N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Filière : Mathématiques

Option : Logique Mathématiques, Langages Formels et Analyse non Standard

Par

DERARDJA Abdelghani

Sujet

Sur les extensions linéaires d'une famille d'ordres $\alpha-$flous

Soutenue publiquement le 14 /11/2010 devant le jury composé de :

Mr: BOUDAOUD Abdelmadjid	Professeur, Univ. de M'sila	Président
Mr: ZEDAM Lemnaouar	Maître de Conférence(A),Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr: AMROUNE Abdelaziz	Maître de Conférence(A), Univ. de M'sila	Examinateur
Mr: GASMI Abdelkader	Maître de Conférence(A), Univ. de M'sila	Examinateur
Mr: TOUAFEK NOURESSADAT	Maître de Conférence(A), Univ. de Jijel	Examinateur

Promotion: 2007/2008

Table des matières

0.1 Introduction

La notion d'ordre flou a été initiée par L. A. Zadeh en 1965 [24]. Dans ce document fondateur (Fuzzy sets) il a défini la notion d'ordre flou en généralisant les notions de réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité classique. Depuis lors, la théorie de l'ordre flou a été développée par plusieurs auteurs [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 19, 20]. Récemment, A. Stouti a introduit en 2003 [19], la notion d'ordre α-flou et a donné quelques exemples des ensembles ordonnés α-flous dans le cas fini. Ainsi L. Zedam et A. stouti dans en 2010 [21] sont établis des résultats qui permettent de construire de nouvelles relations d'ordres α-flous à partir des relations d'ordres classiques. En suite, ils ont donnés des résultats concernant la compatibilité des relations d'ordres α-flous définis sur les espaces vectoriels réels. En outre, la caractérisation d'une sous-catégorie des ordres α-flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication usuelle sur la droite réelle.

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence des extensions linéaires d'une famille d'ordres α-flous.

Ce travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on rappelle des notions relatives aux ensembles classiques est aux sous-ensembles flous ainsi aux relations classiques et floues.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les ordres α-flous. On débute par la présentation des résultats qui permettent de construire de nouvelles relations d'ordres α-flous à partir des relations d'ordres classiques. En suite, les résultats concernant la compatibilité des relations d'ordres α-flous définis sur les espaces vectoriels réels.

En outre, la caractérisation d'une sous-catégorie des ordres linéaires α-flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication usuelle sur la droite réelle.

Dans le troisième chapitre nous essayons de prouver que chaque ordre partiel α-flou défini sur un ensemble arbitraire non vide peut être étendu à un ordre linéaire α-flou. Pour le cas des ensembles finis nous apportons une preuve constructive de l'existence des extensions linéaires des ordres α-flous. Nous caractérisons également les ordres α-flous par leur extension linéaire.et on donne quelques exemples de construction des extensions des ordres α-flous sur des ensembles finis.

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles et les relations floues

1.1 Eléments des ensembles classiques

Un ensemble est une collection non ambigu d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble.

Pour dire que a est élément d'un ensemble A, On écrit $a \in A$, dans le cas contraire, on écrit $a \notin A$.

Un ensemble peut être écrit :

En extension : On donne la liste de ses éléments Par exemple, Si $a_{1,}a_2, a_3..., a_n$ sont les éléments de l'ensemble A, on écrit :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\} .$$

En compréhension : On donne la ou les propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble B satisfaisons les conditions $P_1, P_2, ..., P_n$ alors l'ensemble B est défini par :

$$B = \{b \;/\; b \text{ satisfait } P_1, P_2, ..., P_n.\}$$

Dans ce cas, le symbole "/" implique le sens de «tels que».

L'ensemble vide noté $\emptyset$ où $\{\}$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Le Cardinal d'un ensemble A, noté $Card\,(A)$ est le nombre d'éléments de A. On le note aussi parfois $\#A$ ou $|A|$.

Un ensemble A est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est entier naturel.

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Exemple 1.1.1 *Soit* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Il peut aussi être défini en compréhension comme suit :
$A = \{x \in \mathbb{N}/0 \leq x \leq 9\}$.
A *est fini* $(card\,(A) = 10)$

Ensemble des parties d'un ensemble (power set)

Soit A un ensemble. Les sous ensembles de A forment un ensemble appelé ensemble des parties de A et noté $\mathcal{P}(A)$

Ainsi $E \in \mathcal{P}(A)$ signifie que $E \subset A$.

L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

Un ensemble constitué des ensembles est appelé une famille d'ensembles. Par exemple, une famille ensemble contenant des ensembles $A_1, A_2, ...$est représenté par : $\{A_i/i \in I\}$ où i est un indice et I l'ensemble des indices.

Exemple 1.1.2 *Si* $A = \{a, b, c\}$, *alors* $|A| = 3$
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$.

Proposition 1.1.3 *Soit* A *un ensemble fini de cardinal* n, *alors* $|P(A)| = 2^n$.

Fonction caractéristique

Définition 1.1.4 *Soit dans un référentiel X, un sous-ensemble A. On définit la fonction caractéristique de A, notée χ_A l'application définie par :*

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \textit{si et seulement si } x \in A \\ 0 & \textit{si et seulement si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.1 Opérations sur les ensembles

On fixe un référentiel X.

L'inclusion

On dira qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou encore que A est un sous-ensemble ou une partie de B si :

$$\forall x \in X, (x \in A) \implies (x \in B)$$

On écrit alors $A \subseteq B$

Si les relations suivantes sont satisfaites entre les deux ensembles A et B, $A \subseteq B$ et $A \neq B$, alors B a des éléments qui n'appartiennent pas à A. Dans ce cas, A est appelé un sous-ensemble propre de B, et cette relation est désignée par :

$A \subset B$

L'égalité d'ensembles

Deux ensembles A et B qui contiennent les mêmes éléments sont dits égaux, et on écrit $A = B$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A$$

Dans le cas contraire on dit qu'ils sont distincts et on note $A \neq B$

L' intersection

L'intersection $A \cap B$ se compose des éléments communs aux deux ensembles A et B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

L'intersection peut être généralisée entre les ensembles dans une famille d'ensembles

$$\underset{i \in I}{\cap} A_i = \{x / x \in A_i, \forall i \in I\} \text{ où } \{A_i | i \in I\} \text{ est une famille d'ensembles.}$$

L'intersection entre l'ensemble A et l'ensemble référentiel X égal à A.

$$A \cap X = A.$$

L'intersection de A et de l'ensemble vide $\varnothing$ est l'ensemble vide.

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

L'intersection de A et de son complémentaire est tout le temps ensemble vide.

$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Lorsque deux ensembles A et B n'ont rien en commun, c'est -à-dire $A \cap B = \varnothing$, alors A et B sont dits disjoints.

L'union

L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'union pourrait être définie entre plusieurs ensembles. Par exemple, la réunion des ensembles de la famille suivante peuvent être définis comme suit.

$\underset{i\in I}{\cup} A_i = \{x/x \in A_i$ pour certains $i \in I\}$ où la famille d'ensembles est $\{A_i|i \in I\}$.

L'union de l'ensemble A et l'ensemble référentiel X est réduit à X

$$A \cup X = X$$

L'union de l'ensemble A et l'ensemble vide $\varnothing$ est A.

$$A \cup \varnothing = A$$

L'union de l'ensemble A et son complémentaire est l'ensemble référentiel.

$$A \cup \overline{A} = X$$

La différence

La différence de B et A noté $B - A$ ou $B \setminus A$ est constituée des éléments qui sont en B, mais pas dans A. C'est -à- dire :

$$B - A = \{x/x \in B, x \notin A\}$$

Le complément

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble référentiel X. Alors le complément de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X mais qui n'appartiennent pas à A. De façon plus concise nous écrivons :

$$\overline{A} = X - A = \{x \in X \text{ tel que } x \notin A\}$$

La complémentation est une opération unaire.

Le complétant d'ensemble est toujours involutif

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Le complément d'un ensemble vide est l'ensemble référentiel.

$$\overline{\varnothing} = X$$

Le complément de l'ensemble référentiel est l'ensemble vide.

$$\overline{X} = \varnothing$$

1.1.2 Propriétés des opérations sur les ensembles classiques

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativité	$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap A) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorption avec X et $\varnothing$	$A \cup X = X$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identité	$A \cup \varnothing = A$ et $A \cap X = A$
Lois de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorption de complément	$A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup B$ $A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap B$ $A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap B$
Loi de non contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Tiers exclu	$A \cup \overline{A} = X$

1.2 Généralités sur les sous-ensembles flous

Le concept de sous-ensemble flou a été introduit pour éviter les passages brusques d'une classe à une autre (de la classe noire à la classe blanche par exemple) et autoriser des éléments à n'appartenir complètement ni à l'une ni à l'autre (à être gris, par exemple), ou encore à appartenir partiellement à chacune (avec un fort degré à la classe noire et un faible degré à la classe blanche dans le cas du gris foncé). La définition d'un sous-ensemble flou répond au besoin de représenter des connaissances imprécises, soit parce qu'elle sont exprimées en langage naturel par un observateur qui n'éprouve pas le besoin de fournir plus de précision ("à 100 m de la plage" caractérisation dont on sait qu'elle est approximative) ou n'en est pas capable ("proche de la plage"), soit parce qu'elles sont obtenues avec des instruments d'observation qui produisent des erreurs de mesure (par exemple un plan sur lequel on mesure grossièrement des distances : "environ 200m"). Le caractère graduel des sous-ensembles flous correspond à l'idée que, plus on se rapproche de la caractérisation typique d'une classe, plus l'appartenance à cette classe est forte (il est sur qu'une maison située à 50 m de la plage en est proche, à 200 m en est encore proche, mais plus la distance s'écarte de 200 m, moins la maison appartient à la classe "proche de la plage" située à 1 km, elle n'y appartient plus).

La notion de sous-ensemble flou permet de traité :

* des catégories aux limites mal définies (comme "centre ville" ou "ancien").

* des situations intermédiaires entre le tout et le rien ("presque noir").

* le passage progressif d'une propriété à une autre (de "proche" à "éloigné" selon la distance).

* des valeurs approximatives ("environ 2 km").

* des classes en évitant l'utilisation arbitraire de limites rigides (il est difficile de dire qu'une maison située à 200 m de la plage en est proche, mais qu'à 210 m elle en

éloignée).

Le concept de sous-ensemble flou constitue un assouplissement de celui de sous-ensemble d'un ensemble donné. Il n'existe pas d'ensemble flou au sens propre, tous les ensembles considérés étant classiques et bien définis. On utilise toutefois souvent le terme d'ensemble flou au lieu de sous-ensemble flou, par abus de langage conformément à la traduction du terme original de "fuzzy set" que l'on oppose à "crisp set "désignant un sous-ensemble non flou.

