





*N° D'ordre*

# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

## Département de Mathématiques

### MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme Master

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Mathématiques appliquées

**Par**

BOUDAOUUD Sarra

**Sujet :**

**Applications de la méthode de simplexe aux  
problèmes d'économie**

Soutenue publiquement le .../.../2012 devant le jury composé de :

<b>Pr.N.BENHAMIDOUCHE</b>	<b>Professeur, Univ. de M'sila</b>	<b>Président</b>
<b>Dr.A.MERZOUGUI</b>	<b>Maitre de conférence(A), Univ. de M'sila</b>	<b>Examineur</b>
<b>Pr.D.BENTERKI</b>	<b>Professeur, Univ. de Sétif</b>	<b>Examineur</b>
<b>Dr.M.DILMI</b>	<b>Maitre de conférence(A), Univ. de M'sila</b>	<b>Examineur</b>

**Promotion: 2011/2012**

## Remerciements

*Grace à Dieu le tout puissant, je termine ce modeste travail.*

*Ce travail et le fruit de beaucoup d'efforts et de persévérance.*

*Pour cela je remercie infiniment l'enseignant qui ma encadré*

*<< MERZOUGUI Abd elkrim >>*

*Qui ma donné l'aide et la coopération et aussi tous le temps pour faire réussir ce mémoire*

*Du fond du cœur ... Je remercie aussi nos enseignants, ainsi que tous les enseignants du département.*

*Des remerciements particuliers vont aux membres du jury.*

*N'oublier pas à remercier notre doyen*

*<<Pr.BOU DAOUD Abdelmadjid>>*

*Je remercie ainsi de tout mon cœur mes parents qui m'ont poussé et encouragé et qui m'ont donné de l'aide.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Généralités sur l'optimisation</b>	<b>4</b>
1.1 Généralités sur l'optimisation . . . . .	4
1.1.1 Optimum local . . . . .	5
1.1.2 Optimum global . . . . .	5
1.1.3 Transformation des programmes de minimisation . . . . .	6
1.1.4 Conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un optimum . . . . .	6
1.2 Ensemble convexe . . . . .	10
1.3 Ensemble strictement convexe . . . . .	10
1.4 Fonctions concaves, fonctions convexes . . . . .	10
1.5 Propriétés importantes . . . . .	11
<b>2 La programmation linéaire</b>	<b>15</b>
2.1 la programmation linéaire . . . . .	15
2.1.1 Modélisation . . . . .	16
2.1.2 Programmation linéaire en notation matricielle . . . . .	19
2.1.3 Forme standard/Forme canonique d'un PL . . . . .	20
2.2 Variables d'écart . . . . .	20
2.3 Solutions de base réalisables . . . . .	21
2.4 Propriétés des solutions de base réalisables . . . . .	21
2.5 Propriétés géométrique des solutions de base réalisables . . . . .	22
<b>3 La méthode de simplexe</b>	<b>24</b>
3.1 Description générale . . . . .	24
3.2 Position de problème . . . . .	24

3.2.1	Décrivons une itération typique pour résoudre le problème général avec le simplexe, forme avec tableaux . . .	25
3.2.2	Tableau de simplexe . . . . .	26
3.3	Algorithme de simplexe . . . . .	29
3.4	Algorithme primal du simplexe . . . . .	30
3.5	Dualité . . . . .	32
3.5.1	Introduction et définition . . . . .	32
3.5.2	Comparaison primal/dual . . . . .	33
3.5.3	Propriétés - Théorèmes de dualité . . . . .	34
3.6	Convergence de la méthode de simplexe . . . . .	37
3.7	Méthode du simplexe appliquée à un exemple . . . . .	38
3.8	Méthode de simplexe par les tableaux successifs . . . . .	44
3.9	Résolution graphique . . . . .	49
3.10	Modélisation des Problèmes de production en économie . . . . .	52
	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

# Introduction

Développée initialement par George Dantzig, durant la seconde guerre mondiale, de nombreux problèmes militaires, relatifs à l'organisation et à la distribution des munitions et des vivres, ainsi qu'aux déploiements des troupes militaires, en tant que problèmes de PL. Plus encore, en 1947, il a mis au point un algorithme pour résoudre les problèmes de PL, connu sous le nom de l'algorithme de Simplexe.

Jusqu'en 1984, l'algorithme de simplexe était le seul algorithme indiqué pour la résolution des PL. Actuellement, il existe d'autres méthodes concurrentes (la méthode développée par Khachian en 1979 puis la méthode des points intérieurs développée par Karmarkar en 1984).

L'algorithme du simplexe de George Dantzig est une technique à la fois fondamentale et très populaire pour les problèmes de programmation linéaire. Ainsi, étant donné un ensemble d'inégalités linéaires sur  $n$  variables réelles, l'algorithme permet de trouver la solution optimale pour une fonction objective, qui est elle aussi linéaire.

En termes géométriques, l'ensemble des inégalités linéaires définit un polyèdre dans l'espace à  $n$  dimensions et il s'agit de trouver le sommet optimal pour la fonction de coût donnée. L'idée de l'algorithme consiste à partir d'un sommet quelconque du polyèdre et, à chaque itération, d'aller à un sommet adjacent s'il est possible d'en trouver un meilleur pour la fonction objective. S'il n'y en a pas, l'algorithme s'arrête en concluant que le sommet courant est optimal.

# Chapitre 1

## Généralités sur l'optimisation

### 1.1 Généralités sur l'optimisation

Un programme d'optimisation s'écrit typiquement sous la forme (avec s.c pour "sous contraintes")

$$(P) \left| \begin{array}{l} \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.c.} \quad \text{contrainte}(j) \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right. .$$

S'il s'agit d'un programme de maximisation sous contraintes, et sous la forme :

$$(P') \left| \begin{array}{l} \min_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.c.} \quad \text{contrainte}(j) \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right. .$$

S'il s'agit d'un programme de minimisation sous contraintes.

La fonction  $f$  est appelée *fonction objectif*. Le programme consiste à chercher les valeurs  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  pour laquelle la valeur de cette fonction est maximale (ou minimale) sous les contraintes. On appelle *Optimum* la solution d'un programme d'optimisation : il s'agit soit d'un maximum, soit d'un minimum.

Les contraintes peuvent prendre plusieurs formes distinctes :

- contraintes égalités :  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_j \quad \forall j = 1, \dots, m$
- contraintes inégalités :  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, m$
- containte de non-négativité :  $x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

### 1.1.1 Optimum local

• La variable  $x^*$  est un maximum local d'une fonction  $f$  définie sur l'ensemble convexe  $S$

ssi  $\exists \xi > 0$  tel que  $f(x) \leq f(x^*) \forall x \in S$  et  $|x - x^*| \leq \xi$

• La variable  $x^*$  est un minimum local d'une fonction  $f$  définie sur l'ensemble convexe  $S$

ssi  $\exists \xi > 0$  tel que  $f(x) \geq f(x^*) \forall x \in S$  et  $|x - x^*| \leq \xi$

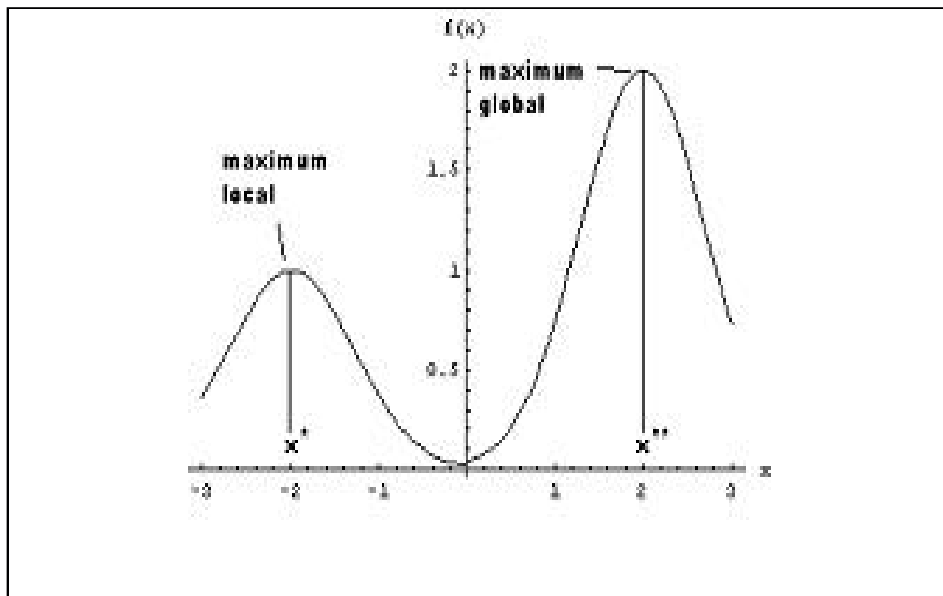
### 1.1.2 Optimum global

• La variable  $x^*$  est un maximum globale d'une fonction  $f$  définie sur l'ensemble convexe

