

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de  
**MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Spécialité** : Analyse fonctionnelle

Par

BENRAMACHE SALAH
------------------

Sujet

Sur les espaces b-métriques
-----------------------------

Promotion:2018/2019
---------------------

*MERCI.*

# *Remerciements*

*Malgré tout le soin apporté à la rédaction de ce mémoire, il est possible que quelques erreurs soient toujours en présentées dans ce travail.*

*A terme de cette étude, j'ai le plaisir et le devoir de remercier en premier lieu le bon dieu **ALLAH**, le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour accomplir cette tâche.*

*Avec une immense estimation, j'exprime mes plus grands remerciements à **Monsieur A. TALLAB**, qui m'a encadrée d'une manière exemplaire: de compétence et de disponibilité à mon égard.*

*Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.*

*Mes remerciements à tous les professeurs du département de Mathématiques.*

*Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues qui ont participé de loin ou de près et qui m'ont aidée à l'élaboration de ce mémoire.*

*MERCI.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Espaces <math>b</math>-métriques</b>	<b>3</b>
1.1 Propriétés topologiques et métrisabilité . . . . .	3
1.1.1 Notions d'équivalence pour la $b$ -métrique . . . . .	8
1.2 Les espaces $b$ -métriques forts et la complétion d'un espace $b$ -métrique . . . .	10
1.2.1 Les espaces $b$ -métriques forts . . . . .	10
1.2.2 La complétion d'un espace $b$ -métrique . . . . .	12
<b>2 Espaces <math>b</math>-métriques généralisés</b>	<b>14</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	14
2.2 La complétion d'un espace $b$ -métrique généralisé . . . . .	15
2.3 Espaces $S_b$ -métriques . . . . .	17
<b>3 Quelques théorèmes de point fixe</b>	<b>23</b>
3.0.1 Point fixe sur les espaces $b$ -métriques . . . . .	23
3.0.2 Point fixe sur les espace $S_b$ -métrique . . . . .	25
3.0.3 Point fixe sur les espaces $b$ -métriques généralisés . . . . .	29

# Introduction

Dans de nombreux domaines de la science, de l'économie, de l'informatique, de l'ingénierie et du développement de l'analyse non linéaire, la théorie des points fixes est l'un des outils les plus importants. En 1989, Backhtin a introduit le concept d'espace  $b$ -métrique. En 1993, Czerwik [8] a étendu les résultats des espaces  $b$ -métriques. En utilisant cette idée, de nombreux chercheurs ont présenté la généralisation du célèbre théorème des points fixes de Banach dans l'espace  $b$ -métrique. Mehmet Kir [19], Boriceanu [4], Czerwik, [8], Bota [3], Pacurar [22] ont étendu le théorème des points fixes dans l'espace  $b$ -métrique. Dans ce mémoire on présente le traitement des espaces  $b$ -métriques et de  $b$ -métrique généralisés que sont introduit par [7], en insistant sur leurs propriétés topologiques. Aussi la preuve de l'existence du complété d'un espace  $b$ -métrique et  $b$ -métrique généralisée (voir [7]). Ainsi que, on introduit le concept d'espace  $S_b$ -métrique en tant que généralisation d'espaces métriques et d'espaces  $S$ -métriques a été introduit récemment dans [19], en donnant certaines relations entre  $S_b$ -métrique et d'autres métriques qui sont étudié dans.[28] Finalement, certains résultats en points fixes sont prouvés dans ([7],[28]) pour les espaces  $b$ -métriques,  $b$ -métrique généralisés et  $S_b$ -métriques.

Notre travail est réparti en trois chapitres:

Dans le premier chapitre,on donne un aperçu général sur les espaces  $b$ -métriques en donnant quelques leurs propriétés topologiques, aussi la complétion d'un espace  $b$ -métrique et les espaces  $b$ -métriques forts .

Le deuxième chapitre, on va introduire, la notion des espaces  $b$ -métrique généralisés et leurs complétés. Aussi les espaces  $S_b$ -métriques et quelque relations ente  $S_b$ -métriques et d'autres métriques.

Dans le troisième chapitre, on va donner quelques théorèmes de point fixe pour les espaces  $b$ -métriques,  $b$ -métrique généralisés et  $S_b$ -métriques.

# Chapitre 1

## Espaces b-métriques

### 1.1 Propriétés topologiques et métrisabilité

**Définition 1.1.1 (Espace b-métrique)** [7] Une  $b$ -métrique sur un ensemble non vide  $X$  est une application  $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$  satisfaite les conditions suivantes,

$$\begin{aligned} (i) \quad d(x, y) &= 0 \iff x = y \\ (ii) \quad d(x, y) &= d(y, x) \\ (iii) \quad d(x, y) &\leq s [d(x, z) + d(z, y)] \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

pour tous  $x, y, z \in X$  et  $s \geq 1$ . Le couple  $(X, d)$  est appelé un espace  $b$ -métrique. Si  $s = 1$  on trouve le cas d'un espace métrique. La condition (iii) s'appelle l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé.

**Exemple 1.1.1** [7] 1) Si  $(X, d)$  un espace métrique et  $\beta \geq 1$ , alors  $d^\beta(x, y)$  est une  $b$ -métrique, car

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ &\implies \\ d^\beta(x, y) &\leq [d(x, z) + d(z, y)]^\beta \leq 2^\beta [\max(d(x, z), d(z, y))]^\beta \\ &\leq 2^\beta [d^\beta(x, z) + d^\beta(z, y)] \end{aligned}$$

2) Soit  $X = l_p(\mathbb{R})$  avec  $0 < p < 1$  telle que  $l_p(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$ . On définit  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$  par

$$d(x, y) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

telles que  $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}$ , alors  $d$  est  $b$ -métrique avec  $s = 2^{\frac{1}{p}}$ .

**Définition 1.1.2 (linéarité polygonale  $s$ -relaxé)** [7] Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $s \geq 1$ . On définit l'inégalité polygonale  $s$ -relaxé par

$$d(x_0, x_n) \leq s [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)] \quad (1.1.2)$$

**Remarque 1.1.1** [7] 1) L'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé implique

$$d(x_0, x_n) \leq s d(x_0, x_1) + s^2 d(x_1, x_2) + \dots + s^n d(x_{n-1}, x_n),$$

car on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0, \dots, x_n \in X$ . En effet pour  $s \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq s d(x_0, x_1) + s d(x_1, x_n) \\ &\leq s d(x_0, x_1) + s^2 d(x_1, x_2) + s^2 d(x_2, x_n) \\ &\leq s d(x_0, x_1) + s^2 d(x_1, x_2) + \dots + s^n d(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

2) L'inégalité (iii) dans la définition 1.1.1 est appelée l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé, et aussi elle est considéré comme l'inégalité polygonale  $s$ -relaxé suivante

$$d(x_0, x_n) \leq s [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)],$$

et pour  $n = 2$  on obtient l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé.

Le théorème suivant montre que l'inverse n'est pas vraie.

**Théorème 1.1.1** [7] Ils existent des  $b$ -métriques qui ne satisfont pas l'inégalité polygonale  $s$ -relaxé.

**Preuve.** Soit  $X = [0, 1]$  et  $d(x, y) = (x - y)^2$  telle que  $x, y \in X$ , alors  $d$  est une métrique 2-relaxé sur  $X$  qui n'est pas polygonale  $s$ -relaxé.

