REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Algèbre et mathématiques discrètes

Thème

LES FORMES QUADRATIQUES ET QUADRIQUES

Présenté par :
M^elle Achour Sara

Soutenu publiquement le : 07 /Juin / 2026

Devant le jury composé de :

Nasser Ghedbane	M.C.A,	Univ. M'sila	Président
Mohamed Ourabah Benmeddour	M.C.B,	Univ. M'sila	Encadreur
Lakhdar Heboub	M.C.B,	Univ. M'sila	Examinateur

Année universitaire 2025/2026

الاهداء

"مَنْ آمَنَ بالوصولِ.. نالَ شرفَ الوصول"

لم تكن الرحلةُ هيّنة، ولا المسافاتُ قصيرة، ولا الدروبُ كانت ممهدةً بالورود
لكنَّ بريق الحلم كان أقوى؛ فاليوم تتبددُ غيوم التعب، ويشرقُ أملُ الانتظارِ إنجازاً.
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، حباً، وشكراً، وطاعة.
إلى ذلك الحلم الذي سقيته صبراً.. حتى غدا اليوم واقعاً.

إلى الأرواح الطاهرة في أرض الرباط.. إخوتي في **فلسطين** الأبية.

إلى من أستندُ إلى اسمهِ فخراً، ومنبع الهيبة والوقار في حياتي، صاحب العطاءِ الذي لا ينضب..
أبي الغالي.

إلى مدرستي الأولى في الأخلاق، والقلب الذي لم يكفّ يوماً عن ترتيل دعوات التوفيق لي..
إلى من تحت قدميها تكمن جناني، ومصدر إلهامي الأول **أمي الحبيبة.** .

إلى رفقاء الدرب، الذين جعلوا المسافات أقصر والشدائد أخف بكلماتهم الطيبة..
ممتنة لكل لحظة صدق جمعتنا:
(خولتي، راضية، مريم، سارة، منار، ابتسام، وصال).
كما لا أنسى تلاميذي الأعزاء، أنتم ثمرة جهدي وأجمل إنجاز. اليوم، أسطّر في تاريخي فصلاً من الفخر؛ فها هي الخُطى

التي تعثرت يوماً تُعانق القمة..
تنفسنا اليوم فرحاً، وسلاماً، وانتصاراً.

"وآخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين"

شكر وتقدير

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن تبع هديه إلى يوم الدين.

وعملاً بقوله صلى الله عليه وسلم:

« مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللهَ »

رواه "أحمد والترمذي"

تقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة وحملنا على سفينة النجاة.
إلى كل من علمنا علماً به ينتفع وأدب به يرتفع.

بدءاً من معلمي الابتدائي وصولاً إلى أساتذتنا الكرام في المدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة وجامعة المسيلة.

تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف " **محمد اورابح بن مدور**" الذي أفادني بنصائحه وتوجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة.
تحية طيبة إلى اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة **الاستاذ غضبان ناصر و الاستاذ هبوب لخضر.**
وفي الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد ولو بكلمة طيبة.
أسأل الله العلي القدير أن يجزي الجميع خير الجزاء، ولكم مني فائق التقدير والاحترام.

Liste des symboles

Symbole	Signification
$\mathbb{K}$	Corps (général).
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels.
E	Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
φ	Une forme bilinéaire
Q	Une forme quadratique
$\langle u, v\rangle$	Produit scalaire.
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$	Base de E.
$\mathcal{B}'$	Nouvelle base.
P	Matrice de passage.
$A, M_{\mathcal{B}}(\varphi)$	Matrice d'une forme bilinéaire/quadratique.
A'	Matrice dans la nouvelle base.
$X = (x_1, \ldots, x_n)^T$	Coordonnées d'un vecteur.
u^T	Transposée du vecteur u.
$M_n(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices carrées d'ordre n
$A_n(\mathbb{R})$	Matrices symétriques réelles d'ordre n.
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A.
$rg(\varphi)$	Le rang de la forme bilinéaire
λ_i	Valeurs propres.
(p, q)	Signature.
$r = p + q$	Rang de la forme quadratique.
$\mathcal{O}$	Point à l'infini.
Δ	Discriminant.
X^T, A^T	La transposée d'un vecteur ou d'une matrice
$ker\varphi$	Le noyau de la forme bilinéaire (ou radical)
$tr(A)$	La trace de la matrice A
$\perp$	Relation d'orthogonalité (l'orthogonal)
I_n	La matrice identité d'ordre n
δ_{ij}	Le symbole de Kronecker

Table des matières

الاهداء **i**

شكر وتقدير **ii**

Liste des symboles **iii**

Table des matières **iv**

Introduction **1**

1 Formes Bilinéaires **2**
1.1 Formes bilinéaires : 2
1.1.1 Cas particulier de produit scalaire : 4
1.2 Propriété d'une forme bilinéaire symétrique : 5
1.3 Écriture dans une base : 5
1.3.1 Expression d'une forme bilinéaire dans une base : 5
1.3.2 Matrice d'une forme bilinéaire dans une base : 6
1.3.3 Changement de base : 7
1.4 Rang et Noyau d'une forme bilinéaire : 8
1.4.1 Rang d'une forme bilinéaire : 8
1.4.2 noyau d'une forme bilinéaire : 9
1.5 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées : 9
1.6 Rang et déterminant d'une forme bilinéaire : 10

2 Formes quadratiques **11**
2.1 Définitions et premières propriétés : 11
2.2 Orthogonalité et Vecteurs isotropes : 13
2.2.1 Bases orthogonales et orthonormales : 15
2.3 Écriture matricielle d'une forme quadratique : 16
2.3.1 Matrice d'une forme quadratique dans une base : 16
2.3.2 Changement de base : 17
2.4 Réduction des formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$: 19
2.4.1 Objectif de la réduction : 19
2.4.2 Réduction par la méthode de GAUSS 19

2.4.3 Réduction par diagonalisation : 23
2.5 Loi d'inertie de Sylvester et Signature 26

3 Les quadriques **28**
3.1 Définition et équation générale d'une quadrique 28
3.2 Réduction de l'équation d'une quadrique 30
3.2.1 Réduction de la partie quadratique 30
3.2.2 Complément de méthode 30
3.2.3 Recherche du centre de la quadrique 30
3.2.4 Translation du repère 31
3.2.5 Obtention de l'équation réduite 31
3.3 Classification et Paramétrisation des quadriques 34
3.3.1 Quadriques à centre 34
3.3.2 Quadriques sans centre : Les paraboloïdes 38
3.3.3 Quadriques dégénérées 40
3.4 Tableau récapitulatif 44
3.5 Applications 44
3.5.1 Application 1: 44
3.5.2 Application 2: 48

Conclusion **52**

Bibliographie **53**

Résumé **54**

Introduction

Au cours du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle, la géométrie analytique et l'algèbre linéaire ont connu un développement considérable grâce aux travaux de mathématiciens tels que Gauss, Cauchy et Sylvester. Ces recherches ont conduit à l'émergence d'une théorie complète autour des formes quadratiques et des quadriques. Cette théorie constitue aujourd'hui l'un des piliers fondamentaux des mathématiques, établissant un lien essentiel entre les équations algébriques du second degré et leurs représentations géométriques dans l'espace.

Les formes quadratiques étudient les fonctions polynomiales de degré deux, tandis que les quadriques [8] représentent l'interprétation géométrique de ces fonctions dans le plan ou l'espace tridimensionnel. Ces concepts jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines appliqués tels que la physique théorique, la mécanique, l'optique, et même l'analyse des données.

Dans ce mémoire, nous étudions plus particulièrement les formes quadratiques et leur relation avec les quadriques.

Nous nous intéressons plus particulièrement à répondre à la question suivante :

Comment utiliser les formes quadratiques et leurs méthodes de réduction pour classifier les quadriques et déterminer leurs propriétés géométriques ?

La réponse à cette question est structurée en trois chapitres :

- **Chapitre 1 :** Nous abordons dans ce chapitre des généralités sur les formes bilinéaires en tant que concepts fondamentaux pour les chapitres 2 et 3.
- **Chapitre 2 :** Nous traitons le concept des formes quadratiques et leurs méthodes de réduction.
- **Chapitre 3 :** Nous présentons une étude des quadriques et leur classification à l'aide des concepts du chapitre 2.

Chapitre 1

Formes Bilinéaires

Introduction

Les formes bilinéaires occupent une place fondamentale en algèbre linéaire et constituent le point de départ nécessaire à l'étude des formes quadratiques et des quadriques. Ce premier chapitre introduit les notions essentielles relatives aux formes bilinéaires, en mettant l'accent sur les formes symétriques et le produit scalaire. Nous présentons leur écriture matricielle dans une base, ainsi que l'effet d'un changement de base sur la matrice associée. Les notions de rang et de déterminant sont également abordées. Ces concepts constitueront les outils indispensables pour la réduction des formes quadratiques et la classification des quadriques dans les chapitres suivants.

1.1 Formes bilinéaires :

Définition 1.1

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle forme bilinéaire sur E une fonction associée canoniquement à l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ et notée φ, vérifiant les propriétés de bilinéarité pour tous $u, v, w \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$$

$$\varphi(u, v + w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$$

$$\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v) = \varphi(u, \lambda v)$$

Remarque 1.1

La forme bilinéaire φ est dite symétrique définie positive sur l'espace E si :

- **Symétrie :** pour tous $u, v \in E$: $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.
- **Positive :** pour tout $u \in E$: $\varphi(u,u) \geq 0$.
- **Définie :** $\varphi(u,u) = 0 \iff u = 0$.

Exemple 1.1

En prenant la base canonique dans $\mathbb{R}^2$ avec $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$.
L'application :

$$\varphi(u,v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.
Soient $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ avec la base canonique. On considère la forme bilinéaire :

$$\varphi(u,v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1$$

1. forme bilinéaire :
Pour que φ soit bilinéaire, il faut que :

$$\varphi(u+u',v) = \varphi(u,v) + \varphi(u',v), \quad \varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u,v)$$

Soient $u' = (x_1', x_2')$:

$$\begin{aligned}\varphi(u+u',v) &= \varphi((x_1+x_1', x_2+x_2'), (y_1,y_2)) \\ &= (x_1+x_1')y_1 + 5(x_2+x_2')y_2 - 3(x_1+x_1')y_2 - 3(x_2+x_2')y_1 \\ &= (x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1) + (x_1'y_1 + 5x_2'y_2 - 3x_1'y_2 - 3x_2'y_1) \\ &= \varphi(u,v) + \varphi(u',v)\end{aligned}$$

De plus :

$$\varphi(\lambda u, v) = \varphi((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1,y_2)) = \lambda\varphi(u,v)$$

2. la symétrique :

$$\varphi(u,v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_2y_1 - 3x_1y_2 = \varphi(v,u)$$

Donc φ est symétrique.
Conclusion : φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.

