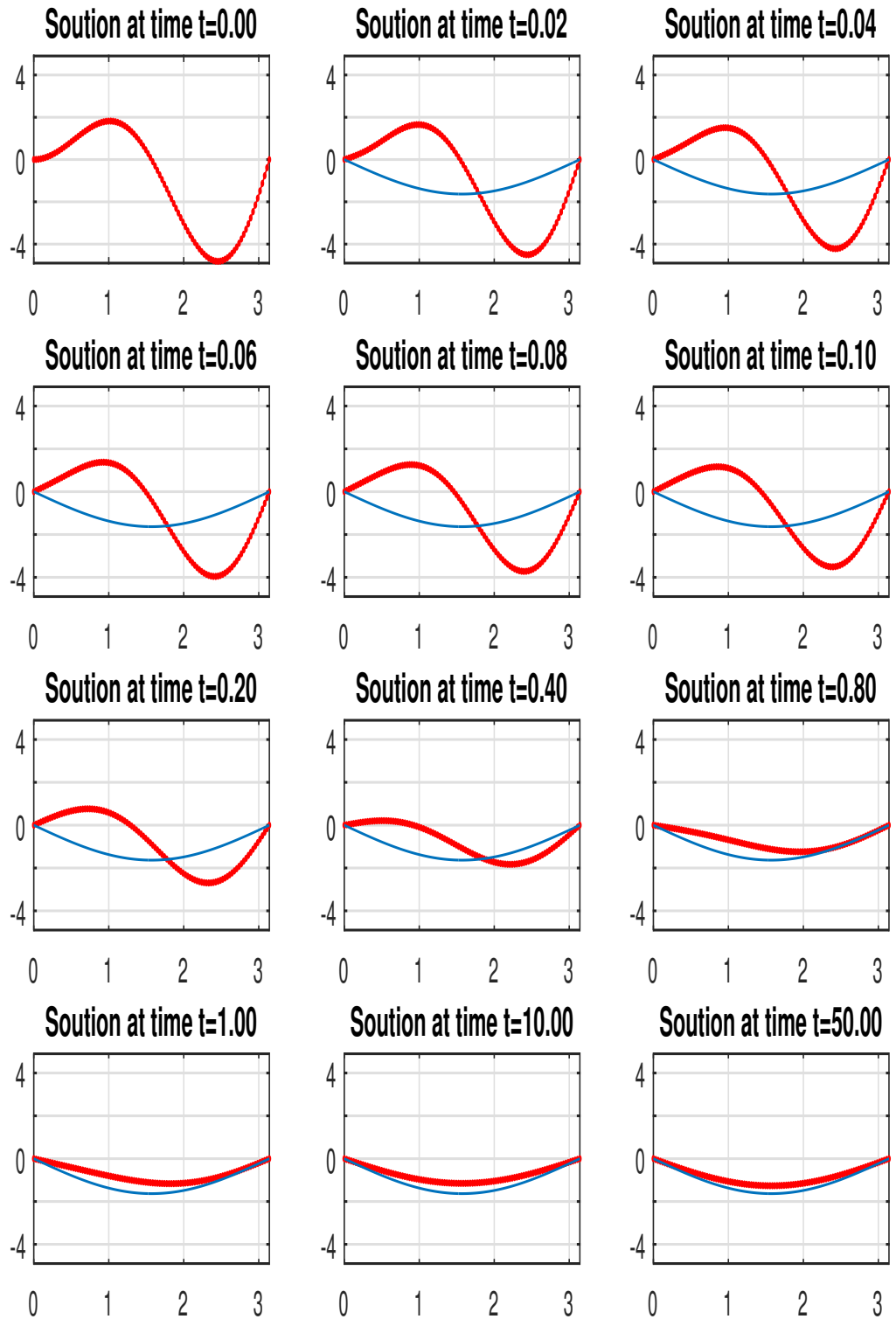


FIGURE 3.3 – Solution pour $g(x) = 2x \sin(2x)$ et $a = 2$, elle converge vers $v_\infty = -2\sqrt{a/3} \sin x$ (courbe bleu).

