UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre discrète

Par

Hammiche Leila et Bakour Rachda

Sujet

Groupe quotient induit par Un sous groupe flou

Devant le jury :

Mr. M.Ben Oum Hani	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. L.Ladjelat	MAA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. N.Dechoucha	MAA. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volanté pour finie ce travail.

*Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre Directeur de memoire Monsieur **Ladjelat Lahcene**, nous le remercie de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Nous le remercie pour ses encouragements continuels qui ne cessaient de nous remonter le moral pendant les moments difficiles et pour l'énorme soutien scientifique et moral qu'il a su nous accorder pendant cette période.*

*Nous remercions Docteur **Ben Oum hani Moussa** pour avoir accepté de présider mon jury. Nous remercions egalement Monsieur **Dachoucha Noureddine**, membre du jury d'avoir accepté l'examination et l' évaluation de ce travail. J'adresse aussi mes vifs remerciements à nos chers parents pour leur encouragement et le soutien affectif et matériel qu'ils nous ont apporté tout au long de notre existence.*

Nous remercions aussi nos frères, nos soeurs, nos chers, nos collègues, surtout nos amis Hamiche Khawla et Chami Ahlem, nos enseignants et tout le personnel de la faculté MI, ainsi que toutes les personnes qui nous ont apporté un soutien moral de loin ou de prés.

Table de matiére

Introduction

La logique flou est une extention de la logique booléenne crée par **L.Zadah** [1] en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une géniralisation de la théorie des ensembles classiques.

La théorie des ensembles flous a été appliquée à nombreux domaines mathématiques. Ce travail a ouvert une nouvelle direction, nouvelle exploration, nouvelle méthode de la pensée aux mathématéciens, ingénieurs, informaticiens et beaucoup d'autre chercheurs.

En 1971, **Rosenfeld** a appliqué le concept de la théorie des ensembles flous sur la théorie des groupes. Ce travail [2] a été la première fuzzification de structures algébriques. Depuis, les différentes structures algébriques floues ont été publiées dans les articles [8] et [9]. **Fang** [8] a introduit l'homomorphisme et l'isomorphisme flous entre deux groupes flous, et étudié certain de leurs propriétés. **Y.Lin Lui** [9],[10] étudié les différentes constructions de groupes quotients flous et isomorphismes flous.

Dans ce mémoire, On s'intéresse à l'étude de groupe quotient induit par un sous groupe flou. Ce travail est composé des trois chapitres:

- Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions fondamentales sur les groupes et quelques propriétés qu'on va utiliser dans la suite.

- Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques notions et généralités sur les ensembles flous et quelques propriétés sur les opérations flous.

- Dans le troisième chapitre, on va étudier quelques propriétés sur les sous groupes flous et les groupes quotients

Chapiter 01
Notions fondamentales sur les groupes

La notion de groupe joue un rôle fondamental en mathématique. C'est l'une des principales structures algébriques, avec celles d'anneau, de corps, modules et espace véctoriels. Dans ce chapitre on va étudier les notions fondamentals sur les groupes comme sous groupe, homomorphisme des groupes et groupe quotient.

1/ groupes

Définition 1.1.1 :

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée $\star$.
G est un groupe pour la loi $\star$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites:
1) La loi $\star$ est associative :

$$\text{i.e } \forall x, y, z \in G : x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

2) La loi $\star$ posséde un élément neutre e :

$$\text{i.e } \forall x \in G, \exists\ e \in G\ :\ x \star e = e \star x = x$$

3) Tout élément $x \in G$ posséde un symétrique $x\prime \in G$:

$$\text{i.e } \forall x \in G, \exists\ x' \in G\ :\ x \star x' = x' \star x = e$$

Remarque 1.1.1 :

- Si de plus la loi $\star$ est commutative i.e $\forall x, y \in G$ on a:

$x \star y = y \star x$, le groupe G est dit commutatif ou bien abélien.

• Un groupe peut être noté **multiplicativement** ($x \star y$ noté xy et le symétrique de x est l'inverset et noté x^{-1}). Ou noté **additivement** ($x \star y$ est noté $x + y$ et le symétrique de x est l'opposé de x et noté $-x$) .

Exemple 1.1.1 :

1- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sont des groupes Abéliens.
2- $(\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens.
3- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, -)$ne sont des groupes.
4- Ensemble réduit á un seul élément e tel que $e \star e = e$ est appelé groupe **trivial.**

2/ Sous groupe d'un groupe

Définition 1.2.1 :

Soit G un groupe d'élément neutre e, et H un sous ensemble non vide de G.
On dit que H est un sous groupe de G l'orsque H est lui -même un groupe par la restriction à H de l'operation de G.

Proposition 1.2.1 :

Une partie non vide H de G est un sous groupe de G si et seulment si :
a) $e \in H$.
b) H est un partie stable de G :

$$i.e\ \forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$$

c) pour tout $x \in H$ Le symétrique x^{-1} de x est dans H :

$$i.e\ \forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$$

Proposition 1.2.2 :

Une partie non vide H de G est un sous groupe de G si et seulement si :

$$\forall x, y \in H \Rightarrow x^{-1}y \in H$$

Exemple 1.2.1 :

1) Les parties G et $\{e\}$ sont des sous groupes de G.
2) $(\mathbb{R}_{+}^{*}, \times)$ et $\{-1, 1\}$ sont des sous groupes de $(\mathbb{R}^{*}, \times)$.
3) Tout les sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z} = \{nk/k \in \mathbb{Z}\}$ evec $n \in \mathbb{N}$.

proposition 1.2.3 :

Soit G *un groupe d'élément neutre e , $(H_i)_{i\in I}$ une famille des sous groupes. Alors : $H = \cap_{i\in I} H_i$ est un sous groupe de G.*

Démonstration:

1) $H \neq \emptyset$ car $\forall i \in I$ on a $e \in H_i(H_i \leq G) \Rightarrow e \in \cap_{i\in I} H_i = H$.
2) Soit $x, y \in H \Rightarrow x, y \in H_i$ pour tout $i \in I \Rightarrow x^{-1}y \in H_i \Rightarrow$ $x^{-1}y \in H$. Alors H est un sous groupe de G.

Définition 1.2.2 :

Soit G un groupe, $\emptyset \neq B \subset G$ et soit $\mathcal{F} = \{H$ sous groupe de $G, B \subset H\}$
1) On a $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $G \in \mathcal{F}$.
2) $\cap_{H\in\mathcal{F}} H$ est un sous groupe de G appelé sous groupe engendré par B, et on le note $\langle B \rangle$ tellque $\langle B \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contient B**.**

Exemple 1.2.2 :

1) $G = (\mathbb{Z}, -), B = \{3\}$
$\langle B \rangle = \langle \{3\} \rangle = \langle 3 \rangle = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$=$\{3k, k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

2) $G = (\mathbb{Z}, +), B = \{3, 2\}$
$\langle B \rangle = \langle \{3, 2\} \rangle = 3\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$.

3/ Homomorphismes de groupes

Définition 1.3.1 :

Soit $(G, \star, e)$ et $(G\prime, \triangle, e\prime)$ deux groupes et soit l'application
$f : G \longrightarrow G\prime$.
On dit que f est un morphisme de groupes de G vers $G\prime$ si $\forall x, y \in G$ on a: $f(x \star y) = f(x) \triangle f(y)$.

Exemple 1.3.1 :

Pour l'application log : $(\mathbb{R}_+^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$
On a: $\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$. Donc l'application log est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

Définition 1.3.2 :

Un homomorphisme bijectif est un **isomorphisme**, dans ce cas G et $G\prime$ sont dits isomorphes.

Définition 1.3.3 :

Un homomorphisme surjective est un **épimorphisme.**

Remarque 1.3.1 :

Deux ensembles isomorphes ont des structures et des proprietes transporables de l'un à l'autre.

Définition 1.3.4 :

Un isomorphisme de G sur lui même est appelé **automorphisme.**

Définition 1.3.5 :

Le noyau de f est l'ensemble $f^{-1}(e\prime)$ i.e $\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\prime\}$ est un sous groupe de G.

Remarque 1.3.2 :

1) $\ker f = \{e\} \iff f$ est injectif.
2) $\mathrm{Im}(G) = G\prime \iff f$ est surjectif.

Démonstration

On a f injectif$\Leftrightarrow \forall(x,y) \in G \times G, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$.
Si f est injectif et $f(x) = e\prime = f(e)$, alors $x = e$ et $Ker(f) = \{e\}$.
Réciproquement, si $f(x) = f(y)$, on a $e\prime = (f(x))^{-1}f(y) = f(x^{-1})f(y)$ $= f(x^{-1}y)$, d'où $x^{-1}y \in Ker(f)$. Si $Ker(f) = \{e\}$, alors $x = y$ et f est injective.
La deuxième assertion est évidente.

