

Table des matières

Notations		iv
Introduction		vi
1 Quelques résultats préliminaires		1
1.1 Théorie de Littlewood-Paley		1
1.2 Quelques inégalités classiques		4
1.3 Espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$		7
1.3.1 Définition et propriétés		7
2 Opérateurs pseudo-Différentiels		12
2.1 Généralités sur les O.P.D		12
2.1.1 La classe de Hörmander		12
2.2 Définition et première propriétés des O.P.D		13
2.2.1 Opérateur de type (1,1)		15
2.2.2 Opérateur paradifférentiels		16
3 La continuité des opérateurs Pseud-différentiels sur les espace de Bessel et Besov		18
3.1 symbole et module de continuité		18
3.2 La continuité sur H_p^s		20
3.3 La continuité sur $B_p^{s,q}$		26

Conclusion	28
Bibliographie	28

Notations

Les notations suivantes seront utilisées le long de ce mémoire:

toutes les fonctions sont définies sur l'espace Euclidien \mathbb{R}^n

$C^r = C^r(\mathbb{R}^n)$	espaces des fonctions continues
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	la classe des fonctions indéfiniment différentiables
$S(\mathbb{R}^n)$	est de classe de Schwartz
$S'(\mathbb{R}^n)$	dual de $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	est l'espace des fonctions C^∞ à support compact
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$
$\ f\ _p$	on désigne la norme d'une fonction f appartient à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$
$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$	$p \in [1, \infty]$ alors p' désigne l'exposant conjugué
$\widehat{f} = \mathcal{F}f$	transformée de Fourier telle que si $\widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \psi(x) dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
$\mathcal{F}^{-1}f$	transformée de Fourier inverse telle que $\mathcal{F}^{-1}\psi(\xi) = (2\pi)^{-n} \widehat{\psi}(-\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
$C^r(\mathbb{R}^n)$	Si $r \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}$, ce espace est l'espace de Hölder des fonctions bornées muni de la norme
H_p^s (Espace de Bessel)	est l'espace des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ où $\ f\ _{H_p^s} = \left\ (1 + x ^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(x) \right\ _{L_2} < \infty$
T ou op	notation des opérateurs Pseudo-différentiels
$\Lambda_N = \Lambda(\varrho, N, w, \Omega)$	l'espace de toutes les suites (m_j) avec les propriétés suivantes
	$(m_j^{(\beta)})_j \subset L^\infty, \left m_j^{(\beta)}(x+h) - m_j^{(\beta)}(x) \right \leq cw(h)\Omega(2^{ej}),$

Introduction

Dans la théorie des opérateurs Pseudo-différentiels (O.P.D) ou (*$\psi.o.d$*), l'utilisation des espaces fonctionnels est importante car, la difficulté peut-être minimisée si l'espace rentre dans l'étude, au pour généraliser certains résultats (de L. Hörmander par exemple), il faut introduire des espaces qui généralisent les espaces de potentiel de Bessel et de Besov

Le travail est organisé en trois chapitres

Dans le premier chapitre, on va rappeler les notions essentielles à savoir théorie de Littlewood-paley, des inégalités principales (théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, des inégalités de Hölder, Young, et de Bernstein),

les espaces de Besov et de potentiel de Bessel et quelques propriétés principales de Besov.

Dans le deuxième chapitre on va étudier des généralités sur l'opérateur Pseudo-différentiels (définitions et quelques propriétés), opérateurs de type (1.1), les opérateurs paradifférentielles.

Dans le troisième chapitre on va étudier la continuités de *$\psi.o.d$* sur les espaces de Besov et de potentiel de Bessel.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre on va rappeler des notions essentielles à savoir théorie de Littlewood-Paley, théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, les inégalités de Hölder, Young et de Bernstein,

les espaces de Besov de Lizorkin-Triebel et quelques propriétés principales de ces espaces fonctionnels.

1.1 Théorie de Littlewood-Paley

Soit ψ une fonction continue et paire dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$0 \leq \psi(\varepsilon) \leq 1, \psi(\varepsilon) = 1 \text{ si } |\varepsilon| \leq 1 \text{ et } \psi(\varepsilon) = 0 \text{ si } |\varepsilon| \geq \frac{3}{2}.$$

On pose

$$\varphi(x) = \psi(\varepsilon) - \psi(2\varepsilon), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n.$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et satisfait:

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\varepsilon| \leq \frac{3}{2} \right\} \text{ et } \varphi(\varepsilon) \geq 0.$$

il vient alors la partition de l'unité homogène suivante

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\varepsilon) = 1, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1.1)$$

On obtient la partition de l'unité non homogène suivante

$$\psi(\varepsilon) + \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\varepsilon) = 1, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1.2)$$

Nous définissons les opérateurs

$$\mathcal{S}_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ par } \mathcal{S}_k = \psi(2^{-k}\varepsilon) \ (k \geq 0),$$

et

$$Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ par } Q_j = \varphi(2^{-j}\varepsilon) \ (j \geq 1).$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, On définit les opérateurs de convolution.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_k f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}\cdot)) * f)(x), \forall (k \geq 0). \\ (Q_j f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)) * f)(x), \forall (j \geq 1). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

et on a:

$$\widehat{(\mathcal{S}_k f)}(\varepsilon) = \psi(2^{-k}\varepsilon) \widehat{f}(\varepsilon) \ \forall (k \geq 0),$$

et

$$\widehat{(Q_j f)}(\varepsilon) = \varphi(2^{-j}\varepsilon) \widehat{f}(\varepsilon), \ \forall (j \geq 1),$$

avec la notation $Q_0 = \mathcal{S}_0$.

Ecrivons la relation 1.1.2 au point $2^{-k}\varepsilon$, alors

$$\psi(2^{-k}\varepsilon) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\varepsilon) = 1.$$

On multiplie par $\widehat{f}(\varepsilon)$, On obtient

$$\psi(2^{-k}\varepsilon) \widehat{f}(\varepsilon) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\varepsilon) \widehat{f}(\varepsilon) = \widehat{f}(\varepsilon).$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse On obtient

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}\cdot)) * f + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)) * f = f,$$

On obtient encore

$$\mathcal{S}_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = f, \forall j \in \mathbb{N}.$$

pour $k = 0$ On trouve

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

On a donc la définition suivant :

Définition 1.1.1 Si $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ alors la décomposition de Littlewood-Paley est donnée par la formule suivante

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f. \quad (1.1.4)$$

La série converge au sens des distributions tempérées.

