REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Fondamentales

PAR
Fairouz BOULANOUAR

SUJET

Positivité des opérateurs intégraux

Soutenu publiquement le : 28 /06 /2011 devant le jury composé de :

Mr. GUESMI ABDELKADER	Professeur à l'université de M'sila	Président.
Mr. MOSTEFA NADIR	Professeur à l'université de M'sila	Rapporteur.
Mr. RAHMOUNE AZEDINE	Professeur à l'université de Bordj Bou Arreridj	Examinateur.

Promotion 2010 - 2011

Résumé

Dans ce travail nous montrons qu'à partir des opérateurs intégraux positifs et le théorème de Mercer l'inclusion de l'espace $L^1[a,b]$ *dans* $L^2([a,b]^2)$.

Pour ce faire, il est impératif de passer par la théorie des opérateurs auto-adjoints et les opérateurs positifs sur les espaces de Hilbert, puis les opérateurs intégraux positifs sur l'espace $L^2[a,b]$, *et enfin le théorème de Mercer.*

Mots clés: *Espaces de Hilbert, opérateurs auto-adjoints, opérateurs positifs, opérateurs intégraux positifs.*

Abstract

In this work we show from the positive integral operators and the theorem of Mercer, the inclusion of the $L^1[a,b]$ *space into the* $L^2([a,b]^2)$ *space.*

Then it is imperative to pass by the theory of self-adjoint operators and positive operators on Hilbert space, then the positive integral operators on $L^2[a,b]$, *and finally the theorem of Mercer.*

Keys words: *Hilbert spaces, selfs-adjoint operators, positive operators, positive integral operators.*

الملخص

بالاعتماد على المؤثرات التكاملية الموجبة ونظرية ميرسر بينا أنه يمكن أن يكون الفضاء $L^1[a,b]$ محتوى في الفضاء $L^2([a,b]^2)$.

للوصول لهذا الاحتواء يجب علينا التطرق إلى المؤثرات المرافقة والمؤثرات الموجبة على فضاء هلبرتي ومن ثم إلى المؤثرات التكاملية الموجبة على الفضاء $L^2[a,b]$ لنصل إلى نظرية ميرسر.

الكلمات المفتاحية: فضاء هلبرت، المؤثرات المرافقة، المؤثرات الموجبة، المؤثرات التكاملية الموجبة.

Table des matières

0.1 Introduction

Les opérateurs intégraux positifs ont été un objet mathématique très étudie au cours de ces dernières années, une des applications particulières de ces opérateurs est celle qui découle du problème aux limites de Sturm-Liouville.

Un opérateur T est positif s'il satisfait la condition $\langle T\varphi, \varphi\rangle \geq 0$, pour tout φ, le théorème de Mercer montre que si la fonction $k(x,y)$ est un noyau continu d'un opérateur intégral positif, alors il peut être développé sous forme d'une série uniformément convergente.

Nous savons déjà que l'espace $L^2[a,b]$ (avec $[a,b]$ un intervalle borné dans $\mathbb{R}$) est toujours inclus dans l'espace $L^1[a,b]$, dans ce travail nous allons démontrer que si $k(x,x)$ est une fonction $L^1[a,b]$ −intégrable alors la fonction $k(x,y)$ est *$L^2\left([a,b]^2\right)$ −intégrable.*

Le mémoir est partagé en deux parties :

La première partie étudie quelques rappels sur les espaces de Hilbert, les opérateurs continus, puis la notion de l'adjoint d'un opérateur continu. De plus on traite les opérateurs auto-adjoints avec quelques propriétés élémentaires. Aussi on donne des rappels généraux sur les opérateurs compacts. Enfin on traite le théorème de la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.

Dans la deuxième partie, on étudie les opérateurs positifs, en donnant des définitions et des propriétés élémentaires, et après on traite les opérateurs intégraux positifs, et on termine par le théorème de Mercer avec des résultats.

Bibliographie

[1] H. Chebli . : *Analyse Hilbertienne,* Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2001.

[2] J. Etienne, P. Tossings . : *Analyse Fonctionnelle Appliquée, Première partie-Espace de Hilbert,* Université de LIEGE, 1998.

[3] Jean-Philippe Nicolas . : *Analyse Complexe et Analyse Spectrale*, Institut de Mathématiques de Bordeaux.

[4] M. Kern . : *Problèmes Inverses,* École Supérieure D'ingénieurs Léonard De Vinci, (2002-2003).

[5] E. Kreyszig . : *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley and Sons. Inc. , University of Windsor, 1978.

[6] M. Nadir . : *Cours d'Analyse Fonctionnelle*, Université de M'sila, Algérie, 2004.

[7] D. Porter, D. S. G. Stirling . : *Integral Equations A practical treatement, from spectral theory to applications*, Cambridge University Press, 1990.

[8] A. Rahmoune . : *Résolution Numérique Des Equations Intégrales,* Thèse De Magister, Département de Mathématiques, Université de M'sila, 2004.

[9] B. P. Rynne and M. A. Youngson . : *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag London Limited, 2000.

[10] F. G. Tricomi . : *Integral Equations*, Interscience Publishers, INC. , New York, 1957.