$S \iff f(x) \leq f(x^*) \forall x \in S$

• La variable  $x^*$  est un minimum globale d'une fonction  $f$  définie sur l'ensemble convexe

$S \iff f(x) \geq f(x^*) \forall x \in S$



### 1.1.3 Transformation des programmes de minimisation

Tout programme de minimisation peut aisément être transformé en programme de maximisation en remplaçant la fonction objectif  $f$  par son opposée  $-f$  :

$$\left| \begin{array}{l} \min_{\tilde{x}} \quad f(\tilde{x}) \\ \text{s.c.} \quad \text{contraintes} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \max_{\tilde{x}} \quad -f(\tilde{x}) \\ \text{s.c.} \quad \text{contraintes} \end{array} \right. .$$

### 1.1.4 Conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un optimum

Pour trouver la solution  $\tilde{x}^*$  d'un programme d'optimisation quelconque, on distingue traditionnellement deux types de conditions :

\* **Les conditions du premier ordre (CPO)** sont les conditions nécessaires que doit vérifier un optimum, s'il existe. Ces conditions s'écrivent comme un système d'équations ou d'inéquations dont la résolution permet de trouver  $\tilde{x}^*$ .

\* **Les conditions du second ordre (CSO)** garantissent que les conditions du premier ordre sont suffisantes pour que  $\tilde{x}^*$  soit bien la solution du programme d'optimisation.

#### Cas d'une fonction à une seule variable

On commence par envisager le cas d'une fonction  $f$  à une seule variable que l'on maximise .

On considère le programme de maximisation  $P$  suivant

$$P : \max_x f(x)$$

**Condition du premier ordre** si  $x^*$  est une solution du programme de maximisation  $P$ , alors  $x^*$  vérifie :

$$f'(x^*) = 0$$

**Condition du second ordre pour un optimum local** Supposons qu'il existe un  $x^*$  qui vérifie la CPO. Alors :

- $x^*$  est un maximum local  $\implies f''(x^*) \leq 0$
- $f''(x^*) < 0 \implies x^*$  est un maximum local
- $x^*$  est un minimum local  $\implies f''(x^*) \geq 0$
- $f''(x^*) > 0 \implies x^*$  est un minimum local

**Condition suffisantes du second ordre pour un optimum global**

Supposons qu'il existe un  $x^*$  qui vérifie la CPO. Alors :

- $f''(x) \leq 0 \quad \forall x$  ( $f$  est concave)  $\implies x^*$  est un maximum global
- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x$  ( $f$  est convexe)  $\implies x^*$  est un minimum global

**Exemple :**

Trouver le maximum global du programme de maximisation  $P$  :

$$P : \max f(x) = -(x - 2)^2$$

**Solution :**

**CPO :**  $x^*$  est une solution du programme  $P \implies f'(x^*) = 0$ ,  
soit  $-2(x^* - 2) = 0 \implies x^* = 2$

**CSO :**  $f''(x) = -2 < 0 \quad \forall x$  est un maximum global  
 $x^*$  est le maximum global de  $f$ .

**Cas d'une fonction à plusieurs variables**

Soit une fonction  $f$  à  $n$  variables

On considère le programme de maximisation  $P$  suivant :

$$P : \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Condition du premier ordre**

Si  $\tilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est une solution du programme de maximisation  $P$ , alors  $\tilde{x}^*$  vérifie :

$$\frac{\partial f(\tilde{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Condition du second ordre pour un optimum local :** Supposons qu'il existe un  $\tilde{x}^*$  qui vérifie les **CPO**. Alors :

- $H(\tilde{x}^*)$  est définie négative  $\implies \tilde{x}^*$  est un maximum local
  - $\tilde{x}^*$  est un maximum local  $\implies H(\tilde{x}^*)$  est semi-définie négative
  - $H(\tilde{x}^*)$  est définie positive  $\implies \tilde{x}^*$  est un minimum local
  - $\tilde{x}^*$  est un minimum local  $\implies H(\tilde{x}^*)$  est semi-définie positive
- où  $H(\tilde{x}^*)$  désigne la matrice hessienne de  $f$  évaluée au point  $\tilde{x}^*$ .

**Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global**

Supposons qu'il existe un  $\tilde{x}^*$  qui vérifie les **CPO**. Alors :

•  $H(\tilde{z})$  est semi-définie négative  $\forall \tilde{z}$  ( $f$  est concave)  $\implies \tilde{x}^*$  est un maximum global

•  $H(\tilde{z})$  est semi-définie positive  $\forall \tilde{z}$  ( $f$  est convexe)  $\implies \tilde{x}^*$  est un minimum global

où  $H(\tilde{z})$  désigne la matrice hessienne de  $f$  évaluée au point  $\tilde{z}$ .

**Exemple :**

Résoudre le programme de maximisation  $P$

$$P : \max_{x,y} f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

**Solution :**

**CPO :** Si  $(x^*, y^*)$  est une solution du programme  $P$  alors :

$$f'_x(x^*, y^*) = 0 \iff 3(y^*) - 3(x^*)^2 = 0$$

$$f'_y(x^*, y^*) = 0 \iff 3(x^*) - 3(y^*)^2 = 0$$

$(x^*, y^*)$  est donc tel que  $x^* = (y^*)^2 = (x^*)^4$ . Il y a deux solutions possibles :  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

**CSO :** la matrice hessienne de  $f$  évaluée en tout point  $(x, y)$  s'écrit :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Les mineurs principaux diagonaux de  $H(0, 0)$  sont  $D_1 = 0$  et  $D_2 = -9$ , donc  $H(0, 0)$  n'est pas semi-définie négative, donc  $(0, 0)$  n'est pas un maximum local de  $f$ .

Les mineurs principaux diagonaux de  $H(1, 1)$  sont  $D_1 = -1$  et  $D_2 = 27$ , donc  $H(1, 1)$  est définie négative, donc  $(1, 1)$  est un maximum local de  $f$ .

Par ailleurs, comme  $H(0, 0)$  n'est pas semi définie négative,  $H(x, y)$  n'est pas semi définie négative pour tout  $(x, y)$ . Les conditions du second ordre ne permettent donc pas de conclure que  $(1, 1)$  est un maximum global. En fait, on peut montrer que ce n'est pas le cas :  $f(1, 1) = 1$ , mais  $f(-1, -1) = 5$  (par exemple).

$(x^*, y^*) = (1, 1)$  est un maximum local, mais pas un maximum global de  $f$ . Normes vectorielles et normes matricielles

## 1.2 Ensemble convexe

Un ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est convexe ssi,  $\forall (x, y) \in S^2$  :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Intuitivement, un ensemble convexe est tel que tout segment reliant deux points de cet ensemble se trouve à l'intérieur de l'ensemble.

-La figure 1 donne un exemple d'ensemble convexe et un exemple d'ensemble non convexe.

## 1.3 Ensemble strictement convexe

Un ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est strictement convexe ssi,  $\forall (x, y) \in S^2$  :  
 $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{intérieur } S, \forall \lambda \in ]0, 1[$

**N.B** : La notion d'" ensemble concave " n'existe pas.

## 1.4 Fonctions concaves, fonctions convexes

Soit  $f$  une fonction de plusieurs variables définie sur un ensemble convexe  $S$

**Fonction concave** :  $f$  est concave sur  $S$  ssi,  $\forall (x, y) \in S^2$  et  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$f$  est strictement concave sur  $S$  ssi :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) > (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Autrement dit, une fonction  $f$  est concave ssi le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par  $f$  est situé au-dessous de cette surface.

-La figure 2 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à une seule variable.

-La figure 3 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à 2 variables.

**Fonction convexe :**

$f$  est convexe sur  $S$  ssi,  $\forall (x, y) \in S^2$  et  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$f$  est strictement convexe sur  $S$  ssi :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Autrement dit, une fonction  $f$  est convexe si le segment reliant tout couple de points situés sur la surface définie par  $f$  est situé au-dessus de cette surface.

-La figure 4 donne un exemple de fonction strictement concave dans le cas à 1 variable.

-La figure 5 donne un exemple de fonction strictement convexe dans le cas à 2 variables.

**N.B :**

Il est important de ne pas confondre la notion d'ensemble convexe avec celle de fonction convexe.

