REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique et Numérique

Par:

FAID RADJA

Intitulé:

Sur certains opérateurs linéaires et non linéaires bornés et continus de $L^p(IR^n)$ dans $L^q(IR^n)$

Devant le jury:

Mr. Daoudi Drihem	Prof. Université de M'sila	Président
Mr. Madani Moussi	Prof. Université de M'sila	Rapporteur
Mr. Aissa Lakhal	MAA. Université de M'sila	Examinateur

Année Universitaire : 2021 /2022

Remerciements

Tout d'abord, je dois remercier Dieu qui m'a donné la santé et la volonté durant toutes ces longues années de formation.
Je tiens à remercier sincèrement **Prof. M. Moussai**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire et pour ses conseils.
Mes remerciement vont également aux membres du jury, **Prof. D. Drihem** et **Prof. A. Lakhal**, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.
Enfin, je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail, en particulier **Mme. Bochra Gheribi.**

Table des matières

Notation

- $p \in [1, +\infty]$ l'exposant conjugué p' : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.
- $x^\alpha = (x_1^\alpha x_2^\alpha ... x_n^\alpha)$.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
- $\tilde{f}(x) = f(-x), x \in \mathbb{R}^n$.
- $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$.
- $\mathscr{F}(f(x)) = \widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx$.
- $\mathscr{F}^{-1}(f(x)) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} f(\xi) d\xi$.
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$: L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$.
- $\tau_h f(x) = f(x - h), x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$.
- $S'(\mathbb{R}^n)$: L'espace des distributions tempérées.
- $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$: L'espace des distribution.

Introduction

Dans ce mémoire nous allons étudier quelques opérateurs linéaires et non linéaires de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$. Notre étude est inspiré de certains travaux précédent qui se trouvent principalement dans [1], [3], [4], [5] et [7]. Nous ne prétendons pas que le présent travail est original. Nous avons deux axes à envisager. Le premier est la continuité de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, quand-au deuxième, il s'agit d'un opérateur non linéaire sur les espaces de Sobolev homogène d'après [5].

Notre travail est organisé en quatre chapitres, que nous allons les retracer :

Dans le premier chapitre, on donne quelques propriétés classiques de l'espace de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les opérateurs de convolution comme des opérateurs linéaires, où pour une fonction donnée m on a

$$T_m(f) = (\mathscr{F}^{-1}m) * f$$

et voir lorsque T_m est de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Dans le troisième chapitre, on étudie, dans certain cas, un opérateur de composition du type

$$u \to f(x, u(x))$$

où toujours la continuité de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ est le but de notre étude.

Dans le dernier chapitre, on étudie la continuité de l'opérateur de composition $T_f(g) = f \circ g$ sur les espaces de Sobolev homogènes des fonctions g à valeurs réelles, d'après le travail de [5] où le résultat dans cette référence est donnée d'une manière générale pour des fonctions g à valeurs vectorielles, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$; nous nous limiterons à $k = 1$.

Chapitre 1

Les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$

1.1 Généralités et définitions

1.1.1 L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$

Définition 1. *Soit ($0 < p < +\infty$), on définit l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ par les fonctions f telle que*

$$\|f\|_{L^P} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Pour $p = +\infty$ on définit $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup ess_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < +\infty.$$

Proposition 1. *L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel et de Banach.*

Preuve. Voir [7]. □

Théorème 1. *(L'inégalité de Hölder) Pour tous $p \in [1; +\infty]$ et toutes les fonctions mesurables $f, g \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^P} \|g\|_{L^{P'}}.$$

Démonstration. On a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1)$\|f\|_{L^P} = 0$ ou $\|g\|_{L^{P'}} = 0$ alors $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ alors $f(x) \times g(x) = 0$.

2)$\|f\|_{L^p} \neq 0$ et $\|g\|_{L^{P'}} \neq 0$, on a

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b.$$

On pose $t = \dfrac{1}{p}, a = \left(\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}\right)^p, b = \left(\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}}\right)^{p'}$, alors

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \times \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{P'}}} \leqslant \frac{1}{p} \times \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} + \frac{1}{p'} \times \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{P'}}}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} &\leqslant \frac{1}{p} \times \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx}{\|f\|_{L^p}} + \frac{1}{p'} \times \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx}{\|g\|_{L^{P'}}} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

C'est-à-dire

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

$\square$

1.1.2 La fonction de distribution

Définition 2. *Pour une fonction f mesurable, on définit d_f la fonction distribution par :*

$$d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}|.$$

Exemple 1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Omega =: \{x : |f(x)| > \alpha\}.$

On a

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) = \int_\Omega dx &= \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \alpha dx \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \\ &= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} |f(x)|dx \\ &= \frac{2}{\alpha}\times\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

Voici quelque propriétés de d_f simple à vérifier :

Proposition 2. *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, alors pour tous $\alpha, \beta > 0$. On a*

1) $|g| \leqslant |f| \Rightarrow d_g(\alpha) \leqslant d_f(\alpha)$.

2) $d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\dfrac{\alpha}{|c|}\right), \forall c \in \mathbb{R}^*$.

3) $d_{f+g}(\alpha+\beta) \leqslant d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

4) $d_{fg}(\alpha+\beta) \leqslant d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

Preuve. 1) $|g| \leqslant |f|$ alors $|g(x)| > \alpha \Rightarrow |f(x)| > \alpha$.

Donc $\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$.

Alors $|\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}|$.

2)

$$\begin{aligned} d_{cf}(\alpha) &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |cf(x)| > \alpha\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\}| \\ &= d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right). \end{aligned}$$

3) $d_{f+g}(\alpha+\beta) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |(f+g)(x)| > \alpha+\beta\}|$.

Donc $\{x \in \mathbb{R}^n : |(f+g)(x)| > \alpha+\beta\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \beta\}$.

Alors $|\{x \in \mathbb{R}^n : |(f+g)(x)| > \alpha+\beta\}| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \beta\}|$.

4) $d_{fg}(\alpha\beta) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |(fg)(x)| > \alpha\beta\}|$.