Définition 1.2.1 *Un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_A(x)$, compris entre* 0 *et* 1, *avec lequel x appartient à A*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1] .$$

Remarque 1.2.2 *Dans le cas où μ_A ne prend que les valeurs* 0 *ou* 1, *le sous-ensemble flou A est un sous-ensemble classique de X .Un sous-ensemble classique est donc un cas particulier de sous-ensemble flou.*

Notation : Soit X l'ensemble de référence

Un sous-ensemble A de X noté par $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$

L'ensemble de tous les sous-ensembles flous de X noté par $\mathcal{F}(X)$

Exemple 1.2.3 *Nous considérons que la déclaration «Ahmed est jeune". A cette époque, le terme «jeune» est vague. Pour représenter le sens de «vague» exactement, c'est nécessaire de définir sa fonction d'appartenance comme dans la* ***figure 1.1****. Quand nous appelons «jeune», il pourrait y avoir d'âge qui se situe dans l'intervalle [0,80] et nous pouvons considérer "l'âge de jeune" dans ce champ comme un ensemble continu. L'axe horizontal représente l'âge et le l'axe verticale désigne la* *valeur numérique de la fonction d'appartenance. La ligne indique la possibilité (valeur de fonction d'appartenance) d'être inclus dans un ensemble flou "jeunes". Par exemple, si nous suivons la définition de «jeune» comme dans la figure, la personne a dix ans peut être jeune. Ainsi, la possibilité pour l'âge "dix" pour rejoindre l'ensemble flou de "jeune" est 1, à celle de" l'âge de vingt sept " est de* 0.9. *Mais nous ne pouvons pas dire à une personne jeune de plus de soixante ans et la possibilité de ce cas est 0. Maintenant, nous pouvons manipuler notre dernière phrase comme «Ahmed est très jeune». Pour être inclus dans le sous-ensemble de "très jeune", l'âge devrait être abaissé. Laissez-nous penser que la droite est déplacée vers la gauche comme dans la figure. Si nous définissons un sous-ensemble flou en tant que tel, seule la personne qui est âgée de quarante ans peut être incluse dans le sous-ensemble de "très jeune". Maintenant la possibilité de l'homme à vingt-sept ans, d'être inclus dans cet ensemble est de* 0.5. *Autrement dit, si on note* $A =$ *"jeune" et* $B =$ *«très jeune»,* $\mu_A(27) = 0.9$, $\mu_B(27) = 0.5$

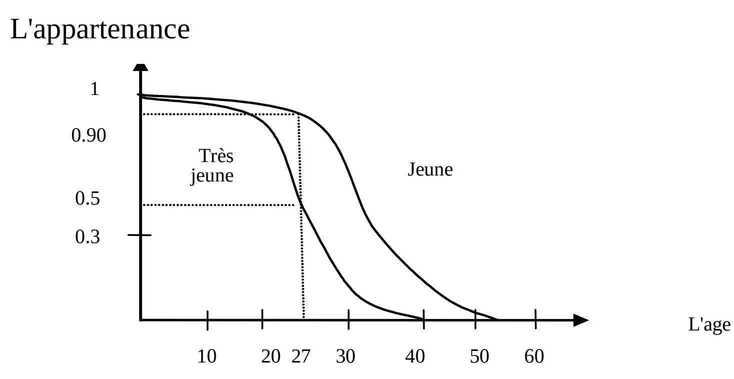

Fig. 1·1: Sous-ensembles flous "jeune" et "très jeune"

Exemple 1.2.4 *On définit un sous- ensemble flou* $A = \{nombre\ réel\ près\ de\ 0\}$. *La frontière pour voir les résultats "nombre réel près de 0" est plutôt ambiguë. La* *possibilité de nombre réel x à être membre d'ensemble prescrit peut être défini par la fonction d'appartenance suivante.*

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\mu_A(1) = 0.5$$
$$\mu_A(3) = 0.1$$

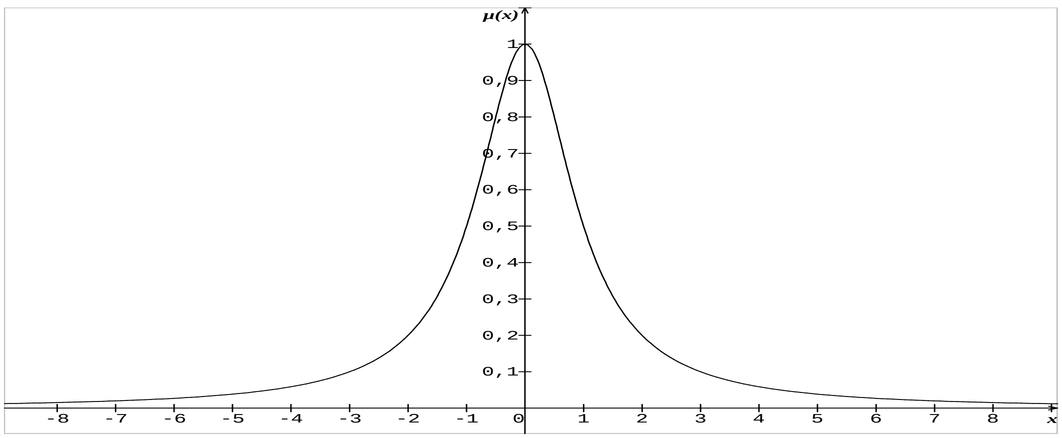

Fig. 1·2: Fonction d'appartenance de "nombre réel près de 0"

Exemple 1.2.5 *Considérons l'ensemble référentiel X qui défini sur l'âge*

$$X = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85\}$$

âge(éléments)	enfant	jeune	adulte	séniore
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

Tableau1 : Exemple de sous-ensemble flou

Nous pouvons définir des sous- ensembles flous tels que “enfant” , “jeune” , “adulte” et“ Séniore” dans X.

Les possibilités de chaque élément de x soit dans ces quatre sous-ensembles flous sont dans le Tableau 1

1.2.1 Opérations sur les sous-ensembles flous.

On définit en théorie des sous-ensembles flous les mêmes notions qu’en théorie des ensembles classiques.

Etant donné deux sous-ensembles flous A et B de X

L’égalité

On dit que les deux sous-ensembles flous A et B sont égaux si leurs fonctions d’appartenance prennent la même valeur pour tout élément de X.

$$A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X.$$

Si $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ pour certains éléments x, alors $A \neq B$

L'inclusion

Si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in X$ alors $A \subseteq B$.

Si $\mu_A(x) < \mu_B(x), \quad \forall x \in X$ alors $A \subset B$.

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ et $A \neq B$

L'intersection

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou C, que l'on note $A \cap B$, tel que :

$$\forall x \in X, \mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

min désigne l'opérateur de minimisation.

Exemple 1.2.6 *L'intersection des sous-ensembles flous "jeune" et "adulte" est (Tableau 1)*

"*jeune*"$\cap$"*adulte*"$= \{(15, 0.1), (25, 0.9), (35, 0.8), (45, 0.4), (55, 0.1)\}$.

L'union

L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou D, que l'on note $A \cup B$ tel que :

$$\mu_D(x) \ = \ \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \ \forall x \in X$$

max désigne l'opérateur de maximation.

Exemple 1.2.7 *L'union de "jeune" et "adulte" est (Tableau 1).*

"*jeune*"$\cup$"*adulte*" $= \{(15, 0.2), (25, 1), (35, 1), (45, 1), (55, 1), (65, 1), (75, 1), (85, 1)\}$.

Le Complément

Le complément $\overline{A}$ d'un sous-ensemble flou A de X est défini comme le sous-ensemble flou de X de fonction d'appartenance :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$$

Exemple 1.2.8 *On revient à l'exemple du tableau 1, le complément du sous-ensemble flou "adulte" est* $\overline{\text{"adulte"}} = \{(5,1), (15,0.9), (25,0.1)\}$.

Propriétés 1.2.9 *Soit A et B deux sous-ensembles flous alors*

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Lois de DE Morgan

ii) $\overline{\overline{A}} = A$

iii) $\overline{\varnothing} = X$

iv) $\overline{X} = \varnothing$

Remarque 1.2.10 *Contrairement aux sous-ensembles classique, il vérifie généralement $\overline{A} \cap A \neq \varnothing$ et $\overline{A} \cup A \neq X$, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas les propriétés classiques de la non-contradiction et du tiers exclu. Les autres propriétés de la théorie des ensembles classiques sont cependant satisfaites.*

1.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Les caractéristiques d'un sous-ensemble flou A de X les plus utiles pour les décrire sont celles qui montrent à quel point il diffère d'un sous-ensemble classique de X. Le premier de ces caractéristiques est le support de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de X qui appartiennent au moins un peu, à A.

Définition 1.2.2.1 *Le support de A, noté supp(A), est la partie de X sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle :*

$$supp(A) = \{x \in X / \mu_A(x) \neq 0\}.$$

La deuxième caractéristique de A est sa hauteur, noté $h(A)$, c'est-à-dire le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à A.

Définition 1.2.2.2 *La hauteur, noté $h(A)$, du sous-ensemble flou A de X est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance* :

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

On utilise souvent des sous-ensembles flous normalisés, c'est-à-dire pour lesquels il existe au moins un élément de X appartenant de façon absolue (avec un degré 1) à A.

Définition 1.2.2.3 *Le sous-ensemble flou A de X est normalisé si sa hauteur $h(A)$ est égale à 1.*

Un sous-ensemble flou normalisé suppose qu'il existe des éléments de X typiques de la propriété à laquelle il est associé. Ce sont les éléments appartenant de façon absolue à A, d'ont l'ensemble est appelé le noyau de A.

Définition 1.2.2.4 *Le noyau de A, noté noy(A), est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A vaut 1 :*

$$noy(A) = \{x \in X / \mu_A(x) = 1\}.$$

Lorsque X est fini, on caractérise également le sous-ensemble flou A de X par sa cardinalité, qui indique le degré global avec lequel les éléments de X appartiennent à A.

Définition 1.2.2.5 *La cardinalité du sous-ensemble flou A de X est définie par :*

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Si A est un sous-ensemble ordinaire de X, sa hauteur est égale à 1, il est normalisé et identique à son support et à son noyau, sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent, selon la définition classique.

Exemple 1.2.2.6 *On revient à l'exemple 1.2.5*

$supp("jeune") = \{15, 25, 35, 45, 55\}$

$h("jeune") = \{25\}$

$noy("jeune") = \{25\}$

$|séniore| = 0.1 + 0.2 + 0.6 + 1 + 1 = 2.9.$

Propriétés 1.2.2.7 Le support et le noyau de A et de son complément vérifient :

i) $\overline{supp(\overline{A})} = noy(A)$

ii) $\overline{noy(\overline{A})} = supp(A)$.

1.3 Les α-coupes d'un sous ensemble flou

Etant donné le sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X, on choisit un seuil α entre 0 et 1. On construit le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé à A pour ce seuil, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à α.

Définition 1.3.1 *Pour un seuil donné α de $[0, 1]$, on définit la $\alpha-$coupe du sous-ensemble flou A de X (ou sous-ensemble de niveau α associé à A) comme le sous-ensemble $A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$ de X, dont la fonction caractéristique χ_{A_α}est telle que :*

$$\chi_{A_\alpha} = 1 \text{ si et seulement si } \mu_A(x) \geq \alpha.$$

Propriétés 1.3.2 *Soient A et B deux sous-ensembles flous et soit $\alpha \in [0.1]$*

i) les $\alpha-$coupes de A sont des parties non floues de X emboitées par rapport à la valeur du niveau α, c'est-à-dire que si $\alpha' \geq \alpha$, alors $A_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$

ii) Si $\alpha = 0$, alors $A_0 = h(A) = X$

iii) Si $\alpha = 1$, alors $A_1 = noy(A)$

iv) $A_{\alpha_0} = \cap_{\alpha \leq \alpha_0} A_\alpha$

v) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

vi)$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

vii) Si $A \subseteq B$ alors $A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

Exemple 1.3.3 *Les α-coupes dérivées de sous-ensemble flou "jeune" sont :*

$Jeune_{0.1}$ $=\{15, 25, 35, 45, 55\}$

$Jeune_{0.2}$ $=\{15, 25, 35, 45\}$

$Jeune_{0.4} = \{25, 35, 45\}$

$Jeune_{0.8}$ $=\{25, 35\}$.

$Jeune_1$$=\{25\}$

Théorème 1.3.4 *Tout sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses $\alpha-$ coupes par :*

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha.\chi_{A_\alpha}(x)$$

Preuve. Soit x$\in X$, pour le niveau $\alpha = \mu_A(x)$,

$x \in A_{\alpha'}$ donc $\mu_A(x) = \alpha.\chi_{A_\alpha}(x)$ et $\mu_A(x) \leq \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha.\chi_{A_\alpha}(x)$.

Réciproquement, Soit encore $x \in X$. pour tout niveau α', $\chi_{A_{\alpha'}}(x) = 0$ si $\mu_A(x) < \alpha'$, $\chi_{A_{\alpha'}}(x) = 1$ si $\mu_A(x) \geq \alpha'$. Donc $\alpha'.\chi_{A_{\alpha'}}(x) = \alpha'$ si $\mu_A(x) \geq \alpha'$, $\alpha'.\chi_{A_{\alpha'}}(x) = 0$

si $\mu_A(x) < \alpha'$, et donc dans les deux cas

$$\alpha'.\chi_{A_{\alpha'}}(x) \leq \mu_A(x)$$

Doù $\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha.\chi_{A_\alpha}(x) \leq \mu_A(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in X$, $\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha.\chi_{A_\alpha}(x)$. ■

1.4 t-normes et t-conormes.