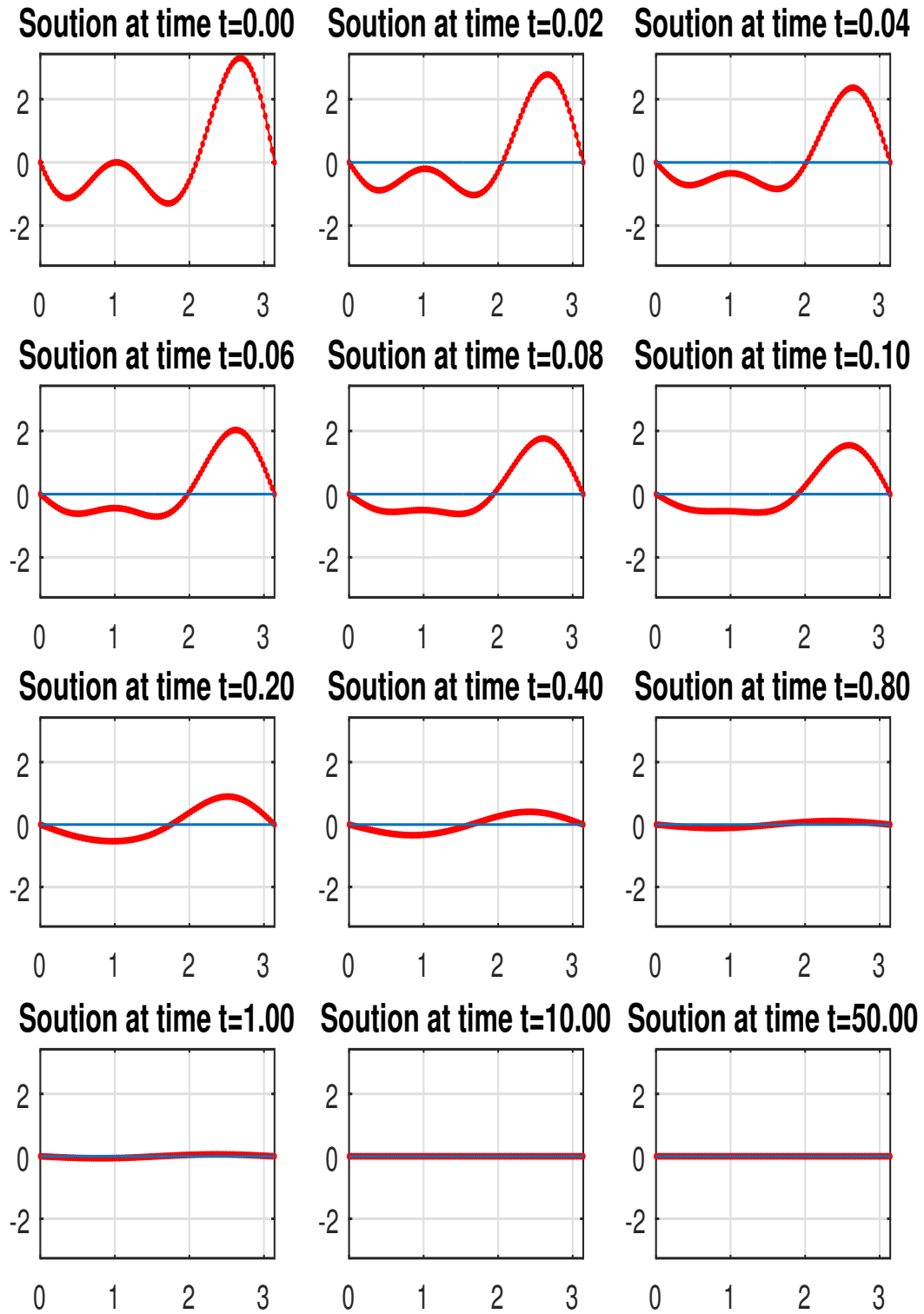


FIGURE 3.4 – Solution pour $g(x) = 2(x - 1) \sin(3x)$ et $a = 2$, elle converge vers $v_\infty = 0$ (courbe bleu).

Bibliographie

- [1] J. Kevorkian, J. D. Cole, Multiple scale and singular perturbation methods. Springer-Verlag, NewYork, 1996. .
- [2] M. H. Holmes, Introduction to perturbation methods. Springer Science, Business Media, New York, 2013.
- [3] W. A. Strauss, Partial differential equations. John Wiley & Sons, Inc. 2008.
- [4] [http ://www. siam. org/journals/ojsa. php](http://www.siam.org/journals/ojsa.php)(problèmes de stabilité dynamique non linéaire).
- [5] [home. iitk. ac. in/~sghorai/NOTES/nonlinear/node3. html](http://home.iitk.ac.in/~sghorai/NOTES/nonlinear/node3.html)
- [6] Y. M. Cheng and J. S. Chang, An Iterative Approach to Nonlinear Dynamic Stability Problems. SIAM Journal on Applied Mathematics, 23(4), pp. 411-419. 1972.
- [7] R. J. Leveque, 2007. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [8] [http ://www. developpez. net](http://www.developpez.net)(méthode de Trapèze).