Exemple 1.3.1 :

Pour l'application $f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$
$$x \longrightarrow \log(x)$$
telque f est injectif.
$\Longrightarrow$) On suppose que $\ker f = \{1\}$ et on montre que f est injectif.
$f(x) = f(y) \implies (f(x))^{-1}f(y) = 0 \implies f(x^{-1}y) = 0$ d'où $x^{-1}y \in$ ker $\implies x^{-1}y = 1$ alors $x = y$ et f est injectif.
$\Longleftarrow$) On suppose que f est injectif et on montre que $\ker f = \{1\}$.
On a $\ker f = \left\{x \in \mathbb{R}_+^*; \log(x) = 0\right\}$.
$\log(x) = 0 \implies \log(x) = \log(1) = 0$ et comme f est injectif , alors $x = 1$.

4/ Classe modulo un sous groupe

Définition 1.4.1 :

Soit G groupe multiplicatif d'élément neutre e et H un sous groupe de G. Sur G, on définit la relation $\Re$ par :

$$\forall x, y \in G : x\Re y \iff x^{-1}y \in H$$

Proposition 1.4.1 :

(i) La relation $\Re$ est une relation d'équivalence.
(ii) Soit x un élément de G, sa classe d'équivalence pour la relation $\Re$ est l'ensemble $xH = \{xh, h \in H\}$.

Démonstration:

(i) Pour tout x de G, on a $x^{-1}x = e \in H$, d'où $x\Re x$ i.e la relation $\Re$ est réflexive.
Pour tout x et tout y dans G, on a $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x$, d'où si $x\Re y$ alors $y\Re x$ et la relation $\Re$ est symétrique.
Si $x\Re y$ et $y\Re z$, alors $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$, d'où $x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \in H$ et $x\Re z$ i.e la relation $\Re$ est transitive.
(ii) Si $x\Re y$ il existe $h \in H$ tel que $x^{-1}y = h$, i.e $y = xh$.

Définition 1.4.2 :

La relation $\Re$ est appelée relation d'équivalence à gauche modulo H et xH la classe à gauche de x modulo H.
On note $(G/H)_g$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de G pour la relation à gauche modulo H.

Remarque 1.4.1 :

On définit une relation d'équivalence à droite modulo H par:

$$(xRy) \iff (xy^{-1} \in H)$$

et la classe à droite de x modulo H est l'ensemble:
$Hx = \{hx, h \in H\} = \bar{x}$.
On note $(G/H)_d$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de G pour la relation à droit modulo H. Lorsque nous aurons à considérer les relations à gauche et à droite modulo H, nous noterons ces deux relations respectivement ${}_H\Re$ et $\Re_H$.

Théoréme 1.4.1 :(de Lagrange)

Si G un groupe fini, H et G/H le sont aussi.
On a:

$$|G| = |H| \times |G/H|$$

et l'ordre de H divise celui de G.

Définition 1.4.3 :

Soit G un groupe et $H \leq G$, alors H est normal dans G et on note $H \trianglelefteq G$ si:

$$\forall x \in G, xH = Hx$$

Exemple 1.4.1 :

Soit G un groupe, alors $G \trianglelefteq G$, $H = \{e\} \trianglelefteq G$.
En effet:
1/ $\forall h \in G, \forall g \in G, hgh^{-1} \in G$.
2/ $\forall g \in G$, on a: $geg^{-1} = gg^{-1} = e \in \{e\} \implies \{e\} \trianglelefteq G$
3/ Si le groupe G est abélien et $H \leq G$, on a : $\forall a \in G$, $aH = Ha \implies H \trianglelefteq G$.

Proposition 1.4.2 :

Un sous groupe H d'un groupe G est normal dans G si et seulement s'il vérifie l'un des conditions équivalents suivants :
1) $\forall x \in G$, $xH \subset Hx$.

2) $\forall x \in G,\ xH = Hx.$
3) $\forall x \in G,\ xHx^{-1} \subset H.$
4) $\forall x \in G,\ xHx^{-1} = H.$
5) $\forall h \in H, \forall x \in G,\ xhx^{-1} \in H.$
6) *Il existe un groupe G' et un morphisme de groupes $f : G \to G'$ tel que $H = Ker(f)$.*

5/ Groupe quotient

Proposition et Définition 1.5.1 :

Soit G un groupe et $H \trianglelefteq G$, on note G/H l'ensemble qoutiont i.e l'ensemble des classes d'équivalence pour $\Re = \Re_H =_H \Re$.
La loi interne $\perp$ sur l'ensemble G/H définie par :

$$\forall x, y \in G \text{ on a: } \bar{x} \perp \bar{y} = \overline{x \star y}$$

muni $(G/H, \perp)$ d'une stricture de groupe appellé groupe quotient.

Démonstration:

On montre que $G/H = \{xH; x \in G\}$ est un groupe .
1) $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in G/H$ on a : $\bar{x} \perp \bar{y} = xH \perp yH = \overline{x \star y} = x \star yH$
et comme $x \star y \in G$, alors $\overline{x \star y} \in G/H$ donc la $\perp$ loi est interne.
2) $\forall\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in G/H$ on a : $(\bar{x} \perp \bar{y}) \perp \bar{z} = (xH \perp yH) \perp zH = (x \star y)H \perp zH = (x \star y) \star zH = x \star (y \star z)H = xH \perp (yH \perp zH)$.Donc la $\perp$ loi est associative.
3) $\forall\ \bar{x} \in G/H$ on a : $xH \perp eH = x \star eH = e \star xH = xH$. Donc l'élément neutre de G/H est la classe eH.
4) Soit $xH \in G/H$, on note par yH le symétrique de xH : $xH \perp yH = eH \implies x \star yH = eH \implies x \star y = e$.
Alors $yH = x^{-1}H$.

Exemple 1.5.1 :

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ , \oplus)$ est un groupe quotient avec $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = n\mathbb{Z}$.

Proposition 1.5.2 :

Soit G un groupe et H un sous groupe normal de G .
Si G est abélien alors G/H est abélien.

Preuve:

Si G est abélien on a :
$xH \perp yH = (x \star y)H = (y \star x)H = yH \perp xH \implies G/H$ est abélien.

Théorème 1.5.1 :

Soient G un groupe, H un sous-groupe normal de G, $\pi : G \to G/H$ la projection canonique.
1) *Si K est un sous-groupe de G, alors HK est un sous groupe de G contenant H et $\pi(K) = HK/H$.*
2) *Le morphisme π induit une correspondance* biunivoque *entre les sous groupes (resp. sous groupes normaux) de G contenant H et les sous groupes (resp. sous groupes normaux) de G/H.*

Théorème 1.5.2 : (passage au quotient)

Soient G et $G\prime$ deux groupes, H (resp. $H\prime$) un sous groupe normal de G (resp. $G\prime$), $\pi : G \to G/H$ (resp.$\pi\prime : G\prime \to G\prime/H\prime$) la projection canonique. Pour tout $f \in Hom(G, G\prime)$ tel que $f(H) \subseteq H\prime$, il existe un unique $\bar{f} \in Hom(G/H, G\prime/H\prime)$ telleque $\bar{f} \circ \pi = \pi\prime \circ f$.

Théorme 1.5.3 :(le premier théoreme d'isomorphisme)

Soit $G, G\prime$ deux groupe et $f \in Hom(G, G\prime)$.
Consédérons l'épimorphisme : $\pi : G \longrightarrow G/\ker f$

$$x \longrightarrow \bar{x}$$

Alors il éxiste un unique isomorphisme :

$$\bar{f} : G/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

telle que $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ f$.

Démonstration:

Soit $\pi : G \to G/Ker(f)$ la projection canonique. Tout élément de $G/Ker(f)$ est la classe $\pi(x)$ d'un élément x de G. Posons $\overline{f}(\pi(x)) = f(x)$ et montrons que $\overline{f}$ est une application : si x' est un autre représentant de la classe $\pi(x)$, on a $xx'^{-1} \in Ker(f)$, d'où $f(x) = f(x')$ et f est bien définie. On vérifie aisément que $\overline{f}$ est un morphisme de groupes. Par construction, $\overline{f}$ est surjective.
D'autre part, si $\overline{f}(\pi(x)) = \overline{f}(\pi(y))$, on a $f(x) = f(y)$, i.e. $xy^{-1} \in Ker(f)$. D'où $\pi(x) = \pi(y)$, donc $\overline{f}$ est injective. D'où le résultat.

Théorème 1.5.4 : (Deuxiéme théorème d'isomorphisme)

Soient G un groupe et H un sous groupe normal de G. Pour tout sous groupe K de G, $H \cap K$ est un sous groupe normal de K, H est un sous groupe normal de HK, et les groupes quotients $K/H \cap K$ et HK/H sont isomorphes.