Proposition 1.1.1

la formule 1.1.4 implique les formules suivantes

1. $f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f$
2. $\mathcal{S}_k f = \sum_{j=0}^k Q_k f$

Preuve. (1) Pour $j = 0$, On a

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f,$$

Par la notion ($S_0 = Q_0$), On obtient

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$$

(2) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ On a

$$f = \mathcal{S}_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f,$$

Par la formule (1), On obtient

$$f = \sum_{j=0}^k Q_j f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f.$$

Alors

$$S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = \sum_{j=0}^k Q_j f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f.$$

Donc

$$S_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f.$$

ce qui termine la preuve. ■

1.2 Quelques inégalités classiques

Nous allons faire usage répété théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et des inégalités de Hölder , Young et de Bernstein , dont nous ferons un rappel.

Théorème 1.2.1 (Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin) :

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés et $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$, avec $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$ et que

$$T : L_{p_0}(X, \mu) \rightarrow L_{q_0}(Y, \nu)$$

avec la norme M_0 ,

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}.$$

$$T : L_{p_1}(X, \mu) \rightarrow L_{q_1}(Y, \nu),$$

avec la norme M_1 ,

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Donc

$$T : L_P(X, \mu) \rightarrow L_q(Y, \nu),$$

avec la norme M ,

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

à condition que $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Théorème 1.2.2 (Inégalité de Hölder) :

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$, alors $f, g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ et de plus

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Young) :

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tel que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve. On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$ on a

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

car

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_q dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_q. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_{q'} \text{ tel que } \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + 1,$$

et on a encore

$$\|Tf\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.$$

Alors on applique le théorème de l'interpolation de Riesz-Thorin,

$$\begin{aligned} T &: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \\ &L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 1.2.4 (Inégalité de Bernstein) :

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Il existe $c > 0$ telle que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\text{Supp} \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\},$$

on a

$$\|f\|_q \leq cR^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et $\alpha \in \mathbb{N}$. Il existe $c > 0$ telle que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\text{Supp} \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\},$$

on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Preuve. Soit $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. On pose

$$\psi_R(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

On a

$$\widehat{f} = \psi_R \widehat{f},$$

et par conséquent

$$f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1}\psi_R) * f.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|\mathcal{F}^{-1}\psi_R\|_r \|f\|_p,$$

avec

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n (\mathcal{F}^{-1}\psi_R)^{(\alpha)}(Rx).$$

Il vient

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\psi_R)^{(\alpha)}\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \|(\mathcal{F}^{-1}\psi_R)\|_r.$$

Alors

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Ce qui termine la preuve. ■

1.3 Espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans ce paragraphe on donne la définition des espaces de Besov et de potentiel de Bessel, il sera suivie quelques propriétés principales.

1.3.1 Définition et propriétés

Définition 1.3.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \|Q_j * f\|_p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Si $q = \infty$ alors

$$\|f\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{sj} \|Q_j * f\|_p < \infty$$

Lemme 1.3.1 Soient a, b des réels tq: $0 < a < b$, soit $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite dans $S'(\mathbb{R}^n)$ tq:

1. \hat{u} est portée par couronne $a2^j \leq |\zeta| \leq b2^j$
2. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|u_j\|_p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ alors la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j$ converge dans $S'(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{js} \|u_j\|_p\right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemme 1.3.2 Soit $v \in D(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction satisfaisante l'une des deux conditions suivantes

1. $\sum_{j \in \mathbb{N}} v(2^{-j}\xi) = 1$, pour tout $\xi \neq 0$;
2. v est positive et il existe deux réels $b > 2a > 0$ tels que v ne s'annule pas sur la couronne $a \leq |\xi| \leq b$.

Alors

$$f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \text{ ssi } \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(2^{-js} \|v(2^{-j}D)f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente à la norme $\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Proposition 1.3.1 Une fonction $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si ses dérivées partielles $\partial_k f$ appartiennent à $B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)$

De plus l'expression suivante est une norme équivalente.

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve. Etape.1: On définit les fonctions suivantes $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ par

$$\varphi_k(\zeta) = i\zeta_k \varphi(\zeta).$$

Où φ est donnée par 1.1.1. par les propriétés de la transformation de Fourier on a l'inégalité suivante

$$Q_j(\partial_k f) = 2^k \varphi_k(2^{-j}D)f$$

D'après le lemme 1.3.1 on obtient aussitôt

$$\|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Etape.2

Pour l'autre sens, on utilise une partition C^∞ de l'unité de fonction $(w_k)_{k=1,\dots,n}$ sur la sphère unité

$$\sum_{k=1}^n w_k \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) = 1$$

On pose

$$v_k(\xi) = \frac{-i}{\xi_k} \varphi(\xi) w_k \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right)$$

On a alors

$$Q_j = 2^{-j} \sum_{k=1}^n v_k(2^{-j}D) \partial_k$$

D'après le lemme 1.3.1 il résulte.

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}}$$

D'où le résultat ■

Proposition 1.3.2 .

1. Pour tout $1 \leq r \leq q \leq \infty$, on a $B_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $B_1^{m,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $W_2^m(\mathbb{R}^n) = B_2^{m,2}(\mathbb{R}^n)$, avec les normes équivalentes
4. Pour $p_1 \geq p$ et $s_1 - (n/p)$, on a $B_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1}^{s_1,r}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Le plongement 1 résulte aussitôt du plongement $l^r(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^q(\mathbb{N})$, car $r < q$.
 pour démontrer les plongements 2 ; d'après la proposition 1.3.1, on peut se limiter au cas $m = 0$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|Q_j f\|_p \leq \|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_1 \|f\|_p$$

d'où

$$\|f\|_{B_p^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_p$$

Si $f \in B_p^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} Q_j f$ converge normalement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, ce qui nous donne $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{B_p^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$$

pour établir 3 grâce au lemme 1.3.1, dans le cas $m = 0$ on peut choisir la fonction v de telle sorte que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |v(2^j \xi)|^2 = 1, \forall \xi \neq 0$$