Effectivement, pour tout  $s \geq 1$ . En effet, il est facile de vérifier que  $d$  satisfait l'inégalité triangulaire 2-relaxé. On suppose que pour  $s \geq 1$ ,  $d$  satisfait l'inégalité polygonale  $s$ -relaxé. En prenant  $x_i = \frac{i}{n}, 1 < i < n - 1$ , on obtient

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s}d(0, 1) \leq d(0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, 1) = n \left( \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n},$$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ce qui est impossible ■

**Définition 1.1.3** [7] Soient  $x, y, z \in X$  et  $\lambda \in \mathbb{N}$ . L'espace  $b$ -ultramétrique est un espace  $b$ -métrique  $(X, d)$  vérifie l'inégalité suivante,

$$d(x, y) \leq \lambda \max \{d(x, z), d(z, y)\}. \quad (1.1.3)$$

**Définition 1.1.4 (Les boules, les ensembles ouverts)** [7]

Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique,

1) La boule ouverte note par  $B(x, r)$  de centre  $x \in X$  et de rayon  $r > 0$  donné par  $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ .

2) Un sous ensemble  $Y$  de  $X$  est appelé ouvert si pour chaque  $x \in Y$  il existe  $r_x > 0$  telle que  $B(x, r_x) \subseteq Y$  et on dénote par  $\tau_d$  ou  $\tau(d)$  la famille de tous les sous ensemble ouverts de  $X$ .

**Théorème 1.1.2** [7] L'ensemble  $\tau_d$  satisfait aux axiomes d'une topologie. Cette topologie est dérivée de  $U_d$  sur  $X$  ayant comme base les ensembles,

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}, \forall \epsilon > 0.$$

**Théorème 1.1.3** ([10] [27]) Si  $(X, d)$  est un espace  $b$ -ultramétrique pour  $1 \leq \lambda \leq 2$ , alors la fonction  $\rho$  définie par  $\rho(x, y) = \inf \{\sum_{i=0}^n d(x_{i-1}, x_i)\}$  est une métrique sur  $X$  satisfaisant les inégalités  $\frac{1}{2\lambda}d \leq \rho \leq d$ .

V.Schroeder [27] a aussi montré que chaque  $\epsilon > 0$  il existe une  $b$ -métrique avec  $s = 1 + \epsilon$  telle que la fonction  $\rho$  définie par  $\rho(x, y) = \inf \{\sum_{i=0}^n d(x_{i-1}, x_i)\}$  n'est pas métrique.

Des résultats généraux de la métrisabilité ont été obtenus dans [27] and [21] par une modification de la méthode de technique de Frink.



**Théorème 1.1.4** [7] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique. Pour  $0 < p < 1$  on définit

$$\rho_p(x, y) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^n d(x_{k-1}, x_k)^p \right\} \quad (1.1.4)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et chaque  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ . La fonction  $\rho$  définie par 1.1.4 satisfaisant les conditions

$$(1) \quad \rho_p(x, y) = \rho_p(y, x)$$

$$(2) \quad \rho_p(x, y) \leq \rho_p(x, z) + \rho_p(z, y)$$

$$(3) \quad d^p(x, y) \leq \rho_p(x, y),$$

pour tout  $x, y, z \in X$ .

**Théorème 1.1.5** ([21]) Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique sur un ensemble non vide  $X$  satisfaisant l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé pour  $s \geq 1$ . Si  $p \in [0, 1]$  est donné par l'équation  $(2s)^p = 2$ , alors la fonction  $\rho_p : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par 1.1.4 est une métrique sur  $X$  satisfaisant les inégalités

$$\rho_p(x, y) \leq d^p(x, y) \leq 2\rho_p(x, y) \quad (1.1.5)$$

pour tout  $x, y \in X$

**Remarque 1.1.2** [7] Si  $d$  est une  $b$ -ultramétrique pour  $\lambda \geq 2$ . Dans ce cas  $0 < p < 1$  donné par  $\lambda^p = 2$  et la métrique  $\rho_p$  satisfaisant les inégalités

$$\rho_p(x, y) \leq d^p(x, y) \leq 4\rho_p(x, y) \quad (1.1.6)$$

pour tout  $x, y \in X$ .

L'inégalité 1.1.5 nous donne les conséquences suivantes.

**Corollaire 1.1.1** [7] Sans les hypothèses du Théorème 1.1.5  $\tau_d = \tau_\rho$ , i.e., la topologie de tout espace  $b$ -métrique est métrisable et la convergence des suites par rapport à  $\tau_d$  est caractérisé de la façon suivante,

$$x_n \xrightarrow{\tau_d} x \iff d(x, x_n) \longrightarrow 0$$

pour toute suite  $(x_n)_n$  dans  $X$  et  $x \in X$ .

**Définition 1.1.5** [7] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique, une  $b$ -métrique s'appelle

1) Continue si

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0 \text{ et } d(y_n, y) \longrightarrow 0 \implies d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y) \quad (1.1.7)$$

(2) Séparément continue si la fonction  $d(x, \cdot)$  continue sur  $X$  pour tout  $x \in X$ , i.e.,

$$d(y_n, y) \longrightarrow 0 \implies d(x, y_n) \longrightarrow d(x, y) \quad (1.1.8)$$

pour tout  $(x_n), (y_n)$  dans  $X$  et  $\forall x, y \in X$ .

**Remarque 1.1.3** [7] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique et  $x \in X$ ,

$B(x, r)$  est  $\tau_d$ -ouvert pour chaque  $r > 0 \iff d(x, \cdot)$  est semi-continue supérieur sur  $X$ , par conséquent si le  $b$ -métrique est séparément continue sur  $X$ , alors les boules  $B(x, r)$  sont  $\tau_d$ -ouvertes et l'équivalence découle de l'énigalité

$$B(x, r) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, r)).$$

Nous présentons maintenant un exemple d'espace  $b$ -métrique où les boules ne sont pas nécessairement ouvertes.

**Exemple 1.1.2** ([21]) Considérons  $\varepsilon > 0$  pour  $X = \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, \dots\}$  et  $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$\begin{aligned} d(0, 1) &= 1 & d(0, m) &= 1 + \varepsilon & \text{pour } m \geq 2 \\ d(0, m) &= \frac{1}{m} & d(n, m) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

et étendu à  $X \times X$  par  $d(n, n) = 0$  et symétrie. Alors

$$d(n, m) \leq (1 + \varepsilon) [d(n, k) + d(k, m)]$$

pour tout  $m, n, k \in X$ ,  $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) = \{0, 1\}$  et la boule  $B(1, r)$  contient une infinité de termes pour chaque  $r > 0$  i.e: pour tout:  $1 \in B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $B(1, r) \not\subseteq B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$  pour tout  $r > 0$ , montrant que la boule  $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$  n'est pas  $\tau_d$ -ouverte.

**Remarque 1.1.4** [7] *Si pour tout  $0 < p < 1$ . Une  $b$ -métrique  $d$  sur un ensemble  $X$  satisfait l'inégalité*

$$d(x, y)^p \leq d(x, z)^p + d(z, y)^p \quad (1.1.9)$$

pour tout  $x, y, z \in X$ . Alors les boules corespondant à  $d$  sont  $\tau_d$ -ouvert et de plus la  $b$ -métrique  $d$  est continue par la Remarque 1.1.3 la  $b$ -métrique  $\tilde{\rho} = \rho_p^p$  corespondant à la métrique  $\rho_p$  construite dans le Théormè 1.1.5 satisfait l'inégalité 1.1.9.

En effet,  $B(x, r)$  une boule sur  $(X, d)$  et  $y \in B(x, r)$  nous avons montré que il existe  $r' > 0$  telle que  $B(y, r') \subseteq B(x, r)$ , on prend  $r' := (r^p - d(x, y)^p)^{\frac{1}{p}} > 0$  alors  $d(y, z) \leq r'$  implique que

$$\begin{aligned} d(x, z)^p &\leq d(x, y)^p + d(y, z)^p \\ &\leq d(x, y)^p + r'^p = r^p, \end{aligned}$$

i.e.,  $d(x, y) < r$  la continuité de la  $b$ -métrique  $d$  dans la forme l'inégalité

$$|d(x_n, y_n)^p - d(x, y)^p| \leq d(x_n, x)^p + d(y_n, y)^p.$$

### 1.1.1 Notions d'équivalence pour la $b$ -métrique

Dans le raccordement au metrisabilité des espaces  $b$ -métriques, nous mentionnons les notions suivantes de l'équivalence des  $b$ -métriques.