## 1.5 Propriétés importantes

- $f$  concave  $\iff -f$  convexe
- Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions concaves (resp. convexe), alors  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $(a \cdot f + b \cdot g)$  est une fonction concave (resp. convexe).
- Si  $f$  est une fonction concave et  $g$  est une fonction croissante et concave, alors la fonction  $g(f(x))$  est concave.
- Si  $f$  est une fonction convexe et  $g$  est une fonction croissante et convexe, alors la fonction  $g(f(x))$  est convexe.

Figure 1: Exemples d'un ensemble convexe  $S$  et d'un ensemble non convexe  $S'$ .

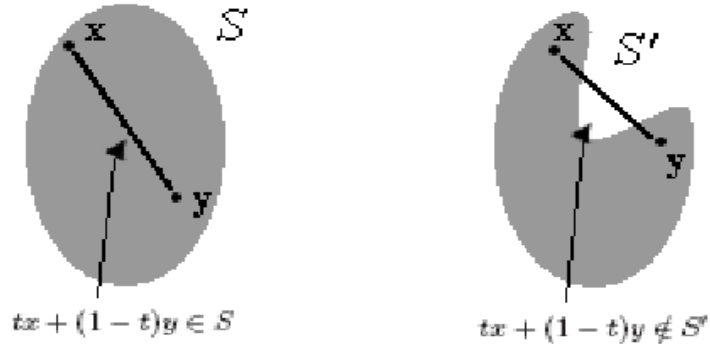
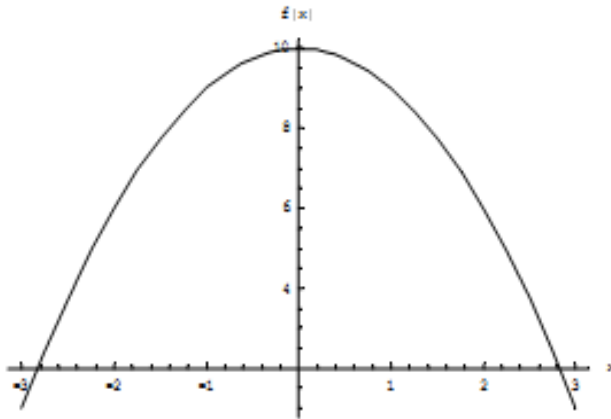
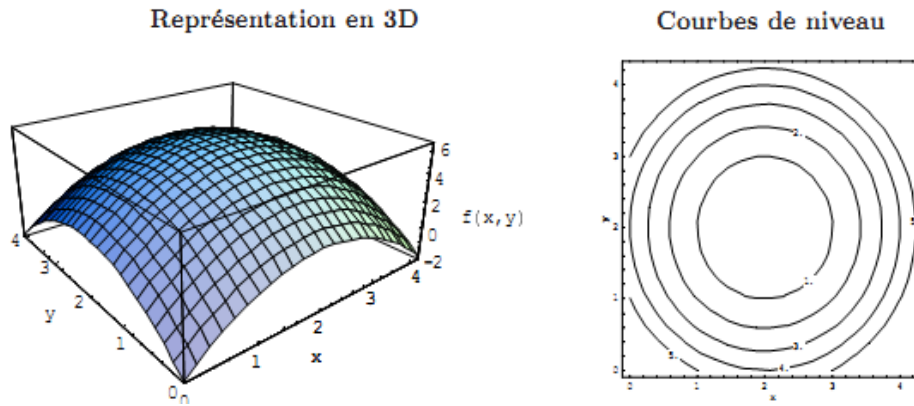


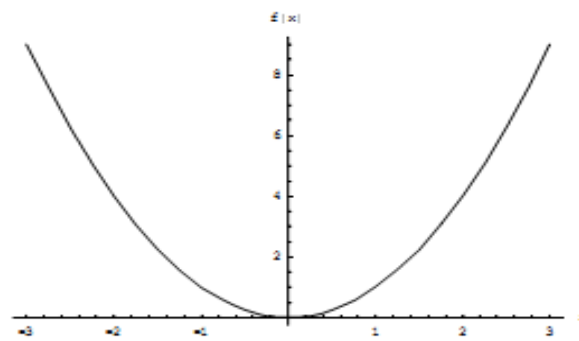
Figure 2: Fonction (strictement) concave  $f(x) = 10 - x^2$ .



**Figure 3:** Fonction (strictement) concave  $f(x, y) = 6 - (x - 2)^2 - (y - 2)^2$ . Représentation en 3 dimensions et courbes de niveau.

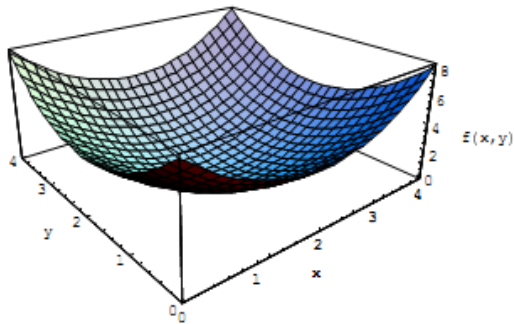


**Figure 4:** Fonction (strictement) convexe  $f(x) = x^2$ .

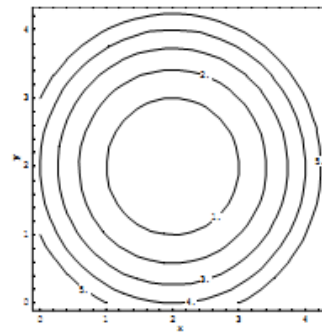


**Figure 5:** Fonction (strictement) convexe  $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$ . Représentation en 3 dimensions et courbes de niveau.

Représentation en 3D



Courbes de niveau



# Chapitre 2

## La programmation linéaire

### 2.1 la programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire est un problème de maximisation ou minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires

les contraintes peuvent prendre plusieurs formes distinctes :

- \* contraintes égalité
- \* contraintes inégalité
- \* contraintes de non négativité

#### Forme canonique mixte

Un problème de programmation linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\max_{(x_1, \dots, x_n)} \left[ f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{contraintes inégalité :} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \text{contraintes égalité :} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ \text{contraintes de non négativité :} \quad x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

$$i = 1, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Card( $i$ ) =  $m$  autrement dit, il y a  $m$  contraintes.

$\text{Card}(j) = n$  , il y a  $n$  variables.

On a  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  est appelé la fonction objectif être réduit au minimum et sera notée par  $z$ . Les coefficients  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sont les coefficients de coûts et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les variables de décision à déterminer.

L'inégalité  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  désigne la  $i$ ème contrainte .

### 2.1.1 Modélisation

#### Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits  $P_1$  et  $P_2$  en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'oeuvre, matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. tableau).

	$P_1$	$P_2$	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

Les deux produits  $P_1$  et  $P_2$  rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 Dinar et 4 Dinar par unité. Quelles quantités de produits  $P_1$  et  $P_2$  (valeurs non-nécessairement entières ) doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

- Choix des variables (les inconnues) :  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement les quantités des produits  $P_1$  et  $P_2$  fabriqués (  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ).

- Choix de la fonction objectif à maximiser : La fonction objectif  $f$  correspond au bénéfice total. Elle vaut  $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ . Le problème se traduit donc par

$$\max_{(x_1, x_2)} [f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2].$$

- Détermination des contraintes.

– La disponibilité de chacune des ressources s'écrit :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 55 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 20 \end{aligned}$$

– Positivité des variables :  $x_1, x_2 \geq 0$ .

