REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTEREDEL'ENSEIGNEMENTSUPERIEURETDELARECHERCH
ESCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Some properties of linear operators in Orlicz spaces

Présentée par :
Benacerbey Sabah
Soutenu publiquement le: xx/xx/2022.

Devant le jury composé de:

Président:	*NADIR Mostefa*	Prof,	Université de M'sila
Encadreur:	*GAGUI Bachir*	M.C.A,	Université de M'sila
Examinateur:	*GASMI Abdelkader*	Prof,	Université de M'sila

Année universitaire 2021/2022

Table des matières

ملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة بعض الخصائص الطبولوجية للمؤثرات الخطية وتحديدا خاصية الاستمرار للمؤثرات الخطية في فضاءات دالية وخاصة منها المؤثرات التكاملية على فضاءات دالية من نوع أورليز.

كلمات مفتاحية :

فضاء أورليز, خاصية الإستمرار ,المؤثرات الخطية , المؤثرات التكاملية ,فضاء الدوال.

Abstract

In this memory, we study the topologic properties, including the continuity of linear operator and special case the continuity of integral oprators on functional spaces of the Orlicz type.

Keywords :

Orlicz space ,continuity ,linear operators , integral operators ,functional spaces.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions une propriété topologique, notamment la continuité des opérateurs linéaires et particulièrement la continuité des opérateurs intégraux sur les espaces fonctionnels de type Orlicz.

Mots-clés :

Espaces d'Orlicz, continuité, opérateurs linéaires, opérateurs intégraux, espaces fonctionels.

List of symbols

$\lvert . \rvert_p$	: norme in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\lvert\varphi\rvert_p = \left(\int_\Omega \lvert\varphi(x)\rvert^p \, dx\right)^{1/p}$.
$\lvert E \rvert$	mesure de l'ensemble E.
$\mathbb{R}^N$	espace euclidien réel de dimension n.
p.p	presque partout.
supp(f)	support de la fonction f
L'espace d'Orlicz	$L^\varphi(\Omega) = \left\{ u : \text{ fonction mesurable sur } \Omega \mid \exists \lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \varphi(\frac{u}{\lambda}) \, dx < +\infty \right\}$.
la norme de Luxemburg	$\lVert u \rVert_\varphi = \lVert u \rVert_{L\varphi(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \quad \middle\vert \quad \int_\Omega \varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$
$S(\varphi, r)$	La sphère unité.
$B(\varphi, r)$	La boule unité

Introduction

les propriétés topologiques sont importantes dans la recherche et les études sur les opérateurs linéaires définis sur un espace fonctionnel de sorte que nous étudions cette notion importante, i.e., la propriété de la continuité appliquée aux opérateurs linéaires, en particulier appliquée aux opérateurs intégraux sur les espaces fonctionnels dits de Lebesgue (L^p) et d'Orlicz (L^φ) .

Dans cette mémoire de recherche on partagé le travail en deux chapitres, ils sont respectivement

Dans le premier chapitre, on parle sur la structure topologique de cet espace noté l'espace d'Orlicz L^φ qui généralise l'espace de Lebesgue L^p, espace linéaire, espace vectoriel, espace convexe, les normes qssociées et leurs équivalences, les inégalités...etc.

Dans le dernier chapitre, on essaye d'appliquer la notion continuité sur les opérateurs linéaire définis sur un espace d'Orlicz à valeurs dans lui même, plus particulièrement sur les opérateurs intégraux non linéqires de type Urysohn.

Chapitre 1

Espace d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz ont été présentés la première fois en 1931 par le mathématicien polonais W. Orlicz et plus tard a été baptisé du nom de lui.
Dans cette section on expose les propriétés générales.

1.1 N-fonction

Une généralisation de la fonction définie par $\varphi(u) = |u|^p$, est donnée par la classe des fonctions suivantes.

Definition 1.1. *soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
1-φest paire ,convexe et continue.
2-$\forall t > s \geq 0$,$\varphi(t) > \varphi(x) \geq 0$
3-

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi(s)}{s} = 0 \ et \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = +\infty$$

La fonction φ est appelée fonction de Young ou N-fonction

Theorem 1.2. *Chaque fonction convexe $\varphi(u)$, qui vérifiée la condition $\varphi(a) = 0$, peut être représentée sous la forme*

$$\varphi(u) = \int_a^u p(t)dt$$

où $p(t)$ est une fonction continue croissante. De même nous avons $\varphi'(u) = p_+(u)$

Definition 1.3. *(définition équivalente)*
Une fonction $\varphi(u)$s'appelle N-fonction s'elle admette la représentation

$$\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt \tag{1.1}$$

où la fonction $p(t)$ est continue pour $t \geq 0$, positive pour $t > 0$ et non décroissante qui vérifiée les conditions

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty. \tag{1.2}$$

Example 1.4. *Les fonctions suivantes sont N-fonctions :*

$$\varphi(t) = |t|^p, 1 < p < +\infty$$
$$\varphi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$$
$$\varphi(t) = e^{(|t|^p)} - 1, 1 < p < +\infty$$
$$\varphi(t) = (1 + |t|) \ln(1 + |t|) - |t|$$

1.2 Espace fonctionnel de Banach

Soit (Ω, μ) espace mesuré et soit $\mathcal{M}^+$ un cône des fonctions μ-mesurables sur Ω dont les valeurs dans $[0, \infty]$

Definition 1.5. *Soit l'application ρ suivante $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$.*
On appelle une norme fonctionnelle de Banach l'application ρ, s'elle vérifiée les propriétés suivantes
Si pour tout f, g et $f_n (n = 1, 2, ...)$ dans $\mathcal{M}^+$ et pour $\lambda \geq 0$

1. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \mu - p.p.$
   $\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$.
   $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$.
2. $0 \leq g \leq f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$.
3. $0 \leq f_n \uparrow f,\ \mu - p.p \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$.
4. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$.
5. $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$ *où la constante C_E dépend seulement de E.*

Definition 1.6. *Soit ρ une norme fonctionnelle de Banach, $X = X(\rho)$ l'ensemble de toute les fonctions f dans $\mathcal{M}$ avec $\rho(|f|) < \infty$, s'appelle espace fonctionnel de Banach (EFB), pour toute $f \in X$, on définit*

$$\|f\|_X = \rho(|f|). \tag{1.3}$$

Theorem 1.7. *Soit ρ norme fonctionnelle de Banach et soit $(X\ , \|.\|_X)$alors sous les opérations naturelles de l'espace vectoriel, l'espace $(X, \|.\|_X)$ est un espace vectoriel linéaire normé, avec les inclusion suivantes*

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0 \tag{1.4}$$

sont vérifiant, où S est l'ensemble des fonctions μ-simple dans $\mathbb{R}^n$.
En particulier, si $f_n \to f$ dans X, alors $f_n \to f$ par mesure dans les ensembles de mesure finie, et par conséquent les sous-suites convergent ponctuellement vers f μ-p.p.

1.3 Espace modulaire

Definition 1.8. *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. La fonction $\rho : X \to [0, \infty]$ est dite semimodulaire dans X, si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :*
(i) $\rho(0) = 0$.
(ii) $\rho(\lambda x) = \rho(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, avec $|\lambda| = 1$.
(iii) ρ est continue à gauche.
(iv) $\rho(\lambda x) = 0, \forall \lambda > 0$ implique $x = 0$.
le semimodulaire ρ est dit continu si,
(v) l'application $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$ est continue dans $(0, \infty]$, pour $x \in X$.

Remark 1.9. *1- Le semimodulaire est toujours convexe.*
2- Le semimodulaire est dit modulaire si, $\rho(x) = 0$ implique $x = 0$.

Example 1.10. *Si $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors*

$$\rho_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^p dx$$

définir un modulaire continu sur $L^0(\Omega)$.

Definition 1.11. *Si ρ est un semimodulaire ou modulaire dans X, alors*

$$X_\rho = \left\{ x \in X; \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

Remark 1.12. *Puisque $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x)$ requis à $\lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x)$, avec $\lambda \in (0, \infty]$, on peut définir X_ρ par :*

$$X_\rho = \{ x \in X, \rho(\lambda x) < \infty;\ \textit{pour } \lambda > 0 \}.$$

Theorem 1.13. *Soit ρ un semimodulaire dans X, alors X_ρ est un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$, où la norme définie par*

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \leq 1 \right\}$$

Démonstration. • X_ρ est un espace vectoriel.
- Il est claire que $0 \in X_\rho$.
- Soit $u, v \in X_\rho$ *et* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, par la définition de X_ρ et $\rho(\alpha u) = \rho(|\alpha| u)$ il est claire que $\alpha u \in X_\rho$.
- Par la convexité de la fonction ρ, on peut l'estimer

$$0 < \rho(\lambda(u + v)) \leq \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda u) + \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}\lambda v) \to 0, \lambda \to 0$$

et par conséquent, on a $u + v \in X_\rho$.
Donc X_ρ est un espace vectoriel.