**Définition 1.1.6** [7] *Soient  $d_1, d_2$  deux  $b$ -métriques sur le même ensemble  $X$ , alors  $d_1, d_2$  sont appelés,*

- 1) *Topologiquement équivalent si  $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ .*
- 2) *Uniformément équivalent si l'indentité  $I_X$  sur  $X$  est uniformément continu de  $(X, d_1)$  à  $(X, d_2)$  ainsi que de  $(X, d_2)$  à  $(X, d_1)$ , i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } d_1(x, y) \leq \sigma(\varepsilon) \implies d_2(x, y) \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } d_2(x, y) \leq \sigma(\varepsilon) \implies d_1(x, y) \leq \varepsilon.$$

3) Lipschitziennes équivalent, s'il existe  $c_1, c_2 > 0$  tels que

$$c_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$ .

**Remarque 1.1.5** [7] 1) Il s'ensuit que  $\tilde{\rho}(x, y) = (\rho_p(x, y))^{\frac{1}{p}}$  pour tout  $x, y \in X$  est une  $b$ -métrique sur  $X$ . Lipschitziennes équivalent à  $d$  et satisfait l'inégalité

$$\tilde{\rho}(x, y)^p \leq \tilde{\rho}(x, z)^p + \tilde{\rho}(z, y)^p.$$

Pour tout  $x, y, z \in X$ . C'est un fait bien connu dans la théorie des espaces quasi normés, où une quasi-norme  $\|\cdot\|$  satisfaisant l'inégalité

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

pour tout  $0 < p \leq 1$  est appelée  $p$ -norme.

2) Naturellement, les définitions ci-dessus s'appliquent à la métrique aussi bien, en tant que cas particuliers de la  $b$ -métrique.

3) Il est évident qu'en général

équivalence topologique  $\implies$  équivalence uniformément  $\implies$  équivalence lipschitzien.

**Théorème 1.1.6** ([11], [14, théorème 12.9]) Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique, alors  $d$  est lipschitzien équivalent à une métrique, si et seulement, si  $d$  satisfait l'inégalité polygonale  $s$ -relaxé pour tout  $s \geq 1$ .

## 1.2 Les espaces b-métriques forts et la complétion d'un espace b-métrique

### 1.2.1 Les espaces b-métriques forts

**Définition 1.2.1 (espace b-métrique fort)** [7] Une application  $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$  satisfait les conditions suivantes,

$$\begin{aligned} (i) d(x, y) &= 0 \iff x = y \\ (ii) d(x, y) &= d(y, x) \\ (iii) d(x, y) &\leq d(x, z) + sd(z, y) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

est appelée une b-métrique forte (sb-métrique) pour  $s \geq 1$  et pour tous  $x, y, z \in X$ . Le couple  $(X, d)$  s'appelle un espace b-métrique fort (sb-métrique).

**Proposition 1.2.1** Le couple  $(X, d)$  est un espace b-métrique fort (sb-métrique) si seulement s'il existe  $s \geq 1$  et pour tous  $x, y, z, t \in X$ , on a

$$|d(x, y) - d(z, t)| \leq s(d(x, z) - d(y, t)) \tag{1.2.2}$$

**Preuve.** Suppose que  $(X, d)$  est un espace b-métrique fort (sb-métrique) avec  $s \geq 1$ . Alors il existe  $s \geq 1$  telle que pour tout  $x, y, z, t \in X$

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + sd(y, z) \\ &\leq d(z, t) + sd(x, t) + sd(y, z) \end{aligned}$$

à partir duquel

$$d(x, y) - d(t, z) \leq s[d(x, t) + d(y, z)].$$

Un argument similaire montre que

$$d(t, z) - d(x, y) \leq s[d(t, x) + d(z, y)],$$

par conséquent

$$|d(x, y) - d(t, z)| \leq s[d(x, z) + d(y, t)],$$

Donc, un espace b-métrique forte satisfait 1.2.2. L'inverse est triviale. ■

**Remarque 1.2.1** [7] 1) L'inégalité 1.2.1 la condition (iii) est équivalente à

$$d(x, y) \leq \min \{sd(x, z) + d(y, z), d(x, z) + sd(y, z)\}$$

pour tout  $x, y, z \in X$ .

2) On a 1.2.1 implique l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé.

**Proposition 1.2.2** [7] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique on a si,

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad d(y_n, y) \longrightarrow 0,$$

alors

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y) \quad n \longrightarrow +\infty,$$

i.e., la continuité de la  $b$ -métrique.

**Preuve.** Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique et soit  $B(x, r)$  la boule ouverte dans  $X$ . Effectivement, si  $y \in B(x, r)$ , alors

$$d(y, z) \leq d(x, y) + sd(y, z) \leq \varepsilon,$$

implique  $sd(y, z) \leq \varepsilon - d(x, y)$ , donc  $B(y, r') \subseteq B(x, r)$  où  $r' = \frac{(\varepsilon - d(x, y))}{s}$ .

Aussi l'inégalité suivante

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq s[d(x, x') + d(y, y')],$$

vérifie pour tout  $x, y, x', y' \in X$ , en impliquant la continuité de la  $b$ -métrique, si

$$d(x, x) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad d(y_n, y) \longrightarrow 0,$$

on a

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq s[d(x_n, x) + d(y_n, y)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y) \quad n \rightarrow +\infty.$$

■

**Proposition 1.2.3** [7] *Tout espace  $b$ -métrique fort satisfait l'inégalité  $s$ -polygonale.*

**Preuve.** En effet,

$$\begin{aligned}
 & d(x_0, x_n) \\
 & \leq sd(x_0, x_1) + d(x_1, x_n) \\
 & \leq sd(x_0, x_1) + sd(x_1, x_2) + d(x_2, x_n) \leq \dots \\
 & \leq s[sd(x_0, x_1) + sd(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)],
 \end{aligned}$$

la preuve est terminée. ■

## 1.2.2 La complétion d'un espace $b$ -métrique

**Définition 1.2.2 (Suite de Cauchy)** [7] *Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0$ . On appelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans un espace  $b$ -métrique  $(X, d)$  si*

$$d(x_n, x_m) \leq s[d(x_n, x) + d(x, x_m)].$$

**Proposition 1.2.4** [7] *Toute suite convergente dans un espace  $b$ -métrique est de Cauchy.*

**Définition 1.2.3** [7] *Un espace  $b$ -métrique  $(X, d)$  est complet si toute suite de Cauchy convergente vers  $x \in X$ ,  $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x\right)$ .*

**Définition 1.2.4** [7] *Les espaces  $b$ -métriques  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  sont isométriques, s'il existe une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  telle que  $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ , pour tous  $x, y \in X_1$ .*

Une question posée dans [17], est ce que tout espace  $sb$ -métrique admet un complété? Cette question a reçu une réponse dans [16].