Démonstration:

Si le sous groupe H est normal dans G, alors il est normal dans HK, et $H \cap K$ est normal dans K, donc les groupes quotients $K/(H \cap K)$ et HK/H existent. Considérons les morphismes canoniques $\pi : K \longrightarrow K/(H \cap K)$, $\pi' : HK \longrightarrow HK/H$, $i : K \longrightarrow HK$. Alors $i(H \cap K) = (H \cap K) \subseteq H$, et d'après le théorème (1.5.2) il existe un unique morphisme $\overline{i} : K/(H \cap K) \longrightarrow HK/H$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow^{i} & HK \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ K/(H \cap K) & \longrightarrow_{\overline{i}} & HK/H \end{array}$$

On a vu au théorème (1.5.1) que $\pi'(K) = HK/H$, donc le morphisme

$\pi' \circ i = \bar{i} \circ \pi$ est surjectif, il en est donc de même du morphisme $\bar{i}$.
D'autre part, on a $[\bar{i}(\pi(x)) = 0] \Leftrightarrow [\pi'(i(x)) = 0] \Leftrightarrow [x \in H \cap K]$
d'où $\bar{i}(\pi(x)) = 0$ équivaut à $\pi(x) = 0$ et $\bar{i}$ est injective. Par conséquent $\bar{i}$ est un isomorphisme.

Théorème 1.5.5 :(Troisième théorème d'isomorphisme)

*Soient G un groupe, H et K des sous groupes de G telle que $H \subset K$.
On suppose que H et K sont des groupes normaux de G.
Alors $(K/H) \trianglelefteq (G/H)$ et $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.*

Démonstration:

On sait, d'après le théorème (1.5.1), que K/H est un sous groupe normal de G/H et le groupe quotient $(G/H)/(K/H)$ est bien défini.
Considérons les morphismes canoniques
$\pi_H : G \to G/H, \pi_K : G \to G/K$, $\pi : G/H \to (G/H)/(K/H)$.
Puisque $\pi_H(K) = K/H$, d'après le théorème de passage au quotient, il existe un unique morphisme $\phi : G/K \to (G/H)/(K/H)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_H} & G/H \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/K & \xrightarrow{\phi} & (G/H)/(K/H) \end{array}$$

Le morphisme $\pi \circ \pi_H$ étant surjectif, il en est de même du morphisme ϕ. D'autre part, on a: $[\phi(\pi_K(x)) = 0] \Leftrightarrow [\pi_H(x) \in K/H] \Leftrightarrow [x \in K]$,
d'où $\phi(\pi_K(x)) = 0$ équivaut à $\pi_K(x) = 0$ et ϕ est injective. Par conséquent ϕ est un isomorphisme.

Chapitre 02
Généralités sur les ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous ensemble.

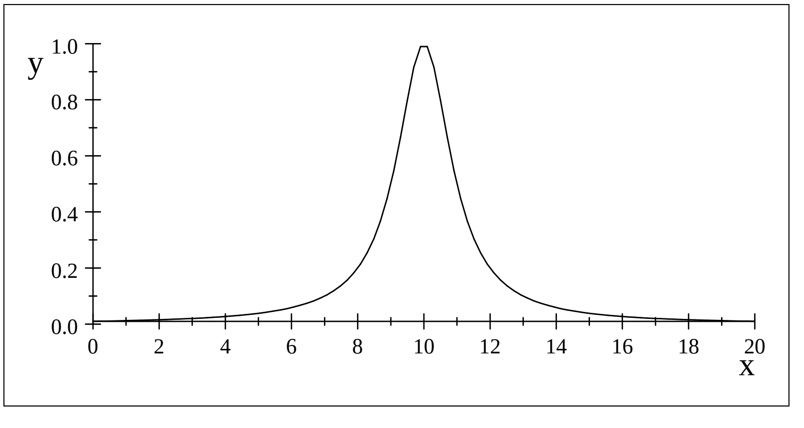
1/ Les sous ensembles flous

Définition 2.1.1 :$[1, 2]$

Soit X un ensemble. Un sous-ensemble flou de X est une application $\mu : X \longrightarrow [0, 1]$.

Exemple 2.1.1 :

1) Soit $X = \mathbb{R}$, μ est le sous ensemble flou de X définit par : $\mu(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}$.



2)Soit $X = \{France, Suisse, Belgique, Canada, Espagne, Italie, USA, Allemand\}$ un ensemble du pays, $\mu : X \longrightarrow [0,1]$ est l'ensemble des pays francphones définit par $\mu(France) = 1, \mu(Belgique) = 0.5, \mu(Suisse) = 0.6$ $\mu(Canada) = 0.7, \mu(Espagne) = 0, \mu(Italie) = 0.2, \mu(USA) = 0.5$ et $\mu(Allemand) = 0$.

Définition 2.1.2 :$[1, 9]$

Le support de μ est l'ensemble des éléments de X défini par :

$$supp(\mu) = \{x \in X/\mu(x) > 0\}$$

Exemple 2.1.2 :

Pour l'éxemple précédent on a:
1) Le support de μ est l'ensemble $\{France, Belgique, Suise, Canada, Italie, USA\}$.

Définition 2.1.3 : $[1, 9]$

Le noyau de μ est l'ensemble des éléments de X appartenant totalement à μ. Autrement dit, c'est l'ensemble :

$$noy(\mu) = \{x \in X/\mu(x) = 1\}$$

Par définition, $noy(\mu) \subseteq supp(\mu)$.

Exsemple 2.1.3 :

Pour l'ensemble μ dans l'exemple précident on a:

$noy(\mu)$=\{France\}

Définition 2.1.4 :[9]

• La cardinalité d'un sous-ensemble flou fini μ de X, noté $|\mu|$, est donné par :

$$|\mu| = \sum \mu(x), \forall x \in X$$

Exemble 2.1.4: [9]

Soit $X = \{a, b; c; d\}$ un ensemble de référence et μ et ν deux sous ensembles flous de X. D'oú $\mu : X \longrightarrow [0, 1]$ est défini par :
$\mu(a) = 0.4, \mu(b) = 0.8, \mu(c) = 1, \mu(d) = 0.8.$
Et $\nu : X \longrightarrow [0, 1]$ est défini par :$\nu(a) = 0, \nu(b) = 0.5, \nu(c) = 0.3, \nu(d) = 0.9.$
1) $|\mu| = \sum_{x \in X} \mu(x) = 0.4 + 0.8 + 1 + 0.8 = 3.$

2) $|\nu| = \sum_{x \in X} \nu(x) = 0 + 0.5 + 0.3 + 0.9 = 1.7.$

Définition 2.1.5 : $[1, 9]$

Une α-coupe d'un ensemble flou μ est le sous ensemble classique des éléments ayant un degré d'appartenance superieur ou égal à α:

$$\alpha - coupe(A) = \mu_\alpha = \{x \in X/\mu(x) \geq \alpha\}$$

Exemple 2.1.5 :

On prend $\alpha = 0.5$ Pour les ensembles μ et ν dans l'exemple précident
1) $\mu_{0.5} = \{x \in X/ \ \mu(x) \geq 0.5\} = \{b, c, d\}$.
2) $\nu_{0.5} = \{x \in X/ \ \nu(x) \geq 0.5\} = \{b, d\}$.

2/ Opérations sur les sous ensembles flous

Etant donné que le concept de sous-ensemble flou peut-être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous-ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsqu'on a affaire à des fonctions d'appartenance à valeurs 0 ou 1.On présente ici, les opérations les plus couramment utilisées.

L'inclusion:

Soient μ et ν deux sous-ensembles flous de X . On dit que $\mu \subset \nu$ si et seulement si :

$$\forall x \in X; \mu(x) \leq \nu(x).$$

L'intersection:

L'intersection de deux sous-ensembles flous μ et ν de X est le sous ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à μ et ν .Formellement, $\mu \cap \nu$ est donné par :

$$\mu \cap \nu(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = \inf\{\mu(x), \nu(x), x \in X\}$$

Exemple 2.2.1 :

Soit l'ensemble $X = \{1, -1, i, -i\}$, soient les ensembles flous suivants:
$\mu : X \longrightarrow [0,1]$ défini par : $\mu(1) = 0.3$, $\mu(-1) = 0.1$, $\mu(i) = \mu(-i) = 0$.
$\nu : X \longrightarrow [0,1]$ défini par : $\nu(1) = 0.2$, $\nu(-1) = 0.5$, $\nu(i) = 1$, $\nu(-i) = 0$.
On a $\mu \cap \nu(x) = \inf\{\mu(x), \nu(x), x \in X\}$ alors :
$\mu \cap \nu(1) = 0.2$, $\mu \cap \nu(-1) = 0.1$, $\mu \cap \nu(i) = 0$, $\mu \cap \nu(-i) = 0$.