• X_ρ est un espace normé.
- Il est claire que $\|u\|_\rho < \infty$, pour tout $u \in X_\rho$ et $\|0\|_\rho = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
-

$$\begin{aligned}\|\alpha u\|_\rho &= \inf\{\lambda > 0 \ ; \ \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \le 1\} \\ &= |\alpha| \inf\{\lambda > 0 \ ; \ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\} \\ &= |\alpha| \|u\|_\rho.\end{aligned}$$

- Soit $u, v \in X \ et \ x \ge \|u\|, \ y \ge \|v\|$, alors

$$\rho\left(\frac{u}{x}\right) \le 1 \ et \ \rho\left(\frac{v}{y}\right) \le 1$$

et par conséquent de la convexité de ρ, on a

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{u+v}{x+y}\right) &= \rho\left(\frac{x}{x+y}\frac{u}{x} + \frac{y}{x+y}\frac{v}{y}\right) \\ &\le \frac{x}{x+y}\rho\left(\frac{u}{x}\right) + \frac{y}{x+y}\rho\left(\frac{v}{y}\right) \le 1\end{aligned}$$

alors $\|u+v\|_\rho \le x + y$, d'où

$$\|u+v\|_\rho \le \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$$

- Si $\|u\|_\rho = 0 \ alors \ \rho(\alpha u) \le 1, \forall \alpha > 0$, donc

$$\rho(\lambda u) \le \beta \rho\left(\frac{\lambda u}{\beta}\right) \le \beta, \forall \lambda > 0 \ et \ \beta \in (0, 1]$$

d'après les propriétés de ρ, alors $\rho(\lambda u) = 0, \ \forall \lambda > 0$ et que $u = 0$. □

Lemma 1.14. *Soit ρ un semimodulaire sur X, alors $\|x\|_\rho \le 1$ et $\rho(x) \le 1$ sont équivalent. Si ρ est continu, alors aussi $\|x\|_\rho < 1$ et $\rho(x) < 1$ sont équivalents, comme $\|x\|_\rho = 1$ et $\rho(x) = 1$.*
Soient ρ un semimodulaire sur X et $x_k \in X_\rho$, alors $x_k \to 0$ pour $k \to \infty$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} \rho(\lambda x_k) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration. Si $\rho(x) \le 1$, alors $\|x\|_\rho \le 1$ par la définition de $\|.\|_\rho$, d'une part si $\|x\|_\rho \le 1$, alors $\rho(\frac{x}{\lambda}) \le 1$ pour tout $\lambda > 1$. Puisque ρ est continu à gauche, il suit $\rho(x) \le 1$.
Soit ρ est continu, si $\|x\|_\rho \le 1$, alors il existe $\lambda < 1$ avec $\rho(\frac{x}{\lambda}) \le 1$, par conséquent et par les relations

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \le |\lambda| \rho(x), \ pourtout \ |\lambda| \le 1 \tag{1.5}$$

et

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \ge |\lambda| \rho(x), \ pourtout \ |\lambda| \ge 1, \tag{1.6}$$

on peut voir

$$\rho(x) \le \lambda \rho(\frac{x}{\lambda}) \le \lambda < 1.$$

D'une part si, $\rho(x) < 1$ alors par la continuité de ρ, il existe $\gamma > 0$ ou $\rho(\gamma x) < 1$, puisque

$$\|\gamma x\|_\rho \leq 1 \textit{ et } \|x\|_\rho \leq \frac{1}{\gamma} < 1.$$

L'équivalence de $\|x\|_\rho = 1$ et $\|x\|_\rho = 1$ est immédiate.
Soit $\|x_k\|_\rho \to 0$ et $\lambda > 0$, alors $\|K\lambda x_k\|_\rho < 1$ pour tout $K > 1$ et pour une large valeur de k, ainsi $\rho(K\lambda x_k) \leq 1$, par conséquent

$$\rho(\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}\rho(K\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}.$$

□

Corollary 1.15. *Soit ρ un semimodulaire sur X et $x \in X_\rho$, alors*
1-Si $\|x\|_\rho \leq 1$, alors $\rho(x) \leq \|x\|_\rho$.
2-Si $\|x\|_\rho > 1$, alors $\|x\|_\rho < \rho(x)$.
3-$\|x\|_\rho \leq \rho(x) + 1$.

Démonstration. 1- Pour $x = 0$ (évidente).
Soit $0 < \|x\|_\rho \leq 1$, par le lemme précédent et $\|\frac{x}{\|x\|_\rho}\|_\rho = 1$, on a $\rho(\frac{x}{\|x\|_\rho}) \leq 1$ puisque $\|x\|_\rho \leq 1$ et par l'inégalités (1.5) et (1.6), on a

$$\frac{\rho(x)}{\|x\|_\rho} \leq 1.$$

2-Soit $\|x\|_\rho > 1$, alors $\rho(\frac{x}{\lambda}) > 1$ pour $1 < \lambda < \|x\|_\rho$ et par (1.5) et (1.6), on a

$$\frac{\rho(x)}{\lambda} > 1, \text{ puisque } \lambda \text{ est arbitraire } \rho(x) \geq \|x\|_\rho.$$

3-Elle est immédiatement par (2). □

Fonction complémentaire de N-fonction

Definition 1.16. *Soit la fonction positive $p(t)$, $t > 0$, continue à droite pour $t \geq 0$, croissante est satisfaite la condition (1.2). On définit la fonction $q(s)$, $(s \geq 0)$ par l'égalité*

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t. \tag{1.7}$$

La fonction q est dite fonction conjuguée de la fonction p.

Definition 1.17. *Si φ est une N-fonction , alors la fonction conjuguée (duale) $\psi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ est définie par*

$$\psi = sup\{xy - \varphi(x)\}.$$

Theorem 1.18. *Soit φ une fonction de Young (N-fonction) et ψ la fonction conjuguée, alors ψ aussi est une fonction de Young*

Démonstration. 1- Pour tout y, la relation $xy - \varphi(x) = 0,\ si\ x = 0\ i.e.,\psi(y) \geq 0$, donc il est trivial que $\psi(0) = 0$.
2- Si $0 \leq y_1 \leq y_2$, alors

$$xy_2 - \varphi(x) \geq xy_1 - \varphi(x),\ pour\ tout\ x$$

implique $\psi(y_2) \geq \psi(y_1)$, alors $\psi \uparrow$.
Par définition, il existe un nombre $0 < x_0 < \infty$, tel que $\varphi(x_0) < \infty$, ainsi

$$\psi(y) \geq x_0 y - \varphi(x_0)\ pour\ tout\ y$$

tend vers ∞, si $y \to \infty$.
Puisque φ est convexe et $\varphi(0) = 0$, la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ croissante vers une valeur positive, lorsque x tend vers l'infini.
On note par m la limite de cette fonction et on suppose que $0 < y < m$, alors

$$xy - \varphi(x) \to -\infty,\ si\ x \to \infty$$

implique que $\psi(y)$ est finie.
3- ψ est convexe, si $0 \leq y_1 \leq y_2 < \infty\ et\ 0 < \lambda < 1$, alors

$$\begin{aligned} x(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - \varphi(x) &= \lambda xy_1 + xy_2 - \lambda xy_2 - \varphi(x) && (1.8)\\ &= \lambda(xy_1 - \varphi(x)) + (1-\lambda)(xy_2 - \varphi(x)) \\ &\leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2), \forall x \geq 0. && (1.9) \end{aligned}$$

On prend le *sup* sur le membre à gauche, on trouve

$$\psi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2)$$

□

Remark 1.19. *Il est facilement de vu que la fonction q possède les mêmes propriétés que la fonction p, elle est positive pour $s > 0$, continue à droite pour $s \geq 0$, croissante et vérifiée les conditions*

$$q(0) = 0,\ \lim_{s\to\infty} q(s) = \infty \tag{1.10}$$

.

Example 1.20. *Soient M_1 et M_2 deux N-fonctions*

1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 0$, *où* $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}, (t \geq 0)$, *donc* $q_1(s) = s^{\beta-1}$ $(s \geq 0)$ *avec* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. *Alors la fonction conjuguée est*

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$

2. $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, *où* $p_2(t) = M_2^{'}(t) = e^t - 1$ $(t \geq 0)$ *donc* $q_2(s) = \ln(s+1)$, $(s \geq 0)$. *Alors la fonction conjuguée est*

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s)ds = (1 + |v|)\ln(1 + |v|) - |v|.$$

Remark 1.21. *1- Il est imposable dans beaucoup des cas trouvé une formule explicite pour déterminer le complémentaire de N-fonction, par exemple, le N-fonction* $M(u) = e^{u^2} - 1$, *où* $p(t) = M^{'}(t) = 2te^{t^2}$, *nous ne pouvons pas exprimer q sous la forme explicite.*
2- Pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}$, *on passe a la limite si* $\alpha \to 0 \Rightarrow$ *contredit de (**??**) ainsi :* $M(\alpha u) < \alpha M(u)$, $0 < \alpha < 1$, $u \neq 0$.

Cette inégalité augmente strictement pour des valeurs positives de u

$$\frac{M(u^{'})}{u^{'}} \leq \frac{M(u)}{u}, \ 0 < u^{'} < u$$

On note par $M^{-1}(v)$, $(0 \leq v < \infty)$ l'inverse de la N-fonction $M(u)$.
Cette fonction est convexe puisque,

$$M^{-1}(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \geq \alpha M^{-1}(v_1) + (1-\alpha)M^{-1}(v_2), \ \textit{pour } v_1, v_2 \geq 0$$

La monotonicité de la dérivée droite $p(u)$ pour N-fonction $M(u)$ implique l'inégalité

$$\begin{aligned} M(u) + M(v) &= \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_0^{|v|} p(t)dt & (1.11)\\ &\leq \int_0^{|u|} p(t)dt + \int_{|u|}^{|u+v|} p(t)dt \\ &= \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t)dt = M\left[|u| + |v|\right]. & (1.12) \end{aligned}$$

On suppose que $a = M(u), b = M(v)$ sont des nombres non négatifs arbitraires, d'après la relation (1.10), on a

$$M^{-1}(a+b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b).$$

1.4 Condition Δ_2

Definition 1.22. *On dit que la N-fonction* $M(u)$ *satisfaite la condition* Δ_2, *s'il existe une constante* $k > 0$ *,telle que*

$$M(2u) \leq kM(u), \ (u \geq u_0) \tag{1.13}$$

pour une valeur positive de u_0.