**Théorème 1.2.1** [7] *Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique fort,*

- 1) *Il existe un espace  $b$ -métrique fort complet  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  qui est le complété de  $(X, d)$ .*
- 2) *Le complété est unique isométriquement, i.e., si  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  sont des espaces  $b$ -métriques forts, qui sont des complétés de  $(X, d)$ , alors  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  sont isométriques.*

**Preuve.** On utilise même idée pour les espaces métriques, sur la famille  $C(X)$  de toutes les suites de Cauchy dans  $X$ ,

on considère la relation d'équivalence

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0,$$

on a sur l'espace quotient  $\tilde{X} = C(X) / \sim$  on défine  $\tilde{d}$  par  $\tilde{d}(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n),$

où  $(x_n) \in \xi$  et  $(y_n) \in \eta$  et on montre que  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  est un espace  $b$ -métrique complet contenant  $X$  isométriquement comme un sous-ensemble dense. ■



# Chapitre 2

## Espaces $b$ –métriques généralisés

### 2.1 Préliminaires

Nous passons maintenant au concept d’espace métrique généralisé introduit par A. Branciari dans [2].

**Définition 2.1.1** ([2]) *Soit  $X$  un ensemble non vide et soit  $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$  une application telle que pour tous  $x, y \in X$  et tous les points distincts  $u, v \in X$ , chacun distinct de  $x$  et  $y$ , on a*

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

*alors  $(X, d)$  est appelé un espace métrique généralisé (e.m.g).*

On considère ici la notion d’un espace  $b$ –métrique généralisée sur un ensemble non vide  $X$ .

**Définition 2.1.2** ([24] [23] [15]) *Soit  $X$  un ensemble non vide,  $s \geq 1$  et soit  $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$  une application telle que pour tous  $x, y \in X$  et tous les points distincts  $u, v \in X$ , chacun distinct de  $x$  et  $y$ , on a*

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq s [d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)],$$

*alors  $(X, d)$  est appelé un espace métrique  $b$ –généralisé (e.m.b-g).*

Comme dans [13] on a la définition suivante.

**Définition 2.1.3 (décomposition canonique) [7]**

Soit  $(X, d)$  un espace b-métrique généralisé, il s'ensuit que

$$x \sim y \iff d(x, y) < +\infty, \quad x, y \in X \quad (2.1.1)$$

est une relation d'équivalence sur  $X$ . Désignant par  $X_i, i \in I$  les classes d'équivalence correspondant à  $\sim$  et mettre  $d_i = d|_{X_i \times X_i}, i \in I$ , alors  $(X_i, d_i)$  est un espace b-métrique (un espace b-métrique fort si  $(X, d)$  est un espace b-métrique fort généralisé) pour tout  $i \in I$ , donc  $X$  peut être décomposé uniquement en classes d'équivalence  $X_i, i \in I$ . Appelé la décomposition canonique de  $X$ .

**Théorème 2.1.1 [13]** Soit  $(X, d)$  un espace b-métrique généralisé et  $X_i, i \in I$  la décomposition canonique de  $X$ , alors

- 1) L'espace  $(X, d)$  est complet si et seulement si  $(X_i, d_i)$  est complet pour tout  $i \in I$
- 2) Si  $(Y_i, d_i), i \in I$  sont des espace b-métrique et  $Y_i \cap Y_j = \Phi$  pour tout  $i, j \in I$  et  $i \neq j$ , alors

$$d(x, y) := \begin{cases} d_i(x, y) & \text{si } x, y \in Y_i, i \in I \\ +\infty & \text{si } x \in Y_i \text{ et } y \in Y_j, i, j \in I \text{ avec } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.2)$$

est un espace b-métrique généralisé sur  $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ , avec  $\{Y_i : i \in I\}$  la famille des classes d'équivalence correspondante à la relation d'équivalence 2.1.1.

## 2.2 La complétion d'un espace b-métrique généralisé

L'existence du complété d'un espace métrique généralisé a été prouvé par S. Czerwik and K. Krol dans [23]. Dans cette section on donne l'étude de l'existence d'un espace b-métrique généralisé fort introduit par [7]. On a besoin le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1 [7]** Soit  $(X, d)$  un espace b-métrique généralisé,  $(Z, D)$  un espace b-métrique généralisé complet, avec  $d, D$  sont continues et  $Y$  un ensemble dense dans  $X$ . Alors pour chaque injection isométrique  $f : Y \rightarrow Z$  il existe une unique injection isométrique  $F : X \rightarrow Z$

telle que  $F|Y = f$ . Si en plus  $X$  est complet et  $f(Y)$  est dense dans  $Z$ , alors  $F$  est bijective (i.e.,  $F$  est une isométrie de  $X$  dans  $Z$ ).

**Définition 2.2.1** ([23]) Soit  $(X, d)$  un espace b-métrique généralisé avec  $s \geq 1$  et soit  $\{x_n\}$  une suite de Cauchy dans  $X$  telle que  $x_n \neq x_m$  pour tout  $n \neq m$ , alors  $\{x_n\}$  peut converger vers au plus un point.

**Lemme 2.2.2** ([23]) Soit  $(X, d)$  un espace métrique b-généralisé avec  $s \geq 1$ ,

(a) Suppose que les suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  dans  $X$  telle que  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$  comme  $n \rightarrow \infty$  avec  $x \neq y$ , et  $x_n \neq x, y_n \neq y$  pour  $n \in \mathbb{N}$  alors on a

$$\frac{1}{s}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq sd(x, y).$$

(b) Si  $y \in X$  et  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $X$  avec  $x_n \neq y_n$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq m$  convergent vers  $x \neq y$ , alors

$$\frac{1}{s}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) \leq sd(x, y).$$

**Théorème 2.2.1** Suppose que  $\{y_n\}$  une suite de Cauchy dans un espace métrique généralisé  $X$  (i.e.,  $b = 1$ ) et suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y) = 0$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = d(x, y)$ . En particulier,  $\{y_n\}$  ne converge pas vers  $x$  si  $x \neq y$ .

**Preuve.** Si  $y_n = x$  pour  $n$  assez grand, ce doit être le cas que  $x = y$ , il est inclu le cas  $x = y_n$ . Aussi éventuellement  $y_n \neq y$  sinon le résultat est trivial. Donc en passant à une sous-suite nous pouvons supposer que  $y_n \neq y_m$  et  $y_n \neq y_m \neq x$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $n \neq m$ , alors comme  $d$  est métrique généralisé, donc

$$d(x, y) \leq d(x, y_n) + d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y)$$

et

$$d(x, y_n) \leq d(x, y) + d(y, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_n)$$

puisque  $\{y_n\}$  est une suite de Cauchy,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_m) = 0$ . Donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) \leq d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n).$$

La preuve est terminée. ■

## 2.3 Espaces $S_b$ -métriques

Dans cette section, nous rappelons la notion d'espace  $S_b$ -métrique et étudions quelques propriétés de cet espace.

**Définition 2.3.1** ([25]) Soient  $X$  un ensemble non vide et  $S : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  est une application satisfaisant les conditions suivantes pour tout  $x, y, z, a \in X$ .

$S1)$   $S(x, y, z) = 0$  si et seulement si  $x = y = z$ .

$S2)$   $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$ .

Alors l'application  $S$  est appelé  $S$ -métrique sur  $X$  et le couple  $(X, S)$  est appelé un espace  $S$ -métrique.

Nous allons utiliser le lemme suivant dans les sous-sections suivantes.

**Lemme 2.3.1** ([25]) Soit  $(X, S)$  un espace  $S$ -métrique, alors on a

$$S(x, x, y) = S(y, y, x).$$

**Définition 2.3.2** ([28]) Soient  $X$  un ensemble non vide et  $b \geq 1$ . Une application  $S_b : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  est dite  $S_b$ -métrique si pour tout  $x, y, z, a \in X$ , les conditions suivantes sont satisfaites.

$(S_b1)$   $S_b(x, y, z) = 0$  si et seulement si  $x = y = z$ .

$(S_b2)$   $S_b(x, y, z) \leq b[S_b(x, x, a) + S_b(y, y, a) + S_b(z, z, a)]$ .