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme

$$\max_{(x_1, x_2)} [f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2]$$

sous les contraintes :

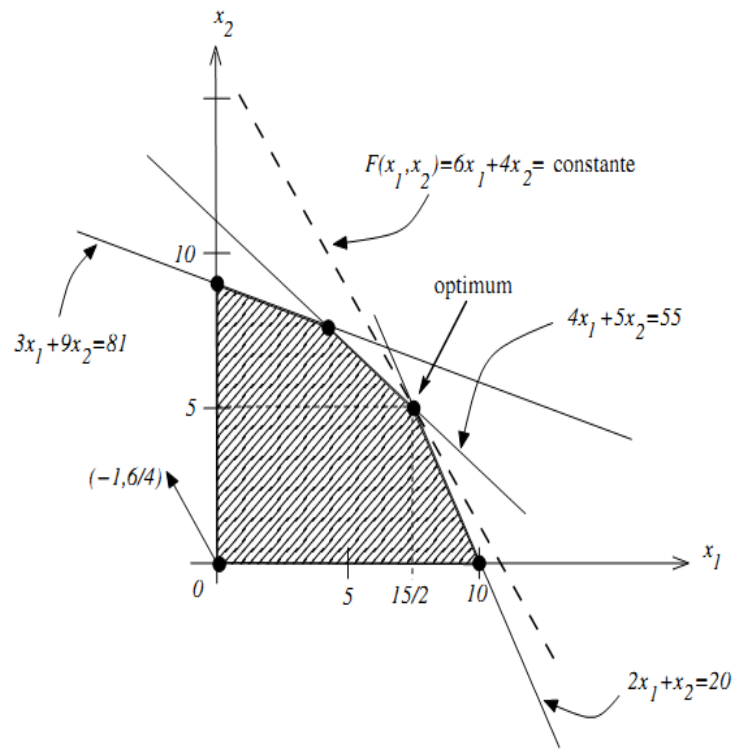
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

### Résolution graphique

Dans le cas d'un (PL) à deux variables, on peut envisager une résolution graphique. Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des demi-plans. L'intersection de ces demi-plans forme l'ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes (la partie hachurée de la figure 2.1). La fonction objectif  $f$  correspond une droite  $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 = \text{constante}$ , de coefficient directeur  $(-1, 6/4)$ . La constante précédente qui définit la droite doit être la plus grande possible (maximisation) et rencontrer l'ensemble des variables qui satisfont les contraintes. Pour déterminer cette valeur maximale, on fait donc "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes. Le maximum de  $f$  sur cet ensemble des contraintes est alors atteint. On obtient ainsi la solution optimale  $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$  et ce qui donne une valeur maximale  $\max(f) = 65$ .

On remarque que l'ensemble des contraintes (la partie hachurée de la figure (2.1)) est un polygone convexe et que le maximum de  $f$  est atteint en un sommet de ce polygone.



Fig(2.1) – Résolution graphique du problème de production

## 2.1.2 Programmation linéaire en notation matricielle

un problème de programmation linéaire peut être indiqué dans une forme plus commode en utilisant la notation matricielle. Pour illustrer considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, \dots, x_n)} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

On note

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

et la matrice  $A$  de taille  $(m \times n)$ .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Alors le problème peut être écrit comme suit

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Désignant  $\mathbf{A}$  par  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  où  $a_j$  est la *j*ème colonne de  $A$ .

### 2.1.3 Forme standard/Forme canonique d'un PL

		Problème de minimisation		Problème de maximisation		
Forme Standard	Minimise	$\sum_{j=1}^n c_j x_j$		Maximise	$\sum_{j=1}^n c_j x_j$	
		$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	$i = 1, \dots, m$		$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	$i = 1, \dots, m$
		$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, n$		$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, n$
Forme canonique	Minimise	$\sum_{j=1}^n c_j x_j$		Maximise	$\sum_{j=1}^n c_j x_j$	
		$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	$i = 1, \dots, m$		$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$	$i = 1, \dots, m$
		$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, n$		$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, n$

## 2.2 Variables d'écart

Tout (PL) sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un (PL) sous forme canonique pure et inversement.

Soit un (PL) sous forme canonique. On a

$$Ax \leq b \iff \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + e_i = b_i, \forall i = 1, \dots, m$$

où

$$e_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0$$

Ans,

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = b \\ \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A'x' = b \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

où  $e = (e_1, \dots, e_m)^T$  sont appelées variables d'écart.

## 2.3 Solutions de base réalisables

**Définition 1.** On appelle solution réalisable tout vecteur  $x$  qui satisfait les contraintes du (PL) i.e. tel que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

**Définition 2** Soit  $B \subset \{1, \dots, n\}$  un ensemble d'indices avec  $\text{card}(B) = m$  tel que les colonnes  $A^j, j \in B$ , de  $A$  sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée  $A_B$  formée des colonnes  $A^j, j \in B$ , est inversible. On dit que l'ensemble  $B$  des indices est une base .

- Les variables  $\mathbf{x}_B = (x_j, j \in B)$  sont appelées variables de base .
- Les variables  $\mathbf{x}_R = (x_j, j \notin B)$  sont appelées variables hors-base.

**Définition 3 .** On dit  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix}$  est solution de base associée à la base  $B$  si  $x_R = 0$ .

## 2.4 Propriétés des solutions de base réalisables

Si  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix}$  est une solution de base réalisable alors

$$x_R = 0 \text{ et } x_B = A_B^{-1}b.$$

### Exemple

Reprenons l'exemple du problème de production. Sous forme standard (en introduisant des variables d'écart), le (PL) s'écrit

$$\max_{(x_1, x_2)} [f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a  $m = 3, n = 5, \text{rang}(A) = m = 3$ . Une base est donnée par  $B = \{3, 4, 5\}$  avec  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

La solution de base réalisable correspondante est

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^T = \left( \underbrace{0, 0}_{x_R}, \underbrace{81, 55, 20}_{x_B = A_B^{-1}b} \right)^T .$$

**Remarque :** Il y a au plus  $C_n^m$  solution de base (toutes ne sont pas réalisables).

## 2.5 Propriétés géométrique des solutions de base réalisables

On note

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

L'ensemble des solutions réalisables d'un (PL) sous forme standard.

Commençons par rappeler les notions de polyèdre et d'ensemble convexe :

- Un polyèdre  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  est défini par  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  où  $A$  est une matrice ( $m \times n$ ).
- Un ensemble  $E$  est dit convexe si  $\forall x, y \in E, \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$  pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Définition 4.** L'ensemble  $D_R$  des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

Un point  $x \in D_R$  est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas  $y, z \in D_R, y \neq z$  tels que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z \text{ avec } 0 < \lambda < 1.$$

**Définition 5.**  $x$  est une solution de base réalisable si et seulement si  $x$  est un sommet de  $D_R$ .

\* L'optimum de la fonction objectif  $F$  sur  $D_R$ , s'il existe, est atteint en au moins un sommet de  $D_R$ .

Pour résoudre un (PL) sous forme standard, il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables (les sommets de  $D_R$ ).

\*L'ensemble  $D_R$  n'est pas nécessairement borné. En fait pour un  $(PL)$ , 3 situations (et seulement 3) peuvent se produire :

1.  $D_R = \emptyset$  : le  $(PL)$  n'a pas de solution.
2.  $D_R \neq \emptyset$  mais la fonction objectif  $F$  n'est pas majorée sur  $D_R$  : le maximum de  $F$  vaut  $+\infty$ . Si  $D_R$  est borné, ce cas est exclu.
3.  $D_R \neq \emptyset$  et la fonction objectif  $F$  est majorée sur  $D_R$  : le  $(PL)$  admet une solution optimale (non nécessairement unique).

# Chapitre 3

## La méthode de simplexe

### 3.1 Description générale

La méthode de simplexe est une procédure itérative permettant d'effectuer une exploration dirigée de l'ensemble des programmes de base, c'est à dire de l'ensemble des points extrémaux du tronçon des programmes.

L'application de la méthode nécessite la connaissance d'un programme de base, au départ, elle consiste à calculer à chaque itération un programme (voisin) de celui qui vient d'être calculé et (au moins aussi bien) que celui-là. Il est d'autre part possible, ne peut jamais apparaître dans deux itérations distinctes, ce que suffit à assurer la convergence du procédé.

### 3.2 Position de problème

L'application de la méthode de simplexe exige que le problème soit posé sous sa forme standard :

$$\begin{array}{l} \text{Min}_x c^T x \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad tq \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}; \end{array}$$

$$\text{Soit } A = [B \ R] \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad R \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \quad c^T = [c_B^T \ c_R^T]$$

$B = [a_1 a_2 \dots a_m]$  avec  $a_i$  linéairement indépendants, base de  $A$ .

$R = [a_{m+1} \dots a_n]$  les colonnes hors base de  $A$ .