1.1.1 Cas particulier de produit scalaire :

Définition 1.2

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique telle que :

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$$

Exemple 1.2

Tout produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique :

- **Dans $\mathbb{R}^2$:**
  Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, on a :
  $$\varphi(u, v) = \langle u, v \rangle = xx' + yy'$$
- **Dans $\mathbb{R}^3$:**
  Pour $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$, on a :
  $$\varphi(u, v) = \langle u, v \rangle = xx' + yy' + zz'$$
- **Dans $\mathbb{R}^n$:**
  Pour $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (x'_1, \ldots, x'_n)$, on a :
  $$\varphi(u, v) = \langle u, v \rangle = x_1x'_1 + \cdots + x_nx'_n$$

Exemple 1.3

Dans $\mathbb{R}^3$, l'application bilinéaire

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$$

est un produit scalaire.
1. **Symétrie :** Pour tous $u = (x_1, x_2, x_3)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 = 2y_1x_1 + 3y_2x_2 + 4y_3x_3 = \langle v, u \rangle$$

Donc la forme est symétrique.
2. **Définie positive :** Pour tout $u \neq 0$:

$$\langle u, u \rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 > 0$$

car $x_1^2, x_2^2, x_3^2 > 0$ et au moins un $x_i \neq 0$.
Donc $\langle u, v \rangle$ est bien un produit scalaire.

1.2 Propriété d'une forme bilinéaire symétrique :

Les propriétés de φ impliquent les formules suivantes :

1. $\varphi(u+v,u+v) = \varphi(u,u)+\varphi(u,v)+\varphi(v,u)+\varphi(v,v)$
$= \varphi(u,u)+2\varphi(u,v)+\varphi(v,v) \quad \dots(1)$

2. $\varphi(u-v,u-v) = \varphi(u,u)-\varphi(u,v)-\varphi(v,u)+\varphi(v,v)$
$= \varphi(u,u)-2\varphi(u,v)+\varphi(v,v) \quad \dots(2)$

Alors :
De (1), on a :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}\left[\varphi(u+v,u+v)-\varphi(u,u)-\varphi(v,v)\right]$$

De $((1)-(2))$, on obtient :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{4}\left[\varphi(u+v,u+v)-\varphi(u-v,u-v)\right]$$

1.3 Écriture dans une base :

1.3.1 Expression d'une forme bilinéaire dans une base :

Proposition 1.1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, Si :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

$$v = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$$

La base de φ donne :

$$\varphi(u,v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n} x_iy_j\varphi(e_i,e_j)$$

Si φ est symétrique, alors $\varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_j,e_i)$ pour $i > j$ et on a :

$$\varphi(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\varphi(e_i,e_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_iy_j\varphi(e_i,e_j).$$

1.3.2 Matrice d'une forme bilinéaire dans une base :

Proposition 1.2

La base $\mathcal{B}$ étant fixée, toute matrice A carrée d'ordre n définit une forme bilinéaire φ sur E :

$$A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \cdots & \varphi(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

associée à la forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B}$.
Si u et v sont deux vecteurs de E et sont les matrices colonnes dans $\mathcal{B}$, on vérifie que :

$$\varphi(u, v) = u^t A v$$

en identifiant $\varphi(u, v)$ à la matrice $u^t A v$ qui n'a qu'une seule ligne et une seule colonne.
La forme bilinéaire est symétrique si et seulement si la matrice A est symétrique et on a :

$$\varphi(u, v) = u^t A v = v^t A u = \varphi(v, u)$$

Remarque 1.2

On peut noter la formule par : $\varphi(u, v) = u^t A v$ avec u, v sont des matrices colonnes.

Exemple 1.4

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
On considère la forme bilinéaire φ définie pour tout $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$ par :

$$\varphi(u, v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1$$

1. Détermination de la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

Calculons les coefficients de la matrice :

- $a_{11} = \varphi(e_1, e_1) = 1(1) + 5(0)(0) - 3(1)(0) - 3(0)(1) = \mathbf{1}$
- $a_{12} = \varphi(e_1, e_2) = 1(0) + 5(0)(1) - 3(1)(1) - 3(0)(0) = \mathbf{-3}$

- $a_{21} = \varphi(e_2, e_1) = 0(1) + 5(1)(0) - 3(0)(0) - 3(1)(1) = \mathbf{-3}$
- $a_{22} = \varphi(e_2, e_2) = 0(0) + 5(1)(1) - 3(0)(1) - 3(1)(0) = \mathbf{5}$

Alors :

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Vérification par le produit matriciel

Vérifions la formule $\varphi(u, v) = u^t A v$ avec $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$u^t A v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 5x_2 y_2$$

Le résultat est identique à l'expression initiale.

3. Propriété de Symétrie

On observe que la matrice A est symétrique ($A^t = A$) car $a_{12} = a_{21} = -3$. Par conséquent, la forme bilinéaire φ est **symétrique**, ce qui implique :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

1.3.3 Changement de base :

Définition 1.3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ deux bases de E et $P = M(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Si on note u' et v' les matrices colonnes des coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}'$, on a : $u = Pu'$ et $v = Pv'$. Notons A et A' les matrices de la forme bilinéaire φ dans chacune des deux bases.
Alors on peut écrire :

$$\varphi(u, v) = u^t A v = (Pu')^t A (Pv') = u'^t P^t A P v' = u'^t A' v'$$

Ainsi la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^t A P$$

Exemple 1.5

$$\varphi(u,v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2 - x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$$

définie sur $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et d'une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_3, e_1 - e_2 - e_3)$. La matrice associée à φ dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \varphi(e_1,e_3) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \varphi(e_2,e_3) \\ \varphi(e_3,e_1) & \varphi(e_3,e_2) & \varphi(e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 Rang et Noyau d'une forme bilinéaire :

1.4.1 Rang d'une forme bilinéaire :

Définition 1.4

Congruence [10] : Deux matrices carrées A et A' sont dites **congruentes** s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$A' = P^tAP$$

Deux matrices congruentes représentent la même forme bilinéaire dans des bases différentes.

Définition 1.5

Rang[10] : Soit φ une forme bilinéaire sur un K-espace vectoriel E de dimension finie, et A sa matrice par rapport à une base β. On définit le **rang de** φ, noté $rg(\varphi)$, par :

$$rg(\varphi) = rg(A)$$

Ce nombre est indépendant de la base choisie car deux matrices congruentes ont le même rang.

Théorème 1.1

Pour toute forme bilinéaire φ définie sur un espace E de dimension finie, on a la relation fondamentale suivante :

$$\dim E = \dim(\ker \varphi) + rg(\varphi)$$

1.4.2 noyau d'une forme bilinéaire :

Définition 1.6

Soit φ une forme bilinéaire sur E. On appelle **noyau** de φ (ou radical) l'ensemble :

$$\ker \varphi = \{v \in E \mid \forall u \in E, \varphi(u, v) = 0\}$$

D'après le théorème du rang, on a : $\dim E = rg(\varphi) + \dim(\ker \varphi)$.

Remarque 1.3

[10] Une forme bilinéaire est dite **non dégénérée** si son noyau est réduit au vecteur nul ($\ker \varphi = \{0\}$), ce qui équivaut à dire que son rang est maximal ($rg(\varphi) = \dim E$) ou que son déterminant est non nul.

1.5 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées :

Définition 1.7

Forme non dégénérée [10] : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et φ une forme bilinéaire sur E. On considère l'application :

$$\Phi : E \longrightarrow E^*$$

où $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ désigne l'espace dual de E, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E.
Cette application est définie pour tout $v \in E$ par :

$$\Phi(v) = \varphi_v, \quad \text{où} \quad \varphi_v(u) = \varphi(u, v) \quad \forall u \in E$$

On dit que φ est **non dégénérée** si Φ est injective, ce qui équivaut à :

$$\ker \Phi = \{v \in E \mid \forall u \in E,\ \varphi(u, v) = 0\} = \{\vec{0}_E\}$$

Autrement dit :

$$\forall v \in E, \quad (\forall u \in E,\ \varphi(u, v) = 0) \implies v = 0$$

Proposition 1.3

[9] Soit E un espace de dimension finie et A la matrice de φ dans une base β. Alors :

$$\varphi \text{ est non dégénérée } \iff \det(A) \neq 0$$

Remarque 1.4

Toute forme bilinéaire définie positive est **non dégénérée**.

Remarque 1.5

Si $\det(A) = 0$, on dit que la forme bilinéaire est **dégénérée**. Dans ce cas, son rang est strictement inférieur à la dimension de E.

1.6 Rang et déterminant d'une forme bilinéaire :

Propriété 1.4

Les matrices A et A' ont même rang puisque P est inversible. Par conséquent, le rang de la matrice associée à une forme bilinéaire symétrique ne change pas quand on change de base.
Le déterminant de A change d'un carré de $\mathbb{K}$ suivant la base :

$$\det(A') = \det(P^t AP) = [\det(P)]^2 \cdot \det(A)$$

Exemple 1.6

On pose la matrice :

$$M = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^t$$

Le rang de $M = 4$ Elle est non dégénérée car :

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

M est inversible.

Chapitre 2

Formes quadratiques

Introduction

Les formes quadratiques sont des fonctions qui généralisent la notion de "carré" vu dans les expressions algébriques. Si une forme bilinéaire est une fonction de deux vecteurs, linéaire en chaque argument, une forme quadratique est une fonction d'un seul vecteur, obtenue en "appliquant" une forme bilinéaire symétrique sur un même vecteur. Elles apparaissent naturellement en géométrie (équations de coniques et de quadriques), en physique (énergie cinétique, moments d'inertie) et en optimisation (hessienne d'une fonction). L'objectif de ce chapitre est d'étudier leurs propriétés, leur représentation matricielle, et surtout les méthodes permettant de les réduire, c'est-à-dire de trouver une expression plus simple dans une base adaptée.

2.1 Définitions et premières propriétés :

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle **forme quadratique** sur E toute application $Q : E \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall u \in E, \quad Q(u) = \varphi(u, u).$$

On dit que φ est la **forme polaire** (ou la forme bilinéaire symétrique associée) de Q.