L'union:

L'union de deux sous-ensembles flous μ et ν de X est le sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à μ et ν. Formellement, $\mu \cup \nu$ est donné par :

$$\mu \cup \nu(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = \sup\{\mu(x), \nu(x), x \in X\}$$

Exemple 2.2.2 :

Pour les ensembles μ et ν dans l'exemple précident on définit $\mu \cup \nu$ comme suit:
$\mu \cup \nu(1) = 0.3$, $\mu \cup \nu(-1) = 0.5$, $\mu \cup \nu(i) = 1$, $\mu \cup \nu(-i) = 0$.

Le Complément:

Le complémentaire d'un sous-ensemble flou μ de X noté $\overline{\mu}$ ou bien $C(\mu)$

est défini par :

$$\forall x \in X, \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$$

Exemple 2.2.3 :

Pour les ensembles μ et ν dans l'exemple (2.1.4) on a :
1) $\overline{\mu}(a) = 0.6$, $\overline{\mu}(b) = 0.2$, $\overline{\mu}(c) = 0$, $\overline{\mu}(d) = 0.2$.
2) $\overline{\nu}(a) = 1$, $\overline{\nu}(b) = 0.5$, $\overline{\nu}(c) = 0.7$, $\overline{\nu}(d) = 0.1$.

3/ Quelques propriétés sur $\cap, \cup$ et le complémentation

Comme les ensembles classiques les propriétés suivantes restent vérifiées pour les ensembles flous:

1) ***Commutativité*:** $\mu \cup \nu = \nu \cup \mu$, $\mu \cap \nu = \nu \cap \mu$.
2) ***Associativité*:** $(\mu \cup \nu) \cup \eta = \mu \cup (\nu \cup \eta)$, $(\mu \cap \nu) \cap \eta = \mu \cap (\nu \cap \eta)$.
3) ***Idempotence*:** $\mu \cup \mu = \mu$, $\mu \cap \mu = \mu$.
4) $C(C(\mu)) = \mu$.
5) ***Si*** $\mu \subset \nu \implies C(\nu) \subset C(\mu)$.

6) *Distributivité*: $\mu \cup (\nu \cap \eta) = (\mu \cup \nu) \cap (\mu \cup \eta)$, $\mu \cap (\nu \cup \eta) = (\mu \cap \nu) \cup (\mu \cap \eta)$.
7) *Lois de Morgan*: $\overline{(\mu \cup \nu)} = \overline{\mu} \cap \overline{\nu}$, $\overline{(\mu \cap \nu)} = \overline{\mu} \cup \overline{\nu}$.

Démonstration:

1) On a:
$$\begin{aligned} \mu \cup \nu(x) &= \sup(\mu(x), \nu(x)) \\ &= \sup(\nu(x), \mu(x)) \\ &= \nu \cup \mu(x) \end{aligned}$$
Donc $\mu \cup \nu = \nu \cup \mu$.

On a: $$\begin{aligned} \mu \cap \nu(x) &= \inf(\mu(x), \nu(x)) \\ &= \inf(\nu(x), \mu(x)) \\ &= \mu \cap \nu(x) \end{aligned}$$
Donc $\mu \cap \nu = \nu \cap \mu$.

2) On a:
$$\begin{aligned} (\mu \cup \nu) \cup \eta(x) &= \vee(\mu \cup \nu(x), \eta(x)) \\ &= (\mu(x) \vee \nu(x)) \vee \eta(x) \\ &= \mu(x) \vee (\nu(x) \vee \eta(x)) \\ &= \mu \cup (\nu \cup \eta)(x) \end{aligned}$$
Donc $(\mu \cup \nu) \cup \eta = \mu \cup (\nu \cup \eta)$.

On a:
$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu) \cap \eta(x) &= \wedge(\mu \cap \nu(x), \eta(x)) \\ &= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \wedge \eta(x) \\ &= \mu(x) \wedge (\nu(x) \wedge \eta(x)) \\ &= \mu \cap (\nu \cap \eta)(x) \end{aligned}$$
Donc $(\mu \cap \nu) \cap \eta = \mu \cap (\nu \cap \eta)$.

3) On a :
$$\begin{aligned} \mu \cap \mu(x) &= \inf(\mu(x), \mu(x)) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$
Donc $\mu \cap \mu = \mu$.

On a:
$\mu \cup \mu(x) = \sup(\mu(x), \mu(x)) = \mu(x)$
Donc $\mu \cap \mu = \mu$.

4) On a :
$$\begin{aligned} C(C(\mu))(x) &= 1 - C(\mu)(x) \\ &= 1 - (1 - \mu(x)) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$
Donc $C(C(\mu)) = \mu$.

5) On a :
$$\begin{aligned} \mu \subset \nu &\implies \mu(x) \leq \nu(x) \\ &\implies 1 - \mu(x) \geq 1 - \nu(x) \\ &\implies \overline{\mu}(x) \geq \overline{\nu}(x) \end{aligned}$$
Donc $\overline{\nu} \subset \overline{\mu}$.

6) On a:
$$\begin{aligned} \mu \cap (\nu \cup \eta)(x) &= \inf(\mu(x), \sup(\nu(x), \eta(x))) \\ &= \mu(x) \wedge (\nu(x) \vee \eta(x)) \\ &= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \vee (\mu(x) \wedge \eta(x)) \\ &= (\mu \cap \nu) \cup (\mu \cap \eta)(x) \end{aligned}$$
Donc $\mu \cup (\nu \cap \eta) = (\mu \cup \nu) \cap (\mu \cup \eta)$.

7) On a:
$$\begin{aligned} C(\mu \cap \nu)(x) &= 1 - \mu \cap \nu(x) \\ &= 1 - \inf(\mu(x), \nu(x)). \end{aligned}$$
On a deux cas :
1) Si $\inf(\mu(x), \nu(x)) = \mu(x) \implies \mu(x) \leq \nu(x)$
$\implies 1 - \mu(x) \geq 1 - \nu(x)$
Donc $1 - \mu(x) = \sup(1 - \mu(x), 1 - \nu(x))$
$= C(\mu) \cup C(\nu)(x)$.
2) Si $\inf(\mu(x), \nu(x)) = \nu(x) \implies \nu(x) \leq \mu(x) \implies 1 - \nu(x) \geq 1 - \mu(x)$
Donc $1 - \nu(x) = \sup(1 - \mu(x), 1 - \nu(x))$
$= C(\mu) \cup C(\nu)(x)$.
de 1 et 2 on obtient $C(\mu \cup \nu)(x) = C(\mu) \cup C(\nu)(x)$.

Chapitre 03:

Sous groupe flou et groupe quotient

A-Resenfled applique le concept de la théorie des ensembles flous sur la théorie des groupes. Les déffirentes constructions du groupe quotient flou et l'isomorphisme des sous groupes flous sont étudiés par plusieurs mathématiciens [3,6,8]. Dans ce chapitre, nous étudions une méthode de construction de groupes quotients par des sous groupes normaux flous et nous utilisons cette construction pour l'étude des théoremes concernant les isomorphismes des groupes.

1/ Sous groupe flou :

Définition 3.1.1:[2, 5]

Soit G un groupe, μ est un sous ensemble flou de G. On dit que μ est un sous groupe flou de G si:
$\mathbf{F_1}$) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall x, y \in G$.
$\mathbf{F_2}$) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x), \forall x \in G$.

Soit A un sous ensemble flou de G. Dans le cas classique la fonction caractéristique χ_A est équivalente à μ.Dans ce cas :
1) $\mathbf{F_1}$ devient $\chi_A(xy) \geq \min\{\chi_A(x), \chi_A(y)\}, \forall x, y \in \mu \implies \chi_A(xy) \geq \min\{1, 1\} = 1 \implies \chi_A(xy) = 1$ donc $xy \in A$.
2) $\mathbf{F_2}$ devient $\chi_A(x^{-1}) \geq \chi_A(x), \forall x \in A \implies \chi_A(x^{-1}) \geq 1 \implies \chi_A(x^{-1}) = 1$ donc $x^{-1} \in A$.