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \quad [BR] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_B + Rx_R = b.$$

$$x_B = B^{-1}b ; \text{ solution de base de } Ax = b \text{ si } x_R = 0$$

$$c_B^T x_B + c_R^T x_R = z$$

Après avoir transformé les contraintes d'inégalité en égalité, nous retrouvons le problème sous sa forme standard où certaines variables peuvent être des variables d'écart :

$$\min_X z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

### 3.2.1 Décrivons une itération typique pour résoudre le problème général avec le simplexe, forme avec tableaux

Le système :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_1 + & & +\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} & +.. & +\bar{a}_{1s}x_s & +.. & +\bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\ & x_2 + & +\bar{a}_{2m+1}x_{m+1} & +.. & +\bar{a}_{2s}x_s & +.. & +\bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & x_r + & +\bar{a}_{rm+1}x_{m+1} & +.. & +\bar{a}_{rs}x_s & +.. & +\bar{a}_{rn}x_n & = \bar{b}_r \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & x_m + & +\bar{a}_{mm+1}x_{m+1} & +.. & +\bar{a}_{ms}x_s & +.. & +\bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\ & & & & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} & +.. & +\bar{c}_s x_s & +.. & +\bar{a}_{1n}x_n & = z - \bar{z} \end{array} \right.$$

### 3.2.2 Tableau de simplexe

La forme obtenue après le calcul de la solution de base peut être représenté dans le tableau suivant :

	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\dots$			$\dots$				$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\dots$					$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$
$z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	$\bar{z}$

Le problème de programmation linéaire sous la forme standard

$\min_x z$

$$\begin{cases} Ax = b \\ c^T x - z = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad .c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m \quad A \text{ matrice } m \times n$$

-Supposons que  $m \leq n$  et que la matrice  $A$  est de plein rang ( $\text{rang}(A) = m$ , ou que les lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes)

-Une sous matrice  $B$  de  $A$  est une base de  $A$  si elle est  $(m \times m)$  et non singulière (c'est à dire  $B^{-1}$  existe).

-Pour faciliter la présentation, supposons que la base  $B$  que nous considérons est composée des  $m$  premières colonnes de  $A$  et ainsi

$$A = \begin{bmatrix} B & R \end{bmatrix}$$

Dénotons également

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_R \end{bmatrix}$$

Le problème original peut s'écrire

$$\begin{cases} Bx_B + Rx_R = b \\ c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \end{cases} \quad x_B, x_R \geq 0 \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} B \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\ \begin{bmatrix} c_B^T \\ c_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \end{cases} \quad x \geq 0$$

(1)-Exprimons  $x_B$  en fonction de  $x_R$  en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

Ainsi :

$$Ix_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b$$

(2)-En remplaçant  $x_B$  par sa valeur en fonction de  $x_R$  dans l'équation de la fonction économique

$$\min_x z$$

$$\begin{cases} Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\ c_B^T(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^T x_R - z = 0 \\ 0x_B, x_R \geq 0 \end{cases}$$

(3)-Notons que le premier problème est équivalent au dernier car le deuxième est obtenu du premier à l'aide d'opérations élémentaires utilisant une matrice non singulière  $B^{-1}$

En regroupant les coefficients de  $x_R$

$$\min_x z$$

$$\begin{cases} Ix_B + B^{-1}Rx_R & = & B^{-1}b \\ 0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z & = & -c_B^T B^{-1}b \\ x_B, x_R \geq 0 \end{cases}$$

Le problème se traduit dans le tableau suivant

<u>var de base</u>	<u>var hors base</u>		<u>sec membre</u>
$x_1, x_2 \dots x_n$	$x_{m+1} \dots x_{n-1} \dots x_n$	Z	
0 0 ... 0	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	-1	$-c_B^T B^{-1}b$
1		0	
1            0		0	
$\ddots$	$B^{-1}R$	$\vdots$	$B^{-1}b$
0            1		0	

-Les variables de  $x_B$  qui sont associées aux colonnes de la base  $B$ , sont dénotées variables de base.

-Les variables de  $x_R$  sont dénotées variables hors base

Pour obtenir la solution de base associée à la base  $B$ , posons  $x_R = 0$  et alors  $x_B = B^{-1}b$ .

La solution de base est réalisable si  $x_B \geq 0$ .

Donc ce tableau est identique à celui utilisé pour illustrer une itération du simplexe. Puisque tout tableau du simplexe est associé à une base de  $A$  constituée des colonnes associées aux variables de base, il s'ensuit que dans l'algorithme du simplexe, nous passons d'une solution de base réalisable à une nouvelle solution de base réalisable ayant une valeur plus petite ou égale.

### 3.3 Algorithme de simplexe

1-détermine un programme initial de base  $x_B$

2-calculer la matrice  $B^{-1}R$  et les quantités  $\bar{c}_i$  et  $\bar{a}_{is}$

3-tester les  $\bar{c}_i$  si  $\bar{c}_i \leq 0$  le programme considéré est minimale sinon on passe à 4

4-tester les  $\bar{a}_{is}$  , Si  $\bar{a}_{is} \leq 0$  pour au moins un  $s$  il n y a pas un programme minimale fini.

Si on détermine  $s$  par la relation  $\bar{c}_s = \max \bar{c}_i$  critère d'entrée et détermine  $r$  par la relation :

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} \quad \text{critère de sortie}$$

5-calculer la nouvelle base  $B'$  déduite de  $B$  par substitution de  $a_s$  à  $a_r$ . Calculer le nouveau programme de base  $x'_B$  associée à  $B'$  ainsi que les nouvelles valeurs des  $\bar{c}_i$  et  $\bar{a}_{is}$

Répéter l'application de l'algorithme à partir de l'étape 3.

### 3.4 Algorithme primal du simplexe

**Introduction des variables artificielles :**

**Méthode des deux phases**

Cette méthode est réalisé les systèmes redondants c'est à dire qu'une ou plusieurs des contraintes peuvent être une conséquence des autre, dans ce cas les base à considérer dans l'application de l'algorithme du simplexe sont d'ordre inférieur à  $m$ .

Cette méthode consiste à crée artificiellement un programme de base initial, en :

1- multipliant, si nécessaire, par  $(-1)$  certains équations du système de façon que toutes les consistes de second membre deviennent positives  $(b \geq 0)$ .

2-rajoutant à  $A$  le nombre nécessaire et suffisant de vecteurs colonnes unités pour la changer en un matrice augmentée  $A^a$  contenant une sous matrice unité d'ordre  $m : 1^{(m)}$

On rajoute  $p$  vecteurs unités associés à  $p$  variables artificielles :

$$x_1^a, x_2^a, \dots, x_p^a$$

Le système de contraintes s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^a + \sum_{j=m-p+1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ i = 1, \dots, p \end{array} \right. \quad \text{Autrement} \quad \left\{ \begin{array}{l} y + Ax = b \\ y = (x_1^a \ x_2^a \ \dots \ x_p^a) \end{array} \right. .$$

Le problème initial est donc finalement remplacé par le suivant :

$$\min_x z = c^T x$$

$$A^a \begin{bmatrix} x^a \\ x \end{bmatrix} = b \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^a = (I^{(m)}, A') \\ A' = (a_{m-p+1}, a_{m-p+2}, \dots, a_n) \\ x^a = (x_1^a, x_2^a, \dots, x_p^a) \\ b \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x, x^a \geq 0$$

La résolution se fait en deux phases :

**\*phase (1) :**

l'objectif initial  $\min_x z = c^T x$  est remplacé par le suivant :

Minimiser  $\zeta = \sum_{i=1}^p x_i^a$  Cet objectif avec les contraintes définit un problème auxiliaire. L'algorithme de simplexe est appliqué au problème auxiliaire jusqu'à l'occurrence de l'un des 3 états suivant :

**Etat a :**  $\zeta$  est nul et aucun vecteur artificiel ne fait partie de la base actuelle. Le programme trouvé est un programme de base du problème initial. On passe à la phase 2 état a.

**Etat b :**  $\zeta$  est nul mais la base contient au moins une variable artificielle nulle. On passe à la phase 2 état b.

**Etat c :**  $\zeta$  est minimal ( $\bar{c}_i \geq 0$ ) et strictement positif . Le problème initial n'a pas un programme fini.

**\*phase (2) :**

On reprend l'objective initial :

$$\min_{(x_1, \dots, x_n)} z = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Cette phase est conduite de la façon suivant :

**Etat a :** l'algorithme du simplexe est appliqué à un ensemble de vecteurs colonnes de la matrice initiale  $A$  jusqu'à l'obtention de l'optimum.