Propriété 2.1

[9] La forme polaire φ associée à une forme quadratique Q est unique. Elle peut être retrouvée à partir de Q par la formule de polarisation :

$$\forall u, v \in E, \quad \varphi(u,v) = \frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right].$$

Ou encore :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{4}\left[Q(u+v) - Q(u-v)\right]$$

Exemple 2.1

Considérons l'application $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $Q(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$.
1 : Trouver la forme polaire φ associée à Q.
Solution : Posons $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$. Nous utilisons la formule de polarisation :

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)]$$

Calculons chaque terme séparément :

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= (x_1+x_2)^2 + 4(x_1+x_2)(y_1+y_2) + 3(y_1+y_2)^2 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 4(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) + 3(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 4x_2y_2 + 3y_1^2 + 6y_1y_2 + 3y_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(u) &= x_1^2 + 4x_1y_1 + 3y_1^2 \\ Q(v) &= x_2^2 + 4x_2y_2 + 3y_2^2 \end{aligned}$$

calculons $Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$:

$$Q(u+v) - Q(u) - Q(v) = 2x_1x_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 6y_1y_2$$

En divisant par 2 :

$$\varphi(u,v) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$$

Vérification : $\varphi(u,u) = x_1x_1 + 2x_1y_1 + 2x_1y_1 + 3y_1y_1 = x_1^2 + 4x_1y_1 + 3y_1^2 = Q(u)$.
Donc φ est bien la forme polaire cherchée.

Remarque 2.1

Une forme quadratique n'est pas une application linéaire. En effet, pour un scalaire λ, on a $Q(\lambda X) = \lambda^2 Q(X)$, et en général $Q(X+Y) \neq Q(X) + Q(Y)$. La forme polaire permet de retrouver la "bilinéarité" cachée derrière la forme quadratique.

2.2 Orthogonalité et Vecteurs isotropes :

Définition 2.2

[1] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque et φ une forme bilinéaire symétrique définie sur E.

1. Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** par rapport à φ, si $\varphi(x, y) = 0$.
2. Pour toute partie non vide $A \subseteq E$, l'orthogonal de A, noté $A^\perp$, est le sous-espace défini par :

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in A, \varphi(u, v) = 0\}$$

Autrement dit, $u \in A^\perp \iff \forall v \in A, \varphi(u, v) = 0$.

Proposition 2.2

[1] Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On a les propriétés suivantes :

1. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. Pour toute partie A de E :
   i) $A^\perp$ constitue un sous-espace vectoriel de E.
   ii) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ et $(A^{\perp\perp})^\perp = A^\perp$.
3. $\{0_E\}^\perp = E$.
4. φ est non dégénérée si et seulement si $E^\perp = \{0_E\} = \ker(\varphi)$.
5. Si E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(F^\perp) \geq \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Corollaire 2.1

[1] Si E est de dimension finie et φ est une forme bilinéaire symétrique **non dégénérée**, alors :

1. $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(F^{\perp}) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.
2. $F^{\perp\perp} = F$, pour tout sous-espace vectoriel $F \subseteq E$.

Remarque 2.2

[1] φ non dégénérée $\iff \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp}), \forall F$ sous-espace vectoriel de E. On a pas toujours $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exemple 2.2

Considérons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme bilinéaire symétrique f définie par :

$$Q(x, y) = x_1 y_1 - 4x_2 y_2$$

La matrice associée à f dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Comme $\det(A) = -4 \neq 0$, la forme Q est non dégénérée.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(2, 1)$, soit $F = \text{Vect}\{(2, 1)\}$. Un vecteur $x = (x_1, x_2)$ appartient à $F^{\perp}$ si :

$$Q((x_1, x_2), (2, 1)) = 0 \iff 2x_1 - 4x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2$$

D'où $F^{\perp} = \text{Vect}\{(2, 1)\}$. On remarque ici que $F = F^{\perp}$. Bien que $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, nous avons $F \cap F^{\perp} = F \neq \{0\}$, donc la somme n'est pas directe.

Définition 2.3

[1] Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

1. Un vecteur $x \in E$ est dit **isotrope** si $\varphi(u, u) = \varphi(u) = 0$.
2. Un sous-espace $F \subseteq E$ est dit **isotrope** si $F \cap F^{\perp} \neq \{0_E\}$.
3. F est dit **totalement isotrope** si $F \subseteq F^{\perp}$.

Remarque 2.3

[1] F totalement isotrope $\Rightarrow$ F est isotrope, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Théorème 2.1

[1] Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a l'équivalence suivante :

$$E = F \oplus F^{\perp} \iff F \text{ est un sous-espace non isotrope.}$$

2.2.1 Bases orthogonales et orthonormales :

Définition 2.4

Base orthogonale et orthonormale [1] : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. La base $\mathcal{B}$ est dite **φ-orthogonale** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall i \neq j, \quad \varphi(e_i, e_j) = 0.$$

2. La base $\mathcal{B}$ est dite **φ-orthonormale** si :

$$\forall i, j, \quad \varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Remarque 2.4

[1]

1. Dans une base φ-orthogonale, la matrice de φ est diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}),$$

et la forme quadratique associée s'écrit :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

2. Dans une base φ-orthonormale, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n, \quad \text{et} \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Théorème 2.2

[1] Toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base orthogonale.

Corollaire 2.2

Cas défini positif [1] : Si φ est définie positive, alors il existe une base orthonormale de E.

2.3 Écriture matricielle d'une forme quadratique :

2.3.1 Matrice d'une forme quadratique dans une base :

Définition 2.5

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit Q une forme quadratique sur E et B sa forme polaire. On appelle **matrice de Q dans la base $\mathcal{B}$** la matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. On note $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 2.3

Soit $x \in E$ de coordonnées $u = (x_1, \ldots, x_n)^t$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$Q(x) = u^t A u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Les termes a_{ij} pour $i < j$ correspondent aux produits mixtes, et le facteur 2 apparaît car la matrice est symétrique.

Exemple 2.3

$Q(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique.
1. Trouver la matrice A de Q.
Solution : Identifions les coefficients :

- Le coefficient de x^2 est $1 \Rightarrow a_{11} = 1$
- Le coefficient de y^2 est $3 \Rightarrow a_{22} = 3$
- Le coefficient de xy est 4. Dans l'expression $2a_{12}xy$, on a $2a_{12} = 4 \Rightarrow a_{12} = 2$
- Par symétrie, $a_{21} = a_{12} = 2$

La matrice de Q est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$u^t A u = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$$

$$= x(x+2y) + y(2x+3y) = x^2 + 2xy + 2xy + 3y^2 = x^2 + 4xy + 3y^2$$

Ce qui correspond bien à $Q(x, y)$.

2.3.2 Changement de base :

Propriété 2.4

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (c'est-à-dire que les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$). Si A est la matrice de Q dans $\mathcal{B}$ et A' sa matrice dans $\mathcal{B}'$, alors :

$$A' = P^t A P.$$

En effet, si u sont les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}$ et u' ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$, on a $u = Pu'$, et $Q(x) = u^t A u = (Pu')^t A (Pu') = u'^t (P^t A P) u'$.

Remarque 2.5

Contrairement à la formule de changement de base pour un endomorphisme ($A' = P^{-1}AP$), on utilise ici la transposée de P et non son inverse. La matrice d'une forme quadratique est donc une **matrice congruente** à A, et non semblable.

Exemple 2.4

Soit la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6y^2 + 4yz + 3z^2$$

Dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Objectif : Trouver la matrice de Q dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = (e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$.
1. D'abord, identifions la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$:

- $a_{11} = 1$ (coefficient de x^2)
- $a_{22} = 6$ (coefficient de y^2)
- $a_{33} = 3$ (coefficient de z^2)
- Pour xy : $4 = 2a_{12} \Rightarrow a_{12} = a_{21} = 2$

- Pour xz : pas de terme $\Rightarrow a_{13} = a_{31} = 0$
- Pour yz : $4 = 2a_{23} \Rightarrow a_{23} = a_{32} = 2$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Trouvons la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$$

Les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

- $w_1 = e_1 = (1, 0, 0)^t$
- $w_2 = e_1 + e_2 = (1, 1, 0)^t$
- $w_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 1, 1)^t$

Donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculons $A' = P^t A P$:

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2 & 1+2 \\ 2 & 2+6 & 2+6+2 \\ 0 & 2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

calculons $P^t(AP)$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 11 & 13 \\ 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de Q dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 11 & 13 \\ 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

2.4 Réduction des formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$:

2.4.1 Objectif de la réduction :

Définition 2.6

Réduire une forme quadratique Q, c'est trouver une base de E dans laquelle l'expression de Q est aussi simple que possible, c'est-à-dire une somme de carrés de coordonnées avec des coefficients. On cherche une écriture du type :

$$Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

où $(y_1, \ldots, y_n)$ sont les coordonnées de u dans une nouvelle base.

2.4.2 Réduction par la méthode de GAUSS

Le but de cette méthode est d'écrire une forme quadratique comme une somme carrée.

Théorème 2.3

Toute forme quadratique Q non nulle sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des carrés de formes linéaires indépendantes :

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (l_i(u))^2$$

Où r est le rang de la forme, et $(l_1, \ldots, l_r)$ sont des formes linéaires indépendantes.

Remarque 2.6

[5] Il s'agit d'une méthode purement technique reposant sur la formule donnant le carré d'une somme :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j$$

L'idée est de regrouper les termes par variable pour former un carré parfait, puis de « **rectifier le tir** » en retranchant les termes ajoutés en trop.

