جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière Mathématiques**:**
Option : Analyse mathématiques et Numérique

Par
Dilmi Nour El houda

Sujet

Résolution numérique des équations intégrales

Devant le jury :

Mr. **GAGUI Bachir**	MCA	. Univ de M'sila	Président
Mr. **DJAIJA Noui**	MAA	. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. **KHIRANI Amina**	MCB	. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grâce à Lui ce travail de a pu être réaliser.**Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma profonde grantitude envers (Ma encadreur **DJAIJA Noui**)qui a accepté d'encadrer ce travail. Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire. Merci aussi pour toutes les relecteures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cette mémoire de Master.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

B. GAGUE

A. KHIRANI

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loi et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Finalement, je voudrais, maintenant, une place toute particulièrment à mes parents. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profonde reconnaissance.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A mes très chers parents
A mes frères, mes soeurs et mes amies

Table des matières

Introduction

Les méthodes numériques de résolution des équations intégrales jouent un rôle très important dans plusieurs investigations scientifique, avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour attaquer les différent problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible a résoudre dans le passé.

Ainsi, de ce qui concerne notre sujet il existe un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, de ce fait , il est impossible alors de recouvrir le tout , ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique , ce pendant le but est d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon trois axes :

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de solution et surtout d'exhiber des méthodes efficaces d'approximation.

L'analyse numérique, qui étudie ces méthodes, principalement dans le cadre des mathématiques discrètes(approximation des quantités qui se présentent sous le signe intégrale via des règles de quadratures, interpolation polynomial,...) et la résolution itérative des systèmes linéaires.

La programmation sur machine, qui retranscrit ses méthodes sous forme d'algorithmes efficaces.

Dans ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires de Volterra, on va chercher une solution approchée par les méthodes des splines est partagé en trois parties :

Chapitre I : On commence par une rappels sur les espaces, l'opérateur intégral linéaire et l'opérateur adjoint, notions d'analyse numerique : intégration numérique, les méthodes de quadratures, interpolation polynomiale et les splines.

Chapiter II : Présente les équations intégrales on a la classification des équations intégrales linéaires, transformation de l'équation intégrale de Volterra de première espèse a l'équation de Volterra de seconde espèce, liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, et résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce en utilise les théorèmes du point fixe pour l'éxistence et l'unicité de la solution de *l'équation intégrale de Volterra.*

Chapiter III : C'est une partie purement pratique, elle met en oeuvre certaines techniques des résolutions des équations intégrales de Volterra de second espéce par les méthodes des splines (spline lineaire, spline quadratique et spline cubique) .

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et Numerique

L'objectif de ce chapitre est de rappeler des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est composé de trois sections, la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces de Hilbert et les espaces $L^2([a,b])$. La deuxième section pour les opérateurs intégrales et l'opérateur adjoint. La dernière section, rappeler des notions d'analyse numérique : intégration numérique, les méthodes de quadratures, interpolation polynomiale et les splines.

1.1 *Notions d'analyse fonctionnelle*

Définition 1.1.1 ***(Espace vectoriel normé)*** *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$ $(\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\Bbbk$*

-$\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.
-$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$(homogènéité).
-$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$(inégalité triangulaire).

Définition 1.1.2 *Toute espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.*

Définition 1.1.3 ***(L'espace normé $\mathcal{L}(E,F)$)*** *Si $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de E dans F. Lorsque $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$.*

Définition 1.1.4 ***(Espace de Banach)*** *On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme*

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Théorème 1.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que l'espace F est complet .Alors l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ et complet.*

Corollaire 1.1.1 *Si E est un espace vectoriel normé. Alors $\mathcal{L}(E,\mathbb{k})$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach*

Lemme 1.1.1 *Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.5 ***(produit scalaire)*** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle .,. \rangle$ possédant les propriétés suivantes:*

Pour tout x, y, z dans E et α, β dans $\mathbb{R}$,

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$
4) $\langle x, x \rangle = 0$, implique $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhibertien.

Remarque 1.1.1 *Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.6 ***(Espace de Hilbert)*** *Un espase de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et qui est complet pour la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.*

Définition 1.1.7 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach (donc complet) dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien par le signe $\langle .,. \rangle$. C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace Euclidien ou hermitien.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

voir [1] et [2]

Définition 1.1.8 ***(Espace** $L^2([a,b])$)* *On dit qu'une fonction $f(x)$ est de carré intégrable sur $[a,b]$ si l'intégrale*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a,b]$ sera noté $L^2([a,b])$.

propriétés fondamentales des fonctions de $L^2([a,b])$

1. *Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction carré intégrable .*

2. *La somme de deux fonctions de $L^2([a,b])$ est une fonction de $L^2([a,b])$.*

3. *Si $f \in L^2([a,b])$ et si λ est un nombre réel quelconque, alors $\lambda f \in L^2([a,b])$.*

4. *Si $f(x) \in L^2([a,b])$ et $g(x) \in L^2([a,b])$, on a l'inégalité de Bouniakovski Schwarz*

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx. \tag{1.1.1}$$

Le produit scalaire de deux fonctions $f(x) \in L^2([a,b])$, $g(x) \in L^2([a,b])$ est le nombre

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \tag{1.1.2}$$

On appelle norme d'une fonction $f(x)$ *de* $L^2([a,b])$ *le normbre*

$$\|f\|^2 = (\langle f, f\rangle) = \int_a^b f^2(x)dx. \tag{1.1.3}$$

5. *Pour* $f(x)$ *et* $g(x)$ *de* $L^2([a,b])$, *on a l'inégalité triangulaire*

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|. \tag{1.1.4}$$

6. *Soient* $f_n(x)$, *une suite de fonctions de carré intégrable sur* $[a,b]$.

$$Si \qquad \lim_{x \longrightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = 0,$$

On dit que la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne ou, plus précisément, en moyenne quadratique vers* $f(x)$ *.*

Si une suite $\{f_n(x)\}$ des fonctions de L^2 converge uniformément vers $f(x)$, alors $f(x) \in L^2$ et $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers $f(x)$. On dit qu'une suite $\{f_n(x)\}$ des fonctions de L^2 converge en moyenne vers un de ses propres éléments si à chaque $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $N > 0$ tel qu'on ait

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 \, dx \leq \varepsilon$$

Pour $n > N$ *et* $m > N$. *De telles suites sont appelées suites de Cauchy.*

Pour qu'une suite $\{f_n(x)\}$ *converge en moyenne vers une fonction, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy L'espace* L^2 *complet, c'est-à-dire toute suite de Cauchy de* L^2 *converge vers une fonction de* L^2.

1.1.1 *Opérateur intégral linéaire:*

Définition 1.1.9 *Soit* $k : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur* $C([a,b])$ *est définit par la formule suivante:*

$$A : \varphi \in C[a,b] \longrightarrow A\varphi \in C[a,b] \tag{1.1.5}$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{1.1.6}$$

Dans ce contexte la fonction k s'appelle noyau de l'opérateur intégral A.