Du théorème de Plancherel, on déduit que

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= (2\pi)^{-n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|v(2^{-j} D)f\|_2^2 \end{aligned}$$

et cette dernier expression est equivalente a $\|f\|_{B_2^{0,2}(\mathbb{R}^n)}^2$

Pour démontrer le plongement 4 nous allons utiliser l'inégalité de Bernstein, il vient que :

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_{p_1} &\leq c 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} \|Q_j f\|_p \\ &= c 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}-\frac{s}{n})} 2^{js} \|Q_j f\|_p \\ &= c 2^{-js_1} 2^{js} \|Q_j f\| \end{aligned}$$

D'où il suffit de passer à la norme dans $l^q(\mathbb{R}^n)$, on obtient le plongement souhaité ■

Quelques propriétés

1. $B_{p,q}^s = C^s$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
2. $B_{2,2}^s = H^s$ espace de Sobolev
3. $B_{\infty,\infty}^s$ espace de Hölder.

Proposition 1.3.3 Si $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$, alors $S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$,

$$S(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \tag{1.3.1}$$

Proposition 1.3.4 Si $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach

Preuve. On a $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace normée , montrons maintenant qu'il est complet .

Soit $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ est une suite de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Alors 1.3.1 montre que $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ est aussi une suite de $S'(\mathbb{R}^n)$, car $S'(\mathbb{R}^n)$ est complet alors $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Si $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty \in \phi(\mathbb{R}^n)$, alors $Q_k f_l \rightarrow Q_k f$ si $l \rightarrow \infty$. D'autre part $\{Q_k f_l\}_{l=1}^\infty$ est une suite de $L_p(\mathbb{R}^n)$. Par la relation

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{f(\cdot - z)}{1 + |z|^{\frac{n}{r}}} \right\|_{L_p} \leq c_0 \|f\|_{L_p},$$

il est aussi une suite de $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. On montre que l'élément de limite de $\{Q_k f_l\}_{l=1}^\infty$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ (qui est la même dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$) coïncide avec $Q_k f$. Maintenant il suffit de suivre par des arguments standards que $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et que f_l converge à f dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, donc $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est complet . ■

Définition 1.3.2 Soit $s \in \mathbb{R}^n$, alors l'espace de potentiel de Bessel $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{H_2^s} = \left\| (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(x) \right\|_{L_2} < \infty$$

Ou

$$H_p^s = \left\{ f \in S' : \left(|Q_0 f|^2 + \sum_{j \geq 1} 4^{sj} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

Proposition 1.3.5 Si $q = 2$

$B_{p,2}^s = H_p^s$ espace de potentiel de Bessel

Chapitre 2

Opérateurs pseudo-Différentiels

2.1 Généralités sur les O.P.D

2.1.1 La classe de Hörmander

Pour faire une étude des O.P.D, nous allons définir une classe des symboles de type Hörmander.

Définition 2.1.1 Pour $(m \in \mathbb{R}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1)$ On désigne par $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ (de même $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ pour un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

La classe des symboles $\sigma(x, \xi)$. vérifiant

1. $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
2. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tous multiindices α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

On ait

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - \delta|\alpha| + \rho|\beta|} \quad (2.1.1)$$

Définition 2.1.2 Les éléments de la classe $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ sont appelés symboles de degré m et de type (ρ, δ)

1. les opérateurs différentiels sont des elements de symbole $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ pour un compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
2. les symboles d'ordre négative soit $\sigma(x, \xi) = \sum a_\alpha(x)\xi^\alpha$ tel que $\sigma_m(x, \xi) \neq 0, \xi \neq 0$, alors il existe $q \in S_{\rho,\delta}^{-m}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tel que $pq - 1 \in S_{\rho,\delta}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, avec q est alors symbole d'ordre négatif

2.2 Définition et première propriétés des O.P.D

Définition 2.2.1 Soit $\sigma \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$, L opérateur lineaire continu :

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

défini par

$$Tu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \quad (2.2.1)$$

Est appelé opérateur Pseudo-différentiel d'ordre m associe au symbole $\sigma(x, \xi)$

On note par $\psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ (resp $\psi_{\rho,\delta}^m(\Omega)$) l'ensemble des OPD sur \mathbb{R}^n (resp Ω)

Remarque 2.2.1 Un O.P.D est un opérateur de fourier

En effet, on a trivialement l'égalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} Tu(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} \sigma(x, \xi) d\xi \right) u(y) dy \end{aligned}$$

Remarque 2.2.2

Si $T(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ est un opérateur différentiel à coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, alors T est aussi un o.p.d, En effet le symbole

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

est un symbole de $S_{1,0}^m(\Omega)$ et on a bien :

$$T(x, D_x)u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.2.1 Soit $T \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$, avec $\delta < 1$. Alors il existe un (unique) opérateur P , continue de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que Pu soit donné par la formule 2.2.1 lorsqu'en $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. L'unicité résulte de la continuité de T , et de la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

On rappelle que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ (l'ordre de u) tel que :

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N. \quad (2.2.2)$$

Prenons $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nous allons transformer l'expression :

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \varphi(x) dx d\xi. \quad (2.2.3)$$

(Noter que l'intégrale converge absolument.) On écrit que :

$$(1 - \Delta_x)(e^{ix \cdot \xi}) = (1 + |\xi|^2)e^{ix \cdot \xi},$$

et donc que

$$e^{ix \cdot \xi} = (1 - \Delta_x) \left(\frac{e^{ix \cdot \xi}}{1 + |\xi|^2} \right)$$

On reporte dans l'expression 2.2.3 et on intègre par parties, ce qui est justifié puisque toutes les intégrales convergent absolument. On trouve :

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\widehat{u}(\xi)}{1 + |\xi|^2} (1 - \Delta_x) (\varphi(x)) dx d\xi.$$

Itérant l'opération, on voit que si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, La fonction Pu définie par 2.2.1 vérifie, pour tout entier k :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\widehat{u}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^k} (1 - \Delta_x)^k (\varphi(x)) dx d\xi \quad (2.2.4)$$