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs différents du minimum, du maximum et de la complémentation. Ces opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métriques aléatoires et on fait appel à eux lorsque les opérations habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes.

Définition 1.4.1 *Une norme triangulaire (t-norme) est une fonction*

$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *qui vérifie pour tous* $x, y, z, t \in [0,1]$

i) $T(x,1) = x$ *(élément neutre 1)*

ii) $T(x,y) = T(y,x)$ *(commutativité)*

iii) $T(x,y) \leq T(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *(monotonie)*

iv) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ *(associativité)*

L'opérateur min satisfait ces propriétés. Toute t-norme est un opérateur d'intersection, c'est-à-dire on peut définir $A \cap_T B$ par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :

$$\forall x \in X,\ \mu_{A\cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Définition 1.4.2 *Une conorme triangulaire (t-conorme) est une fonction*

$S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ *qui vérifie pour tous* $x, y, z, t \in [0,1]$

i) $S(x,0) = x$ *(élément neutre 0)*

ii) $S(x,y) = S(y,x)$ *(commutativité)*

iii)$S(x,y) \leq S(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *(monotonie)*

iv) $S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))$ *(associativité)*

L'opérateur max satisfait ces propriétés. Toute t-conorme est un opérateur d'union, c'est-à-dire on peut définir $A \cup_S B$ par sa fonction d'appartenance ainsi :

$$\forall x \in X,\ \mu_{A \cup_S B}(x) = S\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

1.4.1 Différentes normes et conormes triangulaires

Le tableau suivant représente les t-normes et t-conormes les plus utilisées.

t-norme	t-conorme	nom
$\min(x,y)$	$\max(x,y)$	Zadeh
$x.y$	$x + y - x.y$	probabiliste
$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y+xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	Hamacher $(\gamma > 0)$
$\max\left(1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}, 0\right)$	$\min\left((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}, 1\right)$	Yager $(p > 0)$
$\max\left(\frac{(x+y-1+\lambda xy)}{1+\lambda}, 0\right)$	$\min(x + y + \lambda xy, 1)$	Weber $(\lambda > -1)$
$\begin{cases} x \; si \; y = 1 \\ y \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x \; si \; y = 0 \\ y \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	Drastique

1.5 Généralités sur les relations classiques

Supposons qu'il existe un ordre entre les deux éléments x et y, le couple formé par ces deux éléments est dit couple ordonné noté par (x, y)

Définition 1.5.1 *(Produit des ensembles) Soient A et B deux ensembles non vides, le produit des deux ensembles ou le produit Cartésien $A \times B$ est défini par :*

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A, b \in B\}$$

Le concept du produit cartésien peut généralisé à n ensembles. Pour un nombre arbitraire des ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$, l'ensemble de tous les n-uplets $(a_1, ..., a_n)$ tels que : $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$, est dit produit Cartésien noté $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ ou $\prod\limits_{i=1}^{i=n} A_i$

Au lieu de $A \times A$ et $A \times A \times A \times ... \times A$, on peut écrire A^2 et A^n.

Exemple 1.5.2 *Si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$. Le produit Cartésien $A \times B$ est :*

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

Le produit cartésien $A \times A$ est le suivant :

$$A \times A = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)\}.$$

Définition 1.5.3 *(Relation binaire) Si A et B sont deux ensembles et il y a une propriété spécifique entre x de A et y de B, cette propriété peut représenter par le couple ordonné (x, y). L'ensemble de tels pairs (x, y), $x \in A$ et $y \in B$ est dit relation R.*

$$R = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

R est une relation binaire et un sous-ensemble de $A \times B$.

Si "x est en relation R avec y" on écrit : $(x, y) \in R$ ou xRy avec $R \subseteq A \times B$.

Si $A = B$ où R est une relation de A dans A, on écrit :

$$(x, x) \in R \text{ ou } xRx \quad \text{pour } R \subseteq A \times A.$$

1.5.1 Opérations sur les Relations

Dans la section précédente on a définie la relation R comme un ensemble. C'est-à-dire R est un ensemble qui contient des couples ordonnés (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$. Si on suppose R et S soient deux relations définies sur $A \times B$, ces relations ont les opérations de l'union, l'intersection, l'inverse et la composition.

(1) L'Union des relations

$T = R \cup S$ est dit l'union de R et S Si $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$, alors $(x, y) \in T$

(2) L'intersection des relations

$T = R \cap S$ est dit l'intersection de R et S Si :

$$(x, y) \in R \text{ et } (x, y) \in S, \text{ alors } (x, y) \in T.$$

(3) Complément d'une relation

$A \times B$ représente toutes les relations possibles qui peuvent se trouver entre deux ensembles.

$$\overline{R} = \{(x, y) \in A \times B / (x, y) \notin R\}$$

C'est-à-dire : Si $(x, y) \notin R$, alors $(x, y) \in R$

$\overline{R}$ est dit le complément de la relation R.

(4) Relation inverse

Soit R une relation de A à B. Son inverse R^{-1} est définie par :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in R, x \in A, y \in B\}.$$

(5) Composition

Soient R et S deux relations définies sur A, B et C. T est dite la composition de R et S.

$$R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$$
$$T = S \circ R \subseteq A \times C$$
$$T = \{(x, z)/x \in A, y \in B, z \in C, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

Soit R une relation caractérisée l'ensemble A. la composition de R et R est écrit $R \circ R$ ou R^2.

R^n est la composition n ^{ième}de R.

1.5.2 Propriétés particulières des relations

Maintenant on va voir les propriétés fondamentales d'une relation définie sur un ensemble. C'est-à-dire $R \subseteq A \times A$.

(1) Relation réflexive

Si pour tout $x \in A$, la relation xRx ou $(x, x) \in R$ est établie, on l'appelle **relation réflexive**

La relation réflexive est noté par :

$$x \in A \implies (x, x) \in R \text{ ou } \mu_R(x, x) = 1,\ x \in A$$

Si n'est pas vérifié pour quelques $x \in A$, la relation est dit "**irréflexive**".

Si n'est pas vérifié pour tout $x \in A$, la relation est dit "**antiréflexive**".

(2) Relation symétrique

Pour tous $x, y \in A$, si $xRy = yRx$, R est dit **relation symétrique**, on écrit alors :

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \text{ ou } \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x),\ \forall x, y \in A.$$

La relation est "**asymétrique**" ou "**non symétrique**" quand pour quelques $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$.

R est "**antisymétrique**" si pour tous $x, y \in A, (x, y) \in R$ et $(y, x) \notin R$.

(3) Relation transitive

La relation R est dite **transitive** si :

$$\forall\ x, y, z \in A, (x, y) \in R,\ (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$$

1.6 Généralités sur les relations floues

Parmi les concepts flous les plus importants du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir, les relations floues généralisent la notion de relation classiquement définie sur les ensembles. Elles mettent en évidence des liaisons imprécises ou graduelles entre éléments d'un même ensemble $[Zadeh]$[1]. [24]

Définition 1.6.1 *Une relation floue R entre n ensembles de référence $X_1, X_2, ..., X_n$ est un sous-ensemble flou de $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ de fonction d'appartenance μ_R*

Définition 1.6.2 *Une relation floue R entre deux ensembles de référence X et Y est un sous-ensemble flou de $X \times Y$, de fonction d'appartenance μ_R.*

[1]L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Info.Sci.*, 3(1971), 177-200.

- **Cas particuliers** : Si $X = Y$, une relation floue R, définie sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue définie sur X.
- Si X et Y sont finis, une relation floue R, définie sur les deux univers X et Y, peut être décrite par la matrice M_R des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de M_R indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $\mu_R(x, y)$, pour tous x de X et y de Y.

Exemple 1.6.3 *la relation floue R :" x approximativement égal à 3" peut être définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par la fonction d appartenance :*

$$\mu_R(x, 3) = \frac{1}{1 + (x-3)^2}$$

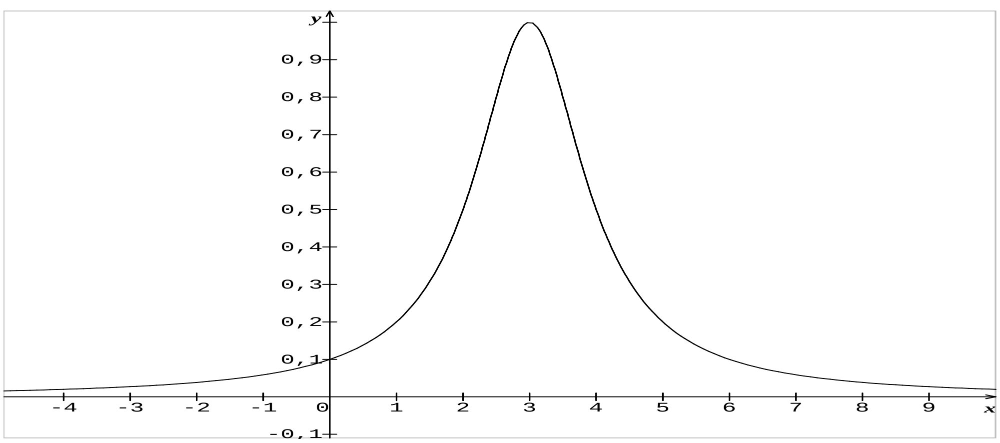

Fig. 1·3: "x approximativement égal à 3"

Exemple 1.6.4 *La relation binaire R représente le concept "très loin"*

$X = \{New\ York,\ Paris\}$

$Y = \{Beijing, New\ York, London\}$

$$R(x, y) = \{(1, (NY, B)), (0, (NY, NY)), (0.6\,(NY, L)), (0.9, (P, B)), (0.7, (P, NY)), (0.3, (P, L))\}$$

On peut la représentée par la matrice suivante :

R	NY	$Paris$
$Beijing$	1	0.9
NY	0	0.7
$London$	0.6	0.3

Remarque 1.6.5 *Les relations floues étant des cas particuliers des sous-ensembles flous, toutes les propriétés et les définitions qui concernent les ensembles flous leur sont applicables, ainsi par exemples la définition de la hauteur, le support ou le noyau d'une relation floue.*

On sait maintenant que la relation n'est qu'un ensemble. Donc on peut appliquer les opérations sur les ensembles en relations.

1.6.1 Opérations sur les relations floues

Supposons $R \subseteq A \times B$ et$S \subseteq A \times B$.

(1)L'égalité

Les relations floues R et S sont dits égaux si

$$\forall (x, y) \in A \times B,\ \mu_R(x, y) = \mu_S\ (x, y)$$

(2) L'inclusion

On dit que R est inclut dans S si $\forall (x, y) \in A \times B,\ \mu_R(x, y) \leq \mu_S\ (x, y)$

(3) Intersection de relations

L'intersection des relations R et S est définie par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{R\cap S}(x) = \min[\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)] = \mu_R(x,y) \wedge \mu_S\ (x,y)$$

Le symbole $\wedge$ désigne l'opérateur de minimisation. De la même manière, l'intersection de n relations floues est définie comme suit :

$$\mu_{R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n}(x,y) = \underset{R_i}{\wedge}\mu_{R_i}(x,y)$$

(4) L'union des relations

L'union des relations R et S est définie par :

$$\forall(x,y) \in A\times B\ \ \mu_{R\cup S}(x,y) = \max[\mu_R(x,y), \mu_S(x,y) = \mu_R(x,y) \vee\ \mu_S(x,y)$$

$\vee$ désigne l'opérateur de Maximation. Pour n relations, on écrit :

$$\mu_{R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n}(x,y) = \underset{R_i}{\vee}\mu_{R_i}(x,y)$$

Si les relations R et S sont exprimées avec ses matrices M_R et M_S, la matrice $M_{R\cup S}$ correspond à l'union est obtenu par la somme des deux matrices floues $M_R + M_S$.

$$M_{R\cup S} = M_R + M_S$$

(5) Complément d'une relation

La relation complémentaire $\overline{R}$ d'une relation floue R est définie par sa fonction d'appartenance suivante :

$$\forall(x,y) \in A\times B\ \ ,\ \mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)\,.$$

(4) Relation inverse

Etant donner une relation floue $R \subseteq A \times B$, Sa relation inverse R^{-1} est définie par la fonction d'appartenance suivante : .

$$\forall (x, y) \subseteq A \times B,\ \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R\ (x, y).$$

Exemple 1.6.1.1 *Etant donné Deux relations floues représentées par ses matrices M_R et M_S tels que.*

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.0	1.0	0.0

M_S	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.6	0.9	0.3

Les matrices $M_{\ R \cup S}$ et $M_{R \cap S}$ corresponds aux relations floues $R \cup S$ et $R \cap S$ sont :

$M_{R \cup S}$	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.6	1.0	0.3

$M_{R \cap S}$	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.0	0.9	0.0

La relation complémentaire est donnée par la matrice suivante :

$M_{\overline{R}}$	a	b	c
1	0.7	0.8	0.0
2	0.2	0.0	0.0
3	1.0	0.0	1.0

1.6.2 Composition de Relations floues

La connaissance de deux relations floues, l'une entre A et B et l'autre entre B et C permet d'établir une relation entre A et C, comme dans le cas de relations classiques.