1.1.2 *Opérateur adjoint*

Définition 1.1.10 *Soit X et Y deux espaces de Hilbert, soit $A \in L(X,Y)$ .Alors il existe un unique opérateur $A^* \in L(Y,X)$,tel que*

$$\text{Pour tout } u \in X, v \in Y; \quad \langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle .$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de A

Théorème 1.1.3 *[4] Soit un opérateur intégral A défini à partir d'un noyau k continu sur $[a,b] \times [a,b]$ par la formule*

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad x \in [a,b] \tag{1.1.7}$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de $L^2([a,b])$, défini par :

$$\forall x \in [a,b] \quad A^*\psi(x) = \int_a^b k(y,x)\,\psi(y)\,dy \tag{1.1.8}$$

Preuve.

Soient φ et ψ deux fonctions de $C[a,b]$ on a

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi), \psi\rangle &= \langle \varphi, A^*(\psi)\rangle \Leftrightarrow \int_a^b \varphi(y)\,A^*(\psi(y))\,dy = \int_a^b A(\varphi)(x)\,\psi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy\right] \psi(x)\,dx \end{aligned}$$

En vertu du théorème de fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\begin{aligned}\langle A(\varphi),\psi\rangle &= \int_a^b\int_a^b [k(x,y)\psi(x)\,dx]\,\varphi(y)\,dy\\ &= \int_a^b \varphi(y)\left[\int_a^b k(x,y)\psi(x)\,dx\right]dy = \int_a^b \varphi(y)\,A^*(\psi)(y)\,dy\end{aligned}$$

Il en résulte que l'adjoint A^**est défini par*$\forall x\in[a,b]\quad A^*\psi(x)=\int_a^b k(y,x)\psi(y)\,dy.$[5] ■

1.2 *Notions d'analyse numérique*

1.2.1 *Intégration numérique*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue donnée sur un intervalle* $[a,b]$*, nous voulons calculer numériquement la quantité*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Pour ce faire nous commençons par partitionner l'intervalle d'intégration en N *intervalle de même longueur* $[x_i,x_{i+1}]$*,* $i=1,...,N$ *tels que*

$$a=<x_1<...<x_{N-1}<x_N=b,$$

où

$$x=a+h(i-1),\qquad h=\frac{b-a}{N-1}.$$

Il est clair que lorsque N *augmente, nous pouvons placer les points* x_i *de sorte à ce que* h *soit petit.*

Posons

$$x_i=a+h(i-1),\quad i=1,...,N$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{i=N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

1.2.2 *Les Méthodes de quadratures*

la formule du trapèze

Cette formule est obtenue en remplaçant f par $I_1 f$, son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux noeuds $x_0 = a$ et $x_1 = b$.

Les noeuds de la formule de quadrature sont alors $x_0 = a$, $x_1 = b$ et ses poids $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]. \tag{1.2.1}$$

Si $f \in C^2([a,b])$, l'erreur de quadrature est donnée par

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),\ h = b-a, \tag{1.2.2}$$

où ξ est un point de l'intervalle d'intégration.

Pour obtenir la formule du trapèze composite, on procède comme dans le cas où $n = 0$: on remplace f sur $[a,b]$ par son polynôme composite de Lagrange de degré 1 sur N sous–intervalles, avec $N \geq 1$. En introduisant les noeuds de quadrature $x_k = a + kh$, pour $k = 0, \cdots, N$ et $h = (b-a)/(N-1)$, on obtient

$$I_{1,N}(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right), \quad N \geq 1, \tag{1.2.3}$$

où $x_0 = a$ et $x_N = b$.*Chaque terme dans* (1.2.3) *apparaît deux fois, exceptés le premier et le dernier. La formule peut donc s'écrire*

$$I_{1,N}(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right]. \tag{1.2.4}$$

Comme on l'a fait pour (1.2.5)*, on peut montrer que l'erreur de quadrature associée à* (1.2.4) *s'écrit,si $f \in C^2([a,b])$,*

$$E_{1,N}(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi),$$

où $\xi \in \left]a,b\right[$. Le degré d'exactitude est à nouveau égale à 1, telle que

$$E_{0,N}(f) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \tag{1.2.5}$$

La formule de Cavalieri-Simpson

La formule de Cavalieri-Simpson peut être obtenue en remplaçant f sur $[a, b]$ par son polynôme d'interpolation de degrré 2 aux noeuds $x_0 = a, x_1 = (a+b)/2$ et $x_2 = b$.

Les poids sont donnés par $\alpha_0 = \alpha_2 = (b-a)/6$ et $\alpha_1 = 4(b-a)/6$, et la formule s'écrit

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \tag{1.2.6}$$

On peut montrer que, si $f \in C^4([a, b])$, l'erreur de quadrature est

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \; h = \frac{b-a}{2}, \tag{1.2.7}$$

Où ξ est dans $]a, b[$. On en déduit que la formule (1.2.6) a un degré d'exactitude égal à 3.

En remplaçant f par son polynôme composite de degré 2 sur $[a, b]$, on obtient la formule composite correspondant à (1.2.6). On introduit les noeuds de quadrature $x_k = a + kH/2$, pour $k = 0, \ldots, 2m$ et on pose $H = (b-a)/m$, avec $m \geq 1$. On a alors

$$I_{2,m} = \frac{H}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m})\right], \tag{1.2.8}$$

Où $x_0 = a$ et $x_{2m} = b$. Si $f \in C^4([a, b])$, l'erreur de quadrature associée à (1.2.8) est

$$E_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180}(H/2)^4 f^{(4)}(\xi),$$

Où $\xi \in]a, b[$; le degré d'exactitude de la formule est 3.

1.2.3 *Interpolation polynomiale:*

Considérons $n+1$ couples (x_i, y_i). Le problème est de trouver un polynôme P_m de degrré inferieur ou égale m, appelé polynôme d'interpolation ou polynôme interpolant, tel que

$$P_m(x_i) = a_m x_i^m + \ldots + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \ldots, n.$$

Les points x_i sont appelés noeuds d'interpolation .

Si $n \neq m$ le problème est sur ou sous-déterminé .

Si $n = m$, on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 *Etant donné $n+1$ points distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0, \ldots, y_n$, il existe un unique polynôme P_n de degrré inferieur ou égale n tel que $P_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.*

1.2.4 *Erreur d'interpolation*

Dans cette section, nous évaluons l'erreur d'interpolation faite quand on remplace une fonction f donnée par le polynôme $P_n f$ qui l'interpole aux noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Théorème 1.2.2 *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ noeuds distincts et soit x un point appartenant au domaine de définition de f. On suppose que $f \in C^{n+1}(I_x)$, où I_x est le plus petit intervalle contenant les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et x. L'erreur d'interpolation au point x est donnée par*

$$E_n(x) = f(x) - P_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{1.2.9}$$

Où $\xi \in I_x$ et ω_{n+1} est le polynôme nodal de degré $n+1$.