**Etat b :** l'algorithme du simplexe est appliqué à un problème restreint défini par :

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x^a \\ x \end{bmatrix} &= b \\ x, x^a &\geq 0 \quad \text{et } x_i = 0 \text{ pour tous les } \bar{c}_i < 0. \\ \min_x z &= c^T x \end{aligned}$$

## 3.5 Dualité

### 3.5.1 Introduction et définition

Revenons encore une fois au problème de production de l'introduction. Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , de l'entreprise. Il propose à l'entreprise un prix unitaire  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , pour chacune des ressources. L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit  $P_j$  un prix de vente au moins égal au profit  $c_j$  qu'elle ferait en vendant ses produits. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq c_1 = 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + 1y_3 &\geq c_2 = 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

De son côté, l'acheteur cherche à minimiser le prix total d'achat. On se demande alors quels sont les prix unitaires  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , que l'acheteur doit proposer à l'entreprise en question pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources ? Le problème peut donc s'écrire.

$$\min_{y=(y_1, y_2, y_3)} G(y) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3$$

**Définition(1).** Au programme linéaire primal

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} [f(x) = c^T x]$$

$$(PL) \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} .$$

on associe le programme linéaire dual

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} [G(y) = b^T y]$$

$$(PLD) \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

### 3.5.2 Comparaison primal/dual .

Primal	Dual
$max(f)$	$min(G)$
coefficient $c$ de $f$	second membre $c$
second membre $b$	coefficient $b$ de $G$
$m$ contraintes inégalités ( $\leq$ )	$m$ contraintes de positivité
$n$ contraintes de positivité	$n$ contraintes inégalités ( $\geq$ )

Si le problème primal est sous forme standard avec les contraintes  $Ax = b$  alors on passe à la forme canonique pure en écrivant les contraintes

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

De façon générale, on a la définition suivante lorsque le problème primal est sous forme canonique mixte :

<i>PRIMAL</i>	<i>DUAL</i>
$\max_{x \in \mathbb{R}^n} [f(x) = c^T x]$	$\min_{y \in \mathbb{R}^m} [G(y) = b^T y]$
$\forall i \in I_1, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$	$\forall i \in I_1, y_i \geq 0$
$\forall i \in I_2, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	$\forall i \in I_2, y_i \text{ de signe quelconque}$
$\forall j \in J_1, x_j \geq 0$	$\forall j \in J_1, \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$
$\forall j \in J_2, x_j \text{ de signe quelconque}$	$\forall j \in J_2, \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

### 3.5.3 Propriétés - Théorèmes de dualité

**Proposition.** Le dual du dual est le primal

Démonstration.

A partir de la définition du dual d'un (PL) sous forme canonique pure :

$$\min_y [G(y) = b^T y] \quad \begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \max_y [-G(y) = (-b)^T y] \quad \begin{cases} -A^T y \leq -c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si on prend le dual du dual, on a donc

$$\min_x [(-c)^T x] \quad \begin{cases} (-A^T)^T x \geq (-b)^T \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \max_x [c^T x] \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Théorème(1).**

**Théorème faible de dualité**

Soit  $x$  une solution réalisable d'un(PL) sous forme canonique mixte et  $y$  une solution réalisable du problème dual (PLD). Alors :

1.  $f(x) \leq G(y)$
2. Si  $f(x) = G(y)$  alors  $x$  et  $y$  sont des solutions optimales de(PL) et(PLD) respectivement .

**Démonstration.**

Dans le cas où (PL) est sous forme canonique pure :

1. On a d'une part  $Ax \leq b, x \geq 0$  et d'autre part  $A^T y \geq c, y \geq 0$ . Par conséquent,

$$f(x) = c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T Ax \leq y^T b = G(y) \text{ car } y \geq 0 \text{ et } Ax \leq b$$

2. Soient  $x^*$  et  $y^*$  des solutions réalisables de (PL) et (PLD) respectivement telles que  $f(x^*) = G(y^*)$ .

D'après 1, pour toute solution réalisable  $x$  de (PL), on a  $f(x) \leq G(y^*) = f(x^*)$  donc  $x^*$  est une solution réalisable optimale idem pour  $y^*$ .

**Théorème(2).** Théorème fort de dualité

Si le problème primal ( $PL$ ) admet une solution réalisable optimale  $x^*$  alors le problème dual ( $PLD$ ) admet lui aussi une solution réalisable optimale  $y^*$  et on a

$$f(x^*) = G(y^*).$$

**Démonstration.**

On note  $B^*$  la base optimale et on désigne par  $x^*$  la solution de base réalisable optimale :  $x^* = A_{B^*}^{-1}b$ . On choisit alors

$$y^* = (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}$$

$y^*$  est une solution réalisable du dual ( $PLD$ ). On remarque que le problème primal ( $PL$ ) étant mis sous forme standard, il n'y a pas de contrainte de positivité sur les variables  $y$  du dual.

Par ailleurs,

$$f(x^*) = c^T x^* = c_{B^*}^T A_{B^*}^{-1} b$$

$$\begin{aligned} &= \left( \underbrace{(A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}}_{y^*} \right)^T b \\ &= G(y^*) \end{aligned}$$

•Donc par le Théorème faible de dualité,  $y^*$  est optimale pour ( $PLD$ ).

On a vu qu'il y avait 3 cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal ( $PL$ ) :

- (1) il existe (au moins ) une solution optimale.
- (2) l'ensemble  $D_r$  des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
- (3) pas de solution réalisable ( $D_r = \emptyset$ ).

Les mêmes situations se retrouvent pour le problème dual. Plus précisément, le lien entre les deux problèmes en dualité est donné par le résultat suivant

**Théorème(3).** Etant donné un problème primal ( $PL$ ) et son dual ( $PLD$ ), une et une seule des trois situations suivantes peut se produire.

(a) Les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).

(b) Un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.

(c) Aucun des deux problèmes n'en possède de solution réalisable.

## 3.6 Convergence de la méthode de simplexe

### Dégénérescence :

Si un programme linéaire possède une solution de base réalisable dont une variable ou plus ont des valeurs nulles alors, cette solution est dite solution de base réalisable dégénérée.

### Cyclage :

Si le phénomène de la dégénérescence se répète pendant plusieurs itérations il est possible de retrouver une base déjà obtenue précédemment et à partir de là, de cycliser indéfiniment sur la même séquence de base et n'avoir jamais le programme optimal.

### Règle appliquée pour éviter le cyclage :

Plusieurs remèdes au cyclage dans le cas dégénéré ont été proposés, mais la règle de Bland donne la méthode la plus simple de détermination des pivots en assurant à chaque itération la convergence de l'algorithme après un nombre fini d'étapes.

### Règle de Bland :

Lorsque plusieurs candidats sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours la variable ayant le plus petit indice.

### Avantage et inconvénients :

Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme du simplexe se termine en un nombre fini d'itérations et il permet dans le cas le plus fréquent de savoir si le problème admet une solution optimale, et de trouver une solution de base initial en un nombre fini d'itérations inférieur à :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

### Inconvénients :

Repose sur la méthode de pivot total qui est délicate lorsqu'il s'agit des systèmes de grandes dimensions.

### 3.7 Méthode du simplexe appliquée à un exemple

Exemple (1) :

On étudie le programme linéaire suivant écrit sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, x_2)} z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} \quad &\begin{cases} x_1 & \leq 4 \\ 30x_1 + x_2 & \leq 150 \\ x_2 & \leq 60 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition(1)**

- On appelle variable d'écart la quantité positive qui permet de transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité.

Ici, on a trois contraintes donc on ajoute trois variables d'écart  $x_3, x_4, x_5$ .

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, x_2)} z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} \quad &\begin{cases} x_1 + x_3 & = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 & = 150 \\ x_2 + x_5 & = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'écriture matricielle est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

## Base, solution de base, solution de base réalisable

### Définition (2)

-On dit que  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$  est une base si la sous-matrice construite sur les colonnes  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  est inversible.

On dit alors que les  $m$  variables  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$  sont les variables de base et que les  $n$  variables restantes sont les variables hors base.

Ici,  $m = 3$  et il y a 5 variables au total. Une base aura donc 3 variables et il y aura systématiquement 2 variables hors base. Donnons quelques exemples :

1- La famille  $\{x_2, x_4, x_5\}$  ne forme pas une base car la sous matrice associée  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible.

2- La famille  $\{x_2, x_3, x_5\}$  forme une base car la sous matrice associée  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible. Ici,  $\{x_1, x_4\}$  sont hors base.

3- La famille  $\{x_1, x_2, x_3\}$  forme une base car la sous matrice associée  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible. Ici,  $\{x_4, x_5\}$  sont hors base.

Voyons ce que cela donne sur les exemples précédents.

1- Considérons la base  $\{x_2, x_3, x_5\}$ .

La solution de base correspondante est  $(0, 150, 4, 0, -90)$ . Ce n'est donc pas une solution de base réalisable

$(x_5 = -90 < 0)$ .

2- Considérons la base  $\{x_1, x_3, x_5\}$ .

La solution de base correspondante est  $(3, 60, 1, 0, 0)$  et c'est une solution de base réalisable.

**Remarque :** (Importante)

Lorsque les coefficients  $b_i$  sont positifs ou nuls, on obtient systématiquement une solution de base réalisable en mettant les variables du problème initial hors base (donc nulles) et les variables d'écart dans la base et égales aux  $b_i$ .