Exemple 3.1.1: [10]

Soit $H = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ le groupe de permutations d'ordre 3 avec e l'élément neutre de H, et soit μ est un sous ensemble

flou de H. On définit :
$\mu : H \longrightarrow [0,1]$ par : $\mu(e) = 1; \mu((12)) = 0.5, \mu(x) = 0.3\ \forall x \in H/\{e,(12)\}$.
$\mathbf{F}_1$) On montre que $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall x, y \in G$:
On a $\mu((12)(123)) = \mu((23)) = 0.3$ d'autre part on a :
$\min\{\mu((12)), \mu((123))\} = 0.3$ donc $\mu((12)(123)) \geq \min\{\mu((12)), \mu((123))\}$.
Un raisonnement analogue pour prouver la condition $\mathbf{F}_1$ pour touts $x, y \in G$.
$\mathbf{F}_2$) On montre que $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x), \forall x \in G$:
On a $\mu((123)^{-1}) = \mu((132)) = 0.3$ et $\mu((123)) = 0.3$ donc $\mu((123)^{-1}) \geq \mu((123))$.
Un raisonnement analogue pour prouver la condition $\mathbf{F}_2$ pour touts $x, y \in G$.
$\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont vérifiés donc μ est un sous groupe flou de H.

proposition 3.1.1:[2, 5]

Soit μ un sous groupe flou d'un groupe G; alors pour tout $x, y \in G$ on a *:*
1) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.
2) $\mu(x) \leq \mu(e)$.

Dans le cas classique l'assertion (1) devient :$\chi_A(x^{-1}) = \chi_A(x), \forall x \in A \Rightarrow \chi_A(x^{-1}) = 1$ *donc* $x^{-1} \in A$.
l'assertion (2) devient : $\chi_A(x) \leq \chi_A(e)$*,* $\forall x \in A \Rightarrow \chi_A(e) = 1 \Rightarrow e \in A$.

Preuve:

On a: $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ donc $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.
$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\} = \mu(x)$.

Proposition 3.1.2:[5]

Soit μ un sous groupe flou de G. pour tout $x, y \in G$ on a :
$\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ implique $\mu(x) = \mu(y)$.

Preuve:

On a $\mu(x) = \mu((xy^{-1})y) \geq \min(\mu(e), \mu(y)) = \mu(y) = \mu((yx^{-1})x)$
$\geq \min(\mu(e), \mu(x)) = \mu(x)$ donc $\mu(x) = \mu(y)$.

Proposition 3.1.3:[2, 3]

Soit μ un sous ensemble flou d'un groupe G . μ est un sous groupe flou de G si et seulement si:

$$\mu(xy^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y)), \forall x, y \in G.$$

Dans le cas classique on a $\chi_A(xy^{-1}) \geq \min(\chi_A(x), \chi_A(y)), \forall x, y \in A$
$\Rightarrow \chi_A(xy^{-1}) \geq \min(1, 1) = 1 \Rightarrow \chi_A(xy^{-1}) = 1$, donc $xy^{-1} \in A$.

Preuve:

On suppose que μ est un sous groupe flou et on montre que $\mu(xy^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y)), \forall x, y \in G$.
On a $\mu(xy^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y^{-1})) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$.
Inversement, On suppose que $\mu(xy^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y)), \forall x, y \in G$ et on montre que μ est un sous groupe flou $\quad \mu(xy^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$.
On pose $y = x$ on obtient $\mu(e) \geq \mu(x)\ \forall x \in G$ donc $\mu(y^{-1}) = \mu(ey^{-1}) \geq \min(\mu(e), \mu(y)) = \mu(y)$. Et par suit $\mu(xy) = \mu(x(y^{-1})^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$.

Définition 3.1.2:[5]

Soient G, G' des groupes, μ est un sous groupe flou de G et ν est un sous groupe flou de G', soit l'application
$f : G \longrightarrow G'$.

L'image de μ par f est l'ensemble flou de G' défini par :
$f(\mu) : G' \longrightarrow [0,1]$

$$y \longrightarrow f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

On dit que $f^{-1}(\nu)$ est le preimage de ν et on le définit comme suit :
$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)), \forall x \in G$.

Théoreme 3.1.1:[2]

Soit μ un sous groupe flou de G, on suppose que f est un homomorphisme de G vers G'. Alors $f(\mu)$ est un sous groupe flou de G'.

preuve:

Soit $u, v \in G'$. On suppose que $u \notin f(G)$ ou $v \notin f(G)$, alors $f(u) \wedge f(v) = 0 \leq f(uv)$.
Maintenant on suppose que $x \notin f(G)$ alors $x^{-1} \notin f(G)$ donc $f(\mu)(x) = 0 = f(\mu)(x^{-1})$.
Maintenant on suppose que $u = f(x)$ et $v = f(y)$ pour quelque $x, y \in G$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\mu)(uv) &= \vee\{\mu(z) |\ z \in G,\ f(z) = uv\} \\ &\geq \vee\{\mu(xy) |\ x, y \in G,\ f(x) = u,\ f(y) = v\} \\ &\geq \vee\{\mu(x) \wedge \mu(y) |\ x, y \in G,\ f(x) = u,\ f(y) = v\} \\ &= (\vee\{\mu(x) |\ x \in G,\ f(x) = u\}) \wedge (\vee\{\mu(y) |\ y \in G,\ f(y) = v \\ &= f(\mu)(u) \wedge f(\mu)(v). \end{aligned}$$

Aussi ,on a
$$\begin{aligned} f(\mu)(u^{-1}) &= \vee\{\mu(z) |\ z \in G,\ f(z) = u^{-1}\} \\ &= \vee\{\mu(z^{-1}) |\ z \in G,\ f(z^{-1}) = u\} \\ &= f(\mu)(u). \end{aligned}$$

Alors $f(\mu)$ est un sous groupe de G'.

Théoreme 3.1.2:[2, 5]

Soit G' un groupe et ν un sous groupe flou de G'. Soit f un homomorphisme de G vers G'.
Alors $f^{-1}(\nu)$ est un sous groupe flou de G.

Preuve:

Soit $x, y \in G$, alors $f^{-1}(\nu)(xy) = \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)) \geq \wedge\{\nu(f(x)), \nu(f(y))\} = f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y)$.
D'autre part , $f^{-1}(\nu)(x^{-1}) = \nu(f(x^{-1})) = \nu(f(x)^{-1}) = \nu(f(x))$.
Alors $f^{-1}(\nu)$ est un sous groupe de G.

Définition 3.1.3 :

On dit q'un sous groupe flou μ est abélien s'il satisfait l'identité suivante :

$$\mu(xyx^{-1}y^{-1}) = \mu(e).$$

Proposition-Définition 3.1.4 : [5]

Soit μ un sous groupe flou d'un groupe G, les *deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $\mu(xy) = \mu(yx)\ \forall x, y \in G$.
2) $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)\ \forall x, y \in G$.
Dans ce cas on dit que μ est un sous groupe normal flou de G.

Dans le cas classique on a la deuxiéme condition devient $\chi_A(xyx^{-1}) = \chi_A(y)\ \forall x, y \in G$, pour tout $x \in G$ et $y \in A$, donc $\chi_A(y) = 1 = \chi_A(xyx^{-1})$, alors $xyx^{-1} \in A$.

Preuve:

1⇒2)
$\mu(xyx^{-1}) = \mu((xy)x^{-1}) = \mu(x^{-1}(xy)) = \mu(x^{-1}xy) = \mu(y)$.
2⇒1)
Comme $xy = x(yx)x^{-1}$alors $\mu(xy) = \mu(x(yx)x^{-1}) = \mu(yx)$.

Proposition 3.1.4 :[2]

Soit G un groupe , $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de sous groupes flous.
Alors: $\mu = \cap_{i\in I}\mu_i$ est un sous groupe flou de G.

preuve:

Soit μ_i un sous groupe flou de G.
$\cap\mu_i(xy^{-1}) = \inf(\mu_i(xy^{-1})) \geq \inf(\min(\mu_i(x);\mu_i(y))) \geq \min(\inf \mu_i(x); \inf \mu_i(y))$
$\geq \min(\cap\mu_i(x), \cap\mu_i(y))$.

Définition 3.1.5 :[2]

Soit μ un sous ensemble flou de G . Soit $\langle\mu\rangle = \cap\{\nu/\ \mu \subseteq \nu,\ \nu$ est un sous groupe flou de $G\}$. Alors $\langle\mu\rangle$ est appelé sous groupe flou de G engendré par μ telque $\langle\mu\rangle$ est le plus petit sous groupe flou contient μ.

proposition 3.1.5 :[2]

Un sous ensemble flou μ d'un groupe G est un sous-groupe (normal) flou de G ssi $\forall\alpha \in [0,1]$ on a μ_α est soit vide ou bien est un sous groupe (normal) classique de G .