Le couple  $(X, S_b)$  est appelé un espace  $S_b$ -métrique

**Remarque 2.3.1** [28] Nous notons que les espaces  $S_b$ -métriques sont des généralisations des espaces  $S$ -métriques puisque chaque  $S$ -métrique est une  $S_b$ -métrique avec  $b = 1$ . Mais la déclaration inverse n'est pas toujours vraie (voir [26] pour plus de détails). Dans ce qui suit, nous donnons un autre exemple d'une  $S_b$ -métrique qui n'est pas une  $S$ -métrique sur  $X$ .

**Exemple 2.3.1** [28] Soit  $X = \mathbb{R}$  et la fonction  $S_b$  définie par

$$S_b(x, y, z) = \frac{1}{16} (|x - y| + |y - z| + |x - z|)^2,$$

alors la fonction  $S_b$  est une  $S_b$ -métrique avec  $b = 4$ , mais ce n'est pas  $S$ -métrique, car pour  $x = 4, y = 6, z = 8$  et  $a = 5$ , on obtient

$$S_b(4, 6, 8) = 4, S_b(4, 4, 5) = \frac{1}{4}, S_b(6, 6, 5) = \frac{1}{4}, S_b(8, 8, 5) = \frac{9}{4},$$

par conséquent nous avons

$$S_b(4, 6, 8) = 4 \leq S_b(4, 4, 5) + S_b(6, 6, 5) + S_b(8, 8, 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4},$$

donc on a la contradiction.

**Définition 2.3.3** [28] Soient  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique et  $b > 1$ . On appelle  $S_b$  est symétrique si

$$S_b(x, x, y) = S_b(y, y, x) \quad ((1))$$

pour tout  $x, y \in X$ .

**Exemple 2.3.2** [28] Soit  $(X, d)$  un espace métrique et l'application  $S_b : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ , définie par

$$S_b(x, y, z) = [d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)]^p,$$

pour tout  $x, y, z \in X$  et  $p > 1$ , alors  $S_b$  est symétrique.

**Exemple 2.3.3** [28] Soit  $X = \mathbb{R}$  et l'application  $S_b : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$\begin{aligned} S_b(0, 0, 1) &= 2 \\ S_b(1, 1, 0) &= 4 \\ S_b(x, y, z) &= 0 \quad \text{si } x = y = z \\ S_b(x, y, z) &= 1 \quad \text{autrement,} \end{aligned}$$

pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $S_b$  est une  $S_b$ -métrique avec  $b \geq 2$  qui n'est pas symétrique.

**Définition 2.3.4** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique,  $x \in X$  et  $A, B \subset X$ ,

1) On définit la distance entre les ensembles  $A$  et  $B$  par

$$S_b(A, A, B) = \inf \{S_b(x, x, y) : x \in A, y \in B\}$$

2) On définit la distance du point  $x$  à l'ensemble  $A$  par

$$S_b(x, x, A) = \inf \{S_b(x, x, y) : y \in A\}$$

3) On définit le diamètre de  $A$  par

$$\delta(A) = \sup \{S_b(x, x, y) : x, y \in A\}$$

**Définition 2.3.5** ([26]) Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique, la boule ouverte  $B_s^b(x, r)$  et la boule ferme  $B_s^b[x, r]$  avec le center  $x$  et de rayon  $r$  sont définies par

$$B_s^b(x, r) = \{y \in X : S_b(y, y, x) < r\}$$

et

$$B_s^b[x, r] = \{y \in X : S_b(y, y, x) \leq r\},$$

pour  $r > 0, x \in X$ .

**Exemple 2.3.4** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique telle que  $X = \mathbb{R}$  et la fonction  $S_b$  définit par

$$S_b(x, y, z) = \frac{1}{16} (|x - y| + |y - z| + |x - z|)^2,$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , alors on obtient

$$B_s^b(0, 2) = \{y \in \mathbb{R} : S_b(y, y, 0) < 2\} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

et

$$B_s^b[0, 2] = \{y \in \mathbb{R} : S_b(y, y, 0) \leq 2\} = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}].$$

**Définition 2.3.6** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique et  $X' \subset X$

1) S'il existe  $r > 0$  telle que  $B_s^b(x, r) \subset X'$  pour tout  $x \in X'$ , alors  $X'$  est appelé un sous-ensemble ouvert de  $X$ .

2) Soit  $\tau$  l'ensemble de tous  $X' \subset X$  avec  $x \in X'$  telle qu'il existe  $r > 0$  satisfaisant  $B_s^b(x, r) \subset X'$  alors  $\tau$  est appelée la topologie induite par  $S_b$ -métrique.

3) L'ensemble  $X'$  est appelé  $S_b$ -borné s'il existe  $r > 0$  telle que  $S_b(x, x, y) < r$  pour tout  $x, y \in X'$ . Si  $X'$  est  $S_b$ -borné, alors nous écrivons  $\delta(X') < \infty$ .

**Définition 2.3.7** ([26]) Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique

- 1) La suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  converge vers  $x$  si et seulement si  $S_b(x_n, x_n, x) \longrightarrow 0$ , comme  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $S_b(x_n, x_n, x) < \epsilon$ . Il est noté par  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .
- 2) La suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  est appelée une suite de Cauchy, si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  telle que  $S_b(x_n, x_n, x_m) < \epsilon$  pour chaque  $n, m \geq n_0$ .
- 3) L'espace  $S_b$ -métrique  $(X, S_b)$  est dit complet si chaque suite de Cauchy est convergente.

Nous donnons maintenant certaines relations entre  $S_b$ -metric et une autre métrique qui sont données dans [7] comme suit.

**Lemme 2.3.2** ([12]) Soit  $(X, d)$  un espace métrique alors les propriétés suivantes sont satisfaites

- 1)  $S_b(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$  pour tout  $x, y, z \in X$  est un  $S$ -métrique en  $X$ .
- 2)  $x_n \longrightarrow x$  dans  $(X, d)$  si et seulement si  $x_n \longrightarrow x$  dans  $(X, S_b)$ .
- 3)  $\{x_n\}$  est de cauchy dans  $(X, d)$  si et seulement si  $\{x_n\}$  est de cauchy dans  $(X, S_b)$ .
- 4)  $(X, d)$  est complet si et seulement si  $(X, S_b)$  est complet.

Dans le lemme suivant montre que la relation entre  $S_b$ -métrique et  $b$ -métrique.

**Lemme 2.3.3** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique,  $S_b$  est symétrique  $S_b$ -métrique avec  $b \geq 1$  et l'application  $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$d(x, y) = S_b(x, x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$  alors  $d$  est un  $b$ -métrique sur  $X$ .

**Preuve.** En utilisant l'inégalité ( $S_b2$ ) on a

$$\begin{aligned} d(x, y) &= S_b(x, x, y) \leq b[2S_b(x, x, z) + S_b(y, y, z)] \\ &= 2bS_b(x, x, z) + bS_b(y, y, z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(x, y) &= S_b(y, y, x) \leq b[2S_b(y, y, z) + S_b(x, x, z)] \\ &= 2bS_b(y, y, z) + bS_b(x, x, z) \end{aligned}$$

par conséquent, on obtient

$$d(x, y) \leq \frac{3b}{2} [d(x, z) + d(y, z)]$$

pour tout  $x, y \in X$  alors  $d$  est  $b$ -métrique sur  $X$  avec  $\frac{3b}{2}$  ■