Principe général de la méthode de GAUSS :

Il y a deux cas possibles pour démarrer l'algorithme :
a) Si $Q(X)$ contient au moins un carré (ex : x_1^2) : On isole tous les termes

contenant x_1 et on écrit que c'est le début d'un carré parfait :

$$a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + \cdots = a_{1,1}\left(\left(x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n\right)^2 - \dots\right)$$

On traite ensuite le reste par récurrence avec une variable de moins.

b) Si $Q(X)$ ne contient que des termes croisés (Produits rectangles, ex : x_1x_2) : On choisit un produit x_1x_2 et on regroupe les termes contenant x_1 ou x_2. On utilise alors l'identité suivante :

$$x_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 = (x_1 + C)(x_2 + B) - BC$$

En utilisant la relation $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$, on transforme le produit en une différence de deux carrés :

$$(x_1 + C)(x_2 + B) = \frac{1}{4}\left[(x_1 + x_2 + B + C)^2 - (x_1 - x_2 - B + C)^2\right]$$

Exemple 2.5

Soit Q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x, y, z) = 4x^2 - 2y^2 - 19z^2 + 4xy - 4xz - 14yz$$

1. Matrice associée à la forme quadratique

La matrice symétrique A associée à Q dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -7 \\ -2 & -7 & -19 \end{pmatrix}$$

2. Réduction de Gauss (Méthode des carrés)

Étape 1 : Isolement de la variable x
On regroupe les termes contenant x et on complète le carré :

$$4x^2 + 4xy - 4xz = 4\left[\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}z\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}z\right)\right]$$

En substituant dans $Q(x, y, z)$, on obtient :

$$Q(x, y, z) = 4\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 2y^2 - 19z^2 - 14yz$$

Après simplification des termes en y et z :

$$Q(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - 3y^2 - 12yz - 20z^2$$

Étape 2 : Isolement de la variable y
On traite maintenant le reste en complétant le carré pour y :

$$-3y^2 - 12yz = -3\left[(y+2z)^2 - (2z)^2\right]$$

En substituant à nouveau :

$$Q(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - 3\left[(y+2z)^2 - 4z^2\right] - 20z^2$$

$$Q(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - 3(y+2z)^2 + 12z^2 - 20z^2$$

Forme canonique finale :

$$Q(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - 3(y+2z)^2 - 8z^2$$

Alors :

$$Q(X,Y,Z) = 4X^2 - 3Y^2 - 8Z^2$$

3. Changement de base et Matrice de passage P

L'objectif est de trouver la matrice de passage P vers la base de diagonalisation $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. D'après les formes linéaires obtenues :

$$\begin{cases} X = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ Y = y + 2z \\ Z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = X - \frac{1}{2}Y + \frac{3}{2}Z \\ y = Y - 2Z \\ z = Z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

- $u_1 = (1,0,0)^t$
- $u_2 = (-1/2,1,0)^t$
- $u_3 = (3/2,-2,1)^t$

Donc la matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vérification de la relation $P^tAP = D$

La matrice diagonale attendue est $D = \text{diag}(4, -3, -8)$.
Calculons P^tAP :

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -7 \\ -2 & -7 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = D$$

La signature de Q est $(1, 2)$ et son rang est 3.

Exemple 2.6

Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$Q(x, y, z, t) = xy + xz + yz + zt$$

1. Matrice associée à la forme quadratique

La matrice symétrique A associée à Q dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Réduction de Gauss (Cas sans carrés)

Étape 1 : Regroupement et factorisation
Puisque les termes carrés sont nuls, on regroupe les termes contenant x et y :

$$Q(x, y, z, t) = x(y + z) + z(y + t)$$

En faisant apparaître le produit $(x + z)(y + z)$, on obtient :

$$Q(x, y, z, t) = (x + z)(y + z) - z^2 + zt$$

Étape 2 : Passage à la forme canonique
En utilisant l'identité $AB = \frac{1}{4}(A + B)^2 - \frac{1}{4}(A - B)^2$ et en complétant le carré pour le reste :

$$Q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}(x + y + 2z)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 - \left(z - \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{1}{4}t^2$$

Forme canonique finale :

$$Q(X,Y,Z,T) = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{4}Y^2 - Z^2 + \frac{1}{4}T^2$$

3. Changement de base et Matrice de passage P

D'après les formes linéaires obtenues :

$$\begin{cases} X = x + y + 2z \\ Y = x - y \\ Z = z - \frac{1}{2}t \\ T = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - Z - \frac{1}{2}T \\ y = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y - Z - \frac{1}{2}T \\ z = Z + \frac{1}{2}T \\ t = T \end{cases}$$

D'où la matrice de passage P (par lecture des colonnes) :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vérification de la relation $P^tAP = D$

La matrice diagonale attendue est $D = \mathrm{diag}(1/4, -1/4, -1, 1/4)$.

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors :

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D$$

La signature de Q est $(2, 2)$ et son rang est 4.

2.4.3 Réduction par diagonalisation :

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et Q une forme quadratique sur E. Notons $M = \mathrm{Mat}(Q, \mathcal{B})$. Alors il existe une base orthogonale par rapport à Q formée par des vecteurs propres de M.

Théorème 2.4

Étant donnée une forme quadratique Q de $\mathbb{R}^n$, il existe au moins une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle Q est réduite, c'est-à-dire s'exprime sous la forme :

$$Q(u) = a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + \cdots + a_n x_n'^2$$

Dans cette écriture réduite sur la base B' :
Les $a_1, \ldots, a_n$ sont les valeurs propres de la matrice de Q sur la base canonique.

Exemple 2.7

Réduire la forme quadratique $Q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xz$ sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de Q est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

on obtient :

$$(5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \implies (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

L'ensemble des valeurs propres de A est donc $\{1, 3, 5\}$.
2. Recherche des vecteurs propres unitaires :

- Pour $\lambda = 5$:

$$\begin{aligned} E_5 &= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ telle que } (A - 5I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{X = (0, t, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ telle que } t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Alors le vecteur propre unitaire est $(0, 1, 0)$.

- Pour $\lambda = 1$: On résout $(A - 1I_3)X = 0$.

  On obtient :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 4y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies y = 0, z = -x$$

  Le vecteur propre unitaire est $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

- Pour $\lambda = 3$: On résout $(A - 3I_3)X = 0$.

  On obtient :

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \implies y = 0, z = x$$

  Le vecteur propre unitaire est $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Matrice de passage et réduction :
La matrice orthogonale de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Les composantes (X, Y, Z) sur cette base orthonormée s'obtiennent par :

$$X = y, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z$$

On peut donc écrire la forme réduite :

$$Q(X, Y, Z) = 5X^2 + Y^2 + 3Z^2$$

Sur cette base orthonormée.
Remarque : Cette méthode est plus directe que celle de Gauss car elle nous donne non seulement une forme réduite, mais elle garantit également que la nouvelle base est **orthonormée**. Les coefficients $(5, 1, 3)$ sont les valeurs propres exactes de la matrice A.

Remarque 2.7

La méthode de Gauss est algorithmique et toujours applicable sans calcul de valeurs propres. La méthode par diagonalisation nécessite de travailler dans une base orthonormée pour la matrice, et donne une base orthonormée pour le produit scalaire canonique, mais pas forcément pour la forme quadratique elle-même.

2.5 Loi d'inertie de Sylvester et Signature

Théorème 2.5

Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Dans toute écriture de Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes à coefficients réels :

$$Q = \alpha_1 \ell_1^2 + \cdots + \alpha_p \ell_p^2 - \alpha_{p+1} \ell_{p+1}^2 - \cdots - \alpha_r \ell_r^2,$$

avec $\alpha_i > 0$, le nombre p de coefficients positifs et le nombre $q = r - p$ de coefficients négatifs sont indépendants de la décomposition choisie. Le nombre $r = p + q$ est le rang de Q.

Définition 2.7

Le couple (p, q) s'appelle la **signature** de la forme quadratique Q. Si la forme est dégénérée, on note aussi r le rang, et $n - r$ la dimension du noyau.

Propriété 2.5

La signature (p, q) de Q est aussi le nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives de sa matrice S (comptées avec leur multiplicité). Le rang r est le nombre de valeurs propres non nulles.

Exemple 2.8

Dans notre exemple $Q(x, y, z) = (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 - 2z^2$, nous avons trois carrés avec des coefficients $+1$, $+1$, et -2.
Déterminer la signature, le rang, et la nature de Q.
Solution :

- Les coefficients positifs : $+1$ et $+1 \Rightarrow p = 2$
- Les coefficients négatifs : $-2 \Rightarrow q = 1$
- Le nombre total de carrés non nuls : $r = p + q = 3$, donc $\text{rang}(Q) = 3$
- La dimension de l'espace est $n = 3$, donc $\text{rang}(Q) = n$, la forme est **non dégénérée**
- La signature est $(2, 1)$

Puisque $p > 0$ et $q > 0$, la forme est **indéfinie** (elle n'est ni définie positive ni définie négative).

Définition 2.8

Classification : Une forme quadratique Q de signature (p, q) est dite :

- **Définie positive** si $q = 0$ et $r = n$ (tous les coefficients sont > 0).
- **Définie négative** si $p = 0$ et $r = n$ (tous les coefficients sont < 0).
- **Positive** si $q = 0$ (elle peut être dégénérée ou non).
- **Négative** si $p = 0$.
- **Indéfinie** si $p > 0$ et $q > 0$.

Exemple 2.9

Classifions les formes quadratiques suivantes :

1. $Q_1(x, y) = x^2 + y^2$
   - Décomposition : $+1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2$
   - $p = 2$, $q = 0$, $r = 2 = n$
   - Signature $(2, 0)$, rang $2 \Rightarrow$ **définie positive**
2. $Q_2(x, y) = -x^2 - 2y^2$
   - Décomposition : $-1 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2$ (ou $-x^2 - 2y^2$)
   - $p = 0$, $q = 2$, $r = 2 = n$
   - Signature $(0, 2)$, rang $2 \Rightarrow$ **définie négative**
3. $Q_3(x, y) = x^2 - y^2$
   - Décomposition : $+1 \cdot x^2 - 1 \cdot y^2$
   - $p = 1$, $q = 1$, $r = 2 = n$
   - Signature $(1, 1)$, rang $2 \Rightarrow$ **indéfinie**
4. $Q_4(x, y) = x^2$
   - Décomposition : $+1 \cdot x^2 + 0 \cdot y^2$
   - $p = 1$, $q = 0$, $r = 1 < n = 2$
   - Signature $(1, 0)$, rang $1 \Rightarrow$ **positive dégénérée**

Chapitre 3

Les quadriques

Introduction

Les quadriques, ou surfaces du second degré, sont des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$ définies par une équation polynomiale de degré 2. Elles généralisent les coniques (cercles, ellipses, paraboles, hyperboles) à trois dimensions. Leur étude est une application directe et élégante de la théorie des formes quadratiques développée au chapitre précédent. En effet, la signature de la partie quadratique de l'équation détermine complètement la nature géométrique de la surface : ellipsoïde, hyperboloïde, paraboloïde, cône ou cylindre. Ce chapitre a pour objectif de présenter la méthode générale de réduction de l'équation d'une quadrique, puis de classifier ces surfaces à l'aide des outils du chapitre 2, en illustrant chaque type par des exemples détaillés et des représentations graphiques.

3.1 Définition et équation générale d'une quadrique

Définition 3.1

On appelle **quadrique** (ou surface du second degré) dans $\mathbb{R}^3$ toute surface dont l'équation cartésienne peut s'écrire sous la forme générale :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

où (a_{ij}) sont des coefficients réels, non tous nuls, et b_i, c sont des constantes réelles.