Preuve. *Le résultat est évidemment vrai si x coïncide avec l'un des noeuds d'interpolation. Autrement, définissons pour $t \in I_x$, La fonction $G(t) = E_n(t) - \omega_{n+1}(t) E_n(x) / \omega_{n+1}(x)$. Puisque $f \in C^{n+1}(I_x)$ et puisque ω_{n+1} est un polynôme, $G \in C^{n+1}(I_x)$ et possède au moins $n+2$ zéros distincts dans I_x. En effet,*

$$\begin{aligned} G(x_i) &= E_n(x_i) - \omega_{n+1}(x_i) E_n(x) / \omega_{n+1}(x) = 0, \quad i = 0, \ldots, n, \\ G(x) &= E_n(x) - \omega_{n+1}(x) E_n(x) / \omega_{n+1}(x) = 0. \end{aligned}$$

A*insi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, G' admet au moins $n+1$ zéros distincts, et par récurrence, $G^{(j)}$ a au moins $n+2-j$ zéros distincts. Par conséquent, $G^{(n+1)}$ a au moins un zéro, qu'on note ξ. D'autre part, puisque $E_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $\omega_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ on a*

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{\omega_{n+1}(x)} E_n(x),$$

ce qui donne, avec $t = \xi$, l'expression voulue pour $E_n(x)$. ■

1.2.5 *les splines*

Dans cette section, nous définissons la fonction spline la plus utilisée, qui se composent de trois types de spline simples pour l'approximation et l'interpolation des données : spline linéaire,spline quadratique et spline cubique.

Splines linéaires

Étant donnés $(n+1)$ *points* (x_i, y_i) , *on cherche une spline linéaire* $S(x)$ *de la forme*

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 x + b_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Vérifiant la condition d'interpolation

$$S(x_i) = y_i$$

La première question à laquelle if faut rèpondre est : la spline $S(x)$ *est-elle unique ?*
La détermination de $S(x)$ *nécessite le calcul de* $2n$ *coefficients* a_i *et* b_i. $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.
Pour cela on dispose de $2n$ *équations :*

- $(n+1)$ *équations d'interpolation* $(i = 0, 1, \dots, n)$

$$\begin{aligned} S(x_i) &= y_i \\ y_i &= a_i x_i + b_i \end{aligned}$$

- $(n-1)$ *équations de continuité de la spline*

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

$$a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1}$$

On déduit donc de manière unique

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - xi}, \ (i = 0, 1, \dots, n-1) \\ b_i &= y_i - a_i x_i, \ (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Splines quadratiques [8]

Nous avons vu précédemment que la spline linéaire ne permettait d'assurer que la continuité de la fonction $S(x)$. Si on veut que $S(x)$ soit continuement dérivable, il faut donc choisir des polynômes $S_i(x)$ de degré au moins égal à 2

Définition 1.2.1 *Supposons donnés $(n+1)$ points définis par les couples (x_i, y_i), $(i = 0, 1, \ldots, n)$. L'interpolation par des splines quadratiques équivaut à l'approximation sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme du second degré. On impose aux différents points la continuité des valeurs des polynômes et de leurs dérivées.*

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0, \quad x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad x \in [x_1, x_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Exemple 1.2.1 *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

représente une spline quadratique. En effet.

-elle est définie sur $]-\infty, +\infty[$

-elle est continue sur $]-\infty, +\infty[$

-sa dérivée est continue sur $]-\infty, +\infty[$

* $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$

* $f'(1^-) = f'(1^+) = -2$

La spline $S(x)$ est -elle unique ? La détermination de $S(x)$ nécessite le calcul des $3n$ coefficients a_i et b_i, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Pour cela on dispose seulement de $(3n-1)$ équations :

- *$(n+1)$ équations d'interpolation $(i = 0, 1, \ldots, n)$*

$$S_i(x_i) = y_i$$

$$y_i = a_ix_i^2 + b_ix_i + c_i$$

- $(n-1)$ *équations de continuité de la spline*

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2)$$

- $(n-1)$ *équations de continuité de sa dérivée*

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2)$$

Pour pouvoire résoudre le problème, il est donc nécessaire de fixer une condition supplémentaire.

Pour cela définissons la variable auxiliaire $z_i = S'(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *et récrivons* $S_i(x)$ *sous la forme*

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i$$

Des conditions d'interpolation, il apparait clairement que sous cette forme, les c_i *sont déterminés de manière unique*

$$c_i = S_i(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2)$$

De plus, par définition

$$S_i'(x_i) = b_i = z_i \tag{1.2.10}$$

Ce qui détermine les b_i*. En écrivant maintenant les conditions de continuité de la dérivée, on obtient*

$$2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i = 2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2)$$

En utilisant(1.2.10), *on obtient les* a_i

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}$$

$S_i(x)$ *se met donc sous la forme*

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + z_i(x - x_i) + y_i$$

Il ne reste plus qu'à calculer les z_i. Pour cela on écrit les équations de continuité de la spline au point x_{i+1}

$$\begin{aligned} S_i\left(x_{i+1}\right) &= \frac{z_{i+1}-z_i}{2\left(x_{i+1}-x_i\right)}\left(x_{i+1}-x_i\right)^2+z_i\left(x_{i+1}-x_i\right)+y_i \\ &= \frac{z_{i+1}-z_i}{2}\left(x_{i+1}-x_i\right)+z_i\left(x_{i+1}-x_i\right)+y_i \\ &= y_{i+1} \end{aligned}$$

On déduit donc que

$$z_{i+1}=2\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-z_i \quad (i=0,1,\ldots,n-1)$$

Et on voit apparaître naturellement la condition supplémentaire qui sera ici une condition d'initialisation de la récurrence sur les z_i. On doit donc choisir

$$z_0=S_0'\left(x_0\right)$$

Splines d'interpolation cubiques

Considérons, dans $[a,b]$, $n+1$ noeuds $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ et les valeurs correspondantes $f_i, i=0,\ldots,n$. Notre but est de définir un procédé efficace pour construire la spline cubique interpolant ces valeurs. la spline étant de degré 3, sa dérivée seconde doit être continue. Introduisons les notations suivantes :

$$f_i=S_3(x_i), \quad m_i=S_3'(x_i), \quad M_i=S_3''(x_i), \quad i=0,\ldots,n.$$

Comme $s_{3,i-1}\in P_3$, $s_{3,i-1}''$est linéaire et

$$S_{3,i-1}''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \text{ pour } x\in\left[x_{i-1},x_i\right], \tag{1.2.11}$$

Où $h_i=x_i-x_{i-1}$, pour $i=1,\ldots,n$. En intégrant deux fois (1.2.11) on obtient

$$S_{3,i-1}\left(x\right)=M_{i-1}\frac{\left(x_i-x\right)^3}{6h_i}+M_i\frac{\left(x-x_{i-1}\right)^3}{6h_i}+C_{i-1}\left(x-x_{i-1}\right)+\tilde{C}_{i-1},$$

Les constantes C_{i-1} et $\tilde{C}_{i-1}$ sont déterminées en imposant les valeurs aux extrémités $s_3\left(x_{i-1}\right)=f_{i-1}$ et $s_3\left(x_i\right)=f_{i.}$ Ceci donne, pour $i=1,\ldots,n-1$

$$\tilde{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}, C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(M_i - M_{i-1}\right).$$

Imposons à présent la continuité de la dérivée première en x_i; on obtient

$$\begin{aligned} S_3'\left(x_i^-\right) &= \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \\ &= -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = s_3'(x_i^+), \end{aligned}$$

Où $S_3'(x_i^{\overset{+}{-}}) = \lim_{t\longrightarrow 0} S_3'\left(x_i \overset{+}{-} t\right)$. *Ceci conduit au système linéaire suivante (appelé système de M-continuité)*