Remark 1.23. *On le voit facilement que nous avons toujours* $k \geq 2$ *on a*

$$M(2u) > 2M(u) \ \textit{pour } u \neq 0.$$

Example 1.24. *1- La fonction $M(s) = |s|\ln(|s|+1)$ est satisfaite la condition Δ_2. En effet, on peut vérifier aisément que M est une N-fonction et on a : $k = 4$.*
2- On a aussi, la fonction $M(s) = \frac{1}{p}|s|^p$, pour $p > 1$ est vérifiée la condition Δ_2. En effet, on a $k = 2^p$

Definition 1.25. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Young.*
On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition ∇_2, noté $\varphi \in \nabla_2$, si

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2l}\varphi(x),\ x \geq x_0 \geq 0,$$

pour $l > 1$.

Definition 1.26. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Young.*
1- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition Δ', noté $\varphi \in \Delta'$, s'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\varphi(xy) \leq c\varphi(x)\varphi(y),\ x, y \geq x_0 \geq 0.$$

2- On dit qu'une fonction de Young satisfaite la condition ∇', noté $\varphi \in \nabla'$, s'il existe une constante $b > 0$, telle que

$$\varphi(x)\varphi(y) \leq \varphi(bxy),\ x, y \geq y_0 \geq 0.$$

1.5 les classes des espaces d'Orlicz

Nous d'abord présenterons et étudierons la structure des espaces d'Orlicz sur un espace de mesure arbitraire, et nous spécialisons ensuite pour obtenir des résultats particuliers. Soit l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) où Ω un certain ensemble de points et Σ est un σ-algèbre.

Remark 1.27. *1- Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young, où la fonction de Young permette de que, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, si la fonction $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ est measurable, alors $\Phi(f) =: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est measurable.*
2- D'après la définition de la fonction de Young, c'est une extension de la fonction réelle de Borel.

Definition 1.28. *L'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, telles que*

$$\int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < \infty,$$

est noté par $\widetilde{L}^\varphi(\mu)$.

Remark 1.29. *1- $\widetilde{L}^\varphi(\mu)$ l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz.*
2- Les classes d'Orlicz $\widetilde{L}^\varphi$ ne sont pas des espaces vectoriels.

Example 1.30. *On considère* $\Omega =]0,1[$ *et* $\phi(t) = e^t$, *alors la fonction* $u(x) = -\frac{1}{2}\ln x$ *appartient à* $\widetilde{L}^{\varphi}$, *mais la fonction* $v(x) = 2u(x) = -\ln x$, *n'appartient pas.*

Theorem 1.31. *1. L'espace* $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ *est absolument convexe. i.e., si* $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ *et* α, β *des scalaires, tels que*
$|\alpha| + |\beta| \leq 1$, *alors*

$$\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu).$$

Aussi si $h \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ *et* $|f| \leq |h|$, *telle que* f *est measurable, alors* $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$

2. L'espace $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ *est linéaire (i.e., espace vectoriel) si* $\Phi \in \Delta_2$, *globalement quand* $\mu(\Omega) = \infty$ *et localement si* $\mu(\Omega) < \infty$.

Démonstration. 1.Soit $f, g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Alors par monotonicité et convexité de Φ, pour $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(|\alpha f + \beta g|) \leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) &\leq \gamma \Phi(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|) && (1.14) \\ &\leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|), && (1.15) \end{aligned}$$

de même le membre droit est intégrable. Par conséquent $\alpha f + \beta g \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Le deuxième rapport est clair, puisque $\Phi(|f|) \leq \Phi(|h|)$. □

2.Pour la linéarité, il suffit de vérifier que $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, puis $nf \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour tout nombre entier n et par conséquent aussi pour $\alpha > 0$, $\alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Par la dernière partie de , on a

$$af_1 + bf_2 = \gamma(\frac{a}{\gamma}f_1 + \frac{b}{\gamma}f_2) \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu), \gamma = |a| + |b| > 0,$$

pour tout $f_i \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, $i = 1, 2$, par .
Ainsi nous devons montrer seulement $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour toute $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$. Si Φ est satisfaite la condition Δ_2, on trouve $\mu(\Omega) = +\infty$,

$$\Phi(2|f|) \leq k\Phi(|f|), \; k > 0,$$

par conséquent $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ avec $f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$.
Le cas $\mu(\Omega) < \infty$, alors $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, pour $x \geq x_0 \geq 0$.
Maintenant soit

$$f_1 = \begin{cases} f, \; |f| \leq x_0 \\ 0, \; autre \end{cases}$$

On pose $f_2 = f - f_1$, alors $f = f_1 + f_2$ et

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + k\Phi(|f_2|).$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \Phi(2|f|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(\Omega) + k\int_{\Omega} \Phi(|f|)d\mu < \infty$$

donc $2f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$, ceci montre que $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ est un espace linéaire.

Definition 1.32. *Soit $\widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble, sur un espace de mesure arbitraire (Ω, Σ, μ). Alors l'espace $L^{\varphi}(\mu)$ de toute fonctions mesurables $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\alpha f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu)$ pour $\alpha > 0$, s'appelle l'espace d'Orlicz. Autrement dit*

$$L^{\varphi}(\mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}},\ \textit{measurable};\ \int_{\Omega} \Phi(\alpha f) d\mu < \infty \ \textit{pour}\ \alpha > 0\} \tag{1.16}$$

Nous inclurons maintenant deux propriétés supplémentaires liées aux espaces classiques de Lebesgue $L^1(\mu)$ et $L^{\infty}(\mu)$, dépendant la détermination de la théorie de l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.33. *1. Soit*

(a) $L^1 = \cup\{\widetilde{L}^{\varphi}(\mu) : \Phi$ portée sur toute N-fonctions$\}$,

(b) $L^{\infty} = \cap\{\widetilde{L}^{\varphi}(\mu) : \Phi$ portée sur toute N-fonctions$\}$.

2. Si (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et (Φ, Ψ) couple de N-fonctions complémentaire, alors

$$L^1(\mu) = \widetilde{L}^{\psi}.\widetilde{L}^{\varphi} \text{où } \widetilde{L}^{\varphi}.\widetilde{L}^{\psi} = \{f.g : f \in \widetilde{L}^{\varphi}(\mu),\ g \in \widetilde{L}^{\psi}\}. \tag{1.17}$$

Remark 1.34. *La théorie classique de L^p indique que la partie (a) de la proposition ci-dessus ne se tient plus, si les fonctions Φ de Young sont restrictions à $\phi(x) = |x|^p,\ 1 < p < \infty$.*

Dans le reste de cette thèse, Ω est un ensemble borné, fermé dans l'espace euclidien de dimension fini, nous considérons la mesure de Lebesgue habituel. Nous notons que la majorité des assertions et les constructions présentées ci-dessous, leur validité pour le cas quand nous considérons un ensemble abstrait borné est fini.

Definition 1.35. *Soit $\Phi(u)$ une N-fonction. On note par $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$ la classe de ces fonctions à valeurs réelles, définie sur Ω, par*

$$\rho(u; \Phi) = \int_{\Omega} \Phi[u(x)] d\mu < \infty.$$

Remark 1.36. *1- Les fonctions qui est différentes seulement sur un ensemble de la mesure zéro, noteront soient considérées distinct.*
2- La classe $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$ s'appelle ***classe d'Orlicz****, nous écrirons $\widetilde{L}^{\varphi}$ au lieu de $\widetilde{L}^{\varphi}(\Omega)$.*
3- Toutes les fonctions bornées, mais non toutes les fonctions sommables, appartiennent à $\widetilde{L}^{\varphi}$.
4- On le voit facilement que chaque fonction dans la classe $\widetilde{L}^{\varphi}$ est sommable.

Proposition 1.37. *Chaque fonction $u(x)$ qui est sommable sur Ω appartenir à une certaine classe d'Orlicz*

Démonstration. On considérons les ensembles $\Omega_n = \Omega\,\{n - 1 \leq |u(x)| < n\}$. Il est clair que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \ mes\ \Omega_n \leq \int_{\Omega} |u(x)| dx + mes\ \Omega < \infty.$$

Comme est connu, on peut construire une suite croissante α_n telle que, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n n \ mes \ \Omega_n < \infty. \tag{1.18}$$

On pose

$$p(t) = \begin{cases} t, \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \alpha_n, \text{ si } n \leq t < n+1 (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

La fonction $p(t)$ possède toutes les propriétés, pour que

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

est une N-fonction. Puisque

$$\Phi(n) = \int_0^n p(t) dt \leq n\alpha_n$$

, nous avons, en vertu à l'équation (1.13), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi[u(x)] dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega_n} \Phi[u(x)] dx \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) \ mes \ \Omega_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n n \ mes \ \Omega_n < \infty. \end{aligned}$$

ce que montre que $u(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$ □

1.5.1 Comparaison de classes

Les Classes d'Orlicz $\widetilde{L}^{\varphi_1}$ et $\widetilde{L}^{\varphi_2}$, qui sont déterminées par des N-fonctions distincte $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$, est généralement distincte.