Propriété 3.1

L'équation d'une quadrique peut s'écrire sous forme matricielle compacte :

$$X^tAX + 2LX + c = 0$$

$$X^tAX + B^tX + c = 0$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ (matrice réelle symétrique de la partie quadratique), et $L = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} & \frac{b_3}{2} \end{pmatrix}$ (matrice ligne de la partie linéaire).

Remarque 3.1

La partie quadratique est donnée par $X^tAX = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$. La signature (p, q) de S jouera un rôle fondamental dans la classification.

Exemple 3.1

L'équation $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 6y + 8z - 5 = 0$ est une quadrique.
L'objectif est d'écrire cette équation sous la forme matricielle compacte :

$$X^tAX + 2LX + c = 0$$

La matrice A est la matrice symétrique associée à la partie quadratique. En identifiant les coefficients, on a :

- $a_{11} = 2, a_{22} = 3, a_{33} = 1.$
- $a_{12} = \frac{-4}{2} = -2$, $a_{13} = \frac{2}{2} = 1$, $a_{23} = \frac{0}{2} = 0.$

D'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur L est composé de la moitié des coefficients de la partie linéaire :

- $b_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0$, $b_2 = -6 \Rightarrow L_2 = -3$, $b_3 = 8 \Rightarrow L_3 = 4$

D'où : $L = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
L'équation s'écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 5 = 0$$

3.2 Réduction de l'équation d'une quadrique

La réduction de l'équation d'une quadrique suit une procédure systématique en plusieurs étapes.

3.2.1 Réduction de la partie quadratique

Théorème 3.1

Par un changement de base orthonormée (rotation) qui diagonalise la matrice symétrique A, on peut éliminer les termes mixtes xy, xz, yz. Si P est la matrice de passage orthonormée ($P^{-1} = P^t$) vers une base de vecteurs propres, alors dans les nouvelles coordonnées $X' = (x', y', z')^t$ (telles que $X = PX'$), l'équation devient :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + c = 0$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A, et $B' = P^t B$ est le nouveau vecteur des coefficients linéaires.

3.2.2 Complément de méthode

Pour obtenir la base orthonormée $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, on doit :

1. Trouver les valeurs propres λ_i en résolvant $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Chercher les vecteurs propres associés à chaque λ_i.
3. **Normaliser** chaque vecteur propre V_i pour obtenir $v_i = \frac{V_i}{\|V_i\|}$ afin que la matrice de passage P soit orthogonale ($P^{-1} = P^t$).

Dans les nouvelles coordonnées $X' = (x', y', z')^t$, l'équation devient :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + c = 0$$

3.2.3 Recherche du centre de la quadrique

Définition 3.2

Un point $C = (x_0, y_0, z_0)$ est appelé **centre** de la quadrique s'il est centre de symétrie de la surface. Il est solution du système linéaire obtenu en annulant le gradient de l'équation.

Propriété 3.2

Le système pour trouver le centre s'écrit matriciellement :

$$AX + \frac{1}{2}B = 0$$

Soit :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \frac{b_1}{2} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + \frac{b_2}{2} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + \frac{b_3}{2} = 0 \end{cases}$$

Si ce système a une solution unique, la quadrique est dite **à centre**. Si le système est impossible ou admet une infinité de solutions, la quadrique est dite **sans centre** (ou à centre à l'infini).

3.2.4 Translation du repère

Propriété 3.3

Si le centre $C = (x_0, y_0, z_0)$ existe et est unique, on effectue le changement de variables (translation) :

$$X = X'' + C \quad \text{soit} \quad x = x'' + x_0,\ y = y'' + y_0,\ z = z'' + z_0$$

Cette translation élimine les termes linéaires. L'équation devient alors :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + c' = 0$$

où c' est une nouvelle constante.

3.2.5 Obtention de l'équation réduite

Après rotation et translation, on obtient l'une des formes canoniques suivantes :

1. **Quadriques à centre :** $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = k$
2. **Quadriques sans centre :** $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 2pZ$ (paraboloïdes) ou $\lambda_1 X^2 = 2qY$ (cylindres paraboliques)

Exemple 3.2

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation cartésienne suivante :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4x - 4y - 4z + 2 = 0$$

1. Réduction de la partie quadratique (Rotation) La matrice symétrique A associée à la partie quadratique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. **Valeurs propres :** On calcule le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$. Les racines sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

. **Vecteurs propres :** Après calcul et normalisation des vecteurs propres associés, on obtient la matrice de passage orthogonale P :Pour chaque valeur propre $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$, nous résolvons le système :

$$(A - \lambda I)V = 0$$

- **Pour $\lambda_1 = 1$:** la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  À partir de là, nous trouvons que $z = 0$ et $x + y = 0$ (soit $x = -y$).
  Le premier vecteur propre est : $V_1 = (1, -1, 0)$
- **Pour $\lambda_2 = 2$:** $V_2 = (0, 0, 1)$
- **Pour $\lambda_3 = 3$:** $V_3 = (1, 1, 0)$

Processus de "Normalisation" :

- La norme de V_1 est $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.
  Le vecteur unitaire est : $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
- La norme de V_2 est $\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$.
  Le vecteur unitaire est : $u_2 = (0, 0, 1)$
- La norme de V_3 est $\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.
  Le vecteur unitaire est : $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Formation de la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. **Équation après rotation :** Dans le nouveau repère (O, x', y', z'), les termes mixtes disparaissent. Après transformation des termes linéaires ($B' = P^t B$), l'équation devient :

$$x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 + 0x' - 4y' - 4\sqrt{2}z' + 2 = 0$$

2. Translation du repère (Recherche du centre) On utilise la méthode de complétion des carrés pour regrouper les termes :

   - Pour z' : $3\left(z'^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}z'\right) = 3\left[\left(z' - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{8}{9}\right] = 3\left(z' - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}$
   - Pour y' : $2(y'^2 - 2y') = 2[(y'-1)^2 - 1] = 2(y'-1)^2 - 2$

   L'équation devient alors :

$$x'^2 + 2(y'-1)^2 + 3\left(z' - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 - \frac{8}{3} + 2 = 0$$

$$x'^2 + 2(y'-1)^2 + 3\left(z' - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - 1 \\ Z = z' - \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

3. Forme réduite et Nature de la quadrique En effectuant la translation au centre $C' = \left(0, 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, on obtient la forme canonique :

$$X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = \frac{8}{3} \implies \frac{X^2}{8/3} + \frac{Y^2}{4/3} + \frac{Z^2}{8/9} = 1$$

Puisque $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ et la constante est positive, la quadrique S est un **Ellipsoïde**.

3.3 Classification et Paramétrisation des quadriques

3.3.1 Quadriques à centre

Ellipsoïde

Définition 3.3

Equation réduite : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$. Signature : $(3, 0)$.

Représentation paramétrique :

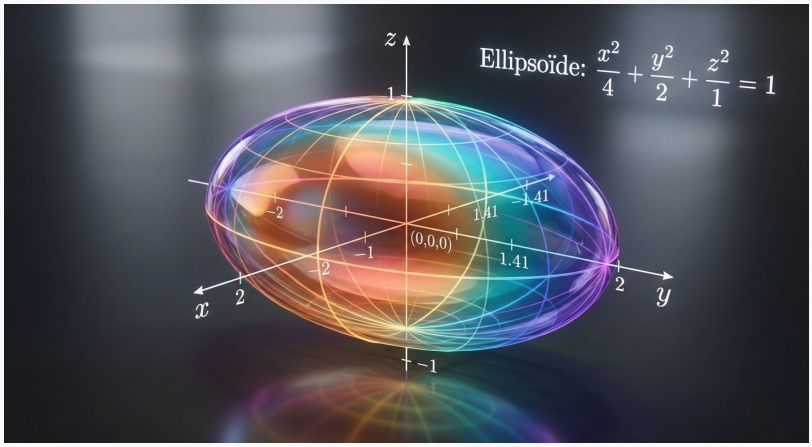
$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = b\sin u \cos v \\ z = c\sin v \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Exemple 3.3

Considérons la surface S définie par : $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.

1. **Forme canonique :** En divisant par 4, on obtient $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$.
2. **Éléments géométriques :** Les demi-axes sont $a = 2, b = \sqrt{2} \approx 1.41$ et $c = 1$.
3. **Paramétrisation :**

$$\begin{cases} x = 2\cos u \cos v \\ y = \sqrt{2}\sin u \cos v \\ z = \sin v \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



Hyperboloïde à une nappe

Définition 3.4

Equation réduite : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$. Signature : $(2, 1)$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cosh v \cos u \\ y = b \cosh v \sin u \\ z = c \sinh v \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.4

Soit la surface quadrique S définie par l'équation cartésienne suivante :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$

Pour obtenir l'équation canonique, on divise les deux membres de l'équation par 4 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$

En comparant avec la forme générale $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, on identifie les paramètres géométriques :

- $a^2 = 4 \implies a = 2$
- $b^2 = 4 \implies b = 2$
- $c^2 = 4 \implies c = 2$

Puisqu'un seul coefficient est négatif et que la constante est égale à 1, la surface S est un **hyperboloïde à une nappe** de révolution autour de l'axe (Oz).

Éléments caractéristiques

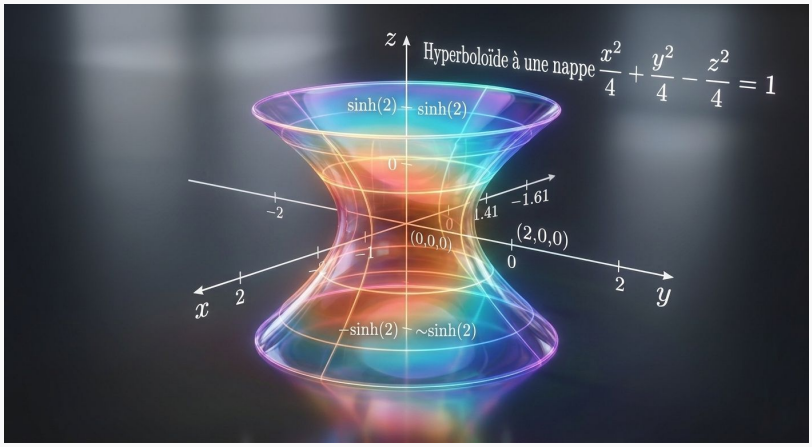
- **Le col (L'étranglement) :** C'est le cercle obtenu pour $z = 0$, d'équation $x^2 + y^2 = 4$ dans le plan (Oxy). Son rayon est $R = 2$.
- **Points d'intersection :** La surface coupe l'axe (Ox) aux points $(2, 0, 0)$ et $(-2, 0, 0)$.

