

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جاهلية محمد بوضياف - المسيلة

كَلِمَةً
الَّتِي كُنْتُ لَوْ حَيًّا

المسيلة في : 19/04/2023

2023 / 2024: 2

تجلیات نشر دروس علی الخط

(خاص بملف الترشح للاستاذية)

بناءً على إسهاد مسؤول خلية التعليم الإلكتروني بجامعة محمد بو ضيف بالمسيلة رقم : 2023/55.

يشهد نائب العميد المكلف بالدراسات والمسائل المرتبطة بالطالبة، بأن الأستاذ بنار محمد لخضر (أستاذ محاضر 'ب') قام بنشر دروس على أرضية التعليم عن بعد Moodle، وفق المعايير التقنية والبيداغوجية المعتمدة للتدريس عبر الخط، وذلك للمقرر الدراسي (المادة):

Hydraulique : تخصص Master : الطور : Cours Ecoulements en charges

اللجنة العلمية

نائب العميد المكلف بالدراسات
والمسائل المرتبطة بالطبية

باب الامتياز الكافي بالدراسات
والتمثيل المبرر بالاطاعة

6/10/19



أصدرت هذه الشهادة بطلب من المعني (٥) لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

مستخرج من محضر اللجنة العلمية للقسم

ليوم الثلاثاء 2023/11/14

- بخصوص ملف دراسة خبرة للمطبوعات الجامعية

اجتمعت اللجنة العلمية لقسم الري يوم الثلاثاء 14 نوفمبر 2023 على الساعة الواحدة والنصف زوالا (13^H30)، بمكتب رئيس اللجنة، من بين النقاط المدرجة في جدول الأعمال، دراسة ملف خبرة للمطبوعة الجامعية المودعة من طرف الأستاذ نبار محمد لخضر (MCB) بعنوان: "Ecoulements en charge (1^{ère} année Master)". عينت اللجنة العلمية لقسم الري لجنة خبراء مكونة من:

- Mr. Koussa Miloud (MCA) de l'université de Mila,
- Mr. Djemiat Djamel Eddine (MCA) de l'université de M'sila,
- Mr Dougha Mostefa (Pr.) de l'université de M'sila

رئيس اللجنة العلمية

جامعة المسيلة
رئيس اللجنة العلمية
قسم الري
كلية التكنولوجيا
دوغة مصطفى

رقم: 938 / 2023

إشهاد بنشر مقرر دراسي على الخط

يشهد السيد مسؤول خلية التعليم عن بعد بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة بأن الأستاذ(ة): **MohamedLakhdar Nebbar** قام
(ت) بنشر دروس للمقرر الدراسي: **Écoulement en charge** لفائدة طلبة السنة: الأولى ماستر ، تخصص : **Hydraulique Urbaine** على أرضية التعليم عن بعد Moodle , وفق المعايير التقنية والبيداغوجية المعتمدة للتدريس عن بعد .

مسؤول الخلية :



المسيلة في: 2023/12/24 09:46 ص



أصدرت هذه الشهادة بطلب من المعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique



Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Hydraulique

1^{er} année MASTER ACADÉMIQUE

Polycopié de la matière:

Écoulement en charge

Cours et exercices



Fait par :

Dr : Nebbar Mohammed Lakhdar

E-mail: mohamedlakhdar.nebbar@univ-msila.dz

Année 2023 - 2024

Avant propos

Les écoulements en charge sont l'objet d'étude de l'hydraulique en charge. Cette branche de l'hydraulique s'intéresse aux écoulements dans les conduites sans surface libre c'est-à-dire lorsqu'elles sont entièrement remplies de fluide. La section d'écoulement du fluide est égale à la section du canal.