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre N (vérifiant 2.2.2) On choisit $k \geq (m + N + n + 1)/2(1 - \delta)$.D'après les inégalités 2.1.1 , on a :

$$|(1 - \Delta_x)^k(\sigma(x, \xi)\varphi(x))| \leq C(1 + |\xi|)^{m+2k\delta} \|\varphi\|_{C^{2k}(\Omega)}, \quad (2.2.5)$$

La constante C ne dépendant que de k et du support de φ .On remarque alors que l'intégrale

$$\int \frac{\widehat{u}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^k} (1 + |\xi|)^{m+2k\delta} d\xi$$

converge (compte tenu de 2.2.2)pour $k \geq (m + N + n + 1)/2(1 - \delta)$.On peut alors définir la distribution Pu par la formule 2.2.4 , L'intégrale étant absolument convergente, et Pu est bien une distribution puisque d'après 2.2.5 , on a :la constante ne dépendant que du support de φ . ■

2.2.1 Opérateur de type (1,1)

le paragraphe suivant est classique dans le théorie de classe Hörmander

Nous l'inspirons du livre de Mitivier , après la définition de la classe $S_{1,1}^0$,Nous donnons trois lemme de préparation

Définition 2.2.2 *Tout o.p.d de symbole dans la classe $S_{1,1}^0$ est appelé de type (1,1)*

Lemme 2.2.1 *Il existe deux fonction χ_0, χ, C^∞ sur \mathbb{R}^n ,à support respectivement dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$ et dans la couronne $\{\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3\}$ et telles que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \chi_0(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1$$

Preuve. On choisit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[0, 1]$,potée dans la couronne $\{\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3\}$ et valant 1 , pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ la fonction $h(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n/\{0\}$ et ≥ 1 et vérifier $h\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = h(x)$ pour tout ξ et tout j ,on pose $\chi = \psi/h$, alors la fonction $\chi_0(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ est C^∞ et à support dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$ ■

Lemme 2.2.2 *Soit $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée , telle que $\text{Supp} \widehat{a} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\}$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $c > 0$ telle que*

$$\|a^{(\alpha)}\|_\infty \leq cR^\alpha \|a\|_\infty$$

Lemme 2.2.3 Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de fourier est à support dans la boule $\{|\xi| \leq \lambda\}$ Alors a est C^∞ , et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $c(n, \alpha)$ (ne dependant que de n et α) telle que

$$\|\partial_x^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c(n, \alpha) \lambda^{(\alpha)} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Théorème 2.2.1 Soit $\sigma(x, \xi)$ de type $(1,1)$, sur \mathbb{R}^n Alors l'opérateur T de symbole σ borné de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s > 0$ et de $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in]0, 1[$.

2.2.2 Opérateur paradifférentiels

Rappelons que pour m réel, $S_{1,1}^m$ désigne l'espace des fonctions σ, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et telles que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ pour la quelle :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq C(1 + |\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|} \quad (2.2.6)$$

$$\sigma(x, D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (2.2.7)$$

qui a bien un sens si $\sigma(x, \xi) \hat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

En particulier, si $u \in S(\mathbb{R}^n)$ les dérivation sous le signe somme et les intégration par parties en ξ sont justifiées et on voit que $\sigma(x, D_x)u \in S(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Théorème 2.2.2 Si r est un réel > 0 non entier, tel que $r - m > 0$, non entier l'opérateur $\sigma(x, D_x)$, associe au symbole $\sigma \in S_{1,1}^m$, se prolonge en opérateur bornée de $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{r-m}(\mathbb{R}^n)$ si $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$ l'écrivieur 2.2.6 prend alors une signification tout à fait conventionnelle, qui coïncide avec signification indique précédemment si $u \in S(\mathbb{R}^n)$ ou si \hat{u} est à support compact

Définition 2.2.3 \sum_0^m désignera l'espace des fonction $\sigma(x, \xi)$ tells que il existe $\varepsilon < 1$ de soit à support dans la cône $\{|\eta| \leq \varepsilon |\xi|\}$, et telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β pour laquelle :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left| \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad (2.2.8)$$

Maintenant , pour $r > 0$ non entier on introduit \sum_r^m l'espace des fonctions $\sigma(x, \xi)$ dont la transformation de fourier $\widehat{\sigma}(\eta, \xi)$ est à support dans un cône $\{|\eta| \leq \varepsilon |\xi|\}$, pour un certain $\varepsilon < 1$, et telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_β pour laquelle :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left\| \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right\|_{C^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}$$

Lemme 2.2.4 Pour $r \geq 0, m \in \mathbb{R}, p > 0$, on a les inclusion

$$\sum_r^m \subset \sum_0^m \subset S_{1,1}^m \text{ et } \sum_r^m \subset \sum_{0+p}^{m+p}$$

Chapitre 3

La continuité des opérateurs Pseud-différentiels sur les espace de Bessel et Besov

Dans ce chapitre on va étudier la continuité de $\psi.o.d$ sur les espaces de Besov et potentiel de Bessel

3.1 symbole et module de continuité

Définition 3.1.1 *Nous concider le $\psi.d.o$ avec un symbole satisfaisant*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} \quad (3.1.1)$$

Et

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x + h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} w(|h| |\xi|^\delta) \Omega(|\xi|^\rho), \quad (3.1.2)$$

Où w est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ applée Le module de continuité que nous utilisons est supposons

satisfaire :

$$\sum_{j \geq 0} [w(2^{-j}) \Omega(2^j)]^2 < \infty \quad (3.1.3)$$

Plusieurs auteurs ont étudié la continuité des l'opérateurs Pseudo-différentiel sur l'espace potentiel de Bessel H_p^s , lorsque le module de continuité w (est une fonction positive et croissant, et concave on $[0, \infty)$)

Satisfies

$$\sum_{j \geq 0} [2^{\varepsilon j} w(2^{-j})]^2 < \infty, \quad (0 < \varepsilon = s - [s] < 1). \quad (3.1.4)$$

Où $\delta \geq 0, \varrho \geq 0, m \geq 0, N \in \mathbb{N}, C = C_{\alpha, \beta} > 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ et $|\beta| \leq N$. si $\varrho = 1$, D'après 3.1.3 et

$$\forall c > 1, \exists A_c > 0, (t/c \leq u \leq ct) \Rightarrow \Omega(u) \leq A_c \Omega(t), \quad (3.1.5)$$