Donc $\{x \in \mathbb{R}^n : |(fg)(x)| > \alpha\beta\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \beta\}$.

Alors $|\{x \in \mathbb{R}^n : |(fg)(x)| > \alpha\beta\}| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \beta\}|$.

$\square$

Proposition 3. *Soient $1 < p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\|f\|^p_{L^P} = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha.$$

Démonstration. Pour un ensemble Ω on pose χ_Ω la fonction caractéristique sur Ω, c-à-d $\chi_\Omega(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $\chi_\Omega = 0$ si $x \notin \Omega$.

$$\begin{aligned} p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha &= p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} dx d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} dx d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \\ &= \|f\|^p_{L^p}. \end{aligned}$$

$\square$

Pour les $L^p(\mathbb{R}^n)$ on dispose des espaces plus faible que nous allons les définir :

Définition 3. *Pour $(1 < p < +\infty)$, l'espace des fonctions $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ est un ensemble de toutes fonctions mesurables telle que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_f(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Proposition 4. *1) Soient $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $c \in \mathbb{R}$, on a*

$$\|cf\|_{L^{p,\infty}} = |c|\|f\|_{L^{p,\infty}}.$$

2) Soient $f, g \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \max\left(2, 2^{\frac{1}{p}}\right)\left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}\right).$$

3) $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

Preuve. 1)

$$\begin{aligned}
\|cf\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_{cf}(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_f\left(\frac{\gamma}{|c|}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\gamma>0} \left(|c|^p \left(\frac{\gamma}{|c|}\right)^p d_f\left(\frac{\gamma}{|c|}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |c|\|f\|_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_{f+g}(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(2\left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \max\left(2, 2^{\frac{1}{p}}\right)\left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}\right).
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 &\Rightarrow \sup_{\gamma>0} \left(\gamma^p d_f(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} = 0. \\
&\Rightarrow d_f(\gamma) = 0 \\
&\Rightarrow f(x) = 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 1. *On vérifie facilement que l'espace* $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est un normé et complet selon la norme* $\|.\|_{L^{p,\infty}}$.

Proposition 5. *Pour* $(1 \leq p < \infty)$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

Par conséquence $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned} \alpha^p d_f(\alpha) &= \alpha^p |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \\ &\leqslant \int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} |f(x)|^p dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty. \end{aligned}$$

□

1.1.3 Rappel sur l'interpolation

Nous avons l'interpolation de Riesz-Thorni :

Proposition 6. *Soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1; +\infty]$ avec $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. Si T est une application linéaire telle que*

$$T : L_{p_0} \to L_{q_0}$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}}$$

$$T : L_{p_1} \to L_{q_1}$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Alors

$$T : L_p \to L_q$$

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

Où
$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$ *et* $0 < \theta < 1$.

Preuve. Voir [4] □

Dans $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ nous avons la propriété suivante :

Proposition 7. *Soit $(p < q \leqslant +\infty)$. Soit $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ pour tous $(p < r < q)$ et*

$$\|f\|_{L^r} \leqslant C \|f\|^{\theta}_{L^{q,\infty}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}}.$$

Où

$$\theta =: \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^{-1}.$$

Preuve. Le cas $q<+\infty$.

On définit

$$d_f(\alpha)\leqslant \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right).$$

On prend

$$B=\left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}\right).$$

On estime maintenant L^r en norme de f :

$$\begin{aligned}
\|f\|^r_{L^r} &= r\int_0^{+\infty}\alpha^{r-1}d_f(\alpha)d\alpha\\
&\leqslant r\int_0^{+\infty}\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p},\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)d\alpha\\
&= r\int_0^{B}\alpha^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}d\alpha + r\int_B^{+\infty}\alpha^{r-1+q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}d\alpha\\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^P_{L^{p,\infty}}B^{r-p}+\frac{r}{q-r}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}B^{r-q}\\
&= \frac{r}{r-p}\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{p-r+1}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}+\frac{r}{q-r}\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{r-q+1}{q-p}}\\
&= \frac{r}{r-p}\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{qr}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}+\frac{r}{q-r}\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}.
\end{aligned}$$

Nous allons prendre $q=p+1$, alors

$$\|f\|^r_{L^r}=\left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{p-r}{q-p}}.$$

Ce qu'on cherche.

Le cas $q=\infty$

$$\begin{aligned}
\|f\|^r_{L^r} &= \lim_{q\to+\infty}\left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)\left(\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right)^{\frac{p-r}{q-p}}\\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\|f\|^{r-p}_{L^{q,\infty}}.
\end{aligned}$$

□

Définition 4. *Pour* $(0<p<+\infty)$ *l'espace* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *est un ensemble de toutes les fonctions* f *de Lebesgue vérifiant :*

$$\int_K |f(x)|dx<+\infty$$

Sur tout compact K *de* $\mathbb{R}^n$

Remarque 2. *Soit* $1 \leq p < q \leq +\infty$, *alors on a*

$$L^q(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder à chaque inclusion .

Remarque 3. *Il existe d'autres interpolations :*

- Interpolation linéaire de Marcinkiewicz pour l'espace $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

- Interpolation complexe .

- Interpolation non linéaire .

Voir exemple les livres [3] et [11] .

1.2 Convolution et approximatives

1.2.1 Convolution

Définition 5. *Soient* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *on définit la convolution* $(f * g)$ *par :*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Remarque 4. *On utilise*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x)|dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dxdy \\
&= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Proposition 8. *Pour* $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *on a les propriétés suivantes :*

1) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(associativité).*

2) $f * (g + h) = f * g + f * h$ *et* $(f + g) * h = f * h + g * h$ *(distributivité).*

Preuve. Ces propriétés sont simples à vérifier. □

1.2.2 Convolution et l'inégalité de base

Sans démonstration nous allons rappeler quelques inégalités de base pour la convolution.