Ce polycopié de cours d'écoulement en charge répond au programme doté du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la première année master académique Semestre S1, filière Hydraulique des spécialités Hydraulique Urbaine, Ouvrages hydrauliques et aussi Ressources hydrauliques système L.M.D. Il constitue la principale préoccupation en matière des infrastructures publiques, comme le calcul des réseaux d'alimentation en eau potable, dimensionnement des transferts entre les stockages d'eau et ainsi les systèmes de pompes et leurs protections, en tenant en compte de toutes effets des paramètres hydrauliques et géométriques qui interviennent directement sur le dimensionnement optimale du réseau. Le travail de cet ouvrage est le fruit d'enseignement du module pendant cinq ans au niveau de département d'Hydraulique, faculté de technologie université de Mohamed Bodiaf M'sila. Il comporte alors aussi, des exercices résolus du module. Les exercices proposés dans ce polycopié sont faciles à traiter et d'autres demandent des développements. Ils sont choisis pour leur intérêt pratique et pour leur diversité. La solution très détaillée de certaines exercices devrait permettre à l'étudiant d'acquérir, en peu de temps, la maîtrise nécessaire des concepts utilisés. Ces exercices permettront également de tester l'avancement de leurs connaissances.

Nous avons limité dans ce polycopié à celle des fluides homogènes. Les lois et modèles simplifiés seront utilisés pour des fluides continus dans une description macroscopique. Egalement, nous limiterons notre travail à celle des fluides parfaits et réels. Dans l'étude dynamique nous serons amenés à distinguer les fluides dits « classiques » ou « newtoniens », C'est le cas de la majorité des fluides d'usage courant tels que l'eau.

La rédaction de ce polycopié est le fruit de lecture de nombreux ouvrages classiques et quelques documents électroniques, tous disponibles à la bibliothèque ainsi que sur les sites d'Internet. J'espère que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants.

Matière d'enseignement

Unité d'enseignement : UEF 1.1.2

Matière : Les écoulements en charge

VHS: 45 h (Cours : 1h 30, TD : 1h 30)

Crédits : 4

Coefficient :2

Sommaire

Chapitre I : Propriétés Physiques Des Fluides

I.1. Définition et propriétés d'un fluide	6
I.1.1. Fluide parfait et fluide réel :	6
I.1.1.1. Caractéristiques physiques des fluides :	7
I.1.1.1.1. La compressibilité.....	7
I.1.1.1.2. La masse volumique et densité_.....	8
I.1.1.1.3. Le poids volumique_	9
I.1.1.1.4 Le volume massique	9
I.1.1.1.4 La viscosité	9
I.2. Les Gaz parfaits	10
I.2.1. Définition.....	10
I.2.2. Caractéristiques des Gaz parfaits	10
I.2.3. Équation d'état du gaz parfait	11
1.2.3.1. Paramètres d'état d'un mélange de gaz parfaits.....	12
I.3. Tension de vapeur	12
I.3.1. Définition	12
I.3.2. L'importance de la tension de vapeur en Hydraulique	12
I.4. Tension superficielle	13
I.4.1. Définition	13
I.4.2. Caractérisation énergétique de la tension superficielle	14
I.5. La capillarité	15
I.5.1. Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de <i>JURIN</i>	15
I.6. Types d'écoulements	16
1.7. Débit volumique et débit massique	16
1.7.1. Définitions	16
1.7.2. Débit pour le vecteur de vitesse n'est pas normal à la section	17
1.7.3. La vitesse moyenne	17
Travaux dirigés	18

Chapitre II : Les écoulements dans les conduites en charge

II.1. Ecoulement en charge définition et objectifs	22
II.1.1. Définition	22
II.1.2. Objectif	22
II.2. Etude de l'écoulement en charge	23
II.2.1. Notions générales	23
11.2.1.1. Cinématique des fluides (Rappels mathématiques)	23
II.2.1.1.1. Description du fluide en écoulement	25
II.2.1.1.1.1. Description de Lagrangienne et Eulérienne	25
II.2.1.1.1.2. Évolution d'une particule fluide	29
II.2.1.1.1.3. Modèles d'écoulements et propriétés.....	30
Travaux dirigés	35

Chapitre III : Les écoulements des fluides réels dans les conduites en charge (Les lois de conservation)

III.1. Fluide Réel	35
III.2. Profil des vitesses	35
III.3. Les lois de conservation	36
III.3.1. Loi de conservation de matière (Equation de continuité)	36
III.3.2. Loi de conservation d'énergie (Equation de Bernoulli)	37
III.3.2.1. Charge hydraulique d'un écoulement	38
III.3.2.2. Théorème de Bernoulli généralisée: Ecoulements avec échange d'énergie	39
III.3.2.3. Application du théorème de Bernoulli	39
III.3.2.3.1. Formule de Torricelli (1608 - 1647)	39
III.3.2.3.1.1. Calcul du temps de vidange	41
III.3.2.3.2. Tube de Pitot (Henry Pitot (1692-1771))	41
III.3.2.3.3. Venturi-mètre (Venturi 1746-1822)	42
III.3.2.3.4. Diaphragmes	43
III.3.3. Loi de conservation des quantités de mouvement (Equation d'Euler)	44
III.3.3.1. Définition	44
III.3.3.2. Théorème de l'impulsion	44
Travaux dirigés	45