Impliquent des estimations de ces opérateurs L^p (pour $\delta = 0$ voir [9] et pour $0 \leq \delta < 1$ voir [3]). Aussi lorsque $\delta = 0, N = [s]$ et $\Omega \equiv 1$ la condition 3.1.4 implique que chaque opérateur avec un symbol

satisfaisant 3.1.1 et 3.1.2 sont bornées à partir de H_p^{s+m} en H_p^s (voir [2]),

Aussi, Nous avons d'abord à améliorer le résultat de la continuité de $\psi.d.o$ pour H_p^s avec l'aide de la condition suivante

$$(\forall v > 0, \exists C_v > 0, \forall t \geq 1) \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^2(u)}{u^{v+1}} du \leq C_v \frac{\Omega^2(t)}{t^v}. \quad (3.1.6)$$

Puis, nous examinons dans quelle mesure la condition 3.1.3 est optimiser

Dans cette section Nous avons conclue avec quelques exemples concernant les conditios 3.1.5 et 3.1.6.

1. $\Omega(t) = t^r, r > \frac{1+v}{2}$, (on remarque que 3.1.5 est évidemment satisfait de tout et $r > 0$), $A_c = c^r$ et $c > 1$

2. $\Omega(t) = \exp(\log t)^r$, si $t \geq c_0, \Omega(t) = 0$, si $t < c_0, 0 < r < 1$

$c_0 = \max(1, \exp(\frac{1+v}{2r})^{1/(r-1)})$, $A_c = \exp(\log c)^r$, et $c > 1$.

les opérateurs de convolution $\Delta_k (k = 1, 2, \dots)$ et $Q_j (j = 1, 2, \dots)$, avec des symboles $\phi(2^{-k}\xi)$ et $\psi(2^{-j}\xi)$ respectivement.

Pour $0 < \varrho \leq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, Nous notons par $\Lambda_N = \Lambda(\varrho, N, w, \Omega)$ l'espace de toutes les suites (m_j) avec les propriétés suivantes

$$(m_j^{(\beta)})_j \subset L^\infty, \left| m_j^{(\beta)}(x+h) - m_j^{(\beta)}(x) \right| \leq cw(|h|)\Omega(2^{2j}), \quad (3.1.7)$$

3.2 La continuité sur H_p^s

Le théorème suivant est le résultat principal de ce section , En elle nous prouver que la condition 3.1.3 est suffisante pour la continuité.

Théorème 3.2.1 *Soit $0 \leq \delta \leq 1 - \rho < 1, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, m \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$, et $N \in \mathbb{N}$, d'après 3.1.3, 3.1.5 et 3.1.6 , si $s > \delta N$, alors donne toutes les ψ .d.o de \sum_N est bornée à partir de H_p^{s+m} en H_p^s .*

On utilise les lemmes suivants pour prouver le théorème :

Lemme 3.2.1 *Soit $0 \leq \delta \leq 1, \rho \geq 0$, et $N \in \mathbb{N}$, si $(\chi_j) \in \Lambda_N$, puis nous avons*

$$\|\Delta_k(\chi_j(2^{j\delta} \cdot))\|_\infty \leq C 2^{(j\delta-k)N} w(2^{j\delta-k}) \Omega(2^{ej}),$$

Où C est indépendant de j et k

Preuve. Par le développement de Taylor l'un a

$$\begin{aligned} \chi_j(x-y) &= \sum_{|\beta| < N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \chi_j^{(\beta)}(x) \\ &+ N \sum_{|\beta|=N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \chi_j^{(\beta)}(x-ty) dt \\ &= \sum_{|\beta| \leq N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \chi_j^{(\beta)}(x) + R_J(x, y), \end{aligned}$$

Où

$$R_j(x, y) = N \sum_{|\beta|=N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \left(\chi_j^{(\beta)}(x-ty) - \chi_j^{(\beta)}(x) \right) dt.$$

Par et la concavité de w nous obtenons

$$|R_j(x, y)| \leq C |y|^N w(|y|) \Omega(2^{ej}).$$

Depuis $0 \notin \text{Supp} \phi$ l'un a

$$2^{nk} \int (-y)^\beta \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(2^k y) dy = (i 2^{-k})^{|\beta|} \varphi^{(\beta)}(0) = 0.$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} &|\Delta_k(\chi_j(2^{j\delta} \cdot))(x)| = \\ &= \left| \int \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(y) R_j(2^{j\delta} x, 2^{j\delta-k} y) dy \right| \\ &\leq C 2^{(j\delta-k)N} \Omega(2^{ej}) \int |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(y)| |y|^N w(2^{j\delta-k} |y|) dy \\ &\leq C 2^{(j\delta-k)N} w(2^{j\delta-k}) \Omega(2^{ej}) \int |\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(y)| |y|^N (1+|y|) dy. \end{aligned}$$

Par conséquent , nous obtenons le résultat . ■

Lemme 3.2.2 Soit $\eta > 0, 0 < \delta \leq 1 - \rho < 1, N \in \mathbb{N}$, et $s > \delta N$, d'après 3.1.3, 3.1.5 et 3.1.6, alors donne il existe une constante $C > 0$, telle que, pour toutes les suites $(\chi_j) \in \Lambda_N$ et (f_j) avec $\text{Supp} \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq \eta^{2j}\}$, nous avons

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j \right\|_{H_p^s} \leq C \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 4^{sj} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Preuve. Soit la propriété suivant de H_p^s , pour $s > 0$ Nous avons

$$\left\| \sum_{J \geq 0} g_J \right\|_{H_p^s} \leq C \left\| \left(\sum_{j \geq 0} 4^{sj} |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \quad (3.2.1)$$

Où $\text{Supp} \widehat{g_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq b2^j\}$, avec $b > 0$ (voir [1],[6] et [?])