**Lemme 2.3.4** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique avec  $b \geq 1$  et l'application  $S_b : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$S_b(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z),$$

pour tout  $x, y, z \in X$  alors  $S_b$  est  $S_b$ -métrique sur  $X$

**Preuve.** Il peut être facilement vérifier que le condition  $(S_b1)$  est satisfaite, nous prouvons que la condition  $(S_b2)$  est satisfaite en utilisant l'inégalité triangulaire  $b$ -métrique on a

$$\begin{aligned} S_b(x, y, z) &= d(x, z) + d(y, z) \\ &\leq b[d(x, a) + d(a, z)] + b[d(y, a) + d(a, z)] \\ &= bd(x, a) + 2bd(a, z) + bd(y, a) \\ &\leq 2bd(x, a) + 2bd(y, a) + 2bd(a, z) \\ &= b[S_b(x, x, a) + S_b(y, y, a) + S_b(z, z, a)], \end{aligned}$$

pour tout  $x, y, z \in X$  alors  $S_b$  est  $S_b$ -métrique sur  $X$  avec  $b$ . ■

**Exemple 2.3.5** [28] Soit  $X = \mathbb{R}$  et l'application  $S_b : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$S_b(x, y, z) = b(|x - z| + |x + z - 2y|),$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$  où  $b \geq 1$ , alors  $(\mathbb{R}, S_b)$  est un espace  $S_b$ -métrique, maintenant nous montrons que il n'existe pas tout  $b$ -métrique  $d$  que génère cette  $S_b$ -métrique. à l'inverse, supposons qu'il existe un  $b$ -métrique  $d$  telle que

$$S_b(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , alors on obtien

$$S_b(x, x, z) = 2d(x, z) = 2b|x - z| \text{ et } d(x, z) = b|x - z|,$$



et

$$S_b(y, y, z) = 2d(y, z) = 2b|y - z| \text{ et } d(y, z) = b|y - z|,$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$  donc on obtient

$$b(|x - z| + |x + z - 2y|) = b|x - z| + b|y - z|,$$

ce qui est une contradiction ,par conséquent la  $S_b$ -métrique ne peut pas être généré par tout  $b$ -métrique.

# Chapitre 3

## Quelques théorèmes de point fixe

Dans ce chapitre nous donnerons quelques résultats en points fixes sur les espaces  $b$ -métriques et des espaces  $b$ -métriques généralisés, aussi sur les espaces  $S_b$ -métriques.

### 3.0.1 Point fixe sur les espaces $b$ -métriques

**Théorème 3.0.1** [6] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique complet avec  $s > 1$  et on suppose que l'application  $f : X \longrightarrow X$  satisfait

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

pour tout  $x, y \in X$  et  $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$  est croissante et satisfait

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi^n(t) = 0$$

pour tout  $t > 0$ , alors  $f$  admet un point fixe unique  $x^* \in X$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$  pour tout  $x \in X$ .

**Preuve.** D'abord nous observons que les hypothèses sur  $\varphi$  implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0,$$

alors  $f$  est continue. Soit  $x \in X$  et soit  $\epsilon > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi^n(\epsilon) < \frac{\epsilon}{2s}$ . On pose que  $g = f^n$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on met que  $x_m = g^m(x)$ . Alors

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(g^m(gx), g^m(x)) \leq \varphi^{nm}(d(g(x), x)),$$

ainsi  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_{m+1}, x_m) = 0$ .

on prend  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $d(x_{m+1}, x_m) < \frac{\epsilon}{2s}$  et soit  $u \in B(x_m; \epsilon)$ .

Alors

$$d(g(u), g(x_m)) \leq \varphi^n(d(u, x_m)) \leq \varphi^n(\epsilon) < \frac{\epsilon}{2s}$$

et

$$d(g(x_m), x_m) = d(x_{m+1}, x_m) < \frac{\epsilon}{2s}$$

par l'inégalité triangulaire relaxé on a

$$\begin{aligned} d(g(u), x_m) &\leq s[d(g(u), g(x_m)) + d(g(x_m), x_m)] \\ &\leq s\left[\frac{\epsilon}{2s} + \frac{\epsilon}{2s}\right] = \epsilon \end{aligned}$$

donc  $g : B(x_m; \epsilon) \longrightarrow B(x_m; \epsilon)$  il s'ensuit que si  $j, t \geq m$ ,

$$\begin{aligned} d(x_t, x_j) &\leq s[d(x_t, x_m) + d(x_m, x_j)] \\ &\leq 2s\epsilon. \end{aligned}$$

Donc  $\{x_m\}$  est une suite de Cauchy, alors il existe  $x^* \in X$  telle que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x^*$ . Aussi, la continuité de  $f$  implique la continuité de  $g$ , alors

$$x^* = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} g(x_m) = g(x^*)$$

puisque

$$d(g(x^*), g(y^*)) \leq \varphi^n(d(x^*, y^*)) < d(x^*, y^*)$$

si  $x^* \neq y^*$ , il est clair que  $g$  a exactement un point fixe unique. Aussi, puisque

$$d(x^*, g^m(x)) = d(g^m(x^*), g^m(x)) \leq \varphi^{nm}(d(x^*, x)) \longrightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$\{g^m(x)\}$  converge vers  $x^*$  pour tout  $x \in X$ , par la continuité de  $f$ ,

$$f(x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(g^m(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} g^m(f(x)) = x^*$$

donc  $x^*$  est un point fixe unique de  $f$ .

Alors pour toute  $x \in X$  et  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,

$$f^{nm+r}(x) = g^m(f^r(x)) \longrightarrow x^* \quad , m \rightarrow \infty$$

il s'ensuit que  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = x^*$ . ■

**Théorème 3.0.2** [9] Soit  $(X, d)$  un espace  $b$ -métrique complet et  $0 < \alpha < 1$ . Si  $f : X \longrightarrow X$  une application satisfaite l'inégalité

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

pour tout  $x, y \in X$ . Alors  $f$  admis un point fixe unique  $z$  et la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $z$  pour tout  $x \in X$ .

### 3.0.2 Point fixe sur les espace $S_b$ -métrique

On a besoin le lemme suivant.

**Lemme 3.0.5** .([26]) Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique avec  $b \geq 1$ , alors ona

$$S_b(x, x, y) \leq b S_b(y, y, x) \text{ et } S_b(y, y, x) \leq b S_b(x, x, y)$$

**Théorème 3.0.3** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique complet avec  $b \geq 1$  et  $T : X \longrightarrow X$  un application satisfaisant

$$S_b(Tx, Tx, Ty) \leq h S_b(x, x, y), \quad (3.0.1)$$

pour tout  $x, y, z \in X$  où  $0 \leq h \leq \frac{1}{b^2}$  alors  $T$  a un point fixe  $x$  dans  $X$ .

**Preuve.** Soit  $T$  satisfait l'inégalité 3.0.1 et  $x_0 \in X$ , alors on définit la suite  $\{x_n\}$  par  $x_n = T^n x_0$  en utilisant linégalité 3.0.1, nous obtenons

$$S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq h^n S_b(x_0, x_0, x_1) \quad (3.0.2)$$

depuis la condition  $(S_b2)$  et 3.0.2 sont satisfaites pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $m < n$  en utilisant le lemme 3.0.5, on a

$$\begin{aligned} S_b(x_n, x_n, x_m) &\leq b[2S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) + S_b(x_m, x_m, x_{n+1})] \\ &\leq \frac{2bh^n}{1 - b^2h} S_b(x_0, x_0, x_1), \end{aligned}$$

puisque  $h \in [0, \frac{1}{b^2})$  où  $b \geq 1$  prendre la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , alors on obtient  $S_b(x_n, x_n, x_n) \rightarrow 0$  et donc  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy, puisque  $X$  est un espace  $S_b$ -métrique complet il existe  $x \in X$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Suppose que  $Tx \neq x$  en utilisant l'inégalité 3.0.1 on a

$$S_b(Tx, Tx, x_{n+1}) \leq hS_b(x, x, x_n),$$

si nous prenons la limite pour  $n \rightarrow \infty$  nous obtenons une contradiction comme suite

$$S_b(Tx, Tx, x) \leq hS_b(x, x, x),$$

par conséquent  $Tx = x$ . Maintenant nous montrons que le point fixe  $x$  est unique, on suppose que  $Tx = x, Ty = y$  et  $x \neq y$  en utilisant l'inégalité 3.0.1 on a

$$S_b(Tx, Tx, Ty) = S_b(x, x, y) \leq hS_b(x, x, y),$$

on obtient  $x = y$  puisque  $h \in [0, \frac{1}{b^2})$  par conséquent  $x$  est un point fixe unique de l'application  $T$ .