Représentation paramétrique

En utilisant les fonctions hyperboliques $(\cosh, \sinh)$ pour l'extension infinie et les fonctions trigonométriques $(\cos, \sin)$ pour la rotation, la paramétrisation de S est :

$$\begin{cases} x(u,v) = 2\cosh v \cos u \\ y(u,v) = 2\cosh v \sin u \\ z(u,v) = 2\sinh v \end{cases} \quad \text{avec } u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Remarque : Les valeurs $\sinh(2)$ *et* $-\sinh(2)$ *sur le graphique correspondent aux bornes du paramètre* v *choisies pour la visualisation.*



Hyperboloïde à deux nappes

Définition 3.5

Equation réduite : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$. Signature : $(1, 2)$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a\sinh v \cos u \\ y = b\sinh v \sin u \\ z = c\cosh v \end{cases}$$

Exemple 3.5

Considérons la surface quadrique S définie par l'équation cartésienne suivante :

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

1. Étude de la surface : D'après la forme de l'équation, nous identifions les paramètres $a = 2, b = 2$ et $c = 2$. La signature de cette quadrique est $(1, 2)$, ce qui confirme qu'il s'agit d'un **hyperboloïde à deux nappes**. L'axe de symétrie est l'axe (Oz) car il correspond au seul terme de coefficient positif.

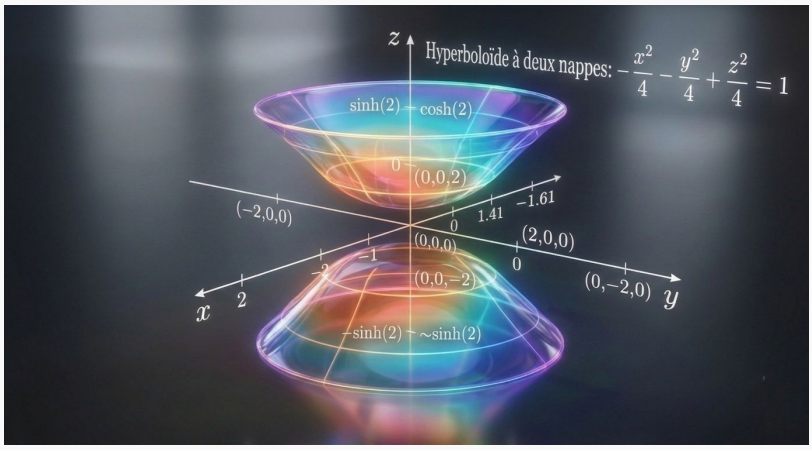
2. Éléments géométriques remarquables :

- **Sommets :** La surface coupe l'axe (Oz) en deux points distincts $S_1(0, 0, 2)$ et $S_2(0, 0, -2)$, comme illustré sur la figure ci-dessous.
- **Nappes :** La surface est composée de deux parties disjointes : une nappe supérieure $(z \geq 2)$ et une nappe inférieure $(z \leq -2)$.

3. Représentation paramétrique : En utilisant les fonctions hyperboliques pour assurer la condition $\frac{z^2}{c^2} - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = 1$, la paramétrisation de la nappe supérieure est donnée par :

$$\begin{cases} x(u, v) = 2 \sinh v \cos u \\ y(u, v) = 2 \sinh v \sin u \\ z(u, v) = 2 \cosh v \end{cases} \quad \text{avec } u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}^+$$

Note : Sur le graphique, les limites de visualisation sont définies par $v \in [0, 2]$, d'où l'apparition des valeurs $\pm \sinh(2)$ pour les rayons des sections extrêmes.



3.3.2 Quadriques sans centre : Les paraboloïdes

Paraboloïde elliptique

Définition 3.6

Equation réduite : $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$. Signature : $(2, 0)$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a\sqrt{v}\cos u \\ y = b\sqrt{v}\sin u \\ z = v \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], v \geq 0$$

Exemple 3.6

Considérons la surface quadrique d'équation cartésienne :

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

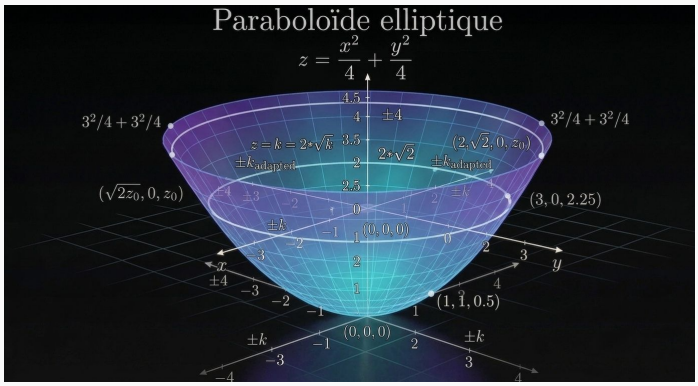
1. Identification des paramètres : En comparant avec l'équation standard, nous avons $a^2 = 4$ et $b^2 = 4$, d'où $a = 2$ et $b = 2$. Comme $a = b$, il s'agit plus précisément d'un **paraboloïde de révolution** autour de l'axe (Oz).

2. Points remarquables et intersections :

- **Sommet :** La surface passe par l'origine $O(0, 0, 0)$, qui constitue le point le plus bas de la nappe.
- **Sections horizontales :** Pour une hauteur fixe $z = z_0 > 0$, l'intersection est un cercle (ou une ellipse si $a \neq b$) d'équation $x^2 + y^2 = 4z_0$.
- **Points sur le graphique :** On observe sur la figure des points comme $(2\sqrt{2}, 0, z_0)$ ou $(3, 0, 2.25)$, qui vérifient bien l'équation $(2.25 = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4})$.

3. Représentation paramétrique : En utilisant les coordonnées polaires adaptées à la croissance parabolique, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x(u, v) = 2\sqrt{v}\cos u \\ y(u, v) = 2\sqrt{v}\sin u \\ z(u, v) = v \end{cases} \quad \text{avec } u \in [0, 2\pi], v \geq 0$$



Paraboloïde hyperbolique (selle de cheval)

Définition 3.7

Equation réduite : $Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$. Signature : $(1, 1)$.

Représentation paramétrique :

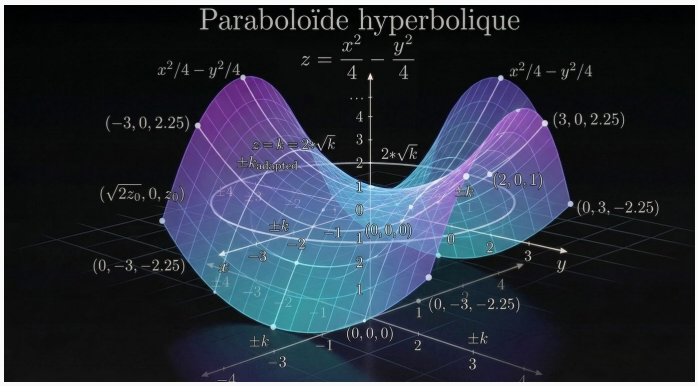
$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

Exemple 3.7

Soit la surface S d'équation : $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$.

1. **Nature :** C'est un paraboloïde hyperbolique de paramètres $a = 2$ et $b = 2$.
2. **Points caractéristiques :**
   - Pour $x = 3$ et $y = 0$, on a $z = 2.25$, ce qui correspond au point $(3, 0, 2.25)$.
   - Pour $x = 0$ et $y = 3$, on a $z = -2.25$, ce qui correspond au point $(0, 3, -2.25)$.
3. **Paramétrisation :**

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = 2v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$



3.3.3 Quadriques dégénérées

Cônes

Définition 3.8

Equation : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$. Signature : $(2, 1)$, $k = 0$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = av\cos u \\ y = bv\sin u \\ z = cv \end{cases}$$

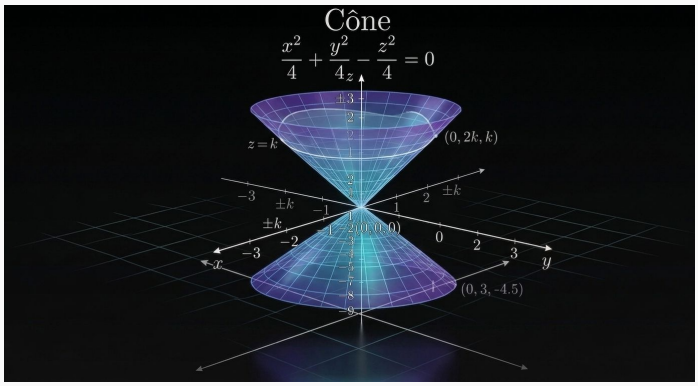
Exemple 3.8

Soit la surface S d'équation : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0$.

1. **Nature :** Il s'agit d'un cône de révolution d'axe (Oz) et de sommet $O(0, 0, 0)$, avec les paramètres $a = b = c = 2$.
2. **Représentation paramétrique :** Le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x = 2v\cos u \\ y = 2v\sin u \\ z = 2v \end{cases} \quad \text{où } u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

3. **Interprétation graphique :** Les sections horizontales à une hauteur z constante sont des cercles de rayon $R = |z|$.



Cylindre elliptique

Définition 3.9

Equation : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Signature : $(2, 0)$, $k = 1$.

Représentation paramétrique :

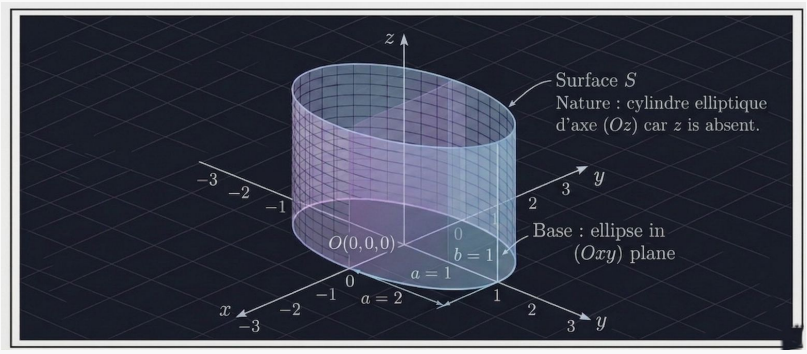
$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v \end{cases}$$

Exemple 3.9

Soit la surface S d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

1. **Nature :** Il s'agit d'un cylindre elliptique d'axe (Oz) car la variable z est absente de l'équation.
2. **Éléments géométriques :** La base est une ellipse de demi-axes $a = 2$ et $b = 1$ située dans le plan (Oxy).
3. **Paramétrisation :** En posant $x = 2\cos u$ et $y = \sin u$, et en laissant z libre $(z = v)$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$



Cylindre hyperbolique

Définition 3.10

Equation : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Signature : $(1,1)$, $k=1$.