Maintenant .En utilisant 1.1.2 , avec $2^{-j\xi}$, Nous obten $\chi_j = Q_j \chi_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k \chi_j$, Ainsi

$$\sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j = u_1 + u_2, \quad (3.2.2)$$

Où

$$u_1 = \sum_{j \geq 0} f_j Q_j \chi_j \quad \text{et} \quad u_2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{j=0} f_j \Delta_k \chi_j.$$

Pour estimer $\|u_1\|_{H_p^s}$, Nous prenons en compte que la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f_j Q_j \chi_j)$ a un support dans la boule $|\xi| \leq (\eta + 2)2^j$ et appliquer 3.2.1 et l'inégalité

$$|Q_j \chi_j(x)| \leq C \|\mathcal{F}^{-1} \rho\|_1 \sup_{j \geq 0} \|\chi_j\|_{\infty}. \quad (3.2.3)$$

Pour estimer $\|u_2\|_{H_p^s}$, Nous utilisons le support de $\mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} f_j \Delta_k \chi_j \right)$ est dans la boule $|\xi| \leq \left(\frac{\eta}{2} + 2\right) 2^k$. Puis 3.2.1 et le lemme 1 implique que $\|u_2\|_{H_p^{s+N(1-\delta)}}$ est bornée par

$$C \left\| \left(\sum_{k \geq 1} 4^{(s+N(1-\delta))k} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j\delta-k)N} w(2^{\delta j-k}) \Omega(2^{2j}) |f_j| \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

La monotonie de w , l'inégalité de Schwartz et 3.1.6 (depuis $s > \delta N$) implique que 3.2.4 est bornée par

$$C \left(\sum_{k \geq 1} 4^{(s-\delta N)k} w^2(2^{(\delta-1)k}) \sum_{j=0}^{k-1} 4^{j(\delta N-s)} \Omega^2(2^{2j}) \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{l \geq 0} 4^{sl} |f_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned}
 &= C \left(\sum_{k \geq 1} 4^{(s-\delta N)k} w^2(2^{(\delta-1)k}) \times \sum_{j=0}^{k-1} (2^\varrho)^{2j(\delta N-s)/\varrho} \Omega^2(2^{2^j}) \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{l \geq 0} 4^{sl} |f_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq C' \left(\sum_{k \geq 1} w^2(2^{(\delta-1)k}) \Omega^2(2^{2^k}) \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

la condition $0 \leq \delta \leq 1 - \varrho < 1$ permet d'appliquer 3.1.3 qui implique

$$\begin{aligned}
 \|u_2\|_{H_p^{s+N(1-\delta)}} &\leq C' \left(\sum_{k \geq 1} w^2(2^{-2^k}) \Omega^2(2^{2^k}) \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{l \geq 0} (4^{sl} |f_l|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
 &\leq C'' \left\| \left(\sum_{l \geq 0} 4^{sl} |f_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p
 \end{aligned}$$

et il reste à utiliser l'inclusion $H_p^{s+N(1-\delta)} \subset H_p^s$. ■

Preuve. de théorème 3.2.1

étape 1. On prendre $\varphi \in C^\infty$, tels que $\text{Supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1\}$ et $\varphi(\xi) = 1$, pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$,

Nous décomposons σ en

$$\begin{aligned}
 \sigma(x, \xi) &= \varphi(\xi) \sigma(x, \xi) + (1 - \varphi(\xi)) \sigma(x, \xi) \\
 &= r(x, \xi) + \lambda(x, \xi)
 \end{aligned}$$

Soit θ une fonction réelle dans C^∞ telle que $\text{Supp} \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ et $\sum_{j \geq 0} (\theta(2^{-j}\xi))^2 = 1$. on a

$$\sigma_j(x, \xi) = 2^{-jm} \theta(\xi) \lambda(2^{-\delta j} x, 2^j \xi) \quad (3.2.5)$$

et d'écrire

$$\sigma_j(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu \cdot \xi} (1 + |u|^2)^{\frac{-1}{2}} \chi_{j,u}(x) du \quad (3.2.6)$$

Où

$$\chi_{j,u}(x) = \int_{2^{-1} \leq |\xi| \leq 2} e^{-iu \cdot \xi} (1 - \Delta_\xi)^{\frac{1}{2}} \sigma_j(x, \xi) d\xi$$

et L est un nombre naturel satisfaisant $L \geq n + 1$

Maintenant, Pour $|\beta| \leq N$, depuis $(1 - \Delta_\xi)^{\frac{1}{2}} \partial_x^\beta \sigma_j(x, \xi)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$2^{j(|\alpha| - \delta|\beta| - m)} \theta^{(\gamma)}(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \lambda(2^{-\delta j} x, 2^j \xi), \quad (L = |\alpha| + |\gamma|),$$

Nous obtenons à partir de 3.1.1 que

$$\left| \chi_{j,u}^{(\beta)}(x) \right| \leq C \sum_{L=|\alpha|+|\gamma|} \int_{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2} \left| \theta^{(\gamma)}(\xi) \right| (2^{-j} + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|} d\xi \leq C'_l.$$

De même les rendements 3.1.2

$$\begin{aligned} \left| \chi_{j,u}^{(\beta)}(x+h) - \chi_{j,u}^{(\beta)}(x) \right| &\leq C \sum_{L=|\alpha|+|\gamma|} \int_{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2} \left| \theta^{(\gamma)}(\xi) \right| w(|h| |\xi|^\delta) \times \\ &\times \Omega(|2^j \xi|^\varrho) (2^{-j} + |\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} d\xi. \end{aligned}$$

Next , En utilisant 3.1.5, la monotontée et la concavité de w , On obtient que , la partie droite de la dernière inégalité est bornée par $C_L'' w(|h|) \Omega(2^{j\varrho})$. les constantes C_L' et C_L'' sont indépendans de j et u , Par conséquent (χ_j, u) est bornée dans Λ_N , respect à j et u

Nous cotinuons noutre construction de $\lambda(x, \xi)$, les équations 3.2.5 et 3.2.6 impliquer

$$\begin{aligned} \lambda(x, \xi) &= \sum_{j \geq 0} 2^{jm} \theta(2^{-j} \xi) \sigma_j(2^{\delta j} x, 2^{-j} \xi) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-(n+1)/2} \lambda_u(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Où

$$\lambda_u(x, \xi) = \sum_{j \geq 0} 2^{jm} \theta_u(2^{-j} \xi) \chi_{j,u}(2^{\delta j} x)$$

et

$$\theta_u(\xi) = (2\pi)^{-n} (1 + |u|^2)^{(n+1-L)/2} e^{iu \cdot \xi} \theta(\xi).$$

Il est facile de vérifier que

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left(\left\| \theta_u^{(\alpha)} \right\|_\infty \right) \leq C, \quad (|\alpha| \leq L - n - 1).$$