Théorème 2. *(L'inégalité de Minkowski) Soit* $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. *Pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\|g * f\|_{L^P} \leqslant |f\|_{L^P}\|g\|_{L^1}.$$

Preuve. Voir [7] □

Remarque 5. *Pour tout* f *et* g, *on a*
$\|g\|_{L^1} = \|\tilde{g}\|_{L^1}$ *si* $\tilde{g} = g(-x)$.
$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^P}$ *si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
L'inégalité de Minkowski n'est qu'un cas particulier de l'inégalité de Young, suivante :

Théorème 3. *(L'inégalité de Young) Soient* $(1 < p, q, r < +\infty)$ *tel que* $\left(\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$, *alors pour tous* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\|f * g\|_{L^q} \leqslant \|g\|_{L^r}\|f\|_{L^p}.$$

Preuve. Voir [4] □

Nous avons l'inégalité de Young pour $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$:

Théorème 4. *Soient* $(1 \leqslant p < +\infty)$ *et* $(1 < q), (r < +\infty)$ *tel que* $\left(\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$, *alors il existe un constante* $(C_{p,q,r} > 0)$ *telle que pour tous* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\|f * g\|_{L^{q,\infty}} \leqslant C_{p,q,r}\|g\|_{L^{r,\infty}}\|f\|_{L^P}.$$

Preuve. Voir [7]

□

1.2.3 Approximations

Définition 6. *Une famille de fonctions* (k_ϵ) *est appelée identité d'approximation si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1) il existe un constante $(C > 0)$ tel que $\|k_\epsilon\|_{L^1} < C, \quad \forall \epsilon > 0$.

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(x)dx = 1, \forall \epsilon > 0$.

3) Pour tout ensemble V de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_V k_\epsilon(x)dx \to 0 \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0.$$

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}$ soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, on pose $k_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\epsilon} f\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$ avec $\epsilon > 0$, on a alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_\epsilon(x)dx = 1,$$

de plus pour tout $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\delta} k_\epsilon(x)dx &= \int_{|y|>\frac{\delta}{\epsilon}} f(y)dy \\
&= 2\int_{\frac{\delta}{\epsilon}}^{+\infty} f(y)dy \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\arctan(\infty) - \arctan\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)\right) \to 0 \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Théorème 5. *Soit k_ϵ est une identité approximation dans $\mathbb{R}^n$, alors on a*

1) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $(1 \leq p < +\infty)$, alors $k_\epsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $k_\epsilon * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2) Si f est uniformément continue et bornée dans $\mathbb{R}^n$, alors $k_\epsilon * f$ est aussi uniformément continue et bornée dans $\mathbb{R}^n$ et $k_\epsilon * f \to f$ uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand $\epsilon \to 0$.

3) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continue dans un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors $k_\epsilon * f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est uniformément continue dans $\mathbb{R}^n$ et $k_\epsilon * f \to f$ uniformément dans sous- ensemble compact $K \subset \Omega$ quand $\epsilon \to 0$.

Preuve. Voir [7]. □

Théorème 6. *Soit k_ϵ une famille des d'approximations dans $\mathbb{R}^n$ qui est vérifie les propriétés* 1) *et* 3) *du définition* (6). *On pose aussi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(x)dx = a \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour certain $1 \leq p \leq +\infty$. Alors on a

1) Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\|k_\epsilon * f - af\|_{L^p} \to 0$ quand $\epsilon \to 0$.

2) Si $p = +\infty$ *et* f *continue sur un compact* $K \subset \mathbb{R}^n$*, alors*

$$\|k_\epsilon * f - af\|_{L^P(K)} \to 0 \quad quand \quad \epsilon \to 0.$$

Preuve. Voir [7] □

Chapitre 2

Opérateurs de convolution de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$

Dans ce chapitre nous allons étudier les opérateurs $T : L^p \to L^q$ linéaires, en particuliers de convolution, c'est-à-dire :

$$T : f \to (\mathscr{F}^{-1}m) * f.$$

Où m est une fonction donnée tout les assertions de ce chapitre ce trouvent dans [3] ou [7] .

2.1 L'espace $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Définition 7. *Soient* $(1 \leq p, q \leq +\infty)$. *L'espace* $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un ensemble des opérateurs linéaires et bornés de* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *à* $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$*, et qui commutent avec la translation. On introduit une norme* $\|.\|$ *sur* $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *définie par :*

$$\|T\|_{\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}.$$

Théorème 7. *Si* $(1 \leq q < p \leq \infty)$ *alors* $\mathscr{M}^{p,q} = \{0\}$.

Preuve. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_0^\infty$ et T un opérateur linéaire, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_h(T(f)) + T(f)\|_{\mathrm{L}^q} &= \|T(\tau_h f + f)\|_{\mathrm{L}^q} \\ &\leq \|T\|\|\tau_h f + f\|_{\mathrm{L}^p}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lorsque $|h| \to \infty$ on a

$$\|\tau_h f + f\|_{\mathrm{L}^p} \longrightarrow 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \tag{2.2}$$

et

$$\|\tau_h(T(f)) + T(f)\|_{\mathrm{L}^q} \longrightarrow 2^{\frac{1}{q}} \|T(f)\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{2.3}$$

D'après (2.1), (2.2) et (2.3) on a

$$2^{\frac{1}{q}} \|T(f)\|_{\mathrm{L}^q} \leq \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q} 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Ceci est impossible si $q < p$ seulement si $T = 0$. □

Théorème 8. *Soient* $1 < p \leq q < \infty$ *et* $T \in \mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. *Alors* T *est de* $\mathrm{L}^{q'}(\mathbb{R}^n)$ *à* $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *avec la norme*

$$\|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q} = \|T\|_{\mathrm{L}^{q'} \to \mathrm{L}^{p'}}.$$

Autrement-dit :

$$\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. On remarque d'abord que $T : \mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q$ est donné par la convolution avec $\mathscr{F}^{-1}m$, alors $T^* : \mathrm{L}^{q'} \to \mathrm{L}^{p'}$ est donné par la convolution de $\overline{\mathscr{F}^{-1}m}$, en effet, pour $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^{q'}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{T^*(g(x))}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} T(f(x))\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f * \mathscr{F}^{-1}m)(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\overline{g} * \overline{\mathscr{F}^{-1}m})(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f * (\overline{g * \overline{\mathscr{F}^{-1}m}})(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors T^* est bien défini.