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.2.12}$$

Où on a posé

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}},$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Le système (1.2.12) *a* $n+1$ *inconnues et* $n-1$ *équations;*2 *(C'est-à-dire* $k-1$*) conditions restent donc à fixer. En général, ces conditions sont de la forme*

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \;\; \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n,$$

Où $0 \leq \lambda_0, \mu_n \leq 1$ *et* d_0, d_n *sont des valeurs données.*

Par exemple, pour obtenir les splines naturelles (satisfaisant $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$*), on doit annuler les coefficients ci-dessus.*

Un choix fréquent consiste à poser $\lambda_0 = \mu_n = 1$ *et* $d_0 = d_1, d_n = d_{n-1}$*, ce qui revient à prolonger la spline au-delà des points extrêmes de l'intervalle* $[a, b]$ *et à traiter* a *et* b *comme des points internes.*

Cette stratégie donne une spline au comportement "régulier". Une autre manière de fixer λ_0*et* μ_n

(surtout utile quand les valeurs $f'(a)$ et $f'(b)$ ne sont pas connues) consiste à imposer la continuité de $S_3'''(x)$ en $x_1$et x_{n-1}.

Comme les noeuds $x_1$et x_{n-1} n'interviennent pas dans la construction de la spline cubique, celle-ci est appelée spline not-a-knot, avec pour noeuds "actifs" $\{x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n\}$ et interpolant f aux noeuds $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$.

En général, le système linéaire obtenu est tridiagonal de la forme

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1.2.13}$$

Remarque 1.2.1 *Une approche complètment différente pour construire S_3 consiste à se-donner une base $\{\varphi_i\}$ de l'espace S_3 (de dimension $n+3$) des splines cubiques. Nous considérons ici le cas où les $n+3$ fonctions de base φ_i ont pour support tout l'intervalle $[a, b]$.*

On définit les fonctions φ_i par les contraintes d'interpolation suivantes

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i\,j}, \quad \varphi_i'(x_0) = \varphi_i'(x_n) = 0 \text{ pour } i, j = 0, \ldots, n,$$

Et il faut encore définir deux splines φ_{n+1} et φ_{n+2}. Par exemple, si la spline doit satisfaire des conditions sur les dérivées aux extrémités, on impose

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x_j) &= 0, \quad j = 0, \ldots, n, \quad \varphi_{n+1}'(x_0) = 1, \quad \varphi_{n+1}'(x_n) = 0, \\ \varphi_{n+2}(x_j) &= 0, \quad j = 0, \ldots, n, \quad \varphi_{n+2}'(x_0) = 0, \quad \varphi_{n+2}'(x_n) = 1. \end{aligned}$$

La spline a alors la forme suivante

$$S_3(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \varphi_i(x) + f_0' \varphi_{n+1}(x) + f_0' \varphi_{n+2}(x),$$

Où f'_0 et f'_n sont deux valeurs données. La base obtenue $\{\varphi_i, i = 0, \ldots, n+2\}$, appelée base de splines cardinales, est souvent utilisée dans la résolution numérique d'équations différentielles ou intégrales. La spline change de signe entre chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ et $[x_j, x_{j+1}]$ et décroît rapidement vers zéro.

Proposition 1.2.1 *Soit $f \in C^2([a,b])$, et soit S_3 la spline cubique naturelle iterpolant f. Alors*

$$\int_a^b [S_3''(x)]^2\, dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2\, dx, \tag{1.2.14}$$

Avec égalité si et seulement si $f = S_3$.

Le résultat ci-dessus, appelé propriété de la norme du minimum, est encore valable si, au lieu des conditions naturelles, on impose des conditions sur la dérivée première de la spline aux extrémités .

La spline d'interpolation cubique S_f d'une fonction $f \in C^2([a,b])$, avec $S'_f(a) = f'(a)$ et $S'_f(b) = f'(b)$, satisfait également

$$\int_a^b \left[f''(x) - S_f''(x)\right]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2\, dx \quad \forall s \in S_3.$$

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur, on a le résultat suivant :

Proposition 1.2.2 *Soit $f \in C^4([a,b])$ et soit une partition de $[a,b]$ en sous intervalle de longueur h_i. On note $h = \max_i h_i$ et $\beta = h/\min_i h_i$. Soit S_3 la spline cubique interpolant f. Alors*

$$\left\| f^{(r)} - S_3^{(r)} \right\|_\infty \leq C_r h^{4-r} \left\| f^{(4)} \right\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2, 3, \tag{1.2.15}$$

Avec $C_0 = 5/384, C_1 = 1/24, C_2 = 3/8$ et $C_3 = \left(\beta - \beta^{-1}\right)/2$.

Par conséquent, la spline s_3 ainsi que ses dérivées première et seconde convergent uniformément vers ses f et vers ses dérivées quand h tend vers zéro. La dérivée troisième converge également, à condition que β soit uniformément borné

voir [5]

Chapitre 2

Equations intégrales

Dans ce chapitre, on présente la théorie des équations intégrales linéaire pour *la classification des équations intégrales, transformation de l'équation intégrale de Volterra de première espèse a l'équation de Volterra de seconde espèce, liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, et résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce en utilise* les théorèmes du point fixe pour l'éxistence et l'unicité de la solution de *l'équation intégrale de Volterra.*

Définition 2.0.2 *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconue figure sous le singe d'intégration* $\int$.

C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ *de la forme :*

$$\int_E k\left(x, y, \varphi\left(y\right)\right) dy = \lambda\varphi\left(x\right) + f\left(x\right), x \in E \tag{2.0.1}$$

où E est un espace mesuré, $f\left(x\right)$ une fonction mesurable donnée sur E, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et $k\left(x, y, \varphi\left(y\right)\right)$ une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

2.1 *Classification des équations intégrales*

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrirent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue .Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral.

Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration.

Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'itégration sont indéfinies.

L'adjective singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm telle que les deux limites d'intégration sont constantes une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy, \tag{2.1.1}$$

où $f(x)$, $k(x,y)$ *sont des fonctions connues et* λ *est un paramètre non nul, réel ou complexe.*

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. *Si $h(x) = 0$, l'équation* (2.1.1) *s'écrite*

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = 0. \tag{2.1.2}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. *Si $h(x) = cte \neq 0$, l'équation* (2.1.1) *s'écrite*

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.1.3}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce.