Theorem 1.38. *L'inclusion suivant*

$$L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi_2}, \tag{1.19}$$

est vérifié si et seulement si, s'il existe des constantes positives u_0 et a telles que

$$\varphi_2(u) \leq a\varphi_1(u), \ (u \geq u_0) \tag{1.20}$$

Démonstration. La condition suffisante de (1.17) est évidente pour une fonction arbitraire $u(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$, alors on a

$$\begin{aligned} \rho(u; \varphi_2) &= \int_{\Omega} \varphi_2[u(x)] dx \\ &\leq \varphi_2(u_0) \ mes \ \Omega + \int_{\Omega} \varphi_1[u(x)] dx < \infty. \end{aligned}$$

On suppose que la condition (1.17) n'est pas vérifiée, alors on identifier une suite de nombres u_n croissante, on peut trouver telle que

$$\varphi_2(u_n) > 2^n \varphi_1(u_n), \; n = 1, 2, ...$$

On subdivisé l'ensemble Ω en des sous ensembles disjoints Ω_n, tels que

$$mes \; \Omega_n = \frac{\varphi_1(u_n) mes \; \Omega}{2^n \varphi_1(u_n)}, \; n = 1, 2, ... \tag{1.21}$$

et on pose

$$u(x) = \begin{cases} u_n(x), \; si \; x \in \Omega_n \\ 0, \; si \; x \in \cup_{i=1}^n \Omega_n \end{cases}$$

Donc la fonction $u(x)$ est dans L^φ, puisque

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_1(u(x))dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{\Omega_n} \varphi_1(u(x))dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \varphi_1(u_n) mes \; \Omega_n \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_1(u_n) mes \; \Omega}{2^n} < \infty, \end{aligned}$$

mais $u \in L^v phi_2$, et en vertu (1.18), on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_2(u(x))dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{\Omega_n} \varphi_1(u(x))dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \varphi_2(u_n) mes \; \Omega_n \\ &\geq \sum_{n=1}^\infty \varphi_1(u_n) mes \; \Omega = \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Remark 1.39. *En déduit de théorème ci-dessus que les deux fonctions φ_1 et φ_2 déterminer la même classe d'Orlicz, si et seulement si, s'il existe des constantes positives a, b et u_0 telles que*

$$a\varphi_2(u) \leq \varphi_1(u) \leq b\varphi_2(u), \; (u \geq u_0)$$

1.6 Structure de l'espace d'Orlicz $\mathbf{L}^\varphi(\Omega)$

D'après l'inégalité de Jensen la classe d'Orlicz $\widetilde{L}^\varphi$ est un ensemble convexe, toutes les fois que la classe $\widetilde{L}^\varphi$ contient les deux fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ puis il contient également le segmentent entier

$$u_\alpha(x) = \alpha u_1(x) + (1 - \alpha) u_2(x) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

En effet, si $u_1(x), u_2(x) \in \widetilde{L}^{\varphi}$, alors

$$\begin{aligned}\rho(u_\alpha;\Phi) &= \int_\Omega \Phi[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)]dx \\ &\leq \alpha\rho(u_1;\Phi) + (1-\alpha)\rho(u_2;\Phi) < \infty.\end{aligned}$$

1.6.1 Norme d'Orlicz

Definition 1.40. *Soit* (Ω, Σ, σ) *un espace mesuré.*
Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et* (φ, ψ) *couple complémentaire, de N-fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz* $\|.\|_\varphi : u \mapsto \|u\|_\varphi$*, par*

$$\|u\|_0 = \|u\|_\varphi^O = \sup\left\{\int_\Omega |uv|d\mu : \int_\Omega \psi(v)d\mu \leq 1\right\}.$$

Les assertions juste prouvées nous permettrons de présenter la norme d'Orlicz dans l'ensemble L^φ à l'aide de l'égalité suivante

$$\|u\|_\varphi = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right|. \tag{1.22}$$

D'après la définition la norme ci-dessus, est que satisfaite les axiomes habituels :
1− $\|u\|_\varphi = 0$ ssi $u(x) = 0$ p.p ;
2− $\|\alpha u\|_\varphi = \alpha\|u\|_\varphi$;
3− $\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi$.
L'ensemble L^φ devient un espace linéaire normé qui s'appel l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.41. *La formule* (1.19) *définie une norme dans* L^φ.

Démonstration. • Soit $\|u\|_\varphi = 0$ et soit Ω un sous ensemble de Ω, tel que $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Soit ψ une fonction de Young (N-fonction), alors $\lim_{n\to\infty} \psi(t) = 0$ et par conséquent il existe $k > 0$, tel que $\psi(k) < \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$.
On définit la fonction v par

$$v(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in \Omega_n \\ 0, & si\ x \in \Omega\backslash\Omega_1 \end{cases}$$

Alors

$$\rho(v;\psi) = \int_\Omega \psi(|v(x)|)dx = \int_{Omega_1} \psi(k)dx < 1,$$

et par la définition da la norme d'Orlicz, on a

$$\|u\|_\varphi \geq \int_\Omega |u(x)|v(x)dx = k\int_\Omega |u(x)|dx,$$

et $\|u\| = 0$ implique $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. Puisque $\Omega_1 \subset \Omega$ était arbitraire, $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Soit $u, w \in L^{\varphi}(\Omega)$ i.e., $\|u\|_{\varphi} < \infty$, $\|w\|_{\varphi} < \infty$ et soit $c \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \bullet\|cu\|_{\varphi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |cu(x)v(x)|dx &= |c| \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \\ &= |c|\|u\|_{\varphi} < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\|u+w\|_{\varphi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |(u+w)(x)v(x)|dx &= \\ &= \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)+w(x)||v(x)|dx \\ &\leq \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)||v(x)|dx + \sup_{v} \int_{\Omega} |w(x)||v(x)|dx \\ &= \|u\|_{\varphi} + \|w\|_{\varphi}. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.42. *Soit φ une fonction de Young et soit $u \in L^{\varphi}$, telle que $\|u\|_{\varphi} \neq 0$, alors*

$$\int_{\Omega} \varphi\left(\frac{|ux|}{\|u(x)\|}\right) dx \leq 1.$$

Démonstration. Si $u \in L^{\varphi}$, alors

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx = \begin{cases} \|u\|_{\varphi}, \ si \ \rho(v,\psi) \leq 1 \\ \|u\|_{\varphi}\rho(v,\psi), \ si \ \rho(v,\psi) \geq 1. \end{cases} \tag{1.23}$$

La première partie de l'égalité ci-dessus est immédiatement de la définition de la norme d'Orlicz.

Pour la deuxième partie nous utilisons la définition de N-fonction, nous avons
$\psi(\alpha t) \leq \alpha\psi(t)$, pour $t \geq 0$ et $\alpha \in (0,1)$
Posons maintenant, $t = |v(x)|$, $\alpha = 1/\rho(v,\psi)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_{\Omega} \psi\left(\frac{1}{\rho(v,\psi)}|v(x)|\right) dx \leq \frac{1}{\rho(v,\psi)}\rho(v,\psi) = 1$$

et par la définition de la norme d'Orlicz, on a

$$\int_{\Omega} |u(x)| \left(\frac{|v(x)|}{\rho(v,\psi)}\right) dx \leq \|u\|_{\varphi}$$

ce qui démontre la deuxième partie de l'inégalité.

Theorem 1.43. *On suppose que $u(x) \in L^{\varphi}$, alors*

$$\sup_{\rho(v;\psi)\leq 1} |(u,v)| = \sup_{\rho(v;\psi)\leq 1} \left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| < \infty.$$

□

Démonstration. On suppose que cette assertion n'est vraie, alors on peut trouver une fonction $u_0(x) \in L^\varphi$ et une suite de fonctions $v_n(x) \in L^\varphi$, $\rho(v_n, \psi) \leq 1$, telle que

$$\int_\Omega u_0(x)v_n(x)dx > 2^n, \ n = 1, 2, ... \tag{1.24}$$

On considère la suite de fonctions est croissante

$$g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_n(x), \ n = 1, 2, ...$$

En vertu de la convexité de la N-fonction $\psi(u)$, on a

$$\rho(g_n, \psi) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(v_n, \psi) < 1,$$

et en vertu de (1.24), alors

$$\int_\Omega u_0(x)g_n(x) \geq n, \ n = 1, 2, ... \tag{1.25}$$

la suite de fonctions $g_n(x)$ est monotone ainsi converge presque par tout sur Ω vers la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k(x).$$

Puisque la suite de fonctions $\psi(g_n(x))$ et aussi croissante, on passe à la limite et en vertu du théorème de Levi[3], alors

$$\int_\Omega \psi(g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(g_n(x))dx \leq 1,$$

alors la fonction $g(x) \in L^\psi$.
La monotonicité de la suite de fonctions sommables $u_0(x)g_n(x)$ convergent presque par tout vers la fonction $u_0(x)g(x)$, donc en vertu du théorème de Levi et (1.25), on obtient

$$\int_\Omega u_0(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_0(x)g_n(x)dx = \infty.$$

Contradiction, puisque $u_0(x) \in L^\varphi$. □

Remark 1.44. *Une propriété évidente de la norme. Si*

$$u_1(x), u_2(x) \in L^\varphi \ \textit{et} \ |u_1(x)| \leq |u_2(x)|$$

presque partout sur Ω, alors $\|u_1\|_\varphi \leq \|u_2\|_\varphi$.