Nous avons

$$(\overline{f * \mathscr{F}^{-1}m}) = (\overline{f} * \overline{\mathscr{F}^{-1}m}) = (\tilde{\overline{f}} * \mathscr{F}^{-1}m)^{\sim}$$

alors

$$\|f * \mathscr{F}^{-1}m\| = \|\overline{f} * \overline{\mathscr{F}^{-1}m}\| = \|\tilde{\overline{f}} * \mathscr{F}^{-1}m\| \tag{2.4}$$

et

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{q'}} = \|\bar{\tilde{f}}\|_{\mathrm{L}^{q'}}. \tag{2.5}$$

D'après (2.4) et (2.5) on a

$$\frac{\|f * \mathscr{F}^{-1}m\|}{\|f\|_{\mathrm{L}^{q'}}} = \frac{\|\bar{\tilde{f}} * \mathscr{F}^{-1}m\|}{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{L}^{q'}}}.$$

D'autre part

$$\|f * \overline{\mathscr{F}^{-1}m}\| \leq \|T^*\|_{\mathrm{L}^{q'}\to\mathrm{L}^{p'}}\|f\|_{\mathrm{L}^{q'}}$$

et

$$\|\bar{\tilde{f}} * \mathscr{F}^{-1}m\| \leq \|T\|_{\mathrm{L}^{q'}\to\mathrm{L}^{p'}}\|f\|_{\mathrm{L}^{q'}}$$

alors

$$\|T\|_{\mathrm{L}^{q'}\to\mathrm{L}^{p'}} = \|T^*\|_{\mathrm{L}^{q'}\to\mathrm{L}^{p'}} = \|T\|_{\mathrm{L}^{p}\to\mathrm{L}^{q}}.$$

□

2.2 Caractérisation de $\mathscr{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Caractérisation de $\mathscr{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 9. *Si $T \in \mathscr{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ avec $T(f) = (\mathscr{F}^{-1}m) * f$, alors m est la transformation de Fourier des mesure bornées.*

Preuve. On désigne par B l'ensemble des mesures bornées.

Soit $\mu \in B$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\mu * f(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)d\mu(y)\right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx\right) |d\mu(y)| \\
&= \|f\|_{L^1}\|\mu\|_B.
\end{aligned}$$

Donc si on pose $\mathscr{F}^{-1}m = \mu$, on a

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \|\mu\|_B\|f\|_{L^1}.$$

Inversement. Soit $T \in \mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire qu'on a $T(f) = (\mathscr{F}^{-1}m) * f$ avec

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1}, \forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n);$$

on a $\mu = \mathscr{F}^{-1}m$ où $\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Soit $(\varphi_k)_k$ une suite dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\varphi}_k \to 1$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$, alors : $\forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left\langle \varphi_k, (\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{f} \right\rangle = \left\langle (\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{\varphi}_k, f \right\rangle$$

n'oublions pas que $\tilde{\varphi}_k \to \delta_{-0} = \delta_0$, donc on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \varphi_k, (\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{f} \right\rangle \right| &\leq \|(\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{\varphi}^k\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq C_0 \|f\|_{L^\infty}, \forall k \end{aligned}$$

car c'est l'hypothèse sur T.

Maintenant

$$\begin{aligned} |\langle \mu, f \rangle| &= \lim_{k \to \infty} \left| \left\langle \varphi_k, (\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{f} \right\rangle \right| \\ &= \left| (\mathscr{F}^{-1}m) * \tilde{f}(0) \right| \\ &\leq C_0 \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Donc on a le résultat voulu. □

2.2.2 Caractérisation de $\mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 10. *Si $T \in \mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ avec $T(f) = (\mathscr{F}^{-1}m) * f$, alors $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Si $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, le théorème de Plancherel donne

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| f * (\mathscr{F}^{-1}m)(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) m(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \sup |m(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \|m\|^2_{\mathrm{L}^\infty} \|\hat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|m\|^2_{\mathrm{L}^\infty} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2} \end{aligned}$$

donc

$$\|T\|_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} \leq \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}.$$

Alors, $T \in \mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Inversement, on suppose que $T \in \mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. On montre que m est une fonction bornée.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)m(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T(f)(x)|^2\,dx \\ &\leq \|T\|^2_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\|T\|^2_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} - |m(x)|^2\right) |f(x)|^2 dx \geq 0$$

donc

$$\|T\|^2_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} \geq |m(x)|^2$$

alors

$$\|T\|_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} \geq \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)m(x)|^2 dx \\ &\leq \sup |m(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \\ &= \|m\|^2_{\mathrm{L}^\infty}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\|T(f)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|T\|_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2}\|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Alors

$$\|T\|_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} \leq \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}. \tag{2.7}$$

D'après (2.6) et (2.7) on a

$$\|T\|_{\mathrm{L}^2\longrightarrow \mathrm{L}^2} = \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}.$$

$\square$

Exemple 3. *1. L'opérateur de transformée de Fourier est une application linéaire*

$$\begin{aligned} T : \mathrm{L}^p &\longrightarrow \mathrm{L}^{p'} \\ f &\longmapsto T(f) = \mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathrm{L}^p \longrightarrow \mathrm{L}^{p'}} &= \|T\|_{\mathrm{L}^{(p')'} \longrightarrow \mathrm{L}^{p'}} \\ &= \|T\|_{\mathrm{L}^p \longrightarrow \mathrm{L}^{p'}}. \end{aligned}$$

2. L'opérateur de dérivation est linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} T : \mathrm{L}^p &\longrightarrow \mathrm{L}^q \\ f &\longmapsto T(f) = \frac{df}{dx}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|T\|_{\mathrm{L}^p \longrightarrow \mathrm{L}^q} = \|T\|_{\mathrm{L}^{q'} \longrightarrow \mathrm{L}^{p'}}.$$

Chapitre 3

Autre opérateurs de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$

3.1 Opérateurs linéaires continus

Le paragraphe suivant est inspiré du [10].