3. *Si* $h(x) \neq 0$*, l'équation* (2.1.1) *est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.*

Remarque 2.1.1

Si $f(x) = 0$*, l'équation* (2.1.1) *est dite homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale* (2.1.1) *est dite non homogène.*

Equations intégrales de Volterra

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.1.4}$$

1. *On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si* $h(x) = 0$*, donc l'équation* (2.1.4) *s'écrite*
$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = 0. \tag{2.1.5}$$

2. *On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si* $h(x) = cte \neq 0$*, donc l'équation* (2.1.4) *s'écrit*
$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.1.6}$$

3. *Si* $h(x) \neq 0$*, l'équation* (2.1.4) *est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.*

Remarque 2.1.2 *Si* $f(x) = 0$*, l'équation* (2.1.4)*est dite homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale* (2.1.4) *est dite non homogène.*

Remarque 2.1.3 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyou* k *vérifie la condition*

$$k(x,t) = 0, \quad \textit{pour } x < y.$$

Equation intégrale d'Abel

Définition 2.1.3 *[2]On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme*

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x).$$

où α *est une constante*, $0 < \alpha < 1.$

2.1.1 *Transformation de l'équation intégrale de Volterra de première espèse a l'équation de Volterra de seconde espèce*

Formule de Leibniz

Et donnée par la formule

$$\frac{d}{dx}\int_a^x k\,(x,t)\,y\,(t)\,dt = k\,(x,x)\,y\,(t) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k\,(x,t)\,y\,(t) = f\,(x)$$

Transformation par dérivation

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,dy = f(x),\;\; a \leq x \leq b \text{ et } a \leq y \leq x \tag{2.1.7}$$

où $\varphi\,(x)$ *est la fonction inconnue.*

Supposons que $k(x,y), \dfrac{\partial k(x,y)}{\partial x}, f(x)$*et* $f'(x)$ *sont continus pour* $a \leq x \leq b, a \leq y \leq x.$ *Dérivons (2.1.7) terme à terme par rapport à* x*, il vient*

$$k(x,x)\varphi\,(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\varphi\,(y)\,dy = f'(x), \tag{2.1.8}$$

si $k(x,x) \neq 0$ *pour tout* $a \leq x \leq b$*, alors on peut transformer l'équation (2.1.8) à l'équation intégrale de Volterra de second espèce*

$$\varphi\,(x) + \int_a^x \widetilde{k}\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,dy = \widetilde{f}(x), \tag{2.1.9}$$

où

$$\widetilde{k}\,(x,y) = \frac{1}{k(x,x)}.\frac{\partial k(x,y)}{\partial x},\;\; \widetilde{f}(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)}.$$

Si le noyau $\widetilde{k}(x, y)$ *est carré intégrable et* $\widetilde{f}(x) \in L_2[a, b]$ *l'équation (2.1.9) admet une solution unique* $\varphi \in L_2[a, b]$.

Toute solution $\varphi(x)$ *continue pour* $a \leq x \leq b$ *de l'équation (2.1.7) vérifie évidemment (2.1.8).D'autre part on a*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x k(x, y)\varphi(y)\,dy = k(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x, y)}{\partial x}\varphi(y)\,dy,$$

alors l'équation (2.1.8) s'écrite comme suit

$$\frac{d}{dx}\int_a^x k(x, y)\varphi(y)\,dy = f'(x),$$

d'où

$$\int_a^x k(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x) - f(a).$$

Donc si $f(a) = 0$ *l'équation (2.1.7)et(2.1.8)sont équivalentes.*

Transformation par intégration par partie

Il y a une autre méthode pour transformer l'équation (2.1.7) à l'équation de Volterra de second espèce.

Supposons que $k(x, y), \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}, f(x)$ *sont continus pour* $a \leq x \leq b, a \leq y \leq x$ *et utilisons l'intégration par partie dans(2.1.7) et posons*

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(y)\,dy,\ \psi(a) = 0,$$

on obtient

$$k(x, x)\psi(x) - \int_a^x \frac{\partial k(x, y)}{\partial y}\psi(y)\,dy = f(x).$$

Si $k(x, x) \neq 0$ *pour tout* $a \leq x \leq b$, *alors on peut transformer l'équation (2.1.7) à l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce*

$$\psi(x) - \int_a^x k_1(x, y)\psi(y)\,dy = f_1(x), \tag{2.1.10}$$

où

$$k_1(x, y) = \frac{1}{k(x, x)}.\frac{\partial k(x, y)}{\partial y},\ f_1(x) = \frac{f(x)}{k(x, x)}.$$

L'équation (2.1.10) admet une solution unique dans $L_2[a, b]$ *si* $k_1(x, y)$ *est carré intégrable et* $f_1(x) \in L_2[a, b]$.

Dérivons la solution $\psi(x)$ *nous obtenons la solution* $\varphi(x)$ *de (2.1.7*

2.1.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_n(x)y = F(x) \tag{2.1.11}$$

à coefficients continus $a_i(x)$, $i = 1,2,\cdots,n$ *avec les conditions initiales*

$$y(0) = C_{0,} \quad y^{'}(0) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}. \tag{2.1.12}$$

Peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de volterra de seconde espèce

.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x), \tag{2.1.13}$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \tag{2.1.14}$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{2.1.15}$$

D'où, vu les conditions initiales (2.1.14), *on obtient successivement*

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1 x + C_0. \tag{2.1.16}$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ fois}} f(x)dx = \frac{1}{(x-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Compte tenu de (2.1.15) *et* (2.1.16) *mettons l'équation différentielle* (2.1.13) *sous la forme*

$$\varphi(x)+\int\limits_0^x a_1(x)\varphi(t)dt+C_1a_1(x)+\int\limits_0^x a_2(x)(x-t)\varphi\left(t\right)dt+C_1xa_2(x)+C_0a_2(x)=F(x)$$

où

$$\varphi(x)+\int\limits_0^x \left[a_1\left(x\right)+a_2\left(x\right)\left(x-t\right)\right]\varphi(t)dt=F(x)-C_1a_1\left(x\right)-C_1xa_2\left(x\right)-C_0a_2\left(x\right). \quad (2.1.17)$$

Posant

$$K(x,t) = -\left[a_1\left(x\right)+a_2\left(x\right)\left(x-t\right)\right], \quad (2.1.18)$$

$$f(x) = F(x)-C_1a_1\left(x\right)-C_1xa_2\left(x\right)-C_0a_2\left(x\right) \quad (2.1.19)$$

l'équation (2.1.17) s'écrite

$$\varphi(x)=\int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt+f(x), \quad (2.1.20)$$

C'est-à dire nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Remarque 2.1.4 *L'unicité de la solution de l'équation* (2.1.20) *résulte de l'existance et l'unicité de la solution du problème de Cauchy* (2.1.13)−(2.1.14) *pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point* $x=0$.

Exemple 2.1.1

Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y''+xy'+y &= 0, \\ y(0) &= 1, \quad y'\left(0\right)=0 \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x). \quad (2.1.21)$$

Solution 2.1.1 *Alors*

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\, dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\, dt, \qquad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\, dt + 1. \tag{2.1.22}$$

Portons (2.1.21) *et* (2.1.22) *dans l'équation différentielle donnée, il vient*

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)\, dt + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\, dt + 1 = 0$$

Ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\, dt.$$

2.2 *Résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce*

2.2.1 *Les théorèmes du point fixe*

Définition 2.2.1 *Soient H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il existe une constante positive K telle que $0 < K < 1$ et*

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Théorème 2.2.1 *Soit A un opérateur borné dans un espace de Banach, alors l'equation*

$$A\varphi = \varphi \tag{2.2.1}$$

Admet une solution unique φ dans l'espace de Banach, cette solution est le point fixe de cet opérateur .