D'après la remarque, la base  $\{x_3, x_4, x_5\}$  donne la solution de base réalisable suivante :

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{0, 0, 4, 150, 60\}$$

**Définition (3)**

Lorsqu'un problème écrit sous forme standard vérifie en plus les deux propriétés suivantes :

1. Les coefficients de la fonction objectif associés aux variables de base sont nuls,

2. La matrice associée aux variables de base est la matrice identité (à une permutation près),

on dit qu'il est écrit sous forme canonique par rapport à la base  $B$  correspondante.

Ici par exemple, le programme suivant est écrit sous forme canonique par rapport à la

base  $\{x_3, x_4, x_5\}$ .

$$\max_{(x_1, x_2)} z = 5x_1 + x_2$$

$$\text{sous contraintes } \begin{cases} x_1 + x_3 & = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 & = 150 \\ x_2 + x_5 & = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Cette écriture est le point de départ de l'algorithme du simplexe.

## Les étapes du simplexe.

### Point de départ

Dans le cas des  $b_i \geq 0$ , il s'agit d'écrire le programme linéaire sous forme canonique par rapport à la base réalisable donnée par la remarque.

Ici, il s'agit du programme donné ci-dessus, écrit sous forme canonique par rapport à la base  $\{x_3, x_4, x_5\}$ .

Partant de là, on va réaliser une suite de changement de base en suivant le schéma :

1. Choix de la variable entrante.
2. Choix de la variable sortante.
3. Changement de base.

Ici,  $5 > 1$  donc la variable entrante est  $x_1$ .

**Proposition.** La variable qui sort de la base est la première à s'annuler quand la variable entrante augmente.

Ici, c'est la variable  $x_3$  qui sort car les relations

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{cases}$$

montrent que  $x_3$  s'annule en premier pour  $x_1 = 4$ .

### Changement de base

On va écrire le problème sous forme canonique par rapport à la nouvelle base choisie en utilisant le pivot de Gauss.

Ici, la nouvelle base est  $\{x_1, x_4, x_5\}$

Il est plus commode de travailler sur le système suivant :

$$\begin{cases} z - 5x_1 - x_2 & & & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & & = 4 \\ 30x_1 - x_2 & & +x_4 & & = 150 \\ & x_2 & & +x_5 & = 60 \end{cases}$$

On identifie la ligne qui permet d'échanger les rôles de la variable entrante  $x_1$  et de la variable sortante  $x_3$ . A l'aide du pivot de Gauss, on met un 1 devant  $x_1$  sur cette ligne et des 0 devant  $x_1$  sur les autres lignes. Ce qui donne :

$$\begin{cases} z & -x_2 & +5x_3 & & = & 20 \\ & x_1 & & +x_3 & & = & 4 \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 \end{cases}$$

### Test d'arrêt

Proposition. Si dans l'expression de la fonction objectif  $z = d_{i_1}x_{i_1} + d_{i_2}x_{i_2} + \dots + d_{i_n}x_{i_n}$  exprimée en fonction des variables hors base, tous les coefficients des variables hors base sont négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est la solution optimale.

L'algorithme du simplexe est alors terminé.

Sinon, on recommence les opérations de changement de base.

Du dernier système obtenu, on déduit l'expression de la fonction objectif.

$$z = 20 + x_2 - 5x_3$$

Le critère d'arrêt n'est pas respecté donc il faut faire une autre itération du simplexe. On cherche la variable entrante en regardant le plus fort coefficient. Il s'agit de  $x_2$ , qui est d'ailleurs le seul à pouvoir faire augmenter l'objectif. Donc  $x_2$  entre dans la base.

On examine à présent les contraintes faisant intervenir  $x_2$  (on rappelle que  $x_3 = 0$  car hors base).

$$\begin{cases} x_4 = 30 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 60 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La première variable à s'annuler est  $x_4$  pour  $x_2 = 30$ . Donc  $x_4$  qui va sortir de la base.

Effectuons alors les opérations nécessaires pour obtenir le nouveau système.

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} z & & -25x_3 & +x_4 & = 50 \\ & x_1 & +x_3 & & = 4 \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & = 30 \\ & & & +30x_3 & -x_4 & +x_5 & = 30 \end{array} \right.$$

Ici encore, le critère d'arrêt ne s'applique pas et  $x_3$  entre dans la base. Puis les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

montrent que  $x_5$  va sortir de la base. Ici, c'est l'équation (3) qui va nous servir à éliminer  $x_3$  de notre système. On va d'abord la normaliser pour faire apparaître un 1 devant la variable de base  $x_3$ .

donnent

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} z & & +\frac{5}{30}x_4 & +\frac{25}{30}x_5 & = 75 \\ & x_1 & -\frac{1}{30}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 & = 3 \\ & & x_2 & +x_5 & = 60 \\ & & & x_3 & -\frac{1}{30}x_4 & +\frac{1}{30}x_5 & = 1 \end{array} \right.$$

Maintenant, on voit que dans l'expression de l'objectif  $z = -\frac{5}{30}x_4 - \frac{25}{30}x_5 + 75$ , tous les coefficients devant les variables sont négatifs. Le critère d'arrêt s'applique et on peut lire la solution optimale. Les variables hors base sont  $x_4$  et  $x_5$ . Leur valeur est donc nulle et on en déduit la valeur des variables hors base grâce aux contraintes. On obtient  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 60$  et  $x_3 = 1$ . La solution optimale est donc  $(3, 60, 1, 0, 0)$  et la valeur de l'objectif correspondante est  $z_{opt} = 75$ .

### 3.8 Méthode de simplexe par les tableaux successifs

On applique cette méthode sur l'exemple (1) :

$$\max_{(x_1, x_2)} (z = 5x_1 + 1x_2)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0x_2 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ 0x_1 + x_2 + x_5 = 60 \\ \text{ou } x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{array} \right\} \quad (p.1)$$

$x_3, x_4, x_5$  : Variable d'écart.

1<sup>ère</sup> tableau du simplexe

v. hors base    var de base

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$z$	second Membre	
-5	-1	0	0	0	1	0	(L <sub>1</sub> )
1	0	1	0	0	0	4	(L <sub>2</sub> )
30	1	0	1	0	0	150	(L <sub>3</sub> )
0	1	0	0	1	0	60	(L <sub>4</sub> )

Base  $B_0$

Base initiale réalisable :  $B_0 = \{x_3; x_4; x_5\}$

Solution de base  $B_0$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_3 = 4 \\ \bar{x}_4 = 150 \\ \bar{x}_5 = 60 \\ \bar{x}_1 = 0 \text{ car hors base} \\ \bar{x}_2 = 0 \text{ car hors base} \end{array} \right\}$$

Mais cette solution n'est pas optimale car

$$c_1 < 0 \text{ et } c_2 < 0$$
$$\begin{array}{cc} -5 & -1 \end{array}$$

Il faut changer la base :

a) variable "entrante"  $x_1$

b) variable "sortante" ?

$x_2 = 0$  toujours car il est hors base

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \quad 0 \times x_2 \quad + x_3 = 4 \\ 30\theta + 0 \times x_2 + x_4 = 150 \\ \quad 0 \times x_2 \quad x_5 = 60 \end{array} \right. \Leftrightarrow \theta = \min_{r \geq 0} \left\{ \frac{4}{1}, \frac{150}{30} \right\}$$
$$\Rightarrow \theta = 4$$

$$1 \times 4 + x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 0$$

$\Rightarrow x_3$  variable "sortante"

Nouvelle base :  $B_1 = \{x_1; x_4; x_5\}$

Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à  $B_1$ .

Opérations sur les lignes du 1<sup>er</sup> tableau ;

(il faut retrouver la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui correspond à  $B_1$ )

Echeonnage

Pivot : l'élément de la colonne ( $x_1$ ) qui correspond à la ligne ( $L_2$ ) ( car  $x_3 \Leftrightarrow$  sort)

donc :

$$\begin{aligned}
 L'_2 &= L_2 && (\text{pour avoir } 1 \text{ à } (x_1)) \\
 L'_1 &= 5L_2 + L_1 && (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_1)) \\
 L'_3 &= -30L_2 + L_3 && (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_1)) \\
 L'_4 &= L_4 && (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_1))
 \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> tableau du simplexe

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$z$	Second Membre	
0	-1	5	0	0	1	20	$(L'_1)$
1	0	1	0	0	0	4	$(L'_2)$
0	1	-30	1	0	0	30	$(L'_3)$
0	1	0	0	1	0	60	$(L'_4)$

Base :  $B_1 = \{x_1; x_4; x_5\}$

Solution de base  $B_1$  :

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{x}_4 &= 30 \\
 \bar{x}_1 &= 4 \\
 \bar{x}_5 &= 60 \\
 \bar{x}_3 &= 0 \quad \text{car hors base} \\
 \bar{x}_2 &= 0 \quad \text{car hors base}
 \end{aligned} \right\} \text{et } z = 20$$

Mais cette solution n'est pas optimale car le coût réduit :  $\bar{c}_2 = -1 < 0$  et  $\bar{c}_3 = +5$

Il faut changer la base :

- a) variable "entrante"  $x_2$
- b) variable "sortante" ?