Considérons le cas de l'espace L^φ déterminé par la N-fonction

$$\varphi(u) = |u|^\alpha/\alpha, \ \alpha > 1.$$

La N-fonction complémentaire de φ est,

$$\psi(v) = |v|^{\beta}/\beta, \quad avec\ 1/\alpha + 1/\beta = 1$$

Soit $u_1(x) \in L^{\varphi}$, alors

$$\|u_1\|_{\alpha} = \left(\int_{\Omega} |u_1|^{\alpha} dx\right)^{\alpha} = 1. \tag{1.26}$$

En vertu du l'inégalité du Hölder, pour une fonction arbitraire $v(x) \in L^{\psi}$ satisfaite la condition $\rho(v;\psi) \leq 1$, on trouve

$$\left|\int_{\Omega} u_1(x)v(x)dx\right| \leq \left(\int_{\Omega} |u_1(x)|^{\alpha} dx\right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\beta} dx\right)^{1/\beta} \leq \beta^{1/\beta},$$

de sorte que

$$\|u_1\|_{\varphi} = \sup_{\rho(v;\psi)} \left|\int_{\Omega} u_1(x)v(x)dx\right| \leq \beta^{1/\beta}. \tag{1.27}$$

D'une part, pour la fonction $v_0(x) = \beta^{1/\beta}|u_1|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} u_1(x)$, ce qui satisfaite la condition $\rho(v;\psi) = 1$, on trouve

$$\int_{\Omega} u_1(x)v_0(x)dx = \beta^{1/\beta}\int_{\Omega} |u_1(x)|^{\alpha} dx = \beta^{1/\beta}.$$

De ceci et (1.24) si on regarder que $\|u_1\|_{\varphi} = \beta^{1/\beta}$.
Maintenant on suppose que $u(x)$ est une fonction arbitraire dans L^{φ}, la condition (1.23) est vérifiée pour la fonction $u_1(x) = u(x)/\|u\|_{\alpha}$. Donc

$$\|u\|_M = \beta^{1/\beta}\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha} dx\right)^{1/\alpha}.$$

Ainsi, la norme d'Orlicz définie dans l'espace L^{φ} est différente de la norme habituelle dans l'espace L^{α} par une constante multiplicateur.

1.6.2 Norme de Luxemburg

L'ensemble L^{φ} peut être transformé en espace de Banach à l'aide des normes distinctes de la norme présentée ci-dessus.
Considérerons une telle norme qui a été étudiée en détail par Luxembourg .

Definition 1.45. *Soient φ une fonction de Young et u une fonction mesurable définie sur Ω, le nombre*

$$\|u\|_1 = \|u\|_{\varphi}^{L} = \inf\left\{k > 0; \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{1}{k}|ux)|\right) dx \leq 1\right\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de u.

Remark 1.46. *On peut noter, par*

$$\|u\|_1 = \inf k, \tag{1.28}$$

où le minimum est sur tout $k > 0$, tel que

$$\rho(\frac{u}{k};\varphi) = \int_\Omega \varphi\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leq 1.$$

1.6.3 normes équivalentes :isomorphisme et isométrie des espaces

nous avons utilisé l'énoncé suivant à plusieurs reprises : une norme (semi-norme) est équivalente à une autre ;nous allons maintenant approfondir et préciser à nouveau ce concept ,soit X un espace linéaire avec deux normes B-normes ou F-normes (semi-norme) $\|\|_1$ et $\|\|_2$ .on dit que

une norme $\|\|_2$ n'est pas plus faible que $\|\|_1$ si

(+) $\qquad \|x_n - x_0\|_2 \to 0 \quad$ implique $\quad \|x_n - x_0\|_1 \to 0$

deux normes sont dites équivalentes si $\|\|_2$ n'est pas plus faible que $\|\|_1$ et $\|\|_1$ n'est pas plus faible que $\|\|_2$ c'est-à-dire autre que (+) nous avons

(++) $\qquad \|x_n - x_0\|_1 \to 0 \quad$ implique $\quad \|x_n - x_0\|_2 \to 0$

la relation (+) est équivalente à la suivante :

(x') $\qquad \|x_n\|_2 \to 0 \quad$ implique $\quad \|x_n\|_1 \to 0$

donc l'équivalence des deux normes signifie que $\|x_n\|_2 \to 0$ implique $\|x_n\|_1 \to 0$ et vice versa. en particulier, lorsque les deux $\|\|_1\, et\, \|\|_2$ sont homogènes ,il est facile de démontrer :

afin que les normes $\|\|_2\, et\, \|\|_1$ sont équivalents ,il faut suffisamment que

$$k^{'} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k'' \|x\|_2 \text{ for tout } k', k'' > 0$$

1.6.4 Extension de l'inégalité de Hölder

Theorem 1.47. *Soit (φ, ψ) le couple complémentaires de fonctions de Young. Si $u \in L^\varphi(\Omega)$ et $v \in L^\psi(\Omega)$, alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_\varphi \|v\|_\psi \tag{1.29}$$

Démonstration. Si $\|v\|_\psi = 0$, l'inégalité (1.29) est évidente.
si $\|v\|_\psi \neq 0$, on trouve

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_\psi};\psi\right) \leq 1,$$

et par la définition de la norme d'Orlicz de u, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)v(x)|dx &\leq \|v\|_\psi \int_\Omega \left|u(x)\frac{v(x)}{\|v\|_\psi}\right| dx\\ &\leq \|u\|_\varphi \|v\|_\psi.\end{aligned}$$

□

Remark 1.48. *L'inégalité (1.29) peut être vue comme prolongation de l'inégalité de Hölder, mais il convient noter que l'inégalité habituelle de Hölder n'est pas cas particulier de (1.29). En effet, si nous traitons les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ comme des espaces d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$ et $L^\psi(\Omega)$, avec*

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} \text{ et } \psi(t) = \frac{t^q}{q},\ p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors l'inégalité (1.29) est de la forme

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \|u\|_\varphi \|v\|_\psi$$

1.7 Inégalité de Jensen

Theorem 1.49. *Soit $(A, \sum, \mu)$ un espace de mesure fini avec $\mu(A) = 1$, si f est une fonction réelle dans $L^1(A, \mu)$, $a < f(x) < b$ pour tout $x \in A$ et si φ est fonction convexe sur (a, b) ,alors*

$$\varphi\left(\int_A f d\mu\right) \leq \int_A \varphi \circ f \ d\mu.$$

Chapitre 2

Continuité des opérateurs linéaires dans Orlicz

2.1 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés , un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

-condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E \quad \text{,on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

-condition homogène

$$\forall \varphi \in E \ , \ \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \ , \ \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

2.2 Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés ,un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si ,on a la propriété suivante pour toute suite x_n de G converge vers x_0 ,la suit $A(x_n)$converge vers $A(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A(x_0)$$

Remark 2.1. *l'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .*

Theorem 2.2. *Soit E et F deux espace normés ,un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .*

Démonstration. Soit x_n une suite convergente vers x , alors cette suite peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0) \end{aligned}$$

Il est clair que la suite y_n est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim y_n = \lim \left[x_0 + (x_n - x)\right] = x_0$$

la composition des deux membres par l'opérateur A , donne

$$\begin{aligned} A\left(x_n\right) &= A\left(x_0 + (x_n - x)\right) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0) \end{aligned}$$

l'opérateur A étant continu au point x_0 alors ,il vient

$$\begin{aligned} \lim\ A(x_n) &= \lim\ A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x) \end{aligned}$$

□

2.2.1 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$,telle que

$$\left\|A(x)\right\|_F \leq C \left\|x\right\|_E , \forall x \in E \tag{2.1}$$

Proposition 2.3. *la plus petite des constantes C vérifiant la relation (2.1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \left\|A\left(x\right)\right\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

Démonstration. En effet, de la relation (2.1) les constantes C s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C \quad , \forall x \in E, x \neq 0$$

d'où il est simple de voir que la plus petite des constantes C notée $\|A\|$ s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| A(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F$$

De plus ,pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$,on écrit

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_F &= \|x\|_E \left\| A(\frac{x}{\|x\|}) \right\|_F \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \ . \end{aligned}$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \ .$$

Passons au superimum sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \ .$$

Des deux inégalités précédentes ,on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F \ .$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F \ .$$

□

Proposition 2.4. *la norme* $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ *sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu*

Démonstration. supposons que la norme $\|A\|$ n'est pas finie ,cela veut dire que l'on peut trouver un élément x de E ,tel que

$$\|x\| \leq 1 \text{ et } \sup \|A(x)\|_F = \infty \ ,$$

ou encore il existe une suite x_n de E telle que

$$\|x_n\| \leq 1 \text{ et } \|A(x_n)\| = \alpha_n \ ,$$

avec

$$\lim \ \alpha_n = \infty.$$

Définissons la suite γ_n par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n} \ ,$$

il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0 ,c'est à dire $\lim y_n = 0$ d'où ,on obtient

$$\begin{aligned}\lim \ \|A(y_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1 \ .\end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que A est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim \ y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0 \ .$$

ce qui affirme que la constante $C = \|A\|$ est finie pour tout opérateur A linéaire et continu. □

Theorem 2.5. *un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si ,il est borné*

2.3 convergence inconditionnelle et absolue de séries d'éléments

Après avoir introduit quelques concepts généraux sur l'analyse fonctionnelle linéaire ,nous passons maintenant au quelques problèmes concrets ,nous limitons aux espaces de $B-$norme et $F-$norme nous discutons des séries vectorielles dans de tels espaces .