Définition 1.6.2.1 *Deux relations floues R et S sont définies sur A, B et C. c'est-à-dire, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. La composition $S \circ R = SR$ des deux relations R et S est exprimée par la relation de A vers C, et défini par :*

$$\forall\ (x, y) \in A \times B, (y, z) \in B \times C,$$
$$\mu_{s \cdot R}(x, z) = \max_{y} [\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))] = \bigvee_{y} [\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)]$$

$S \circ R$ est un sous-ensemble de $A \times C$. c'est -à-dire, $S \circ R \subseteq A \times C$.

Si les relations R et S sont représentées par les matrices M_R et M_S, la matrice $M_{S \circ R}$ correspond à $S \circ R$ est obtenue par le produit des M_R et M_S.

$$M_{S \circ R} = M_R \circ M_S$$

Exemple 1.6.2.2 *Considérons les relations floues $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. définies par ses matrices suivantes*

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

Le composé des deux relations R et S est le suivant :

$S \circ R$	α	β	γ
1	0.4	0.2	0.3
2	0.3	0.3	0.3
3	0.8	0.9	0.8

Chapitre 2

Généralités sur les relations d'ordres α-flous

Dans ce chapitre nous étudions les ordres $\alpha-$flous. (Les ordres flous de Stouti). Tout d'abord, on cite les différentes définitions de l'ordre flou définis par plusieurs auteurs (L. A. Zadeh, C. Ponsard, P. Venugopalan et A. Stouti), en suite nous allons voir des résultats qui nous permettent de construire de nouvels ordres $\alpha-$flous à partir des relations d'ordres classiques. puis, le résultat concernant la compatibilité des ordres $\alpha-$flous défnis sur les espaces vectoriels réels. En outre, nous caractérisons une sous-catégorie des ordres linéaires $\alpha-$flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication usuelle sur la droite réelle.

2.1 Différentes définitions de l'ordre flou

On va donner des quelques définitions de l'ordre flous, on cite l'ordre flou de Zadeh, l'ordre flou de Ponsard, l'ordre flou de Venugopalan et l'ordre flou de Stouti qui est notre intéresse.

2.1.1 L'ordre flou de Zadeh

Définition 2.1.1.1 (24)[1] *Soit X un ensemble classique. L'ordre partiel flou de Zadeh sur X est une relation Z dans X qui vérifit les conditions suivantes :*

i) $\forall x \in X, Z(x,x) = 1$ *(la réflexivité)*

ii) $\forall x, y \in X, (Z(x,y) > 0 \text{ et } x \neq y) \implies Z(y,x) = 0$ *(L'antisymétrie)*

iii) $\forall x, y, z \in X, Z(x,y) \geq \max_{y \in X} [\min \{Z(x,y), Z(y,z)\}]$ *(la transitivité).*

Zadeh considère que l'ordre flou soit total si

$$red \forall x, y \in X, Z(x,y) > 0 \; ou Z(y,x) > 0$$

.

Exemple 2.1.1.2 *Soit $redX = \{a, b, c, d, e, f\}$ la relation floue définie sur X par le tableau suivant :*

red

Z	a	b	c	d	e	f
a	1	0.8	0.2	0.6	0.6	0.4
b	0	1	0	0	0.6	0
c	0	0	1	0	0.5	0
d	0	0	0	1	0.6	0.4
e	0	0	0	0	1	0
f	0	0	0	0	0	1

[1] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Info.Sci.*, 3(1971), 177-200.

est une relation d'ordre flou de Zadeh.

2.1.2 L'ordre flou de Ponsard

Définition 2.1.2.1 (7)[2] *Soit X un ensemble classique. L'ordre partiel flou de Ponsard sur X est une relation P dans X qui vérifit les conditions suivantes :*

i) $\forall x \in X, P(x,x) \in [0,1]$ *(la réflexivité)*

ii) $\forall x, y \in X, (P(x,y) + P(y,x) \succ 1) \implies x = y$ *(L'antisymétrie)*

iii) $\forall x, y, z \in X, P(x,y) \geq P(y,x)$ *et* $P(y,z) \geq P(z,y) \implies P(x,z) \geq P(z,x)$ *(la transitivité).*

Ponsard considère que l'ordre flou partiel soit total si

$$\forall x, y \in X, x \neq y \; P(x,y) > P(y,x) \text{ ou } P(y,x) > P(x,y)$$

Exemple 2.1.2.2 *Soit $X = \{a, b, c\}$ la relation floue définie sur X par le tableau suivant*

P	a	b	c
a	0.5	0.3	0.4
b	0.1	1	0.2
c	0	0.2	0.7

est une relation d'ordre flou de Ponsard.

2.1.3 L'ordre flou de Venugopalan

Définition 2.1.3.1 (23)[3] *Soit X un ensemble classique. L'ordre partiel flou de Venugopalan sur X est une*

[2] A. Billot, Economic theory of fuzzy equilibria, *Lecture Notes in Economics and mathematical systems* -373, Springer-Verlag, Berlin 1992.
[3] P. Venugopalan, Fuzzy ordered sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 46(1992), 221-226.

relation V dans X qui vérifie les conditions suivantes :

i) $\forall x \in X, P(x,x) = 1$ *(La réflexivité)*

ii) $\forall x, y \in X, (P(x,y) + P(y,x) > 1) \implies x = y$ $(\mathrm{L}'antisymtrie)$

iii) $\forall x, y, z \in X, V(x,z) \geq [V(x,y) + V(y,z) - 1 \vee 0]$ *(La transitivité).*

Venugopalan considère que $l'ordre floupartiel soit total si$

$$\forall x, y \in X,\ P(x,y) > \frac{1}{2} \text{ ou } P(y,x) > \frac{1}{2}$$

Si $x \neq y$. Par l'antisymétrie, une seule condition satisfaite.

Exemple 2.1.3.2 *Soit* $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ *le sous-ensemble* V *de* $X \times X$ *défini par le tableau suivant*

V	a	b	c	d	e	f	g
a	1	0	0	0.6	0.4	0.4	0.6
b	0	1	0	0.6	0.6	0.4	0.4
c	0	0	1	0	0.6	0.6	0.4
d	0	0	0	1	0	0.6	0
e	0	0	0	0	1	0.4	0.6
f	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	1

est une relation d'ordre flou de Venugopalan.

2.1.4 L'ordre $\alpha-$flou (l'ordre flou de Stouti)

Définition 2.1.4.1 (19)[4] *Soit X un ensemble non vide et $\alpha \in]0,1]$. L'ordre $\alpha-$flou sur X est un sous-ensemble r_α de $X \times X$ qui satisfait les conditions suivantes :*

[4] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunctions, *J. Fuzzy Math*, 11(2)(2003), 455-466.

(i) $\forall x \in X, r_\alpha(x,x) = \alpha$ *($\alpha-$flou réflexivé)*

(ii) $\forall x, y \in X, r_\alpha(x,y) + r_\alpha(y,x) > \alpha \implies x = y$ *($\alpha-$flou antisymétrie)*

(iii) $\forall x, y, z \in X, r_\alpha(x,z) \geq \max_{y \in X} [\min \{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,z)\}]$ *($\alpha-$flou transitivité).*

On dit que l'ordre α-flou r_α est linéaire (total) si

$$\text{pour tout } x \neq y \text{ on a soit } r_\alpha(x,y) > \frac{\alpha}{2} \text{ ou } r_\alpha(y,x) > \frac{\alpha}{2}$$

Exemple 2.1.4.2 *Soit $X = \{a, b, c\}$ le sous-ensemble r_α de $X \times X$ défini par le tableau suivant*

r_α	a	b	c
a	α	0.15α	0.55α
b	0.7α	α	0.6α
c	0.1α	0.2α	α

est un ordre $\alpha-$flou.

– On remarque que l'$\alpha-$flou antisymétrie équivalent à

$$\left[\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \implies r_\alpha(x,y) + r_\alpha(y,x) \leq \alpha\right]$$

– Si r_α est une relation $\alpha-$flou antisymétrique définie sur X on obtient :

$$\forall (x,y) \in X^2 \ 0 \leq r_\alpha(x,y) \leq \alpha$$

Un ensemble X non vide et un ordre α-flou défini sur lui, est appelé un ensemble α-flou ordonné.

L'ensemble α-flou ordonné (X, r_α) avec r_α est un ordre total est dit chaîne.

Soit (X, r_α) un ensemble α-flou ordonné et soit A un sous-ensemble de X

- On dit qu'un élément u de X est r_α-majorant de A si $r_\alpha(x, u) > \frac{\alpha}{2}$ pour tout $x \in A$.
- si u est un r_α-majorant et $u \in A$, alors u est appelé plus grand élément de A.
- Un élément m de A est dit élément maximal de A s'il ya $x \in A$ tel que $r_\alpha(m, x) > \frac{\alpha}{2}$, alors $x = m$.
- On dit qu'un élément l de X est r_α-minorant de A si $r_\alpha(l, x) > \frac{\alpha}{2}$ pour tout $x \in A$.
- si l est un r_α-minorant et $l \in A$, alors l est appelé plus petit élément de A.
- Un élément n de A est dit élément minimal de A s'il ya $x \in A$ tel que $r_\alpha(x, n) > \frac{\alpha}{2}$, alors $x = n$
  - $\sup_{r_\alpha}(A) :=$ le plus petit des r_α-majorants de A (s'il existe).
  - $\inf_{r_\alpha}(A) :=$ le plus grand des r_α-minorants de A (s'il existe).
  - $\max_{r_\alpha}(A) :=$ le plus grand élément de A (s'il existe).
  - $\min_{r_\alpha}(A) :=$ le plus petit élément de A (s'il existe).

Exemples

1. soit $X = \{a, b, c\}$ et soit r_α un ordre $\alpha-$flou sur X défini par la matrice suivante :

r_α	a	b	c
a	α	0.15α	0.55α
b	0.7α	α	0.6α
c	0.1α	0.2α	α

$\inf_{r_\alpha}(X) = b$ et $\sup_{r_\alpha}(X) = c$.

2. soit $X = \{a, b, c\}$ et soit r_α un ordre $\alpha-$flou sur X défini par la matrice suivante :

r_α	a	b	c
a	α	0.55α	0.6α
b	0.3α	α	0.3α
c	0.2α	0.2α	α

$\inf_{r_\alpha}(X) = a$ et $\sup_{r_\alpha}(X)$ n'existe pas.

3. soit $X = \{a, b, c\}$ et r_α un ordre $\alpha-$flou sur X défini par la matrice suivante :

r_α	a	b	c
a	α	0.10α	0.65α
b	0.15α	α	0.7α
c	0.15α	0.1α	α

$\inf_{r_\alpha}(X)$ n'existe pas et $sup_{r_\alpha}(X) = c$.

4. Soit $X = \{a, b, c\}$ et r_α un ordre $\alpha-$flou sur X défini par la matrice suivante :

r_α	a	b	c
a	α	0.20α	0.80α
b	0.3α	α	0.3α
c	0.15α	0.2α	α

$\inf_{r_\alpha}(X)$ et $\sup_{r_\alpha}(X)$ n'existent pas.