(trouver  $\hat{v}$  qui minimise les contraintes de  $x_2$ )

$$\begin{cases} x_1 & 0 \times \theta + & 0 \times x_3 + & 0 \times x_4 & = & 4 \\ 0 \times x_1 + & \theta + & 0 \times x_3 + & x_4 & = & 30 \\ 0 \times x_1 + & \theta + & 0 \times x_4 + & x_5 & = & 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \min_{r \geq 0} \left\{ \frac{30}{1}; \frac{60}{1} \right\} = \frac{30}{1} = 30$$

$$30 \times 1 + x_4 = 30 \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$\Rightarrow x_4$  variable "sortante"

Nouvelle base :  $B_2 = \{x_1; x_2; x_5\}$

Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à  $B_2$ .

Echelonnage

Pivot : L'élément de la colonne ( $x_2$ ) qui correspond à la ligne ( $L_3$ ) (car  $x_3 \Leftrightarrow$  sort)

donc :

$$L'_3 = L_3 \quad (\text{pour avoir } 1 \text{ à } (x_2))$$

$$L'_1 = L_3 + L_1 \quad (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_2))$$

$$L'_2 = L_2 \quad (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_2))$$

$$L'_4 = -L_3 + L_4 \quad (\text{pour avoir } 0 \text{ à } (x_2))$$

3ème tableau du simplexe

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$z$	Second Membre
0	0	-25	1	0	1	50
1	0	1	0	0	0	4
0	1	-30	1	0	0	30
0	0	30	-1	1	0	30

Ici encore, le critère d'arrêt ne s'applique pas et  $x_3$  entre dans la base. Puis les relations

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 \end{cases}$$

montrent que  $x_5$  va sortir de la base. Ici, c'est l'équation de la ligne ( $L_4$ ) qui va nous servir à éliminer  $x_3$  de notre système. On va d'abord la normaliser pour faire apparaître un 1 devant la variable de base  $x_3$ .

Donc

$$\begin{aligned} L'_4 &= \frac{1}{30}L_4 && (\text{pour avoir 1 à } (x_3)) \\ L'_1 &= L_1 + 25L'_4 && (\text{pour avoir 0 à } (x_3)) \\ L'_2 &= L_2 - L'_4 && (\text{pour avoir 0 à } (x_3)) \\ L'_3 &= L_3 + 30L'_4 && (\text{pour avoir 0 à } (x)) \end{aligned}$$

4ème tableau du simplexe

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$z$	Second Membre
0	0	0	$\frac{5}{30}$	$\frac{25}{30}$	1	75
1	0	1	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	3
0	1	0	0	1	0	60
0	0	1	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	1

Solution de base

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= 3 \\ x_2^* &= 60 \\ x_3^* &= 1 \\ x_4^* &= 0 \text{ car hors base} \\ x_5^* &= 0 \text{ car hors base} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z^* = 75$$

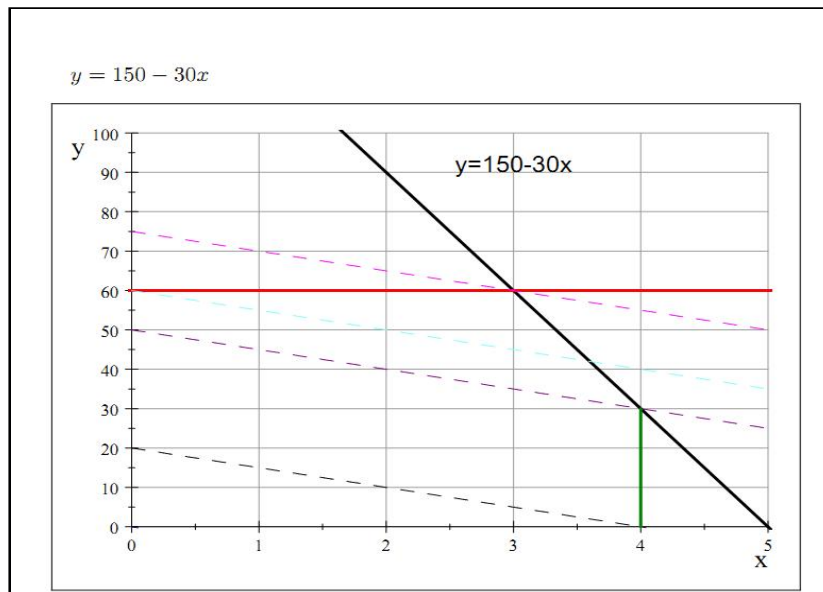
Solution optimale car :  $\bar{c}_i \geq 0 \forall i$

Fin de l'algorithme.

### 3.9 Résolution graphique

La résolution graphique de l'exemple(1)

$$\begin{aligned} & \max_{(x_1, x_2)} z = 5x_1 + x_2 \\ & \text{sous contraintes} \quad \begin{cases} x_1 & \leq 4 \\ 30x_1 + x_2 & \leq 150 \\ x_2 & \leq 60 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$f(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2$  sur le polygone de sommets  $(0, 0)$ ,  $(4, 30)$ ,  $(3, 60)$ ,  $(0, 60)$  délimité par les droites  $(x_2 = 150 - 30x_2)$ ,  $(x_1 = 4)$ ,  $(x_2 = 60)$ .

On voit bien que la fonction est maximale au point  $(3, 60)$  et sa valeur vaut 75.

-

-

### 3.10 Modélisation des Problèmes de production en économie

#### Problème 1

Une entreprise fabrique quatre produits. La fabrication de chaque produit nécessite une certaine quantité de ressources. Les ressources consommées, les stocks des ressources et les bénéfices des produits sont récapitulés dans le tableau suivant :

	produit 1	produit 2	produit 3	produit 4	stock
ressource A	2	4	5	7	42
ressource B	1	1	2	2	17
ressource C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

On souhaite établir un plan de production de façon à maximiser le chiffre d'affaires.

Appelant  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les quantités respectives de produits 1, 2, 3, 4, le problème admet la modélisation suivante :

$$\max_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} [z = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4]$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

La solution optimale est :

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 7$$

$$x_4 = 0$$

$$\text{et } z = 147$$

## Problème2

Une usine produit deux modèles de machines, l'une que l'on appellera modèle A exige 2 kg de matière première et de 30 heures de fabrication et donne un bénéfice de 7 DA. L'autre que l'on appellera B exige 4 kg de matière première et de 15 heures de fabrication et donne un bénéfice de 6 DA. On dispose de 200 kg de matière première et de 1200 h de travail.

On indique le problème sur le tableau suivant :

	produit A	produit B	
matière première	2 kg	4 kg	200 kg
heures de fabrication	30 h	15 h	1200 h
	7 DA	6 DA	

Appelant  $x_1, x_2$  les quantités de produits A et B, le problème admet la modélisation suivante :

$$\max_{(x_1, x_2)} [z = f(x_1, x_2) = 7x_1 + 6x_2]$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 30x_1 + 15x_2 \leq 1200 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

La solution optimale est :

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = 40$$

$$\text{et } z = 380$$

## Conclusion

La programmation linéaire fait partie de la programmation mathématique qui étudie les méthodes de recherche de l'extrémum lié des fonctions de plusieurs variables. Dans la littérature mathématique on trouve plusieurs méthodes pour la résolution d'un programme linéaire : Le lagrangien, Kuhn et Tucker, Karmarkar, .....

Dans notre travail on s'est intéressé à la méthode du simplexe qui est utilisable pour résoudre des problèmes de programmation en plusieurs domaines surtout en économie.

Nous avons remarqué que c'est une méthode simple à programmer amène au solution "rapidement".

Le sujet est loin d'être traité définitivement car en perspective on pourra faire beaucoup de chose, comme par exemple : l'étude comparative avec les autres méthodes, la rapidité de l'algorithme, ... .

# Bibliographie

- [1] Mokhtar S.Bazaraa, John J.Jarvis, Linear Programming and network Flows.
- [2] A.Gourdin, M.Boumahrat, Méthodes Numériques Appliquées.
- [3] S.ACHMANOV, Programmation linéaire.
- [4] Dantzig G.B, Linear programming and extensions.  
press,princeton,New Jersey, 1963.
- [5] Gass S.I, Linear programming, MacGraw-Hill, New York, 1958.