**Corollaire 3.0.1** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique complet avec  $b \geq 1$   $S_b$  est symétrique et  $T : X \rightarrow X$  est une application satisfaisant l'inégalité 3.0.1 pour tout  $x, y, z \in X$  où  $0 \leq h < \frac{1}{b}$ , alors  $T$  a un point fixe  $x$  dans  $X$ .

**Exemple 3.0.6** [28] Soit  $X = \mathbb{R}$  on considère la  $S_b$ -métrique définie par

$$S_b(x, y, z) = \frac{1}{16} (|x - y| + |y - z| + |x - z|)^2,$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$  avec  $b = 4$  si on définit la fonction  $T$  de  $\mathbb{R}$  comme

$$Tx = \frac{x}{6}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors  $T$  satisfait la condition du Banach's principe de contraction. On effect,

$$S_b(Tx, Tx, Ty) = \frac{|x-y|^2}{144} \leq hS_b(x, x, y) = \frac{|x-y|^2}{72},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $h = \frac{1}{18}$  par conséquent  $T$  a un point fixe unique  $x = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.0.4** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique complet avec  $b \geq 1$  et  $T$  est une application sur  $X$  satisfaisant la condition suivante, il existe un nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2$  satisfaisant  $\alpha_1 + (2b^2 + b)\alpha_2 < 1$  avec  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  telle que

$$\begin{aligned} S_b(Tx, Tx, Ty) \leq & \alpha_1 S_b(x, x, y) + \alpha_2 \max\{S_b(Tx, Tx, x) \\ & S_b(Tx, Tx, y), S_b(Ty, Ty, y), S_b(Ty, Ty, x)\} \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

pour tout  $x, y \in X$  alors  $T$  a un point fixe unique  $x$  dans  $X$ .

■

**Preuve.** Soit  $x_0 \in X$  et la suite  $\{x_n\}$  est définie comme suit

$$Tx_0 = x_1, Tx_1 = x_2, \dots, Tx_n = x_{n+1}, \dots$$

on suppose que  $x_n \neq x_{n+1}$  pour tout  $n$  en utilisant la condition 3.0.3 on a

$$\begin{aligned} S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) &= S_b(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha_1 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \\ &+ \alpha_2 \max\{S_b(x_n, x_n, x_{n-1}), S_b(x_n, x_n, x_n) \\ &S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n), S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n-1})\} \\ &= \alpha_1 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + \alpha_2 \max\{S_b(x_n, x_n, x_{n-1}) \\ &S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n), S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n-1})\}, \end{aligned} \quad (3.0.4)$$

par la condition  $(S_b2)$ , on obtient

$$S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n-1}) \leq b[2S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) + S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n)], \quad (3.0.5)$$

en utilisant la condition 3.0.4, 3.0.5 et lemme 3.0.5 on obtient

$$\begin{aligned} S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha_1 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + \alpha_2 \max\{S_b(x_n, x_n, x_{n-1}) \\ &S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n), 2bS_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) + bS_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha_1 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) + 2b\alpha_2 S_b(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \\ &+ b\alpha_2 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

et donc

$$(1 - 2b^2\alpha_2) S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha_1 + b\alpha_2) S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$$

ce qui implique

$$S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha_1 + b\alpha_2}{1 - 2b^2\alpha_2} S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \quad (3.0.6)$$

soit  $d = \frac{\alpha_1 + b\alpha_2}{1 - 2b^2\alpha_2}$  alors  $d < 1$  puisque  $\alpha_1 + (2b^2 + b) < 1$  telle que  $1 - 2b^2\alpha_2 \neq 0$  puisque  $0 \leq \alpha_2 < \frac{1}{1 - 2b^2\alpha_2}$  répète maintenant ce processus dans l'inégalité 3.0.6 on a ,

$$S_b(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq d^n S_b(x_0, x_0, x_1), \quad (3.0.7)$$

on montre que la suite  $\{x_n\}$  est de Cauchy, alors pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$   $m > n$  en utilisant la condition 3.0.7 et  $(S_b2)$  on obtient

$$S_b(x_n, x_n, x_m) \leq \frac{2bd^n}{1 - b^2d} S_b(x_0, x_0, x_1)$$

on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_b(x_n, x_n, x_m) = 0$  par l'inégalité ci-dessus et ainsi  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy, par le complété il existe  $x \in X$  telle que  $\{x_n\}$  converge vers  $x$ , suppose que  $Tx \neq x$ , alors

$$\begin{aligned} S_b(x_n, x_n, Tx) &= S_b(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, x) \\ &\leq \alpha_1 S_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x) + \alpha_2 \max\{S_b(x_n, x_n, x_{n-1}), \\ &\quad S_b(x_n, x_n, x), S_b(Tx, Tx, x), S_b(Tx, Tx, x_{n-1})\} \end{aligned}$$

et donc prendre limite pour  $n \rightarrow \infty$  et en utilisant lemme 3.0.5 on obtient

$$S_b(x_n, x_n, Tx) \leq \alpha_2 S_b(Tx, Tx, x) \leq \alpha_2 b S_b(Tx, Tx, x)$$

ce qui implique  $S_b(Tx, Tx, x) = 0$  et  $Tx = x$  puisque  $0 \leq \alpha_2 < \frac{1}{2b^2 + b}$ .

Enfin on montre que le point fixe  $x$  est unique, pour ce faire on suppose que  $x \neq y$  telle que  $Tx = x$  et  $Ty = y$  en utilisant l'inégalité 3.0.3 et lemme 3.0.5 on a,

$$\begin{aligned} S_b(Tx, Tx, Ty) &= S_b(x, x, y) \leq \alpha_1 S_b(x, x, y) + \alpha_2 \max\{S_b(x, x, x), \\ &\quad S_b(x, x, y), S_b(y, y, y), S_b(y, y, x)\} \end{aligned}$$

et donc  $x = y$  puisque  $\alpha_1 + b\alpha_2 < 1$ , alors la preuve est terminée.

**Corollaire 3.0.2** [28] Soit  $(X, S_b)$  un espace  $S_b$ -métrique complet avec  $b \geq 1$ ,  $S_b$  est symétrique et  $T$  est une application sur  $X$  satisfaisant la condition suivante, il existe deux

nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2$  satisfaisant  $\alpha_1 + 3b\alpha_2 < 1$  avec  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  telle que

$$S_b(Tx, Tx, Ty) \leq \alpha_1 S_b(x, x, y) + \alpha_2 \max\{S_b(Tx, Tx, x), S_b(Tx, Tx, y), S_b(Ty, Ty, y), S_b(Ty, Ty, x)\},$$

pour tout  $x, y \in X$  alors  $T$  a un point fixe unique  $x$  dans  $X$ .