Définition 2.1.4.3 (19)[5] *Soit X un ensemble classique non vide et soit r une relation floue sur X.*

la relation floue inverse s de r est définie par :

[5] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunctions, *J. Fuzzy Math*, 11(2)(2003), 455-466.

$$s(x,y) = r(y,x) \text{ pour tout } (x,y) \in X^2.$$

Lemme 2.1.4.4 (19)[6] *Soit X un ensemble classique non vide et $\alpha \in]0,1]$.* Si r_α *est un ordre $\alpha-$flou sur X, alors sa relation inverse est aussi une relation d'ordre $\alpha-$flou sur X.*

On va donner quelques exemples d'ordres flous partiels sur l'ensemble $\mathbb{R}$

Exemples (21)

1. Soit $X = \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1]$ et $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{2}\right]$, alors la relation flou r_α définie pour tous x, y de $\mathbb{R}$ par :

$$r_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = y \\ \beta & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est un ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$.

On Note que dans cet exemple chaque deux éléments distincts de $\mathbb{R}$ sont incomparables.

2. Soit $X = \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1]$, alors la relation floue r_α définie pour tous x, y de $\mathbb{R}$ par :

$$r_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x > y \\ \alpha\left(1 - \frac{x}{y}\right) \text{ si } 0 \leq x < y \\ \alpha\left(1 - \frac{y}{x}\right) \text{ si } x < y \leq 0 \\ \alpha \text{ si } x < 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

[6] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunctions, *J. Fuzzy Math*, 11(2)(2003), 455-466.

est un ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Il est clair que $0 \leq r_\alpha(x,y) \leq \alpha$ pour tous x,y de $\mathbb{R}$. Alors r_α est bien défini. Nous allons voir que r_α est un ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$.

1) Pour tous x,y de $\mathbb{R}$, $r_\alpha(x,x) = \alpha$ donc r_α est $\alpha-$floue réflexive.

2) Si $x \neq y$ alors $x > y$ ou $y > x$. d'où on a, soit $r_\alpha(x,y) = 0$ ou $r_\alpha(y,x) = 0$, ceci implique que

$$r_\alpha(x,y) + r_\alpha(y,x) \leq \alpha$$

D'où r_α est $\alpha-$floue antisymétrique.

3) Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$. Nous avons quatre cas à étudier

3.i) Si $r_\alpha(x,z) = \alpha$, alors $r_\alpha(x,z) \geq \min\{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,z)\}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3.ii) Si $r_\alpha(x,z) = 0$, alors $x \succ z$ d'où pour tout $y \in \mathbb{R}$ on distingue trois cas

a) Si $x > z \geq y$, alors $r_\alpha(x,y) = 0$.

b) Si $x \geq y > z$, alors $r_\alpha(y,z) = 0$.

c) Si $y > x > z$, alors $r_\alpha(y,z) = 0$. Ainsi

$r_\alpha(x,z) \geq \min\{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,z)\}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3.iii) Si $r_\alpha(x,z) = \alpha\left(1 - \dfrac{x}{z}\right)$, alors $0 \leq x < z$, d'où pour y de $\mathbb{R}$ on considère quatre cas :

(a) Si $0 \leq x < z < y$, alors $r_\alpha(y,z) = 0$

(b) Si $0 \leq x < y < z$, alors $\alpha\left(1 - \dfrac{x}{z}\right) \geq \alpha\left(1 - \dfrac{y}{z}\right)$ d'où $r_\alpha(x,z) \geq r_\alpha(y,z)$

(c) Si $0 \leq y < x < z$,alors $r_\alpha(x,y) = 0$

(d) Si $y < 0 \leq x < z$, alors $r_\alpha(x,y) = 0$. Ainsi

$$r_\alpha(x,z) \geq \min\{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,z)\} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}$$

3.iv) Si $r_\alpha(x,z) = \alpha\left(1 - \dfrac{z}{x}\right)$ de la même manière que **3.iii)** on démontre que :

$$r_\alpha(x,z) \geq \min\{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,z)\} \;\forall\; y \in \mathbb{R}$$

On déduit de ce qui précède que r_α est $\alpha-$floue transitive. D'où r_α est un ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$. ■

On note que dans cet exemple r_α est un ordre $\alpha-$flou partiel car **1** et **2** sont incomparables, en effet

$$r_\alpha(1,2) = \frac{\alpha}{2} \text{ et } r_\alpha(2,1) = 0.$$

3. D'après le Lemme 2.1.4.4 la relation floue inverse s_α de r_α (exemple au-dessus) est un ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$

$$s_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \quad x = y \\ 0 \text{ si } x < y \\ \alpha\left(1 - \dfrac{y}{x}\right) \text{ si } 0 \leq y < x \\ \alpha\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y < x \leq 0 \\ \alpha \text{ si } y < 0 \text{ et } x > 0 \end{cases}$$

2.2 Construction de nouveaux ordres $\alpha-$flous

Dans cette section nous verrons quelques procédures pour construire de nouveaux ordres $\alpha-$flous. Nous allons voir les résultats suivants :

Théorème 2.2.1 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit X un ensemble classique non vide et $\alpha \in \left]0,1\right]$, soit $(r_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire des relations d'ordres $\alpha-$flous* *sur X, alors la relation floue υ définie par :*

$$\upsilon(x,y) = \min_{i\in I} r_i(x,y) \;\; \textit{pour tout} \;\; (x,y) \in X^2$$

est une relation d'ordre $\alpha-$flou sur X.

Preuve. Soit $(r_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire des relations d'ordres $\alpha-$flous sur X.
(i) Réflexivité $\alpha-$floue : Soit $x \in X$ pour tout $i \in I$ on a $r_i(x,x) = \alpha$, donc pour tout $x \in X$, $\upsilon(x,x) = \min_{i\in I} r_i(x,x) = \alpha$. D'où υ est $\alpha-$floue réflexive.
(ii) L'antisymétrie $\alpha-$flou: Soient $x, y \in X$,tels que $x \neq y$, soit $i \in I$. Puisque

$$\upsilon(x,y) + \upsilon(y,x) \leq r_i(x,y) + r_i(y,x)$$

et r_i une $\alpha-$flou antisymétrique, alors

$$\upsilon(x,y) + \upsilon(y,x) \leq \alpha$$

Par conséquent r_α est $\alpha-$flou antisymétrique.
(iii) Transitivité $\alpha-$flou : Soient $x, y, z \in X$ et soit $i \in I$, comme

$$\upsilon(x,y) \leq r_i(x,y) \;\; \textit{et} \;\; \upsilon(y,z) \leq r_i(y,z)$$

Donc on obtient

$$\min\{\upsilon(x,y), \upsilon(y,z)\} \leq \min_{i\in I}\{r_i(x,y), r_i(y,z)\}$$

D'autre part par hypothèse nous savons que $\forall i \in I, r_i$ est $\alpha-$floue transitive alors on obtient

$$\min\{r_i(x,y), r_i(y,z)\} \leq r_i(x,z) \text{ pour tout } i \in I$$

Donc on résulte que $\forall y \in X, \forall i \in I$ nous avons

$$\min\{\upsilon(x,y), \upsilon(y,z)\} \leq r_i(x,z)$$

Ainsi

$$\min\{\upsilon(x,y), \upsilon(y,z)\} \leq \upsilon(x,z)\, \forall i \in I$$

Donc υ est $\alpha-$floue transitive, par conséquent υ est une relation d'ordre $\alpha-$flou. ■

En utilisant le Lemme 2.1.4.4 et le Théorème 2.2.1 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2.2 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit* (X, r_α) *un ensemble* $\alpha-$*flou ordonné alors la relation floue* υ *définie par :*

$$\upsilon(x,y) = \min\{r_\alpha(x,y), r_\alpha(y,x)\} \;\; \forall\, x,y \in X$$

est un ordre $\alpha-$*flou sur* X.

Dans ce qui suit on va étudier la relation entre l'ordre classique et l'ordre flou.

Soit $\leq_r$ une relation d'ordre classique (17)[7] définie sur X et soit G_r sa graphe définie par :

$$G_r = \left\{(x,y) \in X^2 : x \leq_r y\right\}$$

[7]B. Schroder, Ordered sets : An introduction, Birkhauser Boston ; First edition, December 6, 2002

Alors on a :

$$\chi_{G_r}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq_r y \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans ce qui suit on va identifier la relation d'ordre classique r avec χ_{G_r}, dans ce sens pour chaque relation d'ordre classique $\leq_r$ on peut écrire :

$$r(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq_r y \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dans la suite on va donner comment construire des relations d'ordres $\alpha-$flous à partir des relations d'ordres classiques et ses relations inverses.

Théorème 2.2.3 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit X un ensemble classique non vide, alors :*

(i) *Si r est une relation d'ordre classique total sur X et $\alpha, \beta \in [0,1]$ tel que $0 < \alpha + \beta \leq 1$ alors une relation floue définie par :*

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \alpha r(x,y) + \beta r(y,x) \ \ \textit{pour tout} \ \ (x,y) \in X^2$$

est une relation d'ordre $(\alpha+\beta)-$flou

(ii) *Si r est une relation d'ordre classique total sur X et $\alpha, \beta \in [0,1]$ tel que $0 < \alpha + \beta \leq 1$ et $\alpha \neq \beta$ alors $s_{(\alpha,\beta)}$ est une relation d'ordre $(\alpha+\beta)-$flou total*

(c) $(\alpha+\beta)$ −flou transitivité : Pour tout $(x,y)\in X^2$ on a :

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,y)=\begin{cases}\alpha+\beta \text{ si } x=y\\ \alpha \text{ si } r(x,y)=1 \text{ et } x\neq y\\ \beta \text{ si r}(y,x)=1 \text{ et } y\neq x\end{cases}$$

Soient $x,y,z\in X$,on a :

a)-1^er cas : $x=y$ alors

$$\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\}=\min\left\{\alpha+\beta,s_{(\alpha,\beta)}(x,z)\right\}=s_{(\alpha,\beta)}(x,z)\leq s_{(\alpha,\beta)}(x,z)$$

b)-2^ème cas: $x=z$ et $x\neq y$, alors

$$\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\}=\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),s_{(\alpha,\beta)}(y,x)\right\}=\min\{\alpha,\beta\}\leq\alpha+\beta=s_{(\alpha,\beta)}(x,x)$$

c)-3^ème cas : $y=z$ et $\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\}=\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),\alpha+\beta\right\}=s_{(\alpha,\beta)}(x,z)$.

d)-4^ème cas : $r(x,y)=r(y,z)=1,x\neq y,y\neq z$ alors

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,z)=s_{(\alpha,\beta)}(x,y)=s_{(\alpha,\beta)}(y,z)=\alpha$$

Donc

$$\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y),s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\}=\alpha\leq s_{(\alpha,\beta)}(x,z)$$

e) 5^ème cas : $r(y,x)=r(x,z)=1,x\neq y,y\neq z$ alors

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,z)=s_{(\alpha,\beta)}(y,z)=\alpha\ et s_{(\alpha,\beta)}(x,y)=\beta$$

Puisque $\min\{\alpha,\beta\} \leq \alpha$ on obtient :

$$\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y), s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\} \leq s_{(\alpha,\beta)}(x,z)$$

f) 6^{ème}cas : $r(z,x) = r(z,y) = 1, x \neq z, y \neq z$ alors

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,z) = s_{(\alpha,\beta)}(y,z) = \beta \text{ et } s_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \alpha$$

Puisque $\min\{\alpha,\beta\} \leq \beta$ on obtient :

$$\min\left\{s_{(\alpha,\beta)}(x,y), s_{(\alpha,\beta)}(y,z)\right\} \leq s_{(\alpha,\beta)}(x,z)$$

Donc $s_{(\alpha,\beta)}$ est $(\alpha+\beta)$ −flou transitive, d'où $s_{(\alpha,\beta)}$ est une relation d'ordre $(\alpha+\beta)$ −flou sur X.

ii) Supposons que $\alpha \neq \beta$, alors $\alpha > \beta$ ou $\alpha < \beta$. Maintenant on suppose que $\alpha > \beta$, puisque r est une relation d'ordre total, alors pour tous $(x,y) \in X^2, x \neq y$,on a : $r(x,y) = 1$ ou $r(y,x) = 1$.

Si $r(x,y) = 1$, alors $s_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \alpha > \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, sinon $r(y,x) = 1$, d'où

$$s_{(\alpha,\beta)}(y,x) = \alpha > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Pour le cas où $\beta > \alpha$ et avec le même argument on obtient :

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \beta > \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ou } s_{(\alpha,\beta)}(y,x) = \beta > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Par conséquent $s_{(\alpha,\beta)}$ est une relation d'ordre $(\alpha+\beta)$ −flou total sur X.