Représentation paramétrique :

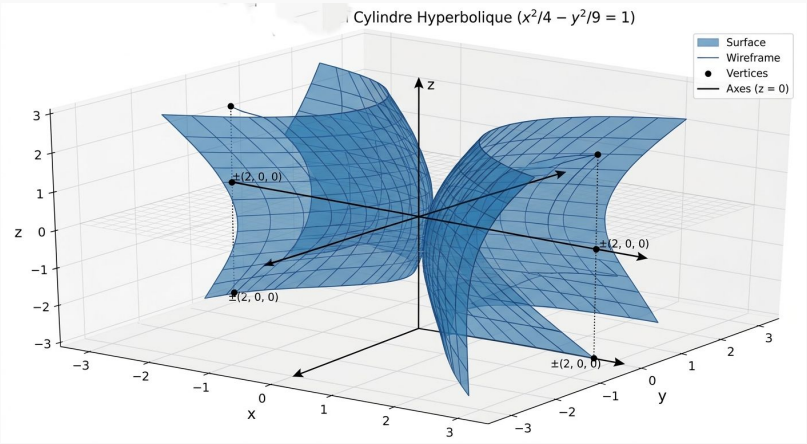
$$\begin{cases} x = a\cosh u \\ y = b\sinh u \\ z = v \end{cases}$$

Exemple 3.10

Soit la surface S d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1. **Nature :** Il s'agit d'un cylindre hyperbolique d'axe (Oz). La directrice dans le plan (Oxy) est une hyperbole.
2. **Éléments géométriques :** Les sommets de la directrice sont situés aux points $(\pm 2, 0, 0)$. La surface est composée de deux nappes symétriques par rapport au plan (Oyz).
3. **Paramétrisation :** En utilisant les fonctions hyperboliques, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x = 2\cosh u \\ y = 3\sinh u \\ z = v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.3}$$



Cylindre parabolique

Définition 3.11

Equation : $X^2 = 2pY$. Signature : $(1, 0)$.

Représentation paramétrique :

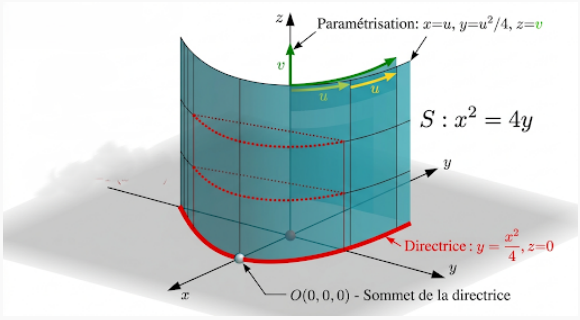
$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{u^2}{2p} \\ z = v \end{cases}$$

Exemple 3.11

Soit la surface S d'équation cartésienne : $x^2 = 4y$.

1. **Nature :** Il s'agit d'un cylindre parabolique d'axe (Oz). Sa directrice dans le plan (Oxy) est une parabole de sommet $O(0, 0, 0)$.
2. **Analyse :** Pour chaque valeur de z, la section horizontale est la même parabole $y = \frac{x^2}{4}$.
3. **Paramétrisation :** En choisissant $x = u$ comme premier paramètre, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{u^2}{4} \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.4}$$



3.4 Tableau récapitulatif

Tableau récapitulatif complet des surfaces quadriques

Signature	Rang	Type	Équation réduite
(3,0)	3	Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(2,1)	3	Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(1,2)	3	Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(2,0)	2	Paraboloïde elliptique	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
(1,1)	2	Paraboloïde hyperbolique	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
(2,1)	3	Cône	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
(2,0)	2	Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(1,1)	2	Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(1,0)	1	Cylindre parabolique	$x^2 = 2py$

3.5 Applications

3.5.1 Application 1:

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation suivante :

$$f(x, y, z) = x^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz + 2x - 1 = 0$$

1. **Réduction par la méthode directe de Gauss :**
   - En appliquant la méthode de Gauss.
   - En déduire le rang, la signature, les coordonnées du centre de symétrie Ω, ainsi que l'équation réduite de la surface S.

2. **Étude spectrale (Méthode de Diagonalisation) :**
   - **a)** Écrire l'équation de la surface S sous la forme matricielle $X^T AX + B^T X - 1 = 0$.
   - **b)** Déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   - **c)** En déduire les **valeurs propres** de la matrice A.
   - **d)** Déterminer les **sous-espaces propres** E_λ et une base de **vecteurs propres** (V_1, V_2, V_3) .
   - **e)** Vérifier l'**orthogonalité** des vecteurs propres et procéder à leur **normalisation** pour obtenir une base orthonormée (a_1, a_2, a_3).
   - **f)** Écrire la **matrice de passage** P et la nouvelle expression de l'équation de la surface dans cette base.
3. **Synthèse et Géométrie :**
   - **a)** Donner le **rang** et la **signature** de la matrice associée.
   - **b)** Rechercher le **centre de symétrie** Ω de la surface S par le système de gradient.
   - **c)** Déterminer l'**équation réduite** finale de la quadrique dans le repère local (Ω, a_1, a_2, a_3).
   - **d)** Conclure sur la **nature géométrique** précise de S.

Solution

1. Réduction par la méthode de Gauss

On applique la complétion des carrés directement sur l'expression globale $f(x, y, z)$:

$$f(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2x + 5z^2 - 4yz - 1$$

On regroupe les termes contenant la variable x :

$$f(x, y, z) = \left[x^2 - 2x(2y - 1)\right] + 5z^2 - 4yz - 1$$

En complétant le carré par rapport à x, on obtient :

$$x^2 - 2x(2y - 1) = (x - 2y + 1)^2 - (2y - 1)^2 = (x - 2y + 1)^2 - (4y^2 - 4y + 1)$$

On réinjecte cette expression dans l'équation :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x - 2y + 1)^2 - 4y^2 + 4y - 1 + 5z^2 - 4yz - 1 \\ &= (x - 2y + 1)^2 - 4y^2 - 4yz + 4y + 5z^2 - 2 \end{aligned}$$

Ensuite, on regroupe les termes contenant la variable y :

$$-4y^2 - 4yz + 4y = -4\left[y^2 + yz - y\right] = -4\left[y^2 - 2y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right)\right]$$

On complète le carré pour la variable y :

$$y^2 - 2y\left(\frac{1-z}{2}\right) = \left(y - \frac{1-z}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-2z+z^2}{4}$$

En multipliant par le coefficient -4, on trouve :

$$-4\left[y^2 + yz - y\right] = -4\left(y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - 2z + z^2$$

On réintroduit ce bloc dans l'équation générale :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x - 2y + 1)^2 - 4\left(y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - 2z + z^2 + 5z^2 - 2 \\ &= (x - 2y + 1)^2 - (2y + z - 1)^2 + 6z^2 - 2z - 1 \end{aligned}$$

Enfin, on complète le carré pour la dernière variable z :

$$6z^2 - 2z = 6\left(z^2 - \frac{1}{3}z\right) = 6\left[\left(z - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] = 6\left(z - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}$$

L'expression réduite par la méthode de Gauss globale est :

$$(x - 2y + 1)^2 - (2y + z - 1)^2 + 6\left(z - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{7}{6} = 0 \tag{3.5}$$

Analyse Géométrique Directe :

- **Rang et Signature :** Les coefficients des carrés indépendants étant $+1$, -1, et $+6$, le rang est $r = 3$ et la signature est $\sigma = (2, 1)$.
- **Centre de symétrie Ω :** Il s'obtient directement en annulant les expressions linéaires internes :

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \\ z - \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \implies \Omega = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}\right)$$

- **Équation réduite :** En posant $X = x - 2y + 1$, $Y = 2y + z - 1$ et $Z = z - \frac{1}{6}$, on obtient :

$$X^2 - Y^2 + 6Z^2 = \frac{7}{6}$$

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{36}}\right)^2} = 1$$

S est un **Hyperboloïde à une nappe**.

2. Étude spectrale (Diagonalisation)

a) Forme matricielle :
L'équation de la surface S s'écrit sous la forme matricielle $X^TAX + B^TX - 1 = 0$ avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 24$$

c) Valeurs propres : En résolvant $P(\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5$$

d) Sous-espaces propres et Axes principaux :
En résolvant le système linéaire $(A - \lambda I)V = 0$ pour chaque valeur propre, on détermine les axes principaux de la quadrique :

- Pour $\lambda_1 = -2$: $E_{-2} = \text{Vect}(V_1)$ avec $V_1 = (2, 3, 2)$.
- Pour $\lambda_2 = 3$: $E_3 = \text{Vect}(V_2)$ avec $V_2 = (-2, 2, -1)$.
- Pour $\lambda_3 = 5$: $E_5 = \text{Vect}(V_3)$ avec $V_3 = (1, 2, -2)$.

e) Orthogonalité et Normalisation :
La matrice A étant symétrique, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Calculons les normes des vecteurs de base :

$$\|V_1\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}, \quad \|V_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3, \quad \|V_3\| = 3$$

La base orthonormée (a_1, a_2, a_3) est obtenue par normalisation :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(2, 3, 2), \quad a_2 = \frac{1}{3}(-2, 2, -1), \quad a_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

f) Matrice de passage P et nouvelle expression :
La matrice de passage orthogonale P s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{17} & -2/3 & 1/3 \\ 3/\sqrt{17} & 2/3 & 2/3 \\ 2/\sqrt{17} & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, la forme quadratique transformée s'exprime par : $-2X'^2 + 3Y'^2 + 5Z'^2$.

3. Synthèse et Géométrie

a) Rang et Signature :

- **Rang :** $r = 3$ (nombre de valeurs propres non nulles).
- **Signature :** $\sigma = (2, 1)$ (deux valeurs propres positives, una valeur propre négative).

b) Centre de symétrie Ω :

Le centre de symétrie Ω s'obtient en annulant le gradient de l'équation complète $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x - 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -4y + 10z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x = -z \\ y = 2.5z \end{cases}$$

En résolvant ce système par substitution, on trouve : $z = 1/6$, d'où :

$$\Omega = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}\right)$$

c) Équation réduite finale :

L'équation finale dans le repère local (Ω, a_1, a_2, a_3) s'écrit sous la forme :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + f(\Omega) = 0$$

La constante de translation au centre vaut $f(\Omega) = \frac{1}{2} B^T \Omega - 1 = -\frac{1}{6} - 1 = -\frac{7}{6}$.
L'équation réduite finale est donc :

$$-2X^2 + 3Y^2 + 5Z^2 = \frac{7}{6}$$

$$\frac{Z^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{30}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{18}}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2} = 1$$

d) Nature géométrique

Puisque les coefficients des carrés sont de signes opposés $(- + +)$ (signature $(2, 1)$) et que la constante du second membre est non nulle, la surface S est un **Hyperboloïde à une nappe**.