Définition 8. *Un opérateur T linéaire de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$ est dit continu au point f dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ si on a la propriété suivante : Pour toute suite $f_n \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ converge vers f, la suite $T(f_n)$ converge vers $T(f)$ c'est-à- dire*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} T(f_n) = T(\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n) = T(f).$$

Remarque 6. *L'opérateur linéaire T est dit continu sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ s'il est continu en chaque point dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 9. *Soit T un opérateur linéaire défini sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$ est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que*

$$\|T(f)\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^p}, \quad \forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 11. *Soit T un opérateur linéaire défini sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$. T est continu partout sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ s'il est continu en tout point f de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soit f_n une suite convergent vers f_1 cette suite peut s'écrire comme suite :

$$\begin{aligned} f_n &= [f + (f_n - f_1)] + (f_1 - f) \\ &= g_n + (f_1 - f). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite convergente vers l'élément f

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n &= \lim_{n\longrightarrow\infty}[f+(f_n-f_1)]\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}(f_n-f_1)+f\\ &= f.\end{aligned}$$

La composition de deux membres par l'opérateur T donne

$$\begin{aligned}T(f_n) &= T(f+(f_n-f_1))+T(f_1-f)\\ &= T(g_n)+T(f_1-f).\end{aligned}$$

L'opérateur T étant continu au point f alors il vient

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} T(f_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} T(g_n)+T(f_1-f)\\ &= T(f)+T(f_1)-T(f)\\ &= T(f_1).\end{aligned}$$

Alors T est continu. □

Théorème 12. *Un opérateur linéaire T est continu si et seulement si, il est borné.*

Peruve. Condition suffisante.

Supposons que l'opérateur T est borné, alors on a

$$\|T(f)\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

ou encore :

$$\|T(f)-T(0)\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\|f-0\|_{\mathrm{L}^p}$$

d'où la continuité de l'opérateur T au point 0. Autrement dit, $\lim T(f)=T(0)$ quand $\lim f=0$. Ce qui entraine la continuité partout.

Condition nécessaire.

Soient f,g deux éléments de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$f\in\overline{B}(0,1)=\{f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}\leq 1\},$$

$$g\in S(0,1)=\{g\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n):\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}=1\}.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|T(g)\|_{\mathrm{L}^q} \leq \sup \|T(g)\|_{\mathrm{L}^q} \leq \|T\|\|g\|_{\mathrm{L}^p} = \|T\|.$$

D'autre part, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$ tel que $f \neq 0$ on a $\frac{f}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}} \in S(0,1)$ cela veut dire que l'on a

$$\left\| T\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}}\right)\right\|_{\mathrm{L}^q} \leq \|T\|$$

ce qui implique la relation

$$\|T\,(f)\|_{\mathrm{L}^q} \leq \|T\|\|f\|_{\mathrm{L}^p}(\mathbb{R}^n).$$

D'où l'opérateur T est borné, car l a constante $\|T\|$ est toujours fini pour les opérateurs T continus.

$\square$

3.2 Opérateurs non linéaires

3.2.1 Les opérateurs de Nemitski

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mesurables. Nous allons voir les opérateurs de Nemitski d'après [1].

Définition 10. *L'opérateur de Nemitski associé à f est une application définie sur $\mathcal{M}(\Omega)$ par :*

$$u(x) \longmapsto f(x, u(x)).$$

On suppose que f satisfait les conditions suivantes notés (C) :

1. $s \longmapsto f(x,s)$ est continue pour presque chaque $x \in \Omega$.
2. $x \longmapsto f(x,s)$ est mesurable pour tous $s \in \mathbb{R}$.

$f(u) \in \mathcal{M}(\Omega)$ pour toute $u \in \Omega$.

Si $u \in \Omega$, il existe une suite des fonctions simples u_n telles que $u_n \longrightarrow u$ p. p dans Ω.

$f(x, u_n)$ est une fonction mesurable et continue donc $f(u_n) \longrightarrow f(u)$ p. p dans Ω. Alors $f(u) \in \mathcal{M}(\Omega)$.

3.2.2 La continuité des opérateurs Nemitski

Soient $p, q > 1$, supposons

$$|f(x,s)| \leq a + b|s|^{\alpha}, \quad \text{pour } a, b > 0, \alpha = \frac{p}{q}. \tag{3.1}$$

Théorème 13. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que f satisfait (C) et (3.1) alors l'opérateur de Nemitski f est une application continue de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$.*

Preuve. Voir[1] □

Théorème 14. *Soient $(\mu(\Omega) < +\infty)$ et la suite u_n converge vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$, alors il existe sous suite u_{n_k} et $h \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ telle que*

$$u_{n_k} \longrightarrow u \ p.\ p \ dans \ \Omega. \tag{3.2}$$

$$|u_{n_k}| \leq h \ p.\ p \ dans \ \Omega. \tag{3.3}$$

Preuve de Théorème 13. Soient $u_n, u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ telles que

$$\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty$$

utilisons le Théorème 14, alors il existe sous suite u_{n_k} et $h \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ sont satisfait (3.2) et (3.3).
f satisfait (C) alors $u_n \longmapsto f(x, u_n)$ est continue presque chaque $x \in \Omega$.
Alors

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u) \quad \text{quand} \quad u_{n_k} \longrightarrow +u.$$

$$|f(u_{n_k})| \leq a + b|u_{n_k}|^\alpha \leq a + b|h|^\alpha \in \mathrm{L}^q(\Omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega (|h(x)|^\alpha)^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_\Omega |h(x)|^{\frac{p}{q} \times q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.\end{aligned}$$

Alors,

$$|h|^\alpha \in \mathrm{L}^q(\Omega) \Rightarrow a + b|h|^\alpha \in \mathrm{L}^q(\Omega).$$

Nous utilisons le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^q}^q = \int_\Omega |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^q dx$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |f(u_{n_k}(x)) - f(u(x))|^q dx = \int_\Omega \left| \lim_{n \to +\infty} f(u_{n_k}(x)) - f(u(x)) \right|^q dx = 0.$$

Alors, chaque suite u_n converge vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Nous avons sous-suite u_{n_k} telle que $f(u_{n_k})$ converge vers $f(u)$ dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$.
On peut conclure que f est continue sur $\mathrm{L}^p(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$. □

3.2.3 Dérivabilité des opérateurs de Nemitski

Soit $p > 2$. On suppose que f a une dérivée partielle $f_s = \dfrac{\partial f}{\partial s}$ satisfait (C) telle que

$$|f_s(x,s)| \leq a + b|s|^{p-2}, \tag{3.4}$$

avec $a, b > 0$.