En utilisant le Lemme 2.1.4.4 et le Théorème 2.2.3 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2.4 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit X un ensemble classique non vide, alors pour toute relation d'ordre classique r sur X et $\alpha \in]0,1]$ on peut construire des relations $\alpha-$flous r_α, s_α, t_α définies respectivement par :*
$r_\alpha(x;y) = \alpha r(x;y)$, $s_\alpha(x;y) = \alpha r(y;x)$ *et* $t_\alpha = \alpha \min\{r(x,y), r(y,x)\}$ *pour tout* $(x,y) \in X^2$.

Corollaire 2.2.5 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $\leq$ une relation d'ordre total classique définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, alors pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que : $0 < \alpha + \beta \leq 1$ et $\alpha \neq \beta$, il y a une relation d'ordre $(\alpha+\beta)-$flou total noté $s_{(\alpha,\beta)}$ définie par :*

$$s_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \begin{cases} \alpha+\beta \ \textit{si}\ x = y \\ \alpha \ \textit{si}\ x < y \\ \beta \ \textit{si}\ x > y \end{cases}$$

Comme une application du Théorème 2.2.3, nous donnons une famille des ordres $\alpha-$flous sur $\mathbb{R}^n$. Pour faire cela nous devons faire un rappel de l'ordre lexicographique $\leq_{lexico}$ sur $\mathbb{R}^n$

Définition 2.2.6 *Soient $(x_1, x_2, ...x_n), (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$ alors on a :*

$(x_1, x_2, ...x_n) \leq_{lexico} (y_1, y_2, ...y_n)$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ ou il y a $k \in \{2,...,n\}$ tel que : $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1,2,...,k-1\}$ et $x_k < y_k$.

Il est claire que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$ est total (17)[8].on peut appliquer le Théorème 2.2.3 pour obtenir le résultat suivant :

Corollaire 2.2.7 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $\leq_{lexico}$ ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$ alors pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que : $0 < \alpha+\beta \leq 1$ et $\alpha \neq \beta$, il y a une relation*

[8] B. Schroder, Ordered sets : An introduction, Birkhauser Boston ; Firstedition, December 6, 2002

d'ordre $(\alpha+\beta)-$flou total noté $s_{(\alpha,\beta)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$s_{(\alpha,\beta)}\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right)=\begin{cases}\alpha+\beta \text{ si } & x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,n\}\\ \alpha \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,k\} \text{ et } x_k<y_k\\ \beta \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,h\} \text{ et } y_h<x_h\end{cases}$$

Afin d'appliquer le Théorème 2.2.3 sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, nous rappelons de l'ordre lexicographique $\leq_{lexico}$ sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.2.8 *Soient $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in C$, alors on a :*

$(z_1\leq_{lexico} z_2)$ si et seulement si $(x_1=x_2$ et $y_1=y_2)$ ou $(x_1=x_2$ et $y_1<y_2)$.

Du Théorème 2.2.3 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2.9 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $\leq_{lexico}$ ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$ alors pour tous $\alpha,\beta\in[0,1]$ tels que: $0<\alpha+\beta\leq 1$ et $\alpha\neq\beta$, il y a une relation d'ordre $(\alpha+\beta)-$flou total noté $s_{(\alpha,\beta)}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :*

$$s_{(\alpha,\beta)}\left((x_1+iy_1),(x_2+iy_2)\right)=\begin{cases}\alpha+\beta \text{ si } & x_1=x_2 \text{ et } y_1=y_2\\ \alpha \text{ si } x_1=x_2 \text{ et } y_1<y_2\\ \beta \text{ si } x_1=x_2 \text{ et } y_1>y_2\end{cases}$$

Pour le produit fini des ensembles ordonnés $\alpha-$flous on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.10 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $(X_i,r_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ une famille non vide des ensembles ordonnés $\alpha-$ flous. La relation floue μ définie sur $X_1\times X_2\times...\times X_n$ par :*

$$\mu\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right)=\min\{r_i(x_i,y_i): i=1,...,n\}$$

est une relation d'ordre $\alpha-$flou sur $X_1\times X_2\times...\times X_n$.

Preuve. Soit $(X_i, r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille non vide des ensembles ordonnés $\alpha-$flous et μ une relation floue définie sur $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ par :

$$\mu\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = \min\left\{r_i\left(x_i,y_i\right) : i = 1,\dots,n\right\}$$

(i) $\alpha-$floue réflexivité. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ on a :

$$\mu\left((x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n)\right) = \min\left\{r_i\left(x_i,x_i\right) : i = 1,2,\dots,n\right\} = \alpha$$

(ii) $\alpha-$floue antisymétrie. Soient $(x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2, \dots y_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ tel qu' il y a au moins $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Puisque r_{i_0} est $\alpha-$flou antisymétrique on obtient :

$$r_{i_0}\left(x_{i_0}, y_{i_0}\right) + r_{i_0}\left(y_{i_0}, x_{i_0}\right) \leq \alpha$$

D'un autre coté nous savons que :

$$\mu\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = \min\left\{r_i\left(x_i,y_i\right) : i = 1,2,\dots,n\right\}$$

Et

$$\mu\left((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)\right) = \min\left\{r_i\left(y_i,x_i\right) : i = 1,2,\dots,n\right\}$$

Alors on a :

$$\mu\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) + \mu\left((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)\right) \leq r_{i_0}\left(x_{i_0}, y_{i_0}\right) + r_{i_0}\left(y_{i_0}, x_{i_0}\right) \leq \alpha$$

Donc μ est $\alpha-$floue antisymétrique.

(iii) $\alpha-$floue transitivité : Soient $(x_1, x_2, \dots x_n), (z_1, z_2, \dots z_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

On doit prouver que pour tout $(y_1, y_2, ...y_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ on a :

$$\mu\left((x_1, ..., x_n), (z_1, ..., z_n)\right) \geq \min\left\{\mu\left((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\right), \mu\left((y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)\right)\right\}$$

Par définition on a

$$\mu\left((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\right) \leq \mu_i(x_i, y_i) \text{ .et } \mu\left((y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)\right) \leq \mu_i(y_i, z_i)$$

Donc pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$ on obtient :

$$\min\left\{\mu\left((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\right), \mu\left((y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)\right)\right\} \leq \min\left\{\mu_i(x_i, y_i), \mu_i(y_i, z_i)\right\}$$

Par hypothèse pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, μ_i est $\alpha-$floue transitive, alors on obtient :

$$\min\left\{\mu_i(x_i, y_i), \mu_i(y_i, z_i)\right\} \leq \mu_i(x_i, z_i)$$

Donc pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$ on obtient :

$$\min\left\{\mu\left((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\right), \mu\left((y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)\right)\right\} \leq \mu_i(x_i, z_i)$$

Comme

$$\mu\left((x_1, ..., x_n), (z_1, ..., z_n)\right) = \min\left\{r_i(x_i, z_i) : i = 1, ..., n\right\}$$

Alors, pour tout $(y_1, y_2, ...y_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ nous obtenons :

$$\min\left\{\mu\left((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\right), \mu\left((y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)\right)\right\} \leq \mu\left((x_1, ..., x_n), (z_1, ..., z_n)\right)$$

Donc μ est $\alpha-$floue transitive d'où μ est une relation d'ordre $\alpha-$flou. ■

Comme une conséquence du Théorème 2.2.10 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2.11 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit (X, r) un ensemble ordonné $\alpha-$ flou non vide. Alors la relation floue μ définie sur X^n par :*

$$\mu\left(\left(x_1, ..., x_n\right), \left(y_1, ..., y_n\right)\right) = \min\left\{r\left(x_i, y_i\right) : i = 1, ..., n\right\}$$

est une relation d'ordre $\alpha-$flou sur X^n.

Comme une conséquence du Corollaire 2.2.11, on va donner un exemple d'ordre partiel $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}^n$ comme suit :

Exemple 2.2.12 *Soit $r_\alpha$un ordre partiel $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$ donné à l'exemple 2 dans* (2.1.4). *Alors d'après le Théorème 2.2.10, il existe une relation d'ordre $\alpha-$flou μ_α sur $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$\mu_\alpha\left(\left(x_1, ..., x_n\right), \left(y_1, ..., y_n\right)\right) = \min\left\{r_\alpha\left(x_i, y_i\right) : i = 1, ..., n\right\}$$

2.3 Les ordres $\alpha-$flous qui sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel

Dans cette section on va étudier Les ordres $\alpha-$flous qui sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

Définition 2.3.1 ***1)*** *Soit X un espace vectoriel réel et $r_\alpha$une relation d'ordre $\alpha-$flou sur X, nous savons que r_α est compatible avec l'addition si, pour tous $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right) \in X^2$ on a :*

$$\left(r_\alpha\left(x_1, y_1\right) > \frac{\alpha}{2} \text{ et } r_\alpha\left(x_2, y_2\right) > \frac{\alpha}{2}\right) \implies \left(r_\alpha\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right) > \frac{\alpha}{2}\right)$$

2) *$r_\alpha$est dite compatible avec la multiplication par un scalaire si pour tous $(x, y) \in X^2$*

et $\lambda > 0$, on a :

$$\left(r_{\alpha}(x,y) > \frac{\alpha}{2}\right) \Longrightarrow \left(r_{\alpha}(\lambda x, \lambda y) > \frac{\alpha}{2}\right)$$

Pour une famille des relations d'ordres $\alpha-$flous nous allons voir le résultat suivant

Théorème 2.3.2 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $(X_i, r_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ une famille non vide des espaces vectoriels ordonné $\alpha-$flous et soit μ une relation flou définie sur $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ par :*

$$\mu\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) = \min\left\{r(x_i,y_i) : i = 1,...,n\right\}$$

Alors, on a
(i) *Si pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ chaque ordre $\alpha-$flou r_i est compatible avec l'addition sur X_i, alors μ est une relation $\alpha-$floue compatible avec l'addition dans l'espace vectoriel réel $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.*
(ii) *Si pour chaque $i \in \{1,2,...,n\}$ tous les ordres $\alpha-$flous r_i sont compatibles avec la multiplication par scalaire sur X_i, alors μ est une relation d'ordre $\alpha-$flou compatible avec la multiplication par scalaire sur l'espace vectoriel réel $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.*

Preuve. Soit $(X_i, r_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ une famille non vide des ensembles ordonnés $\alpha-$flous et μ une relation floue définie sur $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ par :

$$\mu\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) = \min\left\{r_i(x_i,y_i) : i = 1,...,n\right\}$$

D'après le Théorème 3.10 la relation floue μ est une relation d'ordre $\alpha-$flou sur l'espace vectoriel réel $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.
(i) Supposons que pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ chaque relation d'ordre $\alpha-$flou est compatible avec l'addition dans X_i.

Soient $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n),(z_1,...,z_n),(t_1,...,t_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ tels que :

$$\mu\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) > \frac{\alpha}{2} \text{ et } \mu\left((z_1,...,z_n),(t_1,...,t_n)\right) > \frac{\alpha}{2}$$

Par la définition de μ pour chaque $i \in \{1,2,...,n\}$ on obtient :

$$r_i(x_i,y_i) > \frac{\alpha}{2} \text{ et } r_i(z_i,t_i) > \frac{\alpha}{2}$$

Puisque pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ chaque relation d'ordre $\alpha-$flou r_i est compatible avec l'addition dans X_i, donc on obtient :

$$r_i(x_i+z_i,y_i+t_i) > \frac{\alpha}{2},\ \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

D'où

$$\mu\left((x_1+z_1,...,x_n+z_n),(y_1+t_1,...,y_n+t_n)\right) = \min\left\{r_i(x_i+z_i,y_i+t_i) : i=1,2,...,n\right\} > \frac{\alpha}{2}$$

Alors μ est compatible avec l'addition dans l'espace vectoriel réel $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

(ii) Supposons que pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ chaque relation d'ordre $\alpha-$flou est compatible avec la multiplication par scalaire sur X_i. Soit $\lambda > 0$ et $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ tel que :

$$\mu\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right) > \frac{\alpha}{2}$$

Par définition de μ et pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ on aura : $r_i(x_i,y_i) > \frac{\alpha}{2}$. Puisque pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ chaque relation d'ordre $\alpha-$flou r_i est compatible avec la multiplication par scalaire sur X_i, alors on obtient : $r_i(\lambda x_i,\lambda y_i) > \frac{\alpha}{2}$,pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$.