Chapitre IV : Les écoulements des fluides réels dans les conduites en charge (Les régimes d'écoulement)

IV.1. Introduction	51
IV.2. Les régimes d'écoulement	51
IV.2.1. Expérience d'Osborne Reynolds (1842-1912)	51
IV.2.2. Écoulement à l'entrée des conduites	53
IV.2.3. Ecoulement des liquides visqueux : Ecoulement laminaire dans les conduites cylindriques (Lois de Poiseuille)	54
IV.2.3.1. Expression de débit et de la vitesse moyenne	56
IV.2.4. Écoulement turbulent	57
IV.2.4.1. Notion de la turbulence	57
IV.2.4.2. Profil de vitesse turbulente	57
IV.2.4.3. La structure d'un écoulement turbulent	58
IV.3. Coefficient de Friction (frottement) pour un écoulement Laminaire et Turbulent	59
IV.3.1. Coefficient de Friction pour un écoulement Laminaire	60
IV.3.1.1. La contrainte à la paroi pour un régime d'écoulement laminaire	60
IV.4. Contrainte de Cisaillement pour Écoulement laminaire ou Turbulent	60
IV.5. Estimation des pertes de charge	60
IV.5.1. Pertes de charge hydraulique	61
IV.5.1.1. Perte de charge linéaire	61
IV.5.1.2. Pertes de charge singulières	61
IV.5.2. Notion de la rugosité	61
IV.5.3. Détermination du coefficient de perte de charge linéaire (f)	62
IV.5.4. Perte de charge par frottement pour une conduite de section quelconque	65
IV.6. La notion de couche limite	65
IV.6.1. Le concept de couche limite	65
IV.6.2. Épaisseur de la couche limite	66
Travaux dirigés	67

Chapitre V : Système de distribution des eaux **(Type de réseau de distribution)**

V.1. Introduction.....	70
V.2. Choix du type de réseau.....	70
V.2.1.Réseau ramifié.....	70
V.2.2. Réseau maillé.....	70
V.2.2.1.Détermination des débits aux nœuds pour les réseaux maillés.....	70
V.2.2.2. Détermination des débits pour les réseaux ramifiés.....	71
V.3. Calcul du réseau de distribution.....	73
V.3.1. Calcul des pressions au sol.....	73
V.3.2. Calcul des diamètres.....	73
V.4. Pose des conduites.....	75
V.4.1. La profondeur et la largeur de tranchée.....	75
V.4.2. Lit de pose.....	75
V.4.3. Remblai de la tranchée.....	75
V.5. Équipement du réseau de distribution.....	75
V.5.1. Robinets vannes.....	75
V.5.2. Bouches d'incendie.....	76
V.5.3. Robinets de décharges.....	76
V.5.4. Clapets.....	76
Travaux dirigés	77

Les travaux à exposer

1) Les instruments de mesure des fluides.....	78
1.1 Balance de Mohr-Westphal.....	79
2) Etude des méthodes de mesure de débit	82
2.1 Venturi et diaphragme	84
2.2 Rotamètre.....	85

Chapitre VI : Les écoulements non permanents dans les conduites en charge

Introduction et définition	87
VI.1. Mécanismes de circulation oscillante	87
VI.2. Vidange d'un réservoir	88
VI.2.1.Vidange d'un réservoir vers un autre réservoir.....	88
VI.3. Les écoulements transitoires.....	91
VI.3.1. Protection contre les coups de bélier.....	91
VI.3.1.1. Définition du coup de bélier.....	91
VI.3.1.2. Les causes du coup de bélier	91
VI.3.2. Moyens de protections.....	92
VI.3.3. Divers types de protection.....	92
VI.3.3.1. Protection contre la corrosion interne et externe.....	92
VI.3.3.2. Protection contre la présence d'air.....	92
VI.3.3.3. Protection contre la poussée d'eau.....	92
Travaux dirigés	93
Références bibliographiques.....	94

Chapitre 1**PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES FLUIDES****I.1. Définition et propriétés d'un fluide :**

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Un fluide peut s'écouler librement par suite du peu d'adhérence entre elles des molécules qui le composent. Cette propriété que l'on appelle fluidité est due à une grande mobilité des particules fluides. On distingue les liquides et les gaz.