Preuve:

1/ Soit $x, y \in G$ et soit $\mu(x) = t_1$ et $\mu(y) = t_2$, alors $x \in \mu_{t_1}$et $y \in \mu_{t_2}$.
On suppose que $t_1 \leq t_2$ et par suite $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$donc $y \in \mu_{t_1}$, ainsi $x, y \in \mu_{t_1}$et puisque μ_{t_1} est un sous groupe de G, par l'hypothése on a $xy \in \mu_{t_1}$ et par conséquent $\mu(xy) \geq t_1 = \min(\mu(x), \mu(y))$.
2/ Soit $x \in G$ et $\mu(x) = t$, alors $x \in \mu_t$. Puisque μ_t est un sous groupe $x^{-1} \in \mu_t$. Par conséquent $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.
de 1 et 2 ona μ est un sous groupe flou de G.

2/ Classe modulo un sous groupe flou:

Définition 3.2.1:[5]

Soit G un groupe, μ un sous-groupe normal flous de G .$\forall x, y \in G$.
On définit la relation binaire $\Re$ sur G par :

$$x \Re y \iff \mu(xy^{-1}) = \mu(e)$$

telque e est l'élément neutre de G.

Propostion 3.2.1:[5]

la relation $\Re$ est une congruence sur G.

Preuve:

1) La réflexivité:
On a $\mu(xx^{-1}) = \mu(e) \implies x\Re x$.
2) La symétrié :
$x\Re y \implies \mu(xy^{-1}) = \mu((x^{-1})^{-1}y^{-1}) = \mu((yx^{-1})^{-1}) = \mu(yx^{-1}) = \mu(e)$ implique $y\Re x$.
3) La transitivité:
Soit $x\Re y$ et $y\Re z$ alors $\mu(xy^{-1}) = \mu(yz^{-1}) = \mu(e)$
et $\mu(xz^{-1}) = \mu(xy^{-1}yz^{-1}) \geq \min\{\mu(xy^{-1}), \mu(yz^{-1})\} = \mu(e)$
donc $\mu(xz^{-1}) = \mu(e)$, par conséquence $\Re$ est une relation d'équivalence.
Maintenant, si $x\Re y$ alors $\mu(xy^{-1}) = \mu(e).\forall z \in G$ on a
$\mu((xz)(yz)^{-1}) = \mu(xzz^{-1}y^{-1}) = \mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ donc $xz\Re yz$.
Car μ est un sous-groupe normal flous de G, on a $\mu((zx)(zy)^{-1}) = \mu(xy^{-1}) = \mu(e)$. Ce donne : $zx\Re zy$.
Donc la relation $\Re$ est une congruence.

Définition 3.2.2 :[5]

Soit μ un sous groupe flou de G. soit $x \in G$, sa classe d'équivalence à droite de la relation $\Re$ est notée par μ_x, est l'ensemble flou de G défini par $\mu_x(y) = \mu(x^{-1}y)$ pour tout $y \in G$.

De la même manière, on définit la classe d'équivalence à gauche
de la relation $\Re$ de x est notée par ${}_x\mu$.

proposition 3.2.2 :[5]

Si μ est un sous groupe normal flou d'un groupe G, alors G/μ est un groupe evec l'opération $\mu_x \mu_y = \mu_{xy}$, et aussi on a $\mu_x = {}_x\mu$.

Exemple 3.2.1 :[5]

Soit $G = (\mathbb{Z}, +)$ un groupe additive et soit $\mu(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } 2/x \\ \alpha_0 & \text{si } 2\nmid x \end{cases}$

telleque $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$, alors μ est un sous-groupe normal flou de G et $G/\mu = \{\mu_0, \mu_1\}$ est un groupe quotient induit par μ.

Corollaire 3.2.1:[5]

Soit μ un sous groupe normal flou de G. Alors $G/H = G/G_\mu \cong G/\mu$.

Définition 3.2.3 :[2]

Soit μ un sous groupe flou d'un groupe fini G. Alors la cardinalité de G/μ est appelé l'indice de μ dans G, et on écrit $[G : \mu]$.
Il est claire que D'aprés le corollaire précédent l'indice de μ divise le cardinale de G.

Proposition 3.2.3 :[2, 5]

Un sous groupe flou μ d'un groupe G est abélien si et seulement si G/μ est abélien .

Preuve:

$\Rightarrow$) On suppose que μ est un sous groupe abélien flou et on montre

que G/μ est un groupe abélien.
On a $\mu(xyx^{-1}y^{-1}) = \mu(e)$, et comme $\mu(xy) = \mu(yx)$ donc μ est un sous groupe normal flou. Car $\mu(xy(yx)^{-1}) = \mu(xyx^{-1}y^{-1}) = \mu(e)$, on a $\mu_{xy} = \mu_{yx}$, i.e. $\mu_x\mu_y = \mu_y\mu_x$. Donc G/μ est un groupe abélien .
$\Leftarrow$) On suppose que G/μ est un groupe abélien et on montre que μ est un sous groupe flou abélien.
G/μ est un groupe abélien, alors $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ et $\mu(xy(yx)^{-1}) = \mu(e)$ donc $\mu(xyx^{-1}y^{-1}) = \mu(e)$.

Lemme 3.2.1 :[5]

Si $f : G \longrightarrow G\prime$ est un épimorphisme de groupes et μ est un sous groupe normal flou de G, alors $f(\mu)$ est un sous groupe normal flou de G'.

Preuve:

Par le théoreme (3.1.1), $f(\mu)$ est un sous goupe flou de G'.
Maintenant soit $x, y \in G'$. Comme f est un surjection, $f(u) = x$ pour

quelque $u \in G$, alors $f(\mu)(xyx^{-1}) = \vee\{\mu(w)|\ w \in G, f(w) = xyx^{-1}\}$
$= \vee\{\mu(u^{-1}wu)|\ w \in G, f(u^{-1}wu) = y\}$
$= \vee\{\mu(w)|\ uwu^{-1} \in G, f(w) = y\}$
$= \vee\{\mu(w)|\ w \in G, f(w) = y\}$
$= f(\mu)(y)$.
Alors $f(\mu)$ est un sous groupe normal flou de G.

Théoreme 3.2.1:[5]

Soit G' un groupe et ν un sous groupe normal de G'. Si f est un homomorphisme de G vers G', alors $f^{-1}(\nu)$ est un sous groupe normal flou de G.

Preuve:

Par théoreme (3.1.2) $f^{-1}(\nu)$ est un sous groupe flou de G. Maintenant pour tout $x, y \in G$, on a $f^{-1}(\nu)(xy) = \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)) = \nu(f(y)f(x)) = \nu(f(yx)) = f^{-1}(\nu)(yx)$. Donc $f^{-1}(\nu)$ est un sous groupe normal flou de G.

Lemme 3.2.2 :$[3, 5]$

Soit $f : G \longrightarrow G\prime$ est un homomorphisme de groupes, μ est un sous groupe flou de G et ν est un sous groupe de G'.
1/ *Si f est un épimorphisme, alors $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$.*
2/ *Si μ un constant dans* $\ker(f)$*, alors $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$.*

Proposition 3.2.4 :$[5]$

Soit μ un sous ensemble flou d'un groupe G, soit l'ensemble $G_\mu = \{x \in G \ /\mu(x) = \mu(e)\}$. Il évident que si μ est un sous groupe (normal) flou de G , alors G_μ est un sous groupe (normal) de G.

Théoreme 3.2.2 :$[5]$

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un épimorphusme de groupes et μ est un sous groupe normal flou de G avec $\ker f \subseteq G_\mu$*. Alors $G/\mu \cong G'/f(\mu)$.*

Preuve:

D'aprés la proposition (3.2.2) et lemme(3.2.1) on a G/μ et $G'/f(\mu)$ sont des groupes. Soit $\eta : G/\mu \longrightarrow G'/f(\mu)$, telque $\eta_x = f(\mu)_{f(x)}$.
Si $\mu_x = \mu_y$, alors μ est un constant sur $\ker f$, et par lemme (3.2.2) on a $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$, ainsi $(f^{-1}(f(\mu)))(xy^{-1}) = (f^{-1}(f(\mu)))(e)$; ie $f(\mu)(f(xy^{-1}))$ $= f(\mu)(f(e))$, alors $f(u)(f(x)(f(y))^{-1}) = f(\mu)(e')$, et alors $(f(\mu))_{f(x)} = (f(\mu))_{f(y)}$. Donc η est bien définié.
Il est aussi une homomorphisme car $\eta(\mu_x\mu_y) = \eta(\mu_{xy}) = (f(\mu))_{f(xy)} = (f(\mu))_{f(x)f(y)} = (f(\mu))_{f(x)}(f(\mu))_{f(y)} = \eta(\mu_x)\eta(\mu_y)$.
Comme f est un épimorphisme pour tout $(f(\mu))_y \in G'/f(\mu), \exists\ x \in G$ telque $f(x) = y$, donc $\eta(\mu_x) = (f(\mu))_{f(x)} = (f(\mu))_y$

par conséquent η est un épimorphisme.
D'autrepart, $(f(\mu))_{f(x)} = (f(\mu))_{f(y)} \implies f(u)(f(x)(f(y))^{-1}) = f(\mu)(e')$
$\implies f(\mu)(f(xy^{-1})) = f(\mu)(f(e)) \iff (f^{-1}(f(\mu)))(xy^{-1}) = (f^{-1}(f(\mu)))(e)$
$\implies \mu(xy^{-1}) = \mu(e) \implies \mu_x = \mu_y$, donc η est un isomorphisme.
Alors $G/\mu \cong G'/f(\mu)$.