étape 2. Pour chaque $f \in S$, Nous avons la décomposition

$$op_\sigma f = op_r f + \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-(n+1)/2} op_{\lambda_u}(f) du. \quad (3.2.7)$$

Nous allons estimer , en H_p^s -norme chacun des deux termes dans le côté droit de 3.2.7 ,

Nous commençons par l'observation suivante .si $\hat{g}_j = v(2^{-j} \cdot) \hat{g}$, où $v \in C^\infty$ et $Supp v \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, b^{-1} \leq |\xi| \leq b\}$ avec $b > 1$, puis il existe une constante $C_v > 1$. tels que

$$\left\| \left(\sum_{j \geq 0} 4^{sj} |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_v \|g\|_{H_p^s}. \quad (3.2.8)$$

(voire [1])

Il suit immédiatement du lemme 3.1.3 et 3.2.8 que

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left(\|op_{\lambda_u} f\|_{H_p^s} \right) \leq C \|f\|_{H_p^{s+m}}.$$

Nous avons maintenant fixé

$$op_r f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-2n} a_u(x) f(x + u) du$$

Où la famille $(a_u)_{u \in \mathbb{R}^n}$ de fonctions continues est définie par la formule suivant :

$$a_u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu \cdot \xi} (I - \Delta_\xi)^{2n} r(x, \xi) d\xi.$$

Par 3.1.1, on obtient

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} (\|\partial_x^\beta a_u(\cdot)\|_\infty) \leq C, \quad (|\beta| \leq N),$$

Et cela conduit à

$$\|op_r f\|_p \leq C \left(\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|a_u\|_\infty \right) \|f\|_p. \quad (3.2.9)$$

D'autre part , depuis $\phi(2^{-j}\xi)\varphi(\xi) = 0$ L'un a

$$\Delta_j(op_r f)(\xi) = 0, \quad \text{is } j \geq 1. \quad (3.2.10)$$

En utilisant cette égalité et l'inégalité de Young nous obtenir

$$\|op_r f\|_{H_p^s} \leq \|\mathcal{F}^{-1}\psi\|_1 \|op_r f\|_p. \quad (3.2.11)$$

Depuis $s > 0$, Nous pouvons appliquer l'inégalité de Schwartz.

$$\|f\|_p = \left\| \left(Q_0 + \sum_{j \geq i} \Delta_j \right) f \right\|_p \leq \left(\sum_{j \geq 0} 4^{-sj} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H_p^s}.$$

En fin : Nous combinons la dernière inégalité , l'inclusion $H_p^{s+m} \subset H_p^s$ et 3.2.9 , pour vérifier que 3.2.11 est majorée par $C \|f\|_{H_p^{s+m}}$, comme voulu ■

Dans le théorème suivant , Nous démontrons que la condition 3.1.3 est nécessaire ainsi , Nous remarque que pour $\delta = m = s = 0$ et $\varrho = 1$ un tel résultat à été prouvé par Bourdaud [3]

Théorème 3.2.2 Soit $0 \leq \delta < 1, s \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}, m \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$ et $N \in \mathbb{N}$, être tel que $s > \delta N$, supposons que

$$\sum_{k \geq 0} [w(2^{-k})\Omega(2^k)]^2 = \infty$$

Puis il existe sur un opérateur op_r de \sum_N et une fonction $g \in H_p^{s+m}$ telle que $op_r g \notin H_p^s$.

Preuve. Consider le symbole

$$r(x, \xi) = (1 + |\xi|)^m \sum_{j \geq 0} 2^{-j\delta N} w(2^{(\delta-1)j}) \Omega(2^{2j}) \exp(i2^j x_1),$$

Où $(x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, il est facile de voir que op_r est dans \sum_N , en effet, Nous multiplions par une partition de l'unité $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(2^{-k}\xi) = 1$, pour $|\xi| \geq \frac{1}{2}$, où $\theta \in C^\infty$, Avec $Supp \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$, Alors

$$r(x, \xi) = (1 + |\xi|)^m \sum_{k \geq 1} m_k(x) \theta(2^{-k}\xi)$$

Avec $m_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j\delta N} w(2^{(\delta-1)j}) \Omega(2^{2j}) \exp(i2^j x_1)$. En outre que nous suppose

$$\sum_{j=0}^k w(2^{-j}) \leq C_0 w(2^{-k}) \quad \text{et} \quad \sup_{j \geq 0} w(2^{-j}) \Omega(2^j) < \infty \quad (3.2.12)$$

Ces inégalités est donner des estimations nécessaires 3.1.2 de m_k , i.e $(m_k) \in \Lambda_N$.

Supposons maintenant que w ne satisfait par 3.2.12. Il siffit de remplacer $w(2^{(\delta-1)j})$ par $\tilde{w}(2^{(\delta-1)j})$ dans l'expression de r , où \tilde{w} est un module de coninuité telle que

$$\sum_{j=0}^k \tilde{w}(2^{-j}) \leq C_0 w(2^{-k}), \quad \sup_{j \geq 0} \tilde{w}(2^{-j}) \Omega(2^j) < \infty$$

et

$$\sum_{j \geq 0} [\tilde{w}(2^{-j}) \Omega(2^j)]^2 = \infty.$$

Maintenant, soit $g = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\cdot|)^{-m} \widehat{k})$, où $k \in S$, être tel que $\|k\|_p \neq 0$, et $Supp \widehat{k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq \frac{1}{4}\}$. depuis

$$\mathcal{F}(k \exp(i2^j x_1)) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n, \frac{3}{4} 2^j \leq |\xi| \leq \frac{5}{4} 2^j \right\}$$

puis par 3.2.8 Nous obtient

$$\|op_r g\|_{H_p^s} \geq C \|k\|_p \left\{ \sum_{j \geq 0} 4^{(s-\delta N)j} [w(2^{-j}) \Omega(2^j)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

■

3.3 La continuité sur $B_p^{s,q}$.

Nous établissons maintenant le résultat correspondant pour $B_p^{s,q}$

Nous utilisons les deux conditions suivantes ,soit $1 \leq q \leq \infty$

$$\sum_{k \geq 0} [w(2^{-k})\Omega(2^k)]^q < \infty, \quad (3.3.1)$$

$$(\forall v > 0, \exists C_v > 0, \forall t \geq 1) \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^{q'}(u)}{u^{v+1}} du \leq C_v \frac{\Omega^{q'}(t)}{t^v}. \quad (3.3.2)$$

Théorème 3.3.1 *Soit $0 \leq \delta \leq 1 - \rho < 1, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, m \geq 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ et $N \in \mathbb{N}$, d'après 3.1.5, 3.3.1 et 3.3.2, si $s > \delta N$, puis toutes les $\psi.d.o.$*

op_r de \sum_N est bornée à partir de $B_p^{s+m,q}$ en $B_p^{s,q}$.