Dans l'espace $(X, \|\|)$,la norme $\|\|$ induit, la convergence en norme bien connue (convergence forte) :$\|x_n - x_0\| \to 0 (noté \ \ x_n \to x)$ cette convergence a diverses propriétés facilement prouvées et ces propriétés découlent de ce que suit énoncé :la convergence en norme est une sorte de convergence métrique lorsque l'on considère les séries à valeurs vectorielles ,nous sommes confrontés à une nouvelle situation intéressante ,si $x_n \in (X; \|\|)$,alors la série $\sum\limits_{v=1}^{\infty} x_v$

a- : converges si $\sum\limits_{v=1}^{m} x_v \to x$,

b- :converges absolument si $\sum\limits_{v=1}^{\infty} \|x_v\| < +\infty$.

Si $(X; \|\|)$ est complet ,alors la convergence absolue implique la convergence normale mais comme il est bien connu , la réciproque n'est pas vérifiée .la combinaison linéaire de deux séries convergentes est toujours une série convergente et sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des deux séries la combinaison linéaire de deux séries absolument convergentes est encore absolument convergente mais cela n'est vrai que sous certaines conditions sur la norme :pour $B-$norme et pour $F-$norme monotone ,c'est-à-dire si $|t_1'| \leq |t_2'|$alors $\|t_1'x\| \leq \|t_2'x\|$

il est intéressant que nous puissions introduire un troisième concept de convergence dans un espace normé elle n'est pas significative pour les séries numériques mais elle l'est pour les séries à valeurs vectorielles

2.4 Divers théorèmes sur la continuité des suites des opérateurs

Du point de vue de l'application de l'analyse fonctionnelle aux séries orthogonales, sommabilité, etc.., certains théorèmes sur les suites des opérateurs jouent un rôle important.

Nous allons considérer les problèmes suivants. Soit X un SCL (X réel),ξ désigne une fonctionnelle linéaire sur $[X, T]$ et Ξl l'espace linéaire de tous ces ξ.

Theorem 2.6. *sous l'hypothèse que le théorème A' est vrai pour un espace X de*

$$|\xi_n(x)| \leq c_x \text{ pour } n = 1, 2, ..., x \in X$$

il s'ensuite que la suite ξ_n est équi-continue en 0

c'est -à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage U_ϵ ,de l'origine tel que

$$|\xi_n(x)| \leq \epsilon \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ..., x \in U_\epsilon$$

pour le prouver ,on remarque que

$$|\xi_n(x)| < c \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ..., x \in U_0$$

donc quand $kx \in U$ pour $x \in v$ et le k présent tel que

$c/k \in \epsilon$, on avoir

$$|\xi_n(kx)| < c, \quad |\xi_n(x)| < c/k < \epsilon \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ...$$

Theorem 2.7. *supposons que le théorème A' soit vrai pour un certain X ,alors de*

$$|\xi_n(x)| \leq c_x \text{ pour } n = 1, 2, ..., x \in X$$

il s'ensuite que l'ensemble C des points x auxquels $\xi_n(x)$ converge est fermé dans $[X, T]$ .en particulier ,lorsque C est dense dans$[X, T]$ alors C et X coïncident

Soit $x_0$un point d'accumulation dans l'ensemble C et x^* un point dans C tel que $x^* - x_0 \in U_\epsilon$ où U_ϵ désigne un voisinage de l'origine , nous avons

$$|\xi_n(x_0) - \xi_n(x^*)| < \epsilon \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ...$$

puisque

$$|\xi_n(x^*) - \xi_m(x^*)| < \epsilon \text{ pour } n, m \text{ suffisamment grands ,on a l'inégalité}$$

$$|\xi_n(x_0) - \xi_m(x_0)| < 3\epsilon$$

Theorem 2.8. *Soient X un F^*-espace ,et en des fonctionnelles sous-linéaires sur X*

Soit B l'ensemble des x tel que $\xi(x)$ soit borné. Si B est de la deuxième catégorie ,alors il existe des constantes $c > 0, \rho > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\xi_n(x) \leq c \quad \text{chaque fois que} \quad \|x\| < \rho, n = 1, 2, ...$$

de plus ,B et X coïncident pour prouver ,on pose

$$B_{n,m} = \{x : \xi_\varrho(x) \leq m \quad \text{quand } \varrho > n\}, \quad n, m = 1, 2, ...$$

comme $B_{n,m}$ est fermé , $B = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m}$, et B est de la deuxième catégorie ,parmi les ensembles $B_{n,m}$ il y a un certain B_{n_0,m_0} qui contenant une boule $K(x_0, \rho')$ Donc

$$\begin{aligned} \xi_n(x) &\leq m_0 \quad \text{quand} \quad \|x - x_0\| < \rho', \quad n = n_0 + 1, ..., \\ \xi_n(x) &\leq \xi_n(x + x_0) + \xi_n(-x_0) \leq 2m_0 \quad \text{pour } \|x\| < \rho', n = n_0 + 1, ... \end{aligned}$$

de plus ,puisque pour suffisamment petit $\rho < \rho'$

$$\sup_{\|x\|<\rho, n\leq n_0} \xi_n(x) < m_0$$

alors on obtient l'inégalité

$$\xi_n(x) < c \qquad lorsque \quad \|x\| < \rho, n = 1, 2, ...c = 2m_0$$

si x *est arbitraire ,alors* $\|x/m\| < \rho$ *pour* m *suffisamment grand .ainsi par* (α) *on a*

$$\xi_n(x) = \xi_n\left(m\frac{x}{m}\right) \leq m\xi_n\left(\frac{x}{m}\right) \leq mc$$

d'où nous obtenons $x \in B$

Theorem 2.9. *Si* X *est un* F^*-*espace* ξ_n *les opérateurs sous-linéaires sur* X *telles que l'ensemble* C_0 *de* x *pour lequel* $\xi_n x) \to 0$*,est de deuxième catégorie,alors* C_0 *et* X *coïncident .en outre ,* ξ_N *sont équi-continues à l'origine ,c'est-à-dire que pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\rho > 0$ *tel que*

$$\xi_n(x) < \epsilon \quad lorsque \quad \|x\| < \rho, n = 1, 2, ...$$

l'équi-continuité découle d'un argument similaire au précédent pour prouver $C_0 = X$*, on précise que* C_0 *est dense danse dans une boule* $K(x_0, \rho)$

si $x \in K(x_0, \rho)$ *,* $\overline{x} \in C_0 \cap K(x_0, \rho)$ *puis de* $(\alpha), (\beta)$ *il s'ensuite que*

$$\xi_n(x) \leq \xi_n(\overline{x}) + \xi_n(x - \overline{x}) < \epsilon + \epsilon \text{ pour } \|x - \overline{x}\| < \rho/2 \text{ et pour presque tout } n$$

D'où $K(x_0, \rho) \subset C_0$

SI x *est arbitraire ,alors pour les grands entiers* m*,* $(x/m + x_0) \in K(x_0, \rho)$

$$\begin{aligned} \xi_n\left(m\frac{1}{m}x\right) &\leq m\xi_n\left(\frac{x}{m}\right) \\ &\leq m\xi_n\left(\frac{x}{m} + x_0\right) + m\xi_n(x_0) \to 0 \text{ comme } n \to \infty \end{aligned}$$

énonçons maintenant quelques théorèmes classiques que sont des conséquences faciles des théorèmes E *et* F *.d'abord ,nous soulignons ce que suit :*

pour qu'un opérateur distributif U *soit continu d'un espace* $B-$*normé* X *à un autre espace* Y *de norme* B *, il faut et il suffit que*

$$\|U(x)\| \leq k\|x\| \quad pour \quad x \in X$$

pour U *continu ,on définit* $\|U\| = \inf k$ *et on appelle cela constante la norme de l'opérateur* U

Theorem 2.10. *Soit X un B^*-espace de la deuxième catégorie (en particulier ,un $B-$ espace),U_n opérateurs linéaires de X dans un $B-$espace Y, sous l'hypothèse ci-dessus ,le suivantes sont vrais :*

a-l'ensemble C de x auquel $U_n(x)$ converge et l'ensemble B de x auquel $U_n(x)$ est borné sont soit de la première catégorie ,soit identiques à X

b- pour que $B = X$,il faut et il suffit que $\|U_n\|$ soit borné

c-s la suit $\|U_n\|$ est borné,alors C est fermé ,et donc si C est dense en X alors $X = C$ (le théorème de Banach-Steinhaus ,(b) a été prouvé par Hahn indépendamment)

Theorem 2.11. *soit X un F^*-espace de deuxième catégorie (en particulier ,un espace de Fréchet) U_n des opérateurs linéaires appliquant X dans un $F-$espace sous ces hypothèses ,on a :*

a-D'après le théorème G ,pour que $B = X$ il faut et suffisamment que U_n , soient équi-continus à l'origine

b-si U_n sont équi-continus à l'origine alors C est fermé ; donc en particulier on a $X = C$ si C est dense dans X