Par le Théorème 13, on a f_s est un opérateur de Nemitski alors il est continu de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^r(\Omega)$.
Par (3.1) et (3.4) $\Rightarrow \alpha = p-2 \Rightarrow \dfrac{p}{q} = p-2 \Rightarrow q = \dfrac{p}{p-2} = r$.
Par conséquence, pour la fonction $f_s(u)v$ définit par :

$$f_s(u)v = x = f_s(x, u(x))v(x)$$

$f_s(u)v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ for $u, v \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ tel que $p' = \dfrac{p}{p-1}$.
On utilisons l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f_s(u)v\|_{\mathrm{L}^s} \leq \|f_s(u)\|_{\mathrm{L}^r}\|v\|_{\mathrm{L}^p}$$

$\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} \Rightarrow \dfrac{1}{s} = \dfrac{p-2}{p} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p} \Rightarrow s = \dfrac{p}{p-1} = p'$.

Définition 11. *Soit $u \in \Omega$. On dit que F est Fréchet-différentiable si il existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que : si*

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h)$$

avec $R(h) = O(\|h\|)$.

Alors,

$$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad \|h\| \longrightarrow 0.$$

Théorème 15. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $p > 2$ et f satisfait les conditions (C). On suppose aussi que $f(x,0)$ est bornée et que se dérivée f_s satisfait (C) et (3.4).*
Alors $f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ est différentiable avec $df(u) : v \to f_s(u)dv$.

Preuve. Voir [1] □

Définition 12. *Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x \in \Omega$, on dit que F est G-différentiable s'il existe $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $h \in \Omega$, on a*

$$d_G F(u) = \frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} \longrightarrow Ah \quad \textit{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Théorème 16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et soient f et f_s vérifiant (C) et $|f_s(x,s)| \leq C$ alors $f : \mathrm{L}^2 \longrightarrow \mathrm{L}^2$ est G-différentiable et $d_G f(u)v = f_s(u)v$.*

Preuve. f est G-différentiable, alors pour $u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ on a

$$\left\| \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} - f_s(u)v \right\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow 0. \tag{3.5}$$

Par le théorème de la valeur moyenne, on a

$$\frac{f(u+tv) - f(u)}{t} - f_s(u)v = v \int_0^1 (f_s(u + \zeta tv) - f_s(u)) d\zeta$$

on pose

$$\omega_t = \omega_t(u,v) = \int_0^1 (f_s(u + \zeta tv) - f_s(u)) d\zeta.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} - f_s(u)v \right\|_2^2 &= \int_\Omega v^2 \omega_t^2 dx \\ &\leq \int_\Omega v^2 dx \int_0^1 |(f_s(u + \zeta tv) - f_s(u))|^2 d\zeta \end{aligned}$$

$t \longrightarrow 0$ alors $t\zeta v \longrightarrow 0$ dans Ω, donc

$$f_s(u + \zeta tv) - f_s(u) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Et

$$|f_s(x, u(x) + t\zeta v(x)) - f_s(x, u(x))|^2 \leq C$$

nous utilisons le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow 0} \int_0^1 |(f_s(u + \zeta tv) - f_s(u))|^2 d\zeta &= \int_0^1 |\lim_{t \longrightarrow 0} (f_s(u + \zeta tv) - f_s(u))|^2 d\zeta \\ &= \int_0^1 0 d\zeta \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soient f et f_s vérifiant (C) et $|f(x,s)| \leq C$. On suppose que f est Fréchet-différentiable sur $u^* \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors, il existe $a(x)$ et $b(x)$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ telle que*

$$f(x,u) = a(x)u + b(x).$$

Preuve. Voir [1] □

3.3 Opérateurs convoluteurs

Nous allons voir les convoluteurs de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ en considérons les applications

$$T_u : f \to u * f \tag{3.6}$$

où $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 13. *On dit que T_u est un convoluteur s'il existe $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle qu'on ait (3.6). On dit que $T_u \in Cv(L^p, L^q)$ si on a*

$$\|T_u(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Remarque 7. *Nous avons étudier dans le chapitre 2 les opérateurs de de convolution de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(I\mathbb{R}^n)$ qui sont sous la forme $T(f) = (\mathscr{F}^{-1}m) * f$, ce sont des convoluteurs avec $u = \mathscr{F}^{-1}m$. Tout les résultats de chapitre 2 sont acceptés ici .*
On s'intéresse aux cas homogène. On suppose que $\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = \lambda^{-\alpha}u(x), \forall\lambda > 0$.

Théorème 17. *Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $T_u \in Cv(L^p, L^q)$. Si u est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{n}{p} - \frac{n}{q} - n$$

.

Preuve. Supposons qu'on a

$$\|T_u(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

On change f par $f\left(\dfrac{\cdot}{\lambda}\right)$, pour tout $\lambda > 0$, on a $\|f\left(\dfrac{\cdot}{\lambda}\right)\|_{L^p} = \lambda^{\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}$.

$$\begin{aligned}
\|T_u(f(\lambda))\|_{L^q} &= \|u * f(\lambda.)\|_{L^q} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u * f(\lambda.)(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \lambda^{n+\alpha+\frac{n}{q}}\|u * f\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

Donc une condition c'est que

$$\frac{n}{p} = n + \alpha + \frac{n}{q}.$$

□

Chapitre 4

Opérateurs de composition sur les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre nous allons étudier l'opérateur de composition par : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, on considère l'application non linéaire

$$T_f : g \longmapsto f \circ g, \tag{4.1}$$

sur les espaces de Sobolev homogènes, notés $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ d'après le travail [5].