Lemme 3.3.1 *Soit $\eta > 0, 0 \leq \delta \leq 1 - \rho < 1, N \in \mathbb{N}$ et $s > \delta N$ d'après 3.1.5, 3.3.1, et 3.3.2, alors il existe une constante $c > 0$, tel que ,pour toutes les suites $(\chi_j) \in \Lambda_N$ et (f_j) avec $Supp \hat{f}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq \eta 2^j\}$, Nous avons*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j \right\|_{B_p^{s,q}} \leq C \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sqj} \|f_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. Nous utilisons 3.2.2 décomposition et lae fait que l'inégalité

$$\left\| \sum_{j \geq 0} g_j \right\|_{B_p^{s,q}} \leq C \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sqj} \|g_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.3.3)$$

Est valable pour tous les $s > 0$ et n'importe quelle suite (g_j) tels que $Supp \hat{g}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq b 2^j\}$, avec $b > 1$, (voir [1] ou [6]).

Estimation de u_1 :Il suffit d'appliquer 3.3.3 et 3.2.3

Estimation de u_2 :En raison de 3.3.3 et de la lemme 3.2.1 nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{B_p^{s+N(1-\delta),q}}^q &\leq \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} 2^{(s+N(1-\delta))kq} \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j\delta-k)N} w(2^{\delta j-k}) \Omega(2^{ej}) \|f_j\|_p \right)^q. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

À l'aide de la monotonie de w et l'inégalité titulaire dans l^q , Nous obtenons que la côté droit de 3.3.4 est bornée par

$$\sum_{k \geq 1} 2^{(s-\delta N)kq} w^q(2^{(\delta-1)k}) \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{(\delta N-s)jq'} \Omega^{q'}(2^{2j}) \right)^{\frac{q}{q'}} \sum_{l \geq 0} 2^{sq'l} \|f_l\|_p^q.$$

Maintenant , depuis $0 \leq \delta \leq 1 - \varrho < 1$, et en tentant compte 3.3.2 on remarque que 3.3.4 est bornée par besoin d'expression , Il reste à utiliser l'inclusion $B_p^{s+N(1-\delta),q} \subset B_p^{s,q}$. ■

Preuve. de théorème 3.3.1 :

Comme à l'étape 2 de la preuve du théorème 3.2.1 , nous allons utiliser 3.2.9 nous avons d'abord obtenir

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left(\|op_{\lambda_u} f\|_{B_p^{s,q}} \right) \leq C \|f\|_{B_p^{s+m,q}}.$$

Cette estimation est obtenue en appliquant l'observation suivante , Pour tous $s > 0$ nous avons

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{sqj} \|g_j\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|g\|_{H_p^{s,q}}$$

Où la suite (g_j) est la saine comme dans 3.2.10 .(voir [1]) .

Aussi par 3.2.12 nous avoir

$$\|op_r f\|_{B_p^{s,q}} \leq \|\mathcal{F}^{-1} \psi\|_1 \|op_r f\|_p.$$

Nous terminer la preuve en utilisant 3.2.11 l'intégration $B_p^{s,q} \subset L^p$ et $B_p^{s+m,q} \subset B_p^{s,q}$ ■

La preuve de l'autre résultat est basé sur un argument similaire à celle du théorème 3.2.2 , pour cette raison , nous n'enter pas dans les détails.

Théorème 3.3.2 Soit $0 \leq \delta < 1, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, m \geq 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ et $N \in \mathbb{N}$ être tel que $s > \delta N$. supposons que

$$\sum_{k \geq 0} [w(2^{-k})\Omega(2^k)]^q = \infty$$

Alors il existe un opérateur op_r de \sum_N et une fonction $g \in B_p^{s+m,q}$ telle que $op_r g \notin B_p^{s,q}$.

Remarque 3.3.1 Dans le cas $\delta = 0, N = [s]$ et $\Omega \equiv 1$ la preuve de théorème 3.3.1 et 3.3.2 est donné en [4].

Conclusion

Dans ce mémoires nous avons fait un rappel à plusieurs notations de l'analyse fonctionnelle, comme les espaces de Besov et de potentielle de Bessel.

Et on étudier la continuité des O.P.D sur les espaces de Besov et de potentielle de Bessel.

Bibliographie

- [1] J. BERGH, J. LÖFSTROM. Interpolation Spaces. Springer-Verlag, 1976.
- [2] G. BOURDAUD. Régularité du commutateur des opérateurs pseudo-différentiels peu réguliers. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 290, (1980), 67–70
- [3] G. BOURDAUD. L^p -estimates for certain Pseudo-differential operators. comm.Partial Differential Equations 7(1982),1023-1033.
- [4] G. BOURDAUD, M. MOUSSAI. Continuité des commutateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov. Bull. Sci. Math. 118(1994),117-130
- [5] Y. MEYER, Ondelettes et opérateurs, t. 2. Paris, Hermann, 1990
- [6] J. PEETRE. New thoughts on Besov spaces. Duke Math. J. Series 1, (1976)
- [7] E. M. STEIN. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970.
- [8] H. TRIEBEL. Theory of function spaces. Geet & Portig, Leipzig and Birkhäuser, Basel, 1983
- [9] K. YABUTA. Generalization of Calderón-Zygmund operators. Studia. Math 62(1985), 17-31
- [M01] M. MAUSSI : Continuity of Pseudo-différential operators on Bessel and Besov spaces. serdica Math. J, 27(2001)
- [G81] G. METIVIER: Intégrale singulières cours DEA, Université de Renne France, 1981.

- [G08] G. BOUDAUD: Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov Preprint Paris 2008.