D'où

$$\mu\left(\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right),\left(\lambda y_1,...,\lambda y_n\right)\right)>\frac{\alpha}{2}$$

Donc μ est compatible avec la multiplication par scalaire dans l'espace vectoriel réel $X_1\times X_2\times...\times X_n$. ■

La combinaison du Théorème 2.3.2 et le Corollaire 2.2.11 donne le résultat suivant :

Corollaire 2.3.3 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit (X,r_α) un ensemble ordonné α-flou non vide, supposons que r_α est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire sur X. Alors la relation floue μ définie sur X^n par :*

$$\mu\left(\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_n\right)\right)=\min\left\{r\left(x_i,y_i\right):i=1,...,n\right\}$$

est une relation d'ordre $\alpha-$flou compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire sur X^n.

On va donner maintenant une famille des relations d'ordres flous qui sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.3.4 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit $\lambda,\beta\in[0,1]$ tel que $0<\lambda+\beta\leq 1$. Alors, il existe une relation d'ordre $(\lambda+\beta)-$flou $s_{(\lambda,\beta)}$ sur $\mathbb{R}^n$ qui est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$s_{(\lambda,\beta)}\left(\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_n\right)\right)=\begin{cases}\lambda+\beta \text{ si} & x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,n\}\\ \beta \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,k\} \text{ et } x_k<y_k\\ \lambda \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,h\} \text{ et } y_h<x_h\end{cases}$$

De plus, si $\lambda\neq\beta$ la relation d'ordre $(\lambda+\beta)-$floue $s_{(\lambda,\beta)}$ est total.

Preuve. Nous définissons une relation floue $s_{(\lambda,\beta)}$ sur $\mathbb{R}^n$ comme suit :

$$s_{(\lambda,\beta)}\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right)=\begin{cases}\lambda+\beta \text{ si} & x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,n\}\\ \beta \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,k\} \text{ et } x_k<y_k\\ \lambda \text{ si } x_i=y_i \text{ pour tout } i\in\{1,2,...,h\} \text{ et } y_h<x_h\end{cases}$$

D'après le Corollaire 2.2.7, $s_{(\lambda,\beta)}$ est une relation d'ordre $(\lambda+\beta)$ −flou total sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant on va démontrer que $s_{(\lambda,\beta)}$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Premier cas : $\lambda>\beta$.Soient $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n),(z_1,...,z_n),(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$,tels que :

$$s_{(\lambda,\beta)}\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right)>\frac{\lambda+\beta}{2} et s_{(\lambda,\beta)}\left((z_1,...,z_n),(t_1,...,t_n)\right)>\frac{\lambda+\beta}{2}$$

Par conséquent

$$s_{(\lambda,\beta)}\left((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\right)=s_{(\lambda,\beta)}\left((z_1,...,z_n),(t_1,...,t_n)\right)$$

Alors il y a $h_1,h_2\in\{2,...,n\}$ tels que : $x_i=y_i$ pour tout $i\in\{1,...,h_1-1\}$ et $x_{h_1}>x_{h_1}$ et $z_i=t_i$ pour tout $i\in\{1,...,h_2-1\}$ et $z_{h2}>t_{h_2}$.

Soit $h=\min\{h_1,h_2\}$. Alors, on a :

$$x_i=y_i \text{ et } z_i=t_i\ \forall i\in\{1,2,...,h\} \text{ et } x_h+z_h>y_h+t_h$$

Ainsi, on obtient :

$$x_i+z_i=y_i+t_i\ \forall i\in\{1,2,...,h\} \text{ et } x_h+z_h>y_h+t_h$$

Donc on aura :

$$s_{(\lambda,\beta)}\left(\left(x_1+z_1,...,x_n+z_n\right),\left(y_1+t_1,...,y_n+t_n\right)\right)=\beta>\frac{\lambda+\beta}{2}$$

Maintenant, soit $\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ et $t>0$, sachant que :

$$s_{(\lambda,\beta)}\left(\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_n\right)\right)>\frac{\lambda+\beta}{2}$$

Puisque, $\beta>\lambda$ alors il y a $h\in\{2,...,n\}$ tels que : $x_i=y_i$ pour tous $i\in\{1,...,h-1\}$ et $x_h>x_h$. Ainsi, on obtient :

$$tx_i=ty_i \quad \text{pour tout } i\in\{1,...,h-1\} \text{ et } tx_h>tx_h$$

Donc on aura :

$$s_{(\lambda,\beta)}\left(\left(tx_1,...,tx_n\right),\left(ty_1,...,ty_n\right)\right)=\beta>\frac{\lambda+\beta}{2}$$

La démonstration du deuxième cas ou $\beta<\lambda$ est similaire à celle du premier cas. ■

2.4 Caractérisation de sous-catégorie des ordres $\alpha-$flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

Dans cette section on va caractériser le sous catégorie des ordres $\alpha-$flous sur la droite réel qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Nous avons besoin au définition suivant

Définition 2.4.1 *Soit r_α une relation d'ordre $\alpha-$flou sur $\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$. Si $r_\alpha(0,x)>$*

$\dfrac{\alpha}{2}$, *alors* x *est dit* $r_\alpha-$*nombre réel positif. L'ensemble de tous les nombres réels positifs noté* $\mathbb{R}_\alpha^+$

Par similarité, si $r_\alpha(x,0) > \dfrac{\alpha}{2}$ *alors* x *est dit* $r_\alpha-$*nombre réel négatif, et l'ensemble de tous les nombres réels négatifs noté* $\mathbb{R}_\alpha^-$.

Dans ce qui suit on va étudier les sous-catégories des ordres $\alpha-$flous qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. Plus précisémemt on considère le suivant :

Définition 2.4.2 *Soit* C_α *l'ensemble de tous les ordres* $\alpha-$*flous* r_α *définis sur* $\mathbb{R}$ *satisfaisants les deux conditions suivantes :*

(i) Pour tous $x,y,z \in R$, *on a* $r_\alpha(x,y) \leq r_\alpha(x+z,y+z)$

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda > 0$, *on a* $r_\alpha(x,y) \leq r_\alpha(\lambda x, \lambda y)$

Proposition 2.4.3 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit* r_α *un élément de* C_α, *alors :*

(i) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ *on a :* $r_\alpha(x_1+x_2,y_1+y_2) \geq \min\{r_\alpha(x_1,y_1), r_\alpha(x_2,y_2)\}$

(ii) r_α *est compatible avec l'addition et la multiplication dans* $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit r_α un élément de C_α

(i) Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, comme r_α est $\alpha-$flou transitive on a :

$$r_\alpha(x_1+x_2,y_1+y_2) \geq \min\{r_\alpha(x_1+x_2,y_1+x_2), r_\alpha(y_1+x_2,y_1+y_2)\}$$

D'une autre façon, puisque $r_\alpha \in C_\alpha$ on aura :

$$r_\alpha(x_1,y_1) \leq r_\alpha(x_1+x_2,y_1+x_2) \text{ et } r_\alpha(x_2,y_2) \leq r_\alpha(y_1+x_2,y_1+y_2)$$

Ainsi :

$$\min\{r_\alpha(x_1,y_1), r_\alpha(x_2,y_2)\} \leq \min\{r_\alpha(x_1+x_2,y_1+x_2), r_\alpha(y_1+x_2,y_1+y_2)\}$$

D'où $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on aura :

$$r_\alpha (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq \min \{r_\alpha (x_1, y_1), r_\alpha (x_2, y_2)\}$$

(ii) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sachant que : $r_\alpha (x_1, y_1) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $r_\alpha (x_2, y_2) > \dfrac{\alpha}{2}$ d'après **(i)** au-dessus on aura :

$$r_\alpha (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq \min \{r_\alpha (x_1, y_1), r_\alpha (x_2, y_2)\}$$

Donc on obtient :

$$r_\alpha (x_1 + x_2, y_1 + y_2) > \frac{\alpha}{2}$$

Puisque $r_\alpha \in C_\alpha$, alors on obtient :

$$r_\alpha (x, y) \leq r_\alpha (\lambda x, \lambda y), \forall \lambda > 0$$

Ainsi : $r_\alpha (\lambda x, \lambda y) > \dfrac{\alpha}{2}$ ■

Dans la suite on va établir quelques résultats des ordres $\alpha-$flous $r_\alpha \in C_\alpha$

Proposition 2.4.4 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit r_α un élément de C_α alors :*
i) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; si $x < y$; alors $r_\alpha(x, y) = r_\alpha(0, y - x)$;
ii) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; si $x > y$; alors $r_\alpha(x, y) = r_\alpha(x - y, 0)$;
iii) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; si $x < y$; alors $r_\alpha(x, y) = r_\alpha(0, 1)$;
iv) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; si $x > y$; alors $r_\alpha(x, y) = r_\alpha(1, 0)$;
v) $\mathbb{R}_\alpha^+ \cap \mathbb{R}_\alpha^- = \{0\}$.

Le résultat suivant concerne les ordres $\alpha-$flous qui sont des éléments de C_α.

Proposition 2.4.5 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit r_α un élément de C_α alors*
i) Si r_α est un ordre $\alpha-$flou total sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^-$.
ii) r_α est un ordre $\alpha-$flou total sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r_\alpha(0,1) > \frac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(1,0) > \frac{\alpha}{2}$.

Preuve. i) Supposons que r_α est total sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons que

$$r_\alpha(x,0) > \frac{\alpha}{2} \text{ ou } r_\alpha(0,x) > \frac{\alpha}{2}$$

Donc $x \in \mathbb{R}_\alpha^+$ ou $x \in \mathbb{R}_\alpha^-$, d'où

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^-$$

D'un autre coté, par définition on sait que

$$\mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^- \subseteq \mathbb{R}$$

Donc

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^-$$

ii) Supposons que $r_\alpha(0,1) > \frac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(1,0) > \frac{\alpha}{2}$
Premier cas **:** $r_\alpha(0,1) > \frac{\alpha}{2}$.
Maintenant, soient $x, y \in R$ avec $x \neq y$, supposons que $x < y$. Puisque r_α est compatible avec la multiplication, donc

$$r_\alpha(0, y-x) > \frac{\alpha}{2}$$

Comme

$$(x,y) = (x,x) + (0, y-x) \text{ et } r_\alpha(x,x) = \alpha$$

Alors d'après la Proposition 2.4.5 nous aurons

$$r_\alpha(x,y) \geq \min\{r_\alpha(0, y-x), \alpha\}$$

D'ou

$$r_\alpha(x,y) \geq r_\alpha(0, y-x) > \frac{\alpha}{2}$$

Maintenant si $x > y$, alors par la compatibilité de r_α avec la multiplication, on obtient

$$r_\alpha(0, x-y) > \frac{\alpha}{2}$$

Puisque

$$(y,x) = (y,y) + (0, x-y) \text{ et } r_\alpha(y,y) = \alpha$$

Alors d'après la proposition (2.4.5) nous aurons

$$r_\alpha(x,y) \geq \min\{r_\alpha(0, x-y), \alpha\}$$

D'ou

$$r_\alpha(x,y) \geq r_\alpha(0, x-y) > \frac{\alpha}{2}$$

Par conséquent r_α est une relation d'ordre $\alpha-$flou total.

La démonstration du deuxième cas est similaire à celle du premier cas au dessus. ■

La combinaison des Propositions (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5) donne le résultat suivant :

Théorème 2.4.6 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit r_α un élément de C_α.alors, r_α est définie par :*

$$r_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha & si \;\; x = y \\ r_\alpha(0,1) & si \;\; x < y \\ r_\alpha(1,0) & si \;\; x > y \end{cases}$$

De plus, si $r_\alpha(0,1) > \dfrac{\alpha}{2}$ *ou* $r_\alpha(1,0) > \dfrac{\alpha}{2}$*, alors* r_α *est un ordre* $\alpha-$*flou total sur* $\mathbb{R}$.