Theorem 2.12. *soit $[X_n, \|\|, \|\|^*]$ un espace de Saks ,que vérifie la condition $(\sum)$,(ξ_n)fonctionnelles linéaire sur $[X_S, \|\|, \|\|^*]$ et C l'ensemble des points de convergence de la suite $\xi_n(x)$*

a-si $\mu = 0$, alors C est fermé et soit il n'est nulle part dense en $[X_n, \|\|, \|\|^*]$ soit il coïncide avec X

b- si $\mu > 0$,alors il existe un résidu D dans $[X_n, \|\|, \|\|^*]$ tel que $\omega(x) \geq \mu/2$ quand $x \in D$

c- si $\xi_n(x) \to \xi(x)$partout ,alors $\mu = 0$ Donc ξ_n sont équi-continues à l'origine et la fonctionnelle limite est ξ linéaire sur $[X_n, \|\|, \|\|^*]$

2.5 continuité des opérateurs intégraux dans l'espace d'Orlicz

Soit $L^M[a,b]$ un espace d'Orlicz avec M satisfaisant la condition (Δ_2) .A un opérateur linéaire borné sur $L^M[a,b]$

$$\xi(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt \quad ,x \in L^M[a,b]$$

où $y \in L^N[a,b]$ et N est la fonction complémentaire de M ,pour être asymétrique ,on considère des normes différentes mais équivalentes dans l'espace $L^M[a,b]$ et son espace conjugué $L^N[a,b]$ En d'autres termes ,le conjugué espace de $\left[L^M[a,b]; \|\|\right]$ est $\left[L^N[a,b]; \|\|^0\right]$ où $\|\|$ est la norme de Luxembourg et $\|\|^0$la norme d'Orlicz en 1960 , Ando a donné pour la première fois la représentation des fonctionnelles linéaires bornées sur $L^M[a,b]$ et la relation entre les normes sans $M(u)$ satisfaisant la condition (Δ_2) la présentation étant assez longue ,nous ne donnons ici que son résultat principal

Theorem 2.13. *(a) toute fonctionnelle linéaire sur* $\left[L^M[a,b], \|\|^0\right]$ *peut toujours se décomposer de manière unique sous la forme*

$$\xi = f + \phi$$

où $f \in \left[L^N[a,b], \|\|\right]$ *et* ϕ *est une fonctionnelle singulière* $\Big($*i.e.*$\phi(x) = 0$ *si* $k > 0$ *et* $\int_a^b M(k|x(t)|)\, d$

(b) écrire $\|\xi\|^0 = \sup \xi(x) / \|x\|$, *alors* $\|\xi\|^0 = \|f\|^0 + \|\phi\|^0$

(c) écrire $\|\xi\| = \sup \xi(x) / \|x\|^0$ *,alors*

$$\|\xi\| = \inf\{k > 0 : \int_a^b N(|f(t)|/k)dt + \frac{1}{k}\|\phi\| \leq 1\};$$

en particulier $,\|\xi\| \geq \|f\|$ *et* $\|\xi\| \geq \|\phi\|$

(d) ϕ *est un fonction singulière si et seulement si* $\|\phi\|^0 = \|\phi\|$

dans cette section ,nous allons illustrer l'utilisation du théorème A à travers la discussion sur la régularité des espaces d'Orlicz .

tout d'abord ,rappelons un corollaire du théorème d'extension de Hahn-Banach qui stipule que pour un B-espace X et $x_0 \in X$ il doit exister une fonctionnelle linéaire bornée ξsur X telle que $\xi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\xi\| = 1$ qui ce ξ soit unique importe beaucoup l'étude de géométrie des espaces de Banach . on appelle x_0 dans X un point lisse si celui-ci ξest unique de plus ,nous appelons cela la fonctionnelle support de x_0 .si tout point de X est lisse, alors X est dit lisse .en fait ,pour la régularité ,il nous suffit de ne considérer que les points de X pour lesquels $\|x\| = 1$

Lemma 2.14. *si* $x \in L^M[a,b], x \neq 0,$*alors* $\|x\|^0 > \|x\|$

Lemma 2.15. *soit* $\xi = f + \phi$*une fonctionnelle linéaire bornée sur* $L^M[a,b]$*telle que donnée dans le théorème A avec* $\|\xi\| \leq 1$ *s'il y a un* $x \in L^M[a,b]$ $,\|x\|^0 = 1$*tel que* $\xi(x) = \|x\|^0 = 1$ *alors nous devons avoir*

$$\int_a^b N(|f(t)|)\, dt + \|\phi\| = 1$$

Theorem 2.16. *supposons que le graphe de* $N(v)$ *ne contient pas de segment de ligne si* $x \in \left[L^M[a,b]; \|\|^0\right], x \neq 0$ *et il existe une fonction support non singulière pour* $f_0 \in \left[L^N[a,b]; \|\|\right]$ *alors* x *est un point lisse de* $\left[L^M[a,b]; \|.\|^0\right]$

Theorem 2.17. *l'espace* $\left[L^M[a,b]; \|.\|^0\right]$ *est lisse si et seulement si le graphe de* $N(v)$ *ne contient pas de segment de droite et* $M(u)$ *satisfait la condition* (Δ_2)

application : Dans cette section on va montrer la continuité de certains opérateurs intégraux .

On considère l'opérateur intégral

$$U(x)(s) = \int_0^l k(s,t)\, x(t) dt \tag{2.2}$$

Theorem 2.18. *Pour tout* $k(s,t) \in L^{\Psi}([c,d] \times [a,b])$ *,l'opérateur intégral* U *tel que défini dans* $(*)$ *qui défini de* $L^{M_1}[a,b]$ *dans* $L^{M_2}[a,b]$ *est continu ,il faut et il suffit qu'il existe des nombres positifs* α, β *tels que*

$$\Phi(\alpha uv) \leq M_1(u) N_2(v), u, v \geq \beta \tag{2.3}$$

où $\Phi et \Psi, M_1 et\ N_1, M_2$ *et* N_2 *sont trois paires de fonctions complémentaires*

Démonstration. Nécessité

il existe des suites croissantes $\{a_n\}, \{b_n\}$telles que $a_n \to \infty, b_n \to \infty$, et

$$\Phi\left(\frac{a_n b_n}{4^n}\right) > M_1(a_n) N_2(b_n), \ n = 1, 2, ...$$

Notes que lorsque $u > 0$ nous avons

$$\Phi^{-1}(u) \Psi^{-1}(u) > u$$

En effet ,il est facile de voir que $\Phi(v) = v(\Phi(v)/v) > \Psi(\Phi(v)/v)$ soit $\Phi(v) = u$ on obtient alors l'inégalité ci-dessus .par conséquent nous avons □

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(M_1(a_n)N_2(b_n)) &> \frac{M_1(a_n)N_2(b_n)}{\Phi^{-1}(M_1(a_n)N_2(b_n))} \\ &> \frac{4^n M_1(a_n)N_2(b_n)}{a_n b_n} \end{aligned}$$

$$\Psi\left(\frac{4^n M_1(a_n)N_2(b_n)}{a_n b_n}\right) < M_1(a_n)N_2(b_n) \quad n = 1, 2...$$

On suppose

$M_1(a_1)(b-a) > 1$, $N_2(b_1)(d-c) > 1$

encore une fois ,prenons une suite $\{F_n\}$ d'intervalles non superposés dans $[a,b]$ et une suite $\{G_n\}$d'intervalles non superposés dans $[c,d]$tels que

$$mes\ F_n = \frac{1}{2^n M_1(a_n)} \quad , \ mes\ G_n = \frac{1}{2^n N_2(b_n)}, \quad n = 1, 2, ...$$

définissons une fonction sur $[c,d] \times [a,b]$ comme suit

$$k_0(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n M_1(a_n)N_2(b_n)}{a_n b_n} \cdot \chi_{G_n \times F_n(s,t)}$$

où χ ci-dessus désigne la fonction caractéristique de $G_n \times F_n$ alors puisque

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \Psi(k_0(s,t))\, dsdt &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n}\right) mes(G_n \times F_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc $k_0(s,t) \in L^{\Psi}([c,d] \times [a,b])$
soit

$$x_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{F_n}(t), \quad y_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{G_n}(s)$$

Alors il est facile de voir que

$$\int_a^b M_1(x_0(t))\,dt = 1, \quad \int_c^d N_2(y_0(s))\,ds = 1$$

c'est-à-dire , $x_0(t) \in L^{M_1}[a,b], y_0(s) \in L^{N_2}[c,d]$

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur intégral U_0 tel que donné par $(*)$ avec $k(s,t)$ remplacé par $k_0(s,t)$ n'est pas un opérateur continu de $L^{M_1}[a,b]$ dans $L^{M_2}[a,b]$,d'où une contradiction .En effet , $\|x_0\|^0_{M_1} \leq 2$ par conséquent

$$\begin{aligned}
\|U_0\| &= \sup\left\{\|U_0(x)\|^0_{M_2};\|x\|^0_{M_1} \leq 1\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\|U_0(x_0)\|^0_{M_2} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_c^d U_0(x_0)(s)\,y_0(s)\,ds \\
&\geq \frac{1}{2}\int_a^b\int_c^d k_0(s,t)\,x_0(t)\,y_0(s)\,dsdt \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty
\end{aligned}$$