Corolloire 3.2.2 :[5]

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un épimorphisme de groupes et ν est un sous groupe normal flou de G'. Alors $G/f^{-1}(\nu) \cong G'/\nu$.

Preuve:
Puisque $f^{-1}(\nu)$ est sous groupe normal flou de G, $G/f^{-1}(\nu)$ et G'/ν sont des groupes . De plus , d'aprés lemme (3.2.2) on a $B = f(f^{-1}(B))$.

Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = e' = f(e)$, donc $\nu(f(x))= \nu(f(e))$ i.e $f^{-1}(\nu(x))=f^{-1}(\nu(e))$. Alors $x \in G_{f^{-1}(\nu)}$ i.e $\ker f \subseteq G_{f^{-1}(\nu)}$ donc $G/f^{-1}(\nu) \cong G'/\nu$.

Proposition 3.2.5 :[5]

Soit χ_A une fonction caracteristique d'un sous ensemble A d'un groupe G, alors χ_A est un sous groupe normal flou de G ssi A est un sous groupe normal de G .

Preuve:

$\Rightarrow$) Si $x, y \in A$, tellque A est un sous groupe normal de G , alors $\chi_A(xy^{-1}) = \chi_A(x) = \chi_A(y) = 1$ donc $\chi_A(xy^{-1}) = \min(\chi_A(x), \chi_A(y))$.
Si au moins x ou $y \notin A$, alors au moins $\chi_A(x)$ ou $\chi_A(y)$ égal à 0. Par conséquent $\chi_A(xy^{-1}) \geq \min(\chi_A(x), \chi_A(y))$.Donc χ_A est un sous groupe

flou de G.

De plus pour tout $x, y \in G$ si $y \in A$, alors $xyx^{-1} \in A$ et
$\chi_A(xyx^{-1}) = 1 = \chi_A(y)$.
Si $y \notin A$, alors $\chi_A(y) = 0$ donc $\chi_A(xyx^{-1}) \geq \chi_A(y)$.
Alors $\chi_A$est un sous groupe normal flou de G.
$\Leftarrow$) Si χ_A est un sous groupe normal flou de G, alors pour tout $x, y \in A$, on a $\chi_A(xy^{-1}) \geq \min(\chi_A(x), \chi_A(y)) = 1$ donc $\chi_A(xy^{-1}) = 1$ et xy^{-1} $\in A$.
De plus pour tout $y \in \mu, x \in G$ on a $\chi_A(xy^{-1}) \geq \chi_A(y) = 1$
alors $\chi_A(xy^{-1}) = 1$ et $xyx^{-1} \in A$, donc A est un sous groupe normal de G.

Soit N un sous groupe normal d'un groupe G. On rappele que un groupe quotient G/N induit par N est déterminé par une relation d'équivalence $\Re$ telque $x\Re y$ est définit par $xy^{-1} \in N$ et on écrit $x\Re y(N)$ si $x\Re y$ sur N et $x\Re y(\chi_N)$ si $x\Re y$ sur le sous groupe normal flou χ_N.

Lemme 3.2.3 :[5]

Si N est un sous groupe normal d'un groupe G, Alors $x\Re y(N)$ si et seulment si $x\Re y(\chi_N)$.

corollaire 3.2.3 :[5]

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un épimorphisme de groupe et N est un sous groupe normal de G telque $\ker(f) \subseteq N$,Alors $G/\chi_N \cong G'/\chi_{f(N)}$.

Preuve:

Par la proposition (3.2.5) χ_N et $\chi_{f(N)}$ sont des sous groupes normaux flous de G et G' respectivment.
On pose $\mu = \chi_N$ dans la théoreme (3.2.2) on obtient $G_\mu = G_{\chi_N}$ $= N \supseteq \ker f$.
Puisque f est un épimorphisme , alors pour tout $y \in G'$ $\exists$ $x \in G$ telque $y = f(x)$.
Si $y \in f(N)$, alors $x \in N$, par lemme (3.2.2) l'assertion (2)
donne $f(\mu)(y) = f(\chi_N)(f(x)) = \chi_N(x) = 1 = \chi_{f(N)}(y)$.

Si $y \notin f(N)$ alors $x \notin N$ et $f(\mu)(y) = f(\chi_N)(f(x)) = \chi_N(x) = 0 = \chi_{f(N)}(y)$. Donc $G/\chi_N \cong G'/\chi_{f(N)}$.

Par lemme (3.2.3) on obtient $G/\chi_N \cong G/N$ et $G'/\chi_{f(N)} \cong G'/f(N)$, ces derniés avec la corollaire précidente nous donnent la premier théoreme d'isomorphisme.

Corollaire 3.2.4 :[5]

Si $f : G \longrightarrow G'$ est un épimorphisme de groupes et K est un sous groupe normal de G', alors $G/\chi_{f^{-1}(K)} \cong G'/\chi_K$.

Preuve:

Par la proposition (3.2.1) on observe que $\chi_{f^{-1}(K)}$ et χ_K sont des groupes normaux flous de G et G' respectivment. On pose $\nu = \chi_K$, on a $f^{-1}(\nu) = f^{-1}(\chi_K) = \chi_{f^{-1}(K)}$.
En fait, si $x \in f^{-1}(K)$. Alors $f(y) \in K$, $f^{-1}(\chi_K)(x) = \chi_K(f(x)) = 1$ $= \chi_{f^{-1}(K)}(x)$.
Si $x \notin f^{-1}(K)$. Alors $f(x) \notin K$, $f^{-1}(\chi_N)(x) = \chi_K(f(x)) = 0$ $= \chi_{f^{-1}(K)}(x)$.
Donc $G/\chi_{f^{-1}(K)} \cong G'/\chi_K$.

Lemme 3.2.4 :[5]

Si N est un sous groupe normal et μ est un sous groupe normal flou d'un groupe G, alors μ restreint à N est un sous groupe normal flou de N et N/μ est un sous groupe normal de G/μ.

Preuve:

On sait que si μ_a , $\mu_b \in N/\mu$ telque $a, b \in N$, alors $\mu_a(\mu_b)^{-1} = \mu_a\mu_{b^{-1}} = \mu_{ab^{-1}} \in N/\mu$.
Si $\mu_a \in N/\mu$, $\mu_x \in G/\mu$, telque $a \in N$ et $x \in G$, alors $xax^{-1} \in N$ et

$\mu_x\mu_a(\mu_x)^{-1} = \mu_x\mu_a\mu_{x^{-1}} = \mu_{xax^{-1}} \in N/\mu$.
Donc N/μ est un sous groupe normal de G/μ.

Théoreme 3.2.3 :[5]

Si μ et ν deux sous groupes normaux flous d'un groupe G telque $\mu(e) = \nu(e)$, alors $G_\mu G_\nu/\nu \cong G_\mu/\mu \cap \nu$.

Ce théoreme est équivalent au le deuxiéme théoreme d'isomorphisme cité dans le premier chapitre.