4.1 Espaces de Sobolev homogènes

Définition 14. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace de Sobolev homogène, noté $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $g^{(\alpha)} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| = m$. Cet espace est muni par la semi-norme*

$$\|g\|_{\dot{W}_p^m} = \sum_{|\alpha|=m} \|g^{(\alpha)}\|_{L^p}.$$

On remarque que si g est un polynôme de degré $\leq m-1$ (car $m \geq 1$) on a $g^{(\alpha)} \equiv 0$ pour tout $|\alpha| = m$, donc $g \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent $\|\cdot\|_{\dot{W}_p^m}$ est une semi-norme sur $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$.

4.2 Quelques propriétés

Voici maintenant quelques propriétés de $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 10. *Pour tout* $f \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m} = \|f + P\|_{\dot{W}_p^m}, \quad \forall P \in \mathcal{P}_{m-1},$$

où $\mathcal{P}_{m-1}$ *est l'ensemble des polynômes de degré* $\leq m-1$*.*

Preuve. Déjà va juste avant la proposition. □

Remarque 8. *La proposition 10 permet de définir* $\dot{W}_p^m$ *modulo les polynômes* $\mathcal{P}_m$ *(*$d^\circ \leq m-1$*), c'est l'espace*

$$\dot{\mathcal{W}}_p^m(\mathbb{R}^n) := \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n) \backslash \mathcal{P}_m$$

défini par les éléments $[f]$ *tels que*

$$[f] = \{f + P; P \in \mathcal{P}_m\}$$

muni de la norme

$$\|[f]\|_{\dot{\mathcal{W}}_p^m} = \|f_1\|_{\dot{W}_p^m}, \quad \forall f_1 \in [f].$$

Proposition 11. *Pour tout* $f \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ *et tout* $\lambda > 0$*, on a*

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{W}_p^m} = \lambda^{m-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{W}_p^m},$$

de plus $\lambda^{\frac{n}{p}-m}\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{W}_p^m}$ *est une semi-norme équivalente dans* $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$*.*

Preuve. Par dérivation on a $f^{(\alpha)}(\lambda x) = \lambda^m f^{(\alpha)}(\lambda x)$ avec $|\alpha| = m$.
De plus,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f^{(\alpha)}(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{W}_p^m}.$$

D'où

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m} = \lambda^{m-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{W}_p^m}$$

ou encore

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m} = \lambda^{\frac{n}{p}-m} \|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{W}_p^m}.$$

Ce qui donne l'équivalence en semi-norme. □

Proposition 12. *L'espace* $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ *est invariant par translation.*

Preuve. Soient $f \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Alors, il est clair que

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p} = \|f^{(\alpha)}(\cdot - a)\|_{L^p}$$

(un changement de variables simple dans l'intégral de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$), d'où on a

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m} = \|f(\cdot - a)\|_{\dot{W}_p^m}.$$

□

Pour l'assertion suivante, on définit l'espace de Sobolev no homogène $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions f telles que

$$\|f\|_{W_p^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p} < \infty.$$

Proposition 13. *Soient* $(1 < p, q < \infty)$ *et* $1 \leq m < \dfrac{n}{p}$, *tel que* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$. *Alors, on a* $W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{L}^d q(\mathbb{R}^n)$, *avec*

$$\|f\|_{L^q} \leq c\|f\|_{W_p^m}, \tag{4.2}$$

pour toute $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Pour l'injection $W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$ sa démonstration est classique, voir par exemple [6] pour le cas $m = 1$. Le cas général peut être obtenu en utilisant l'inclusion

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^{m-1}(\mathbb{R}^n).$$

Pour l'estimation (4.2), nous avons d'abord

$$\|f\|_{W_p^m} = \|f\|_{\dot{W}_p^m} + \|f\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|<m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p}. \tag{4.3}$$

On change f par $f(\lambda\cdot)$ pour $\lambda > 0$ dans (4.3), on utilise aussi l'inclusion $W_p^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{L^q} \leq C\|f(\lambda\cdot)\|_{W_p^m}$$

on obtient

$$\lambda^{-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q} \leq C\left(\lambda^{m-\frac{n}{p}}\|f\|_{\dot{W}_p^m} + \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|<m} \lambda^{|\alpha|-\frac{n}{p}}\|f^{(\alpha)}\|_{L^p}\right).$$

On a ainsi cette inégalité par $\lambda^{m-\frac{n}{p}}$ et on tient compte du fait que

$$\lambda^{-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{p}} = 1; \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-m} = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{|\alpha|-\frac{n}{p}-m} = 0,$$

on obtient le résultat, c'est-à-dire

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{\dot{W}_p^m}, \quad \forall f \in W_p^m$$

avec $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$ et $m < \dfrac{n}{p}$. □

Nous retournons à la propriété fondamentale de $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ que cet espace est complet.

Proposition 14. *L'espace $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ est de Banach avec*

$$\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap S'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [9, p.3 et p.24] . □

4.3 Le cas particulier $p = 2$ et m un réel

On commence par la remarque suivante : Pour $m = s \in \mathbb{R}$ et $p = 2$, nous allons définir l'espace de Sobolev homogène, note $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ par la définition suivante.

Définition 15. *On définit $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions f telles que :*

$$f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Cet espace muni par $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ a été étudier dans [2], nous donnerons cet espace comme un cas particulier d'un espace de Sobolev homogène fractionnaire.

Proposition 15.

1. *$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est de Hilbert si et seulement si $s < \dfrac{n}{2}$.*
2. *$\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, (0 < \theta < 1)$.*

Preuve. Voir [2] . □

Proposition 16. *Soit $s = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), alors on a $\|f\|_{\dot{H}^s} = \|f + c\|_{\dot{H}^s}$, pour tout $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ et $c \in \mathbb{C}$.*

Preuve. La fonction $\xi \longmapsto |\xi|^{2m}$ est de classe C^∞ et $\mathscr{F}(c) = c_1\delta$, ($\delta$ est de Dirac). Donc il suffit d'utiliser l'égalité :

$$\langle |\xi|^{2m}\delta, \varphi\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

□

4.4 Théorème de composition

Comme nous avons signalé au début de ce chapitre le théorème suivant est un cas particulier de la proposition 11 de [5].