Preuve. *Pour démontrer l'existance de la solution de l'équation* (2.2.1) *on utilise la méthode des approximations successives, soit φ_0 une fonction arbitraire, on définit la suite (φ_n) comme suit*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n \quad n = 1.2, \ldots$$

Est de Caushy et converge vers la solution de l'equation (2.2.1), *en effet :*

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{p+1}-\varphi_p\right\| &= \left\|A\varphi_p - A\varphi_{p-1}\right\| \leq k\left\|\varphi_p-\varphi_{p-1}\right\| \\ &\leq k^2\left\|\varphi_{P-1}-\varphi_{P-2}\right\| \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq k^P\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $q > p$, *on a*

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_q-\varphi_p\right\| &\leq \left\|\left(\varphi_q-\varphi_{q-1}\right)+\left(\varphi_{q-1}-\varphi_{q-2}\right)+\ldots+\left(\varphi_{p+1}-\varphi_p\right)\right\| \\ &\leq \left\|\varphi_q-\varphi_{q-1}\right\|+\left\|\varphi_{q-1}-\varphi_{q-2}\right\|+\ldots+\left\|\varphi_{p+1}-\varphi_p\right\| \\ &\leq \left(k^P+k^{p+1}+\ldots+k^{q-1}\right)\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\| \\ &\leq k^P\left(1+k+k^2+\ldots+k^{\frac{q-1}{p}}\right)\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\| \\ &\leq \frac{k^p}{1-k}\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|\end{aligned}$$

Ce qui nous montre que

$$\lim_{p,q\longrightarrow\infty}\left\|\varphi_q-\varphi_p\right\| = 0$$

D'où la suite (φ_n) *est de cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique* φ.

En effet de la continuité de l'opérateur A *on obtient :*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(A\varphi_n) = A(\lim_{n\to\infty}\varphi_n) = A\varphi$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux points fixes distincts φ *et* ψ, *telle que :*

$$A\varphi = \varphi$$

$$A\psi = \psi$$

Alors on peut écrire

$$\left\|\varphi-\psi\right\| = \left\|A\varphi - A\psi\right\| \leq k\left\|\varphi-\psi\right\|$$

D'où

$$(1-k)\|\varphi-\psi\| \leq 0$$

Ce qui nous donne

$$\|\varphi-\psi\| = 0 \Longrightarrow \varphi = \psi$$

■

Corollaire 2.2.1 *Supposons que l'opérateur A admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H alors l'opérateur A^n admet le même point fixe φ.*

Corollaire 2.2.2 *Soit A un opérateur dans l'espace H telle que l'opérateur est un opérateur contractant, alors A admet un point fixe unique φ dans l'espace H.*

Théorème 2.2.2 *Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante*

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

Alors l'équation

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $|\lambda|$ est petit.

2.2.2 *L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce*

Nous nous proposons maintenant d'étudier les équations intégrales de Volterra de deuxième espèce dans le cas unidimensionnel.

Théorème 2.2.3 *[6] Soit $k(x,y)$ est une fonction continue pour $x,y \in [a,b]$, telle que $|k(x,y)| \leq M$ où M est une constante positive, alors l'équation de Volterra*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{2.2.2}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L^2([a,b])$ et λ dans $\mathbb{R}$.

Preuve. *Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur*

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

Avec

$$A\varphi(x) = \int_a^x k(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n *est une contraction pour un certain* $n \in N$, *donc* $T\varphi$ *admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation* (2.2.2)

$$\begin{aligned}
T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\
T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\
&\ .. \\
&\ .. \\
&\ .. \\
T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1} f + \lambda^n A^n \varphi
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1\| \\
&= |\lambda|^n \left\| \int_a^x K(x,y)\,(\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy \right\|
\end{aligned}$$

Rappelons que $k_n(x,y)$ *est le noyau itéré d'ordre* n *donné par*

$$k_n(x,y) = \int_x^y k(x,z)\,k_{n-1}(z,y)\,dz$$

Puisque on a par hypothèse

$$|k(x,y)| \leq M$$

Alors

$$|k_n(x,y)| \leq \frac{M^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b \tag{2.2.3}$$

Pour $n = 1$.*L'expression* (2.2.3) *est évidente .*

Supposons qu'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$

$$|k_m(x,y)| \leq \frac{M^m (x-y)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Alors

$$\begin{aligned} |k_{m+1}(x,y)| &= \left| \int_y^x k(x,z)\, k_m(z,y)\, dz \right| \\ &\leq \int_y^x |k(x,z)\, k_m(z,y)|\, dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_y^x (x-z)^{m-1}\, dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{m!} (x-z)^m \end{aligned}$$

telle que

$$\|T^n \varphi_2 - T^n \varphi_1\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ *assez grand on obtient*

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

Ainsi que l'opérateur T^n *est contractant ce qui implique que* T *admet un point fixe, on écrit*

$$T\varphi = \varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

Alors l'équation (2.2.2) *admet une solution unique.* ■

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

Dans ce chapitre on rappeler la *résolution numérique de équation intégrale de Volterra de seconde espèce par les fonctions splines : Spline linéaire, quadratique et cubique.*

3.1 *Equation intégrale de Volterra de seconde espèce*

Dans tout les parties on prend $\lambda = 1$.

3.2 *Méthode de quadrature*

3.2.1 *Schéma générale*

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),\ \ a \leq x \leq b \tag{3.2.1}$$

où $k(x,y)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions continues.*

De l'équation (3.2.1) on obtient

$$\varphi(a) = f(a).$$

Choisissons une constante d'intégration h (le pas de la discrétisation) et considérons l'ensemble discret de point

$$x_i = a + h(i-1), i = 1, 2, ..., n$$

Pour $x = x_i$,l'équation (3.2.1) s'écrit

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} k(x_i, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x_i), i = 1, 2, ..., n \tag{3.2.2}$$

En appliquant la méthode de quadrature à l'intégrale en (3.2.2) et posons $y = x_j, j = 1, ..., i$, il vient

$$\varphi(x_i) - \sum_{j=1}^{i} A_{ij} k(x_i, x_j)\,\varphi(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i(\varphi),\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.3}$$

où $\varepsilon_i(\varphi)$ est l'erreur et A_{ij} sont les coefficients de la méthode de quadrature sur l'intervalle $[a, x_i]$.

Supposons que $\varepsilon_i(\varphi)$ sont petits et les négligent, alors on obtient un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\varphi_1 = f_1,\ \ \varphi_i - \sum_{j=1}^{i} A_{ij} k_{ij} \varphi_j = f_i,\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.4}$$

où $k_{ij} = k(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

De (3.2.4) il vient

$$\varphi_1 = f_1,\ \ \varphi_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} k_{ij} \varphi_j}{1 - A_{ii} k_{ii}},\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.5}$$

avec la condition $1 - A_{ii} k_{ii} \neq 0$.

Ce qui peut toujours être assuré par un chois approprié des nœuds et en garantissant cela les coefficients A_{ii} sont suffisamment petits.

3.2.2 *Application de la méthode du Trapèze*

Selon la méthode du trapèze nous avons

$$A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h,\ \ A_{i2} = ... = A_{i,i-1} = h,\ \ i = 2, ..., n$$

et le système (3.2.5) s'écrit comme suit

$$\varphi_1 = f_1,\ \varphi_i = \frac{f_i + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j k_{ij}\varphi_j}{1-\frac{1}{2}hk_{ii}},\ i = 2, ..., n$$
$$x_i = a + h(i-1), n = \frac{b-a}{h} + 1,\ \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\ si\ j = 1 \\ 1\ \text{si}\ j > 1 \end{cases}$$

3.3 *Par les splines*

Dans cette partie, nous utilisons les splines pour trouver la solution approchée de l'équation intégrale de Volterra de second espéce.