Preuve:

Par lemme (3.2.4), ν est un sous groupe normal flou de $G_\mu G_\nu$.
On a $\mu \cap \nu$ est un sous groupe normal flou de G_μ .
Alors $G_\mu G_\nu/\nu$ et $G_\mu/(\mu \cap \nu)$ sont des groupes. Pour $\forall x \in G_\mu G_\nu$,on a $x = ab$ telque $a \in G_\mu$ et $b \in G_\nu$, on définit $g : G_\mu G_\nu/\nu \longrightarrow G_\mu/(\mu\cap\nu)$ on pose $g(\mu_x) = (\mu \cap \nu)_a$.Si $\mu_x = \nu_y$, telque $y = a_1b_1, a_1 \in G_\mu$ et $b_1 \in G_\nu$ alors $\nu(ab(a_1b_1)^{-1}) = \nu(abb_1^{-1}a_1^{-1}) = \nu(a_1^{-1}abb_1^{-1}) = \nu(a_1^{-1}a(b_1b^{-1})^{-1}) = \nu(e)$.
Donc $\nu(a_1^{-1}a) = \nu(b_1b^{-1}) = \nu(e)$.Alors, $(\mu\cap\nu)(aa_1^{-1}) = \min\{\mu(aa_1^{-1}), \nu(aa_1^{-1})\}$ $= \min\{\mu(e), \nu((a_1a^{-1}))^{-1}\} = \min\{\mu(e), \nu(e)\} = \mu \cap \nu(e)$ i.e. $(\mu \cap \nu)_a = (\mu \cap \nu)_{a_1}$. Donc g est bien définié. Si $\mu_x, \nu_y \in G_\mu G_\nu/\nu$, telque $x = ab$, $y = a_1b_1$ telque $a, a_1 \in G_\mu$ et $b, b_1 \in G_\nu$ alors, $xy = aba_1b_1$. Comme G_μ est normal, $ba_1b_1 \in G_\mu$ alors, $g(\nu_x\nu_y) = g(\nu_{xy}) = (\mu \cap \nu)_{a(ba_1b_1)} = (\mu\cap\nu)_a(\mu\cap\nu)_{ba_1b_1}$ et $\mu\cap\nu((ba_1b_1)a_1^{-1}) = \min\{\mu(ba_1b_1a_1^{-1}), \nu(ba_1b_1a_1^{-1})\}$ $= \min\{\mu(ba_1b_1a_1^{-1}), \nu(b(a_1b_1a_1^{-1}))\} = \min\{\mu(e), \nu(e)\} = \mu \cap \nu(e)$.
Donc $(\mu \cap \nu)_{ba_1b_1} = (\mu \cap \nu)_{a_1}$ i.e. $g(\nu_x\nu_y) = (\mu \cap \nu)_a(\mu \cap \nu)_{a_1} = g(\mu_x)g(\nu_y)$. Donc g est un homomorphisme.
Il est aussi un endomorphisme , comme $(\mu\cap\nu)_a \in G_\mu/(\mu\cap\nu)$ et $b \in G_\nu$, on a $x = ab \in G_\mu G_\nu$ et $g(\nu_x) = (\mu \cap \nu)_a$. De plus si $x, y \in G_\mu G_\nu$ d'ou $x = ab, y = a_1b_1$telque $a, a_1 \in G_\mu$ et $b, b_1 \in G_\nu$,et $(\mu \cap \nu)_a = (\mu \cap \nu)_{a_1}$
Alors, $\mu \cap \nu(a_1a_1^{-1}) = \mu \cap \nu(e)$, i.e. $\min\{\mu(a_1a_1^{-1}), \nu(a_1a_1^{-1})\} =$

$\min\{\mu(e), \nu(e)\}$ mais $\mu(e) = \nu(e)$ et $\mu(a_1a_1^{-1}) = \nu(e)$ implique que $\nu(a_1a_1^{-1}) = \nu(e)$. Ainsi $\nu(xy^{-1}) = \nu(ab(a_1b_1)^{-1}) = \nu(abb_1^{-1}a_1^{-1}) = \nu(a_1^{-1}abb_1^{-1}) \geq \min\{\nu(a_1^{-1}a_1), \nu(b_1b_1^{-1})\} = \min\{\nu((a_1a_1^{-1})^{-1}), \nu(a_1a_1^{-1})\} = \min\{\nu(e), \nu(e)\} = \nu(e)$, par conséquence $\nu_x = \nu_y$, donc $G_\mu G_\nu/\nu \cong G_\mu/\mu \cap \nu$.

Corollaire 3.2.5 :[5]

Soient N, K deux sous groupes normaux d'un groupe G. Alors

$$NK/\chi_K \cong N/\chi_{N\cap K}.$$

Preuve:

Par la proposition (3.2.5) χ_N et χ_K sont deux sous groupe normaux flous de G. On pose $\mu = \chi_N$ et $\nu = \chi_K$ dans la théoreme (3.2.3) on obtient $G_\mu = N$ et $G_\nu = K$, $\mu \cap \nu = \chi_N \cap \chi_K = \chi_{N\cap K}$ et $\mu(e) = 1 = \nu(e)$. Donc $NK/\chi_K \cong N/\chi_{N\cap K}$.

Théoreme 3.2.4 :[5]

Soient μ et ν deux sous groupes normaux flous d'un groupe G, avec $\nu \leq \mu$ et $\nu(e) = \mu(e)$, alors $(G/\nu)/(G_\mu/\nu) \cong G/\mu$.

Ce théoreme est équivalent au le troisiéme théoreme d'isomorphisme cité dans le premier chapitre.

Preuve:

Par lemme (3.2.4) G_μ/ν est un sous groupe normal de G/ν.
On pose $f(\nu_x) = \mu_x$ pour $\forall x \in G$, on définit $f : G/\nu \longrightarrow G/\mu$ telque $\nu(xy^{-1}) = \nu(e) = \mu(e)$ pour tout $\nu_x = \nu_y$. Car $\nu \leq \mu$, on a $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(xy^{-1}) = \mu(e)$, i.e. $\mu_x = \mu_y$ donc f est bien définié.
Comme $f(\nu_x\nu_y) = f(\nu_{xy}) = \mu_{xy} = \mu_x\mu_y = f(\nu_x)f(\nu_y)$, alors f est

un homomorphisme, et par définition on a f est un épimorphisme .
On a $\ker f = \{\nu_x \in G/\nu \mid f(\nu_x) = \mu_e\}$
$= \{\nu_x \in G/\nu \mid \mu_x = \mu_e\}$
$= \{\nu_x \in G/\nu \mid \mu(x) = \mu(e)\}$
$= \{\nu_x \in G/\nu \mid x \in G_\mu\} = G_\mu/\nu$.
Donc $\ker f = G_\mu/\nu$ et $(G/\nu)/(G_\mu/\nu) \cong G/\mu$.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une vision générale sur les groupes et quelques notions comme les sous groupes, groupes quotients et les théoremes d'isomorphisme. De plus, nous avons rappelé quelque généralités sur les ensembles flous et les opérations flous (l'union, l'intersection......). Finalement nous avons étudié les groupes quotient induit par les sous groupes flous et quelques théoremes d'isomorphisme et homomorphisme des groupes flous.

Bibliographie

[1] **L. A. Zadeh**. Fuzzy sets, Inform. Control **8** (1965), 338 - 353.

[2] **A. Rosenfeld**. Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 512 - 517.

[3] **N. Ajmal**. Homomorphism of fuzzy groups, correspondence theorem and fuzzy quotient groups, Fuzzy Sets and Systems **61** (1994), 329 - 339.

[4] **W. M. Wu**. Normal fuzzy subgroups, Fuzzy Math. **1** (1981), 21 - 30.

[5] **Y.Lin Lui.** quotient groupe induced by fuzzy subgroupe, quasigroups and related systems **11**.(2004),71-78.

[6] **N. P. Mukherjee and P. Bhattacharya**. Fuzzy groups: some grouptheoretic analogs, Inform. Sci. **39** (1986), 247 - 268.

[7] **D.Guin,T.Hausberger. Algébre** I, GROUPES, CORPS ET THÉORIÉ DE GALOIS, EDP Sciences, 2008,France.

[8] **Fang**, **J.X.** Fuzzy homomorphism and fuzzy isomorphism, Fuzzy Sets and Systems, **63** (1994), 237-242.

[9] **S.Ambapour**.Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo, Bamsi, 2009, Barazzaville.

[10] **L. N. M. Tawfiq , M. M. Qa'aed**. On Fuzzy Groups and Group Homomorphism, Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Science **2 (**2012**),** 100-107.

Résumé

L'objectif principal de la première partie de notre mémoire est de donner quelques notions fondamentales sur les groupes et ses propriétés, nous étudions quelques notions et généralités sur les ensembles flous et quelques propriétés sur les opérations flous dans la deuxième partie.

Dans la troisième partie nous étudions une méthode de construction de groupes quotients par des sous groupes normaux flous et nous utilisons cette construction pour l'étude des théorèmes concernant les isomorphismes des groupes.

Abstract

The main objective of first part of our memory is to give some fundamental concepts of groups and its properties, the study of fuzzy sets and some properties of fuzzy operations in the second part.

In the third part, it will study a method of construction of quotient groups by fuzzy normal subgroups and we use this construction for the study of theorems concerning the isomorphism of the groups.

ملخص

الهدف الرئيسي من الجزء الاول من عملنا هو إعطاء بعض المفاهيم الأساسية حول الزمر و خصائصها . تمت دراسة عموميات حول المجموعات الضبابية إضافة إلى بعض خواص العمليات الضبابية في الجزء الثاني.

في الجزء الثالث درسنا منهجية بناء حاصل زمرة بواسطة زمرة ضبابية جزئية سوية و قد استعملنا هدا البناء لدراسة ما يتعلق بتشاكلات الزمر.