Suffisance suffit de montrer qu'il existe un nombre positif ℓ tel que

$$\|x(t)y(s)\|^0_{\Phi} \leq \ell\,\|x(t)\|^0_{M_1}\,\|y(s)\|^0_{N_2} \tag{2.4}$$

pour $x(t) \in L^{M_1}[a,b]$ et $y(s) \in L^{N_2}[c,d]$ .En effet ,nous pouvons supposer $\|x\|^0_{M_1} > 0$,$\|y\|^0_{N_2} > 0$ donc si on pose

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{t \in [a,b] : |x(t)| / \|x\|^0_{M_1} < \beta\right\}, \quad F_2 = [a,b]\setminus F_1 . \\
G_1 &= \left\{s \in [c,d] : |y(s)| / \|y\|^0_{N_2} < \beta\right\}, \quad G_2 = [c,d]\setminus G_1 .
\end{aligned}$$

Alors par l'hypothèse ,le théorème de Fubini ,on obtient affine

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\alpha x(t)y(s)}{\|x\|_{M_1}^0\|y\|_{N_2}^0}\right\|_{\Phi}^0 &\leq 1+\left\{\int\int_{G_1\times F_1}+\int\int_{G_1\times F_2}+\int\int_{G_2\times F_1}+\int\int_{G_2\times F_2}\right\}\Phi\left(\frac{\alpha x(t)y(s)}{\|x\|_{M_1}^0\|y\|_{N_2}^0}\right)dsdt \\
&\leq 1+\Phi\left(\alpha\beta^2\right) mes\ G_1\ mes\ F_1+N_2(\beta)\, mesG_1\int_{F_2}M_1\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{M_1}^0}\right)dt \\
&\quad +M_1(\beta)mesF_1\int_{G_2}N_2\left(\frac{|y(s)|}{\|y\|_{N_2}^0}\right)ds+\int_{G_2}N_2\left(\frac{|y(s)|}{\|y\|_{N_2}^0}\right)ds\int_{F_2}M_1\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{M_1}^0}\right)dt \\
&\leq 2+\Phi(\alpha\beta^2)\,(d-c)\,(b-a)+N_2(\beta)\,(d-c)+M_1(\beta)(b-a)
\end{aligned}$$

en posant

$$\alpha\ell=2+\Phi(\alpha\beta^2)(d-c)(b-a)+N_2(\beta)(d-c)+M_1(\beta)(b-a)$$

D'où le résultat

Theorem 2.19. *pour que l'opérateur intégral singulier*

$$S_\Gamma(x)(s)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{x(s)}{s-t}dt\ .$$

soit continu sur $L^M(\Gamma)$ il faut et il suffit que $M(u)$ et sa fonction complémentaire $N(v)$ satisfassent toutes deux la condition (Δ_2)

Lemma 2.20. *soient $k(t)$et $x(t)$ des fonctions périodiques de période ℓ ,si $k(t)$ est intégrable sur $(0,\ell)$ et $x(t)\in L^M[0,\ell]$,alors la convolution*

$$h(t)=\int_0^\ell k(t-s)x(s)ds\in L^M[0,\ell]$$

de plus

$$\|h\|^0\leq 2\int_0^\ell|k(t)|\,dt.\,\|x\|^0$$

Démonstration. Soit

$$\|k\|_1=\int_0^\ell|k(t)|\,dt\ .$$

alors par l'inégalité de Jensen et le fait que les fonctions intégrables sont périodiques ,on obtient

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{|h(t)|}{\|k\|_1\|x\|}\right) &= M\left(\int_0^\ell\frac{k(t-s)x(s)}{\|k\|_1\|x\|}ds\right) \\
&\leq M\left(\int_0^\ell\frac{|x(t-s)|\,|k(s)|}{\|k\|_1\|x\|}ds\right) \\
&\leq \frac{1}{\int_0^\ell|k(s)|\,ds}.\int_0^\ell M\left(\frac{|x(t-s)|}{\|x\|}\right)|k(s)|\,ds
\end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés ,on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell M\left(\frac{|h(t)|}{\|k\|_1\|x\|}\right)dt \\
\leq\ & \frac{1}{\int_0^\ell |k(s)|\,ds}\int_0^\ell\left(\int_0^\ell M\left(\frac{|x(t-s)|}{\|x\|}\right)dt\right)|k(s)|\,ds \\
=\ & \int_0^\ell M\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|}\right)dt \leq 1\ .
\end{aligned}$$

Puisque les deux normes dans l'espace d'Orlicz $L^M[0,\ell]$ sont équivalentes en utilisant le inégalités liées ,nous avons

$$\|h\|^0 \leq 2\|h\| \leq 2\|k\|_1\|x\| \leq 2\|k\|_1\|x\|^0$$

Theorem 2.21. *si pour tout $x(t)\in L^{M_1}[a,b]$ on a*

$$\lim\left\|\chi_E(s)\int_a^b k(s,t,x(t))\chi_D(t)dt\right\|_{M_2}=0$$

où la limite est prise sur mes $D\to 0$, mes $E\to 0$ avec $D,E\subset[a,b]$ et χ_F désigne la fonction caractéristique de F alors l'opérateur l'intégral Urysohn

$$K(x)(s)=\int_a^b k(s,t,x(t))dt$$

qui transforme $L^{M_1}[a,b]$ en$L^{M_2}[a,b]$ est continue où $k(s,t,r)$:

$[a,b]\times[a,b]\times R^1\to R^1$ est continue en (s,r) pour presque tout $t\in[a,b]$ et mesurable en t pour chaque $(s,r)\in[a,b]\times R^1$, c'est -à-dire qu'il satisfait à la condition de Carathéodory

□

Démonstration. nous ne prouvons ici que le fait que de l'hypothèse on peut déduire pour tout $x(t)\in L^{M_1}[a,b]$

$$\lim_{\substack{mes\ D\to 0\\ D\subset[a,b]}}\left\|\int_a^b k(s,t,x(t))\chi_D(t)dt\right\|_{M_2}=0$$

En fait ,étant donné $\varepsilon>0$ et $x\in L^{M_1}[a,b]$ soit

$$\begin{aligned}
D_n &= \{s\in[a,b]:\left|\int_a^b k(s,t,x(t))_{\chi_D}(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2\left\|\chi_{[a,b]}\right\|_{M_2}} \\
&\text{quand } D \subset [a,b]\,, mesD<\frac{1}{n}\}
\end{aligned}$$

$n=1,2,...$,alors il est facile de voir que $D_1\subset D_2\subset ...$ Remarquons que d'après l'hypothèse il existe $\delta_0>0$ tel que chaque fois $D,E\subset[a,b]$ avec $mes\ D<\delta_0$,$mes\ E<\delta_0$

$$\left\|\chi_E(s)\int_a^b k(s,t,x(t))\chi_D(t)dt\right\|_{M_2}\leq 1$$

Partition $[a,b]$ en k sous-intervalles I_1,$I_2, ..., I_K$ de longueurs toutes inférieures à δ_0 tels que

$$\begin{aligned}
\|K(x)\|_{M_2} &= \left\| \int_a^b k(s,t,x(t))dt \right\|_{M_2} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{k} \left\| \chi_{I_1}(s) \int_a^b k(s,t,x(t)) \chi_{I_,}(t)dt \right\|_{M_2} \\
&\leq k^2
\end{aligned}$$

Autrement dit ,$K(x) \in L^{M_2}[a,b]$ .ainsi $K(x)(s)$ est fini pour presque tout $s \in [a,b]$ .Etant donné la continuité absolue de l'intégrale

$$\int_a^b k(s,t,x(t))dt$$

on obtient que pour presque tout $s \in [a,b]$ on a $s \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, soit

$$\lim_{n \to \infty} mes\ D_n = b - a$$

D'après l'hypothèse il y a $\delta > 0$ tel que chaque fois $D, E \subset [a,b]$, $mes\ D < \delta, mes\ E < \delta$on a

$$\left\| \chi_E(s) \int_a^b k(s,t,x(t)) \chi_D(t)dt \right\|_{M_2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Si on choisit n_0 tel que $1/n_0 < \delta$,$mes\ ([a,b] \setminus D_{n_0}) < \delta$ alors chaque fois que $D \subset [a,b]$ et $mes\ D < 1/, n_0$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_a^b k(s,t,x(t)) \chi_D(t)dt \right\|_{M_2} \\
\leq & \left\| \chi_{D_{n_0}}(s) \int_a^b k(s,t,x(t)) \chi_D(t)dt \right\|_{M_2} + \left\| \chi_{[a,b] \setminus D_{n_0}}(s) \int_a^b k(s,t,x(t)) \chi_D(t)dt \right\|_{M_2} \\
\leq & \left\| \chi_{D_{n_0}}(s) \cdot \frac{\epsilon}{2 \left\| \chi_{[a,b]} \right\|_{M_2}} \right\|_{M_2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve ce qu'il faut. □

Conclution

Le travaille qu'on a fait dans ce mémoire c'est l'etude de la notion de continuité des opérateurs linéaires dans les espaces fonctionnels, ces espaces souvent sont de dimensions infinis, utilisons les techniques et les inégalités pour prouvé ou estimer les temes sus le signe intégrale.

Bibliographie

[1] Diennin Lars et al. *Lebesgue and Sobolev spaces with variables exponents*, Springer. 2002.

[2] Gagui Bachir. *Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz.* Thèse doctorat, Université de M'sila, 2015.

[3] Nadir Mostefa. *Cours d'analyse fonctionnelle.* Université de M'sila, 2017 , http ;\\www.mostefanadir.com

[4] Walesday Orlicz. *Linear functional analysis.* Springer-Verlag, 1990.