On considère l'équation de volterra de seconde espéce

$$\varphi(x) = \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x),\ a \le x \le b \tag{3.3.1}$$

Pour résoudre l'équation (3.3.1), nous devons différencier l'équation (3.3.1) troix fois par rapport à x, en utilisant la formule de Libenze,on obtient

$$\varphi'(x) = k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\varphi(y)\,dy + f'(x) \tag{3.3.2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}k(x,x)\varphi(x) + k(x,x)\varphi'(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}k(x,y)\varphi(y)\,dy + f''(x) \tag{3.3.3}$$

$$\varphi'''(x) = \frac{d^2}{dx^2}k(x,x)\varphi(x) + 2\frac{d}{dx}k(x,x)\varphi'(x) + k(x,x)\varphi''(x) + \tag{3.3.4}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}k(x,y)\right)_{y=x}\varphi(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\varphi'(x) + \tag{3.3.5}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\right)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial^3}{\partial x^3}k(x,y)\varphi(y)\,dy + f'''(x). \tag{3.3.6}$$

Pour $x = a$ les équations (3.3.1) (3.3.2) (3.3.3) ,(3.3.4)donnes

$$\varphi_0 = \varphi(a) = f(a) \tag{3.3.7}$$

$$\varphi_0' = \varphi'(a) = k(a,a)\,\varphi(a) + f'(a) \tag{3.3.8}$$

$$\varphi_0'' = \varphi''(a) = \left(\frac{d}{dx}k(x,x)\right)_{x=a}\varphi(a) + k(a,a)\,\varphi'(a) + \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\right)_{x=a}\varphi(a) + f''(a) \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0''' &= \varphi'''(a) = \left(\frac{d^2}{dx^2}k(x,x)\right)_{x=a}\varphi(a) + 2\left(\frac{d}{dx}k(x,x)\right)_{x=a}\varphi'(a) + && (3.3.10)\\
&k(a,a)\,\varphi''(a) + \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}k(x,y)\right)_{y=x}\right)_{x=a}\varphi(a) + \\
&\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\right)_{x=a}\varphi'(a) + \left(\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\right)_{y=x}\right)\right)_{x=a}\varphi(a) && (3.3.11)\\
&+f'''(x). && (3.3.12)
\end{aligned}$$

3.3.1 *Spline linéaire*

Soit la fonction spline linéaireS telle que

$$S_i(x) = a_i(x - x_i) + b_i,\ \ i = 0, 1, ..., n \tag{3.3.13}$$

où a_i, b_i,*sont des constantes.*

Pour calculer a_i, b_i, *on dérive (3.3.13) par rapport à* x *et en remplace* x *par* x_i *on obtient*

$$a_i = \ S'(x_i) = \varphi'(x_i)\,, \quad i = 0, 1, ..., n \tag{3.3.14}$$

$$b_i = S_i(x_i) = \varphi(x_i)\,, \quad i = 0, 1, ..., n \tag{3.3.15}$$

Calcul de a_i,b_i

1-*Pour* $i = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \varphi'(a) = k\,(a,a)\,\varphi\,(a) + f'(a) \\ b_0 &= \varphi(a) = f(a) \\ S_0(x) &= a_0(x-a) + b_0, \\ \varphi_1 &= \varphi\,(x_1) = S_0(x_1). \end{aligned}$$

2-*Pour* $i = 1 : n-1$,*évaluons* a_i, b_i, *on utilisons les équations (3.3.14) (3.3.15) et remplacons* $\varphi\,(x_i)\,, \varphi'\,(x_i)$ par $S_i(x_i), S'(x_i)$ *et puis calculons* $S_i(x)$.

3-*on approxime* $\varphi_{i+1} = S_i(x_{i+1})$.

3.3.2 *Spline quadratique*

Soit la fonction spline quadratique S telle que

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i,\ i = 0,1,...,n \qquad (3.3.16)$$

où a_i, b_i, c_i *sont des constantes.*

Pour calculer a_i, b_i, c_i *on dérive (3.3.16) par rapport à x et en remplace x par* x_i *on obtient*

$$a_i = \frac{1}{2}S''(x_i) = \frac{1}{2}\varphi''\,(x_i)\,, \quad i = 0,1,...,n \qquad (3.3.17)$$

$$b_i = S'(x_i) = \varphi'\,(x_i)\,, \quad i = 0,1,...,n \qquad (3.3.18)$$

$$c_i = S_i(x_i) = \varphi\,(x_i)\,, \quad i = 0,1,...,n \qquad (3.3.19)$$

Calcul de a_i,b_i, c_i

1-*Pour* $i = 0$,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\varphi''(a) \\
b_0 &= \varphi'(a) = k(a,a)\varphi(a) + f'(a), \\
c_0 &= \varphi(a), \\
S_0(x) &= a_0(x-a)^2 + b_0(x-a) + c_0, \\
\varphi_1 &= \varphi(x_1) = S_0(x_1).
\end{aligned}$$

2-*Pour* $i = 1 : n-1$,*évaluons* a_i, b_i, c_i, *on utilisons les équations (3.3.17) (3.3.18),(3.3.19) ,et remplacons* $\varphi(x_i), \varphi'(x_i), \varphi''(x_i)$ par $S_i(x_i), S'(x_i)$, $S''(x_i)$*et puis calculons* $S_i(x)$.

3-*on approxime* $\varphi_{i+1} = S_i(x_{i+1})$.

3.3.3 *Spline cubique*

Soit la fonction spline cubique S *telle que*

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i,\ i = 0,1,...,n \tag{3.3.20}$$

où a_i, b_i, c_i, d_i *sont des constantes.*

Pour calculer a_i, b_i, c_i, d_i *on dérive (3.3.20) par rapport à* x *et en remplace* x *par* x_i *on obtient*

$$a_i = \frac{1}{6}S'''(x_i) = \frac{1}{6}\varphi'''(x_i), \quad i = 0,1,...,n \tag{3.3.21}$$

$$b_i = \frac{1}{2}S''(x_i) = \frac{1}{2}\varphi''(x_i), \quad i = 0,1,...,n \tag{3.3.22}$$

$$c_i = S'(x_i) = \varphi'(x_i), \quad i = 0,1,...,n \tag{3.3.23}$$

$$d_i = S_i(x_i) = \varphi(x_i),\ i = 0,1,...,n \tag{3.3.24}$$

Calcul de a_i,b_i, c_i, d_i

1-*Pour* $i = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6}\varphi'''(a) \\ b_0 &= \frac{1}{2}\varphi''(a) \\ c_0 &= \varphi'(a), \\ S_0(x) &= a_0(x-a)^3 + b_0(x-a)^2 + c_0(x-a) + d_0 \\ \varphi_1 &= \varphi(x_1) = S_0(x_1). \end{aligned}$$

2-*Pour* $i = 1 : n-1$,*évaluons* a_i, b_i, c_i, *on utilisons les équations (3.3.21) (3.3.22),(3.3.23) ,(3.3.24)et remplacons* $\varphi(x_i), \varphi'(x_i), \varphi''(x_i), \varphi'''(x_i)$par $S_i(x_i), S'(x_i)$, $S''(x_i)$, $S'''(x_i)$ *et puis calculons* $S_i(x)$.