Inversement, on a le résultat suivant

Théorème 2.4.7 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit* $\alpha \in \left]0,1\right]$ *et* $\beta \in \left[0,\alpha\right[$. *Alors il existe une relation d'ordre* $\alpha-$*flou* $r_{(\alpha,\beta)}$ *qui est compatible avec l'addition et la multiplication sur la droite réel* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$r_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \begin{cases} \alpha & si\ x = y \\ \beta & si\ \ x < y \\ \alpha - \beta & si\ x < y \end{cases}$$

En outre, si $\beta \in \left[0, \dfrac{\alpha}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\alpha}{2}, \alpha\right]$, *alors* $r_{(\alpha,\beta)}$ *est une relation d'ordre* $\alpha-$ *flou total sur* $\mathbb{R}$.

Pour l'ensemble des entiers naturels, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.4.8 (A. Stouti and L. Zedam) *Soit* $\alpha \in \left]0,1\right]$ *et* $\beta \in \left[0,\alpha\right[$. *Alors, la relation floue* $r_{(\alpha,\beta)}$ *définie pour tous* $n, m \in \mathbb{N}$ *par :*

$$r_{(\alpha,\beta)}(n,m) = \begin{cases} \alpha & si\ n = m \\ \beta & si\ \ n < m \\ \alpha - \beta & si\ n < m \end{cases}$$

est une relation d'ordre $\alpha-$*flou total sur* $\mathbb{N}$.

Pour les ensembles finis on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.4.9 *Soit* $\alpha \in \left]0,1\right]$ *et soit* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *un ensemble fini, on suppose que* $\beta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right[\cup \left]\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$. *Alors, la relation floue* $r_{(\alpha,\beta)}$ *définie pour tous* $x_i, x_j \in X$ *par :*

$$r_{(\alpha,\beta)}(x_i, x_j) = \begin{cases} \alpha & si\ i = j \\ \beta & si\ \ i < j \\ \alpha - \beta & si\ i < j \end{cases}$$

Est une relation d'ordre $\alpha-$*flou total sur* X.

Chapitre 3

Extensions linéaires (totales) des ordres α-flous

3.1 Théorème d'extensions linéaires des ordres α-flous

Dans ce chapitre, nous allons montrer que chaque ordre α-flou sur un ensemble non vide vérifie la condition

(N) suivante: (N) :($r_\alpha(x,y) < \dfrac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(y,x) < \dfrac{\alpha}{2}$, pour tous les éléments incomparables $(x,y) \in X^2$. Cela signifie qu'il n'y a pas d'éléments incomparables $(x,y) \in X^2$ tels que: $r_\alpha(x,y) = r_\alpha(y,x) = \dfrac{\alpha}{2}$).

Peut être étendu à un ordre linéaire $\alpha-$flou.

Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant

Théorème 3.1.1 [*Version flou du théorème de Szpilrajn*]. *Soit X un ensemble non vide. Alors, chaque ordre $\alpha-$flou sur X satisfait la condition ci-dessus **(N)** peut être étendu à un ordre $\alpha-$flou total.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin au lemme principal suivant :

Lemme 3.1.2 *Soit (X, r_α) un ensemble ordonné $\alpha-$flou et soit a, b deux éléments non comparables dans (X, r_α) satisfaisants $r_\alpha(a,b) < \dfrac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(b,a) < \dfrac{\alpha}{2}$. Alors, il* *existe au moins un ordre $\alpha-$flou $\acute{r}_\alpha$ sur X qui étend r_α tels que, soit*

$$\acute{r}_\alpha(a,b) > \frac{\alpha}{2} \text{ ou } r'_\alpha(b,a) > \frac{\alpha}{2}$$

3.2 Preuve constructive des extensions linéaires des ordres $\alpha-$flous définis sur un ensemble fini.

Dans cette section on va voir comment peut construire un extension linéaire d'un ordre partiel $\alpha-$flou définit sur un ensemble fini non vide X. Plus précisément, nous devons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *Chaque ordre $\alpha-$flou sur l'ensemble fini et non vide X peut étend à un ordre linéaire $\alpha-$flou sur X.*

Dans la suite, nous allons caractériser les ordres $\alpha-$flous définis sur l'ensemble non vide et fini X par leur extensions linéaires. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Chaque ordre $\alpha-$flou sur un ensemble non vide X est une intersection flou de tous les ordres $\alpha-$flous qui l'étendent.*

3.3 Exemples de construction des extensions linéaires des ordres $\alpha-$flous

On va donner deux exemples de construction des extensions linéaires des ordres $\alpha-$flous dans le cas fini.

1. Soit $X = \{a,b,c,d\}$ et soit r_α un ordre $\alpha-$flou sur X définie par le tableau suivant :

	a	b	c	d
a	α	0.5α	0.6α	0.82α
b	0.25α	α	0.32α	0.7α
c	0.25α	0.30α	α	0.80α
d	0.18α	0.18α	0.18α	α

Nous avons a, b deux éléments incomparables tels que $r_\alpha(a,b) < \dfrac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(b,a) < \dfrac{\alpha}{2}$, et $r_\alpha(b,a) \leq r_\alpha(a,b)$. par l'application du Lemme 3.1.2 nous avons au premier pas un ordre $\alpha-$flou r_α^1 qui étend r_α et représenté par le tableau suivant :

	a	b	c	d
a	α	0.6α	0.6α	0.82α
b	0.25α	α	0.32α	0.7α
c	0.25α	0.30α	α	0.80α
d	0.18α	0.18α	0.18α	α

r_α^1 n'est pas linéaire, car $b, c \in X$ sont incomparables. Alors on peut appliquer le Lemme 3.1.2 sur r_α^1. Nous avons $r_\alpha^1(b,c) < \frac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha^1(c,b) < \frac{\alpha}{2}$ et $r_\alpha^1(c,b) \leq r_\alpha^1(b,c)$.

Ainsi, on obtient un ordre $\alpha-$flou noté r_α^2 qui étend r_α^1 (i.e, r_α^2 étend r_α) est représenté par le tableau suivant :

	a	b	c	d
a	α	0.6α	0.6α	0.82α
b	0.25α	α	0.60α	0.7α
c	0.25α	0.30α	α	0.80α
d	0.18α	0.18α	0.18α	α

La procédure s'arrête car r_α^2 est un ordre linéaire $\alpha-$flou qui étend r_α.

Dans cet exemple le nombre des applications du lemme 3.2 est $k = 2$. Ainsi nous avons $k = \dfrac{m}{2}$ où $m = card(A)$ avec $A = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$.

2. Soit $X = \{a, b, c\}$ et $r_\alpha$un ordre $\alpha-$flou sur X définie par le tableau suivant:

r_α	a	b	c
a	α	0.45α	0.50α
b	0.30α	α	0.40α
c	0.20α	0.20α	α

Nous avons $a, b \in X$ deux éléments non comparables tels que $r_\alpha(a, b) < \frac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha(b, a) < \dfrac{\alpha}{2}$ et $r_\alpha(b, a) \leq r_\alpha(a, b)$ par l'application du Lemme 3.1.2 nous avons au premier pas un ordre $\alpha-$flou r_α^1 qui étend r_α et représentée par le tableau suivant :

r_α^1	a	b	c
a	α	0.70α	0.50α
b	0.30α	α	0.40α
c	0.20α	0.20α	α

r_α^1 n'est pas linéaire, car $a, c \in X$ sont incomparables. Alors on peut encore appliquer le Lemme 3.1.2 sur r_α^1. Nous avons $r_\alpha^1(a, c) < \dfrac{\alpha}{2}$ ou $r_\alpha^1(c, a) < \dfrac{\alpha}{2}$ et $r_\alpha^1(c, a) \leq r_\alpha^1(a, c)$.

Ainsi, on obtient un ordre $\alpha-$flou noté r_α^2 qui étend r_α^1 (i.e, r_α^2 étend r_α) est représenté par le tableau suivant :

r_α^2	a	b	c
a	α	0.70α	0.70α
b	0.30α	α	0.80α
c	0.20α	0.20α	α

La procédure s'arrêter là, car r_α^2 est ordre linéaire $\alpha-$flou qui étend r_α

Dans cet exemple le nombre des applications du Lemme 3.1.2 est $k = 2$. Donc, on a $k \leq \dfrac{m}{2}$ où $m = card(A)$ avec

$A = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons vu le concept de l'ordre α-flou à partir de la présentation des propriétés et des résultats concernant ce genre d'ordre flou. Puis on a essayé de construire une extension linéaire de l'ordre partiel α-flou pour lui rendre un ordre α-flou total dans un ensemble arbitraire non vide et nous donnons aussi une preuve dans le cas fini avec des exemples et ceci est une extension du théorème de Spilrajn pour les ordres classiques.

Nous signalons par ailleurs que les résultats concernant les extensions linéaires des ordres α-flous demeurent encore ouverts, c'est une aperçu ouvre peut être la porte d'autre recherches dans ce domaine.

On peut parler d'un ordre α-flou dans un ensemble tel que pour chaque pair (x,y) d'éléments, il existe une borne supérieur et une borne inférieur que l'on appelle treillis ordre extension.

References

[1] I. Beg and M. Islam, Fuzzy Riesz spaces, *J.Fuzzy Math*, 2(1) (1994), 211-229

[2] I. Beg and M. Islam, Fuzzy ordered spaces, *J.Fuzzy Math*, 3(3) (1995), 659-670.

[3] I. Beg and M. Islam, Fuzzy Archimedean spaces, *J.Fuzzy Math*, 5(2) (1997), 413-423.

[4] I. Beg, Extension of fuzzy positive linear operators, *J.Fuzzy Math*, 6(4) (1998), 849-855.

[5] I. Beg, On Fuzzy Zorn's lemma, *Fuzzy Sets and Systems*, 101(1) (1999), 181-183.

[6] I. Beg, Extension of fuzzy Zorn's lemma to nontransitive fuzzy relations, *J. Fuzzy Math*, 10(3) (2002), 681-685.

[7] A. Billot, Economic theory of fuzzy equilibria, *Lecture Notes in Economics and mathematical systems* -373, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[8] G. Birkkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, reved., New York, 1948.

[9] U. Bodenhofer, Bernard De B. and Janos F., A compendium of fuzzy weak orders : Representation and construction, *Fuzzy sets and systems*, 158(8) (2007), 811-829.

[10] Bernadette Bouchon-Meunier, La logique floue et ses applications, Addison Wesley France, 1995.

[11] B.A. Davey and H.A. Priestley., Introduction to lattices and order, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[12]J. Duggan, A General Extension Theorem for Binary Relations, *Journal of Economic Theory* 86 (1999), pp. 1-16

[13] L. Gacôgne, Logique floue et application, Institut d'informatique d'Evry, 936, Novembre 2003

[14] A. Kaufmann, Introduction à la Théorie des Sous-Ensembles Flous, Vols. l-IV (Masson, Paris, 1977).

[15] S. Kundu, Similarity relations, fuzzy linear orders and fuzzy partial orders, *Fuzzy sets and systems*, 109(3) (2000), 419-428.

[16] S.V. Ovchinnikov, An introduction to Fuzzy relations, in D. Dubois, H.Prade, *Fundamentals of fuzzy sets*, The Handbooks of fuzzy sets, vol. 7, Kluwer Academic Publisher, Boston, 2000, 233-259.

[17] B. Schroder, Ordered sets :An introduction, Birkhauser Boston ; Firstedition, December 6, 2002.

[18] J. Szpilrajn ., Sur I'extension de I'ordre partiel, Fund. Math. 16(1930), 386-389.

[19] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunctions, *J. Fuzzy Math*, 11(2) (2003), 455-466.

[20] A. Stouti, Fixed point theory for $\alpha-$fuzzy monotone maps, Acta-Math. Acad. *Paedagog. Nyhzi.* (N.S), 21 (2005), 13-19.

[21] A. Stouti and L. Zedam, On α-fuzzy Orders, *J. Fuzzy Math*, 18(1) (2010), 171-192.

[22] A. Stouti and L. Zedam, Linear Extension of Zadeh's fuzzy order, to appear.

[23] P. Venugopalan, Fuzzy ordered sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 46(1992), 221-226.

[24] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Info.Sci.*, 3(1971), 177-200.

[25] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and Control., 8 (1965), 338-353.

[26] H.J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.