**Exemple 3.0.7** [28] On considère l'espace  $S$ -métrique  $(\mathbb{R}, S)$  avec

$$S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$$

pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$  et l'application  $T$  définie par

$$Tx = \begin{cases} x + 50 & \text{si } |x - 1| = 1 \\ 45 & \text{si } |x - 1| \neq 1 \end{cases}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  depuis chaque espace  $S$ -métrique est un espace  $S_b$ -métrique,  $(\mathbb{R}, S)$  est un espace  $S_b$ -métrique avec  $b = 1$ , alors l'inégalité 3.0.3 est satisfaite pour  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \frac{1}{5}$ , alors  $T$  a un point fixe unique  $x = 45$  par le théorème 3.0.4 mais  $T$  ne satisfait pas à la condition de la principe de contraction Banach, depuis pour  $x = 1, y = 0$  on a

$$S(Tx, Tx, Ty) = 10 \leq hS(x, x, y) = 2h$$

ce qui est une contradiction avec  $h < 1$ .

■

### 3.0.3 Point fixe sur les espaces $b$ -métriques généralisés

Le théorème suivant est démontré par S. COBZAŞ dans [7] comme une extension du Théorème 3.0.1.

**Théorème 3.0.5** [7] Soit  $(X, d)$  espace  $b$ -métrique généralisé complet. On suppose que l'application  $f : X \longrightarrow X$  telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$



pour tout  $x, y \in X$  avec  $d(x, y) < \infty$ , où la fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante et  $\varphi(t) \leq \frac{t}{s}$ . On considère pour  $x \in X$  la suite approximations successives  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Alors

$$(A) \quad d(f^k(x), f^{k+1}(x)) = +\infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_0,$$

ou

$$(B) \quad \text{la suite } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente vers un point fixe de } f.$$

**Preuve.** Soit  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$  la décomposition canonique de  $X$  correspondant à la relation d'équivalence 2.1.1. On suppose que (A) n'est pas vrai. Alors

$$d(f^m(x), f^{m+1}(x)) < +\infty$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ . Si  $i \in I$  telle que  $f^m(x), f^{m+1}(x) \in X_i$ , alors

$$d(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x)) \leq \varphi(d(f^m(x), f^{m+1}(x))) < \infty,$$

implique que  $f^{m+2}(x) \in X_i$  et par induction mathématique  $f^{m+k}(x) \in X_i$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Puisque

$$z \in X_i \iff d(z, f^m(x)) < \infty.$$

L'inégalité

$$d(f(z), f^{m+1}(x)) \leq \varphi(d(z, f^m(x))) < \infty,$$

montre que la restriction  $f_i = f|_{X_i}$  de  $f$  à  $X_i$  est une application de  $X_i$  à  $X_i$  satisfaisant

$$d(f_i(y), f_i(z)) \leq \varphi(d(y, z)),$$

pour tout  $x, y \in X_i$

Par le théorème [?]  $X_i$  est complet, donc par le théorème 3.0.1  $(f^{m+k}(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$  est convergent vers un point fixe de  $f_i$ , quel est un point fixe pour  $f$ . ■

**Corollaire 3.0.3** Soit  $(X; d)$  un espace  $b$ -métrique complet, où  $d$  satisfait l'inégalité triangulaire  $s$ -relaxé et soit  $0 < \alpha < \frac{1}{s}$ . Alors, pour toute application  $f : X \longrightarrow X$  satisfaisant l'inégalité

$$d(f(x); f(y)) \leq \alpha d(x; y);$$

où  $x, y \in X$  avec  $d(x; y) < \infty$ , tel que

$(A_1)$   $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) = +\infty$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

ou

$(B_1)$  la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers un point fixe de  $f$ .

# Bibliographie

- [1] A. AGHAJANI, M. ABBAS AND J. R. ROSHAN, Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered Gb-metric spaces, *Filomat*,
- [2] A. BRANCIARI, A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, *Publ.Math. Debrecen* 57 (2000) 31–37.
- [3] BOTA, M., MOLNAR, A. AND VARGA, C., On ekeland’s variational principle in b-metric spaces, *Fixed Point Theory* 12 (2011), no. 2, 21-28.
- [4] M. BORICEANU,, Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metric, *studia, univ Babes, Bolya: Math, Liv*(3) (2009), 1-14.
- [5] S. CZERWIK AND K. KROL, Completion of generalized metric spaces, *Indian J. Math.* 58 (2016), no. 2, 231–237. 16
- [6] S. CZERWIK, Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Math.Inform. Univ. Ostraviensis* 1, 5–11 (1993)
- [7] S.COBZAŞ,,*b-metric.space.fixed.point.and.Lipschitz.functions*,  
arXiv:1802.02722v3[math.FA] 2018-2019.
- [8] S.CZERWIK, Contraction mappings in b-metric spaces, *Acta Mathematica et Informat-ica Universitatis Ostraviensis* 1 (1993), 5-11.
- [9] T. V. AN AND N. V. DUNG, Remarks on Frink’s metrization technique and applications, arXiv preprint arXiv:1507.01724 (2015), 15 p..

- [10] A. H. FRINK, Distance functions and the metrization problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 43 (1937), 133{142.} 28(6)(2014),1087–1101
- [11] R. FAGIN, R. KUMAR, AND D. SIVAKUMAR, Comparing top k lists, *SIAM J. Discrete Math.* 17 (2003), no. 1, 134{160}
- [12] N. T. HIEU, N. T. LY AND N. V. DUNG, A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces, *Thai Journal of Mathematics*, 13(2)(2015), 369–380
- [13] C. F. K. JUNG, On generalized complete metric spaces, *Bull. Am. Math. Soc.* 75 (1969), 113–116. 15
- [14] W. KIRK AND N. SHAHZAD, Fixed point theory in distance spaces, Cham: Springer, 2014
- [15] Z. KADELBURG, S. RADENOVIĆ, Pata-type common fixed point results in b-metric and b-rectangular metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.* (2015) in press.
- [16] W. KIRK-SHAHZAD, questions on strong b-metric spaces, *Taiwanese J. Math.* 20 (2016), no. 5, 1175{1184.}
- [17] W. KIRK AND N. SHAHZAD, Fixed point theory in distance spaces, Cham: Springer, 2014.
- [18] Z. MUSTAFA AND B. SIMS, A new approach to generalized metric spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 7(2)(2006), 289–297.
- [19] KIR, MEHMET, KIZILTUNE, HUKMI, on some well known fixed point theorems in B-metric space, *Turkish journal of analysis and number theory*, 2013, vol. 1, no. 1, 13-16.
- [20] R. A. MAC AS AND C. SEGOVIA, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, *Adv. Math.* 33 (1979), 257{270}..
- [21] M. PALUSZYNSKI AND K. STEMPAK, On quasi-metric and metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009), no. 12, 4307{4312}.

- [22] M.PACURAR,, Sequences of almost contractions and fixed points in b-metric spaces, Analele Universităţii de Vest, Timisoara, Seria Matematică Informatică XLVIII (2010), no. 3, 125-137.
- [23] J.R. ROSHAN, N. Hussain, V. Parvaneh, Z. Kadelburg, New fixed point results in rectangular b-metric spaces,NA-Control Theory (2015) in press.
- [24] RENY GEORGE, S. Radenović, K.P. Reshma, S. Shukla, Rectangular b-metric spaces and contraction principle,J. Nonlinear Sci. Appl. (2015) in press.
- [25] S. SEDGHI, N. SHOBE AND A. ALIOUCHE, A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces, Mat. Vesnik, 64(3)(2012), 258–266.
- [26] S. SEDGHI, A. GHOLIDAHNEH, T. DOSENOVIĆ, J. Esfahani and S. Radenović, Common fixed point of four maps in Sb-metric spaces, J. Linear Topol. Algebra, 5(2)(2016), 93–104.
- [27] V. SCHROEDER, Quasi-metric and metric spaces, Conform. Geom. Dyn. 10 (2006), 355{360}.
- [28] N. TAS,AND N.-Y. OZGUR, New Generalized Fixed Point Results on Sb-Metric Spaces, ARXIV:1703.01868v2 (17 apr 2017)