Les liquides sont : considérés comme incompressibles, occupent un volume déterminé et adoptent la forme du récipient où ils sont versés, produisent une surface libre en contact avec l'air ;

Les gaz sont : très compressibles, n'ont pas de forme et occupent le volume maximum qui lui est offert, et ne produisent aucune surface libre.

- Système d'unités :

Les unités de mesure utilisées dans ces chapitres sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant :

Tableau I.1 : Principales unités dans le système international (SI)

Grandeur physique	Symbole	Dimension	Unité
La longueur	L ou <i>l</i>	L	m : mètre
L'aire de la section	S	L ²	m ²
Le temps	t	T	s: seconde
La masse	m	M	Kg : kilogramme
La température	T	t	°C : degré celcius
La vitesse	<i>v</i> , <i>u</i> ou <i>U</i>	LT ⁻¹	m/s
L'accélération	a	LT ⁻²	m/s ²
La force	F	MLT ⁻²	N
La masse volumique	ρ	MT ⁻³	Kg/m ³
Le poids volumique	γ	ML ⁻² T ⁻²	N/m ³
La pression	P	ML ⁻¹ T ⁻²	N/m ² = Pa
La viscosité cinématique	ν	L ² T ⁻¹	m ² /s
La viscosité dynamique	μ	ML ⁻¹ T ⁻¹	Kg/m.s = Pa.s
Le débit volumique	Q	L ³ T ⁻¹	m ³ /s
La contrainte de cisaillement	τ	ML ⁻¹ T ⁻²	N/m ² = Pa
La puissance	W	ML ² T ⁻³	Watt
L'énergie	E	ML ² T ⁻²	J

I.1.1.Fluide parfait et fluide réel :

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Un fluide parfait est un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature.

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale $\vec{n}$ entre le fluide et le milieu extérieur.

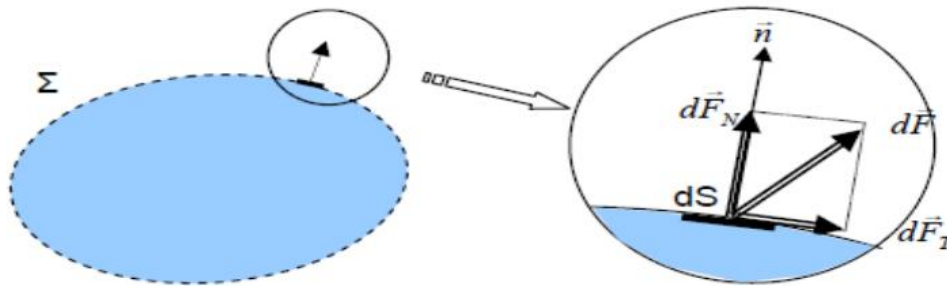


Figure 1.1 : Les forces agissant sur une surface élémentaire d'un fluide

- La composante tangentielle à dS est $d\vec{F}_T$
- La composante normale à dS est $d\vec{F}_n$

Pour un **Fluide réel** les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le **fluide réel** se comporte comme un **fluide parfait**, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

I.1.1.1. Caractéristiques physiques des fluides :

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- 1) La compressibilité ;
- 2) La masse volumique et densité ;
- 3) Le poids volumique ;
- 4) Le volume massique ;
- 5) La viscosité.

1) La compressibilité : C'est la facilité d'un liquide de pouvoir changer de volume sous l'action d'une pression. Elle est définie par le coefficient de compressibilité β_V qui est la variation relative du volume rapporté à l'unité de pression. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

L'augmentation de pression (dP) entraîne une diminution de volume (dV).

$$\beta_V = -\frac{\left(\frac{dV}{V}\right)}{dP} = -\frac{dV}{dPV} \quad (Pa^{-1}), (m^2/N) \quad (I.1)$$

Le signe (-) dans la relation est lié à ce qu'un accroissement de pression (P) correspond à une diminution de volume (V).