3-*on approxime* $\varphi_{i+1} = S_i(x_{i+1})$

3.4 Exemples Numériques

3.4.1 *Exemple 1*

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = x3^x + \int_0^x 3^{x-y}\varphi(y)\,dy, \qquad x \in [0,1]$$

dont la solution exacte est

$$\varphi_{ex} = 3^x(1 - \exp(-x))$$

Pour n=10

Valeurs de x	*err.Spline linéaire*	*err.Spline quadratuque*	*err.Spline cubique*
$0,00000$	0	0	0
0.20000	$1.2581271e-01$	$1.0785434e-01$	$1.0630850e-01$
0.40000	$3.1161237e-01$	$2.5175115e-01$	$2.4203441e-01$
0.60000	$5.7222927e-01$	$4.4652066e-01$	$4.1670793e-01$
0.80000	$9.2613959e-01$	$7.1063918e-01$	$6.4350533e-01$
1.00000	$1.3963617e+00$	$1.0671250e+00$	$9.4014478e-01$

Pour n=50

Valeurs de x	*err.Spline linéaire*	*err.Spline quadratuque*	*err.Spline cubique*
$0,00000$	0	0	0
0.20000	$1.2581271e-01$	$1.1264324e-01$	$1.1162740e-01$
0.40000	$3.1161237e-01$	$2.6132894e-01$	$2.5373223e-01$
0.60000	$5.7222927e-01$	$4.6088737e-01$	$4.3584466e-01$
0.80000	$9.2613959e-01$	$7.2979474e-01$	$6.7114097e-01$
1.00000	$1.3963617e+00$	$1.0910695e+00$	$9.7733939e-01$

3.4.2 *Exemple 2*

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = 1 - x + x^2 + \int_0^x (y-x)\varphi(y)\,dy, \qquad x \in [0,1]$$

dont la solution exacte est

$$\varphi_{ex} = 1 - sin(x)$$

Pour n=10

Valeurs de x	*err.Spline linéaire*	*err.Spline quadratuque*	*err.Spline cubique*
$0,00000$	0	0	0
0.20000	$9.8669328e-02$	$1.1366933e-01$	$1.1483600e-01$
0.40000	$1.8941835e-01$	$2.3941834e-01$	$2.4675168e-01$
0.60000	$2.6464248e-01$	$3.6964247e-01$	$3.9214247e-01$
0.80000	$3.1735608e-01$	$4.9735609e-01$	$5.4802275e-01$
1.00000	$3.4147099e-01$	$6.1647099e-01$	$7.1230429e-01$

Pour n=50

Valeurs de x	*err.Spline linéaire*	*err.Spline quadratuque*	*err.Spline cubique*
$0,00000$	0	0	0
0.20000	$9.8669328e-02$	$1.0966933e-01$	$1.1043600e-01$
0.40000	$1.8941835e-01$	$2.3141834e-01$	$2.3715168e-01$
0.60000	$2.6464248e-01$	$3.5764247e-01$	$3.7654248e-01$
0.80000	$3.1735608e-01$	$4.8135608e-01$	$5.2562279e-01$
1.00000	$3.4147099e-01$	$5.9647101e-01$	$6.8230432e-01$

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié les équations intégrales linéaires de Volterra de second espéce.

Le premier chapitre une introduction sur les espaces, l'opérateur intégral linéaire et l'opérateur adjoint, notions d'analyse numerique : intégration numérique, les méthodes de quadratures, interpolation polynomiale et les splines.

Le deuxième chapitre présente une introduction sur les équations intégrales on a la classification des équations intégrales linéaires, transformation de l'équation intégrale de Volterra de première espèse a l'équation de Volterra de seconde espèce, liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, et résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce en utilise les théorèmes du point fixe pour l'éxistence et l'unicité de la solution de *l'équation intégrale de Volterra.*

Dans le troisième chapitre des fonctions splines (spline lineaire, spline quadratique et spline cubique)ont été présentés pour résoudre numériquement l'équation intégrale de Volterra de second espèce. Les résultats montrent que:

1. *Les fonctions de spline ne donnent pas une meilleure précision à la solution de l'équation intégrale de Volterra de second espèce.*

2-*la fonction spline linéaire donne plus précise que les fonctions splines quadratiques et cubiques.*

Bibliographie

[1] *AMROUNE,W Sur les opérateurs non bornés dans les espaces de Banach Mémoire de Master 2017 université de M'sila .*

[2] *BACHIRI, F Théorèmes du point fixe et Applications aux Equations intégrales Mémoire de Master 2017 université de M'sila.*

[3] *M. KRASNOV, A. KISSÈLEV et G. MAKARENKO. Équation Intégrales, Traduction française Editions Mir 1977.*

[4] *Azedine, R Resolution Numerique des Equations integrales Mémoire de Magistère 2004 université de M'sila.*

[5] *Mohamed. Hazi, Introduction aux espaces normés.O.P.U,1994.*

[6] *KHIRANI, A Resolution des equations integrales non lineaires type volterra Mémoire de Magistère 2011 université de M'sila.*

[7] *A. Quarteroni, R. Sacco,et F. Saleri, Méthodes Numériques,Springer-Verlag Italia,Milano 2004.*

[8] *Saïd Mammar, Méthodes Numériques, MT31- Institut Universitaire Professionnalisé d'Évry.*

[9] *Rahman ,M. .Integral Equation and their Applications .Dalhusie university,canda. WIT Press,(2007)*

[10] AL-Khalidi, S. H. H..Algorithms for solving Volterra integral equations using non polynomial spline functions ,M.Sc. thesis, College of Science for Women Baghdad University ,2013.

[11] Rashidinia J,.; Jalilian ,R.; and Farajeyan ,K..Non-Polynomial Spline Approach to the Solution of Fifth Order Boundary Problems.Journal of Information and Computing Science 4(4):256-274 (2009).

ملخص:

في هذه المذكرة نستعمل نظريات النقاط الثابتة لاثبات الوجود و الوحدانية لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

ونقارن النتائج المضبوطة مع الدوال الثلمة .

كلمات مفتاحي

نظريات النقاط الثابتة, الدوال الثلمة, الخطية ,التربيعية والتكعيبية.معادلة فولتيرا.

Résumé:

Dans ce mémoire on utilise les théorèmes de point fixe pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Volterra de second espéce.

Aussi on traduise ce travavail en approximant la solution exacte par les fonctions splines.

Mots clés:

Les théorèmes de point fixe, équation intégrale, équation de Volterra, les fonctions splines :splines linéaires,quadratiques et cubiques

Abstract:

In this work, we use fixed point theorems to prove the existence end unity of the solutions of Volterra lineair integral equation of the second kind (VIESK).

we compared the exact solving with splines functions .

Key words:

The theorems of point fixe, integrale Equation, Volterra integrale, lineair, quadratic and cubic splines functions.