3.5.2 Application 2:

I - Détermination de la nature de la quadrique ($S_1 : x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy - 1 = 0$)

Considérons la surface S_1 d'équation :

$$S_1 : x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy - 1 = 0$$

1- Etude de la forme quadratique S_1

a- Expression de la forme quadratique

$$Q(x) = x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy$$

b- Matrice associée à la forme quadratique

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

c- Polynôme caractéristique de la forme quadratique :

$P(\alpha) = \det(M - \alpha Id)$

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \begin{vmatrix} 1-\alpha & -2 & 1 \\ -1 & 3-\alpha & -4 \\ 1 & -4 & -3-\alpha \end{vmatrix} \\ &= (1-\alpha)[(3-\alpha)(-3-\alpha) - 16] + 2[-2(-3-\alpha) + 4] + [8 - (3-\alpha)] \\ &= (1-\alpha)(\alpha^2 - 9 - 16) + 4(\alpha + 5) + (\alpha + 5) \\ &= (1-\alpha)(\alpha - 5)(\alpha + 5) + 5(\alpha + 5) \\ &= (\alpha + 5)(-\alpha^2 + 6\alpha - 5 + 5) \\ \mathbf{P}(\alpha) &= -\alpha(\alpha + \mathbf{5})(\alpha - \mathbf{6}) \end{aligned}$$

d- Valeurs propres :

Les valeurs propres sont : $0, -5, 6$.

e- Vecteurs propres :

Soient E_0, E_{-5}, E_6 les espaces propres associés aux valeurs propres respectives $0, -5$ et 6.

i- $E_0 = \{u \in \mathbb{R}^3 / Mu = 0\}$ Soit $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z & (1) \\ -2x + 3y - 4z = 0 & (2) \\ x - 4y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) dans (2) et (3) :

$$\begin{cases} -4y + 2z + 3y - 4z = 0 \\ 2y - z - 4y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2z$$

Or $x = 2y - z \Rightarrow x = -4z - z = -5z$.

$$u = (x, y, z) \Rightarrow u = (-5z, -2z, z) = z(-5, -2, 1) = ze_1$$

ii- $E_{-5} = \{u \in \mathbb{R}^3 / Mu = -5u\}$

$$u \in E_{-5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u = y(0, 1, 2) = ye_2$$

iii- $E_6 = \{u \in \mathbb{R}^3 / Mu = 6u\}$

$$u \in E_6 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u = z(1, -2, 1) = ze_3$$

f- Orthogonalité des vecteurs propres

$$e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0 - 2 + 2 = 0$
$\langle e_1, e_3 \rangle = -5 + 4 + 1 = 0$
$\langle e_2, e_3 \rangle = 0 - 2 + 2 = 0$
e_1, e_2 et e_3 sont deux à deux orthogonaux.

g- Normalisation

$$\|e_1\| = \sqrt{30}, \quad \|e_2\| = \sqrt{5}, \quad \|e_3\| = \sqrt{6}$$
$$a_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \quad a_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}, \quad a_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

h- Matrice de passage P

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

2- Equation réduite de la quadrique S_1

Dans le repère (O, a_1, a_2, a_3), l'équation devient :

SoitSoit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

Cherchons l'écriture de S_1 en fonction de X, Y et Z.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Z \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{30}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y + \frac{1}{\sqrt{6}}Z \end{cases}$$

$S_1 : x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy - 1 = 0$

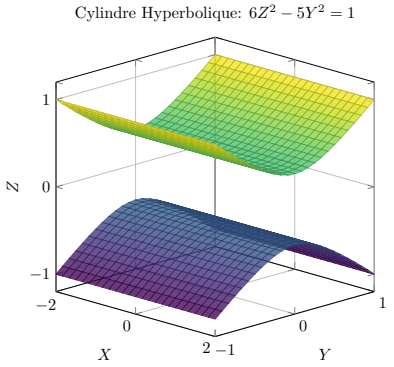
$$\begin{aligned} S_1 : \quad & \frac{5}{6}X^2 + \frac{1}{6}Z^2 - \frac{\sqrt{5}}{3}XZ + \frac{6}{15}X^2 + \frac{3}{5}Y^2 + \frac{6}{3}Z^2 - \frac{2\sqrt{6}}{5}XY \\ & + \frac{4}{\sqrt{5}}XY - \frac{2\sqrt{6}}{5}YZ - \frac{2\sqrt{6}}{5}XY - \frac{1}{\sqrt{5}}XZ - \cdots - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 - 1 = 0 \\ & 0 \cdot X^2 - 5Y^2 + 6Z^2 - 1 = 0 \\ & -5Y^2 + 6Z^2 = 1 \end{aligned}$$

$$S_1 : \frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

3- Nature de la quadrique S_1

De l'équation réduite trouvée, on conclut que S_1, est un cylindreà base hyperbolique



Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier les formes quadratiques définies sur un espace vectoriel réel, ainsi que leur application à la classification des quadriques.

Nous avons présenté les notions fondamentales des formes bilinéaires et des formes quadratiques, les méthodes de réduction telles que la méthode de Gauss et la méthode de diagonalisation, ainsi que la loi d'inertie de Sylvester et la signature. Nous avons ensuite appliqué ces concepts à l'étude des quadriques, en montrant comment classifier ces surfaces selon la signature de la forme quadratique associée.

Les formes quadratiques et les quadriques sont utiles dans de nombreuses applications, notamment en géométrie analytique, en physique théorique, en mécanique, et en infographie où la modélisation des surfaces de second degré est essentielle.

Bibliographie

[1] BOUALLALA, M. *Cours d'Algèbre Bilinéaire et Formes Quadratiques*. Université Cadi Ayyad, Marrakech.

[2] BOUDELIOU, A. et MATMAT, C. (2017). *Cours d'Algèbre 4 : Formes bilinéaires et réduction des formes quadratiques*. Polycopié de cours, Université Frères Mentouri, Constantine 1.

[3] BOUDJEMA, S. (2023). *Cours d'algèbre 4*. Polycopié de cours, Université 20 Août 1955 Skikda.

[4] BOUCETTA, M. (2001). *Dualité, Formes quadratiques, Formes hermitiennes*. (Avec la participation de Rémi Morvan). Éditions Cépaduès.

[5] COTTET-EMARD, F. (2005). *Algèbre linéaire et bilinéaire : Cours et exercices corrigés*. Éditions De Boeck Supérieur.

[6] DEBREIL, A. EIDEN, J.D., MNEIMNÉ, R. et NGUYEN, T.H. (2017). *Formes quadratiques et géométrie*. Éditions Calvage et Mounet.

[7] FAENZI, D. (2011/2012). *Algèbre bilinéaire : Notes du cours*. Université de Pau .

[8] DZEDJOM MOUADJE, Patrick Genner. *Etude analytique et géométrique des quadriques affines*. Mémoire de DI.P.E.S II de mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I, 2016. Sous la direction de Dr MBA Alphonse.

[9] GRIFONE, J. (2011). *Algèbre linéaire* (4ème édition). É itions Cépaduès.

[10] HOUIMDI, M. *Cours d'Algèbre 3 : Espaces Euclidiens et Formes Quadratiques*. Université Hassan II, Casablanca.

[11] LAVILLE, G. (1998). *Courbes et surfaces*. Éditions Ellipses.

[12] RAMIS, E., DESCHAMPS, C. et ODOUX, J. *Cours de mathématiques spéciales : 2. Algèbre et applications à la géométrie*. Éditions Masson.

[13] SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE. *Formes quadratiques sur un corps*. Collection SMF.

Résumé

Abstract (English) :

In this memory, we present fundamental notions about bilinear forms and quadratic forms on a real vector space, highlighting their reduction and classification methods, focusing on their essential role in the study of quadrics. We also discuss some basic algebraic concepts such as matrices and change of basis, which are necessary for understanding the matrix representation of these forms. Then, we present a complete classification of quadrics (ellipsoids, hyperboloids, paraboloids) based on the signature of the associated quadratic form, with emphasis on Gauss's method and Sylvester's law of inertia.

Keywords : Quadratic form, bilinear form, quadric, signature, reduction, Gauss method, Sylvester's law.

Résumé (Français) :

Dans ce mémoire, nous présentons des concepts fondamentaux sur les formes bilinéaires et les formes quadratiques sur un espace vectoriel réel, en mettant l'accent sur leurs méthodes de réduction et de classification, en nous concentrant sur leur rôle essentiel dans l'étude des quadriques. Nous abordons également quelques concepts algébriques de base tels que les matrices et le changement de base, qui sont utiles pour la compréhension de la représentation matricielle de ces formes. Ensuite, nous présentons une classification complète des quadriques (ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloïdes) en se basant sur la signature de la forme quadratique associée, avec un accent sur la méthode de Gauss et la loi d'inertie de Sylvester.

Mots-clés : Forme quadratique, forme bilinéaire, quadrique, signature, réduction, méthode de Gauss, loi de Sylvester.

ملخص (العربية):

نقدم في هذه المذكرة مفاهيم أساسية عن الصيغ ثنائية الخطية و الصيغ التربيعية على فضاء شعاعي حقيقي، مبرزين طرق اختزالها وتصنيفها، مركزين على دورها الجوهري في دراسة السطوح التربيعية. كما تطرقنا لبعض المفاهيم الجبرية الأساسية كالمصفوفات وتغيير الأساس المساعدة على فهم التمثيل المصفوفي لهذه الصيغ. ثم بعد ذلك نقدم تصنيفاً كاملاً للسطوح التربيعية (إهليلجيات، قطع زائد، قطع مكافئ) بالاعتماد على إشارة الصيغة التربيعية المرتبطة بها، مع التركيز على طريقة غاوس و قانون القصور الذاتي لسيلفستر.

كلمات مفتاحية: صيغة تربيعية، صيغة ثنائية خطية، سطح تربيعي، إشارة، اختزال، طريقة غاوس، قانون سيلفستر.