Théorème 18. *[5] Soient $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, et $p \in [1; +\infty[$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que l'opérateur de composition T_f (voir (4.1)) envoie $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.*
Alors f est une fonction affine, i.e. $f(t) = at + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. Considérons la fonction $g(x) = x_1$, où $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nous avons $g^{(\alpha)}(x) = 0$ pour tout $|\alpha| = m$, car $m \geq 2$. Donc on a $g^{(\alpha)} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| = m$, c-à-d $g \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$.
On a $T_f(g)(x) = f(g(x)) = f(x_1)$. Par hypothèse on a $T_f(g) \in \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $(T_f(g))^{(\alpha)} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| = m$.
Autrement-dit

$$(T_f(g))^{(\alpha)}(x) = f^{(m)}(x_1)$$

$$\|f^{(m)}\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f^{(m)}(x_1)|^p dx_1 dx'\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $x' = (x_2, \cdots, x_n)$, ceci est possible que si $f^{(m)}(x_1) = 0$, par conséquent $f \in \mathcal{P}_m$, ($d^\circ \leq m - 1$).
Voyions maintenant que $f(t) = t^2$ est impossible.
En effet, si $f(t) = t^2$ et $g(x) = x_1^{m-1}$ on a

$$T_f(g)(x) = (g(x))^2 = x_1^{2(m-1)}$$

avec $g \in \dot{W}_p^m$ mais $x_1^{2(m-1)} \notin \dot{W}_p^m$. Donc $f(t) = at + b$ pas plus. □

Le théorème suivant est dû à [8] ; nous allons donner une estimation dans l'espace de Sobolev homogène associe à cet assertion.

Théorème 19. *[8] Soit* $(1 \leq p < \infty)$. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction uniformément lipshitzienne. Alors* T_f *envoie* $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n)$ *dans lui même et que l'application* $T_f : \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n)$ *est continue. De plus,*

$$\|T_f(g)\|_{\dot{W}_p^1} \leq C\|g\|_{\dot{W}_p^1} \tag{4.4}$$

pour tout $g \in \dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. La démonstration de T_f envoie $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui même est une conséquence immédiate de

- $\partial(f \circ g) = (f' \circ g)\partial g$
- f' est une fonction bornée.

Pour la continuité de T_f sur $\dot{W}_p^1(\mathbb{R}^n)$ on dispose de la preuve dans [8].

Pour l'estimation (4.4), on a

$$\|f \circ g\|_{W_p^1} \leq C\|g\|_{W_p^1}, \quad \forall g \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$$

on change g par $g(\lambda\cdot)$, avec $\lambda > 0$, et on utilise le fait que $\|\cdot\|_{W_p^1} = \|\cdot\|_{L^p} + \|\cdot\|_{\dot{W}_p^1}$, alors on a

$$\lambda^{-\frac{n}{p}}\|f \circ g\|_{L^p} + \lambda^{1-\frac{n}{p}}\|f \circ g\|_{\dot{W}_p^1} \leq C\left\{\lambda^{-\frac{n}{p}}\|g\|_{L^p} + \lambda^{1-\frac{n}{p}}\|g\|_{\dot{W}_p^1}\right\}. \tag{4.5}$$

En divisant (4.5) par $\lambda^{1-\frac{n}{p}}$ et en faisant $\lambda \longrightarrow \infty$, il découle

$$\|f \circ g\|_{\dot{W}_p^1} \leq C\|g\|_{\dot{W}_p^1}.$$

Ce qui est demandé. □

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, G. Prodi, *a Primer of Nonlinear Analysis.* Cambridge. UP. (1993).

[2] H. Bahouri, J. Y. Chemin, R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differntial Equations*, Springer (2011).

[3] G. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Theory. An Introduction* Grun. Math .Wiss. 233. Springer (1976).

[4] G. Bourdaud, *Analyse fonctionnelle dans l'éspace euclidien,* Univ. Paris7. $N°$-23. (1995).

[5] G. Bourdaud, *Superposition in homogeneaus and vector valued Sobolev space,* Trans. AMS. **362** (2010), 6105-6113.

[6] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson (1938).

[7] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer (2000).

[8] M. Marcus, V. J. Mizel, *Every superposition operator mayging one Sobolev space into another is continuous*, J. Funct. Anal. **33** (1979), 217-229.

[9] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces With Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, 2^{nd} revied. Springer (2011).

[10] M. Nadir, *Cours Master de Mathématiques,* Université de M'sila (2021).

[11] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev Spaces of Fractionel Order Nemytskÿ Operators, and Nonlinear Partial Differential Equation*, De Gruyter, Berlin (1996).

Résume :

Nous avons étudié quelques opérateurs linéaires et non linéaires sur $L^p(IR^n)$ dans L^q (IR^n), où on a expliqué quelques résultats intéressants en donnant des démonstrations détaillées. On a aussi formulé un résultat en dimension une pour les espaces de Sobolev homogènes, connu dans l'espace IR^k.

Mots – Clés: opérateurs linéaires et non linéaires, espaces de Sobolev Homogènes.

Summary :

We studied some linear and nonlinear operators from $L^p(IR^n)$ in $L^q(IR^n)$, where explained some interesting results by giving detailed proofs. We also formulated a result in one dimension for homogeneous Sobolev spaces, known in the space IR^k

Keywords: Linear and nonlinear operators, homogeneous Sobolev spaces.

الملخص:

درسنا بعض العمليات الخطية وغير الخطية من $L^p(IR^n)$ نحو $L^q(IR^n)$ ، حيث شرحنا بعض النتائج المثيرة للاهتمام من خلال تقديم أدلة مفصلة ؛ كما قمنا بصياغة نتيجة في البعد الأول لفضاء سوبوليف المتجانس، والمعرفة في الفضاء IR^k.

الكلمات المفتاحية: العمليات الخطية وغير الخطية — فضاء سوبوليف المتجانس.