β_V : Coefficient de compressibilité (m^2/N)

V : Volume de fluide (m^3)

dV : Variation de volume (m^3)

dP : Variation de pression (N/m^2)

En vertu de la relation $\rho = (M/V)$, on a :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta_V \cdot dP \quad (I.2)$$

Le module d'élasticité est défini comme l'inverse du coefficient de compressibilité :

$$E = \frac{1}{\beta_v} \quad (I.3)$$

En revanche les fluides incompressibles, tel que ; lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

Tableau 1.2 : Ordres de grandeur des compressibilités à 20 °C

Fluide	Coefficient de compressibilité (Pa^{-1})
Eau	$4,1 \cdot 10^{-10}$
Mercure	$4,4 \cdot 10^{-10}$
Air	$\approx 10^{-5}$

Pour un liquide la compressibilité est très faible. A l'inverse, pour un gaz, la compressibilité est grande.

2) La masse volumique et densité :

- a) Masse volumique (ρ , Rou) : La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en kg/m^3 .

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique :

$$\rho = \frac{Masse}{Volume} = \frac{M}{V} \quad (I.4)$$

- Les liquides comme les huiles et les alcools ont une masse volumique inférieure à celle de l'eau, alors que la masse volumique du mercure est supérieure à celle de l'eau.
- La masse volumique des liquides est une fonction inverse avec la température. Donc si la température augmente, la masse volumique de fluide diminue légèrement.

Tableau 1.3 : Masse volumique de l'eau en fonction de la température

Température (°C)	ρ de l'eau (kg/m^3)	Température (°C)	ρ de l'eau (kg/m^3)
0	999.79	50	988.04
4	999.97	60	983.13
10	999.65	70	977.70
20	998.16	80	971.81
30	995.59	90	965.34
40	992.17	100	958.40

Exemple 1 :

ρ eau à 20 °C = 998.16 kg/m^3 , ρ mercure à 20 °C = 13546 kg/m^3 .

Exemple 2 :

Les gaz ont une masse volumique très faible: ρ air = 1.225 kg/m^3 à 15°C au niveau de la mer ($Z = 0$ m). La masse volumique de l'air est variable, en fonction de l'altitude :

$Z = 0$ m ρ air = 1.225 kg/m^3 ;

$Z = 2000$ m ρ air = 1.007 kg/m^3 ;

$Z = 8000$ m ρ air = 0.525 kg/m^3 ;

$Z = 12000$ m ρ air = 0.320 kg/m^3 .

- b) La densité: La densité d'une substance est égale à la masse volumique de la substance par la masse volumique du corps de référence. Pour les liquides, la densité de l'eau est utilisée comme référence (à 4 °C ρ eau ≈ 1000 kg/m^3). Pour les gaz, les mesures s'effectuent par rapport à l'air. La densité est une grandeur physique sans dimension

$$d_{\text{substance}} = \frac{\rho_{\text{substance}} \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right)}{\rho_{\text{eau}} \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right)} = \frac{\rho_{\text{substance}}}{1000} [\text{Sans unité}] \quad (I.5)$$

Exemple 1 :

$$d_{\text{eau}} = \frac{1000}{1000} = 1 \qquad d_{\text{essence}} = \frac{700}{1000} = 0,7$$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;

$$\rho_{\text{liquide}} \gg \rho_{\text{gaz}}$$

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

3) Le poids volumique : (γ , gamma)

Le poids volumique est notion très utile, on le définit par le rapport du poids sur le volume de la masse, ou la masse volumique multiplié par la gravité.

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho Vg}{V} = \rho g \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad (I.6)$$

4) Le volume massique : (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique :

$$\bar{\rho} = \frac{V}{M} = \frac{V}{\rho V} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{Kg}} \right] \quad (I.7)$$

5) La viscosité :

La viscosité d'un fluide est sa propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches liquides les unes par rapport aux autres. C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes des fluides, elle est due à l'interaction entre les molécules des fluides. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement.

Les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement comme l'eau, alors d'autres liquides coulent difficilement comme les huiles de véhicules qui sont très visqueux.

5. 1. Viscosité dynamique : On considère deux couches de fluide adjacentes distantes de z Fig I.2. La force de frottement $\vec{F}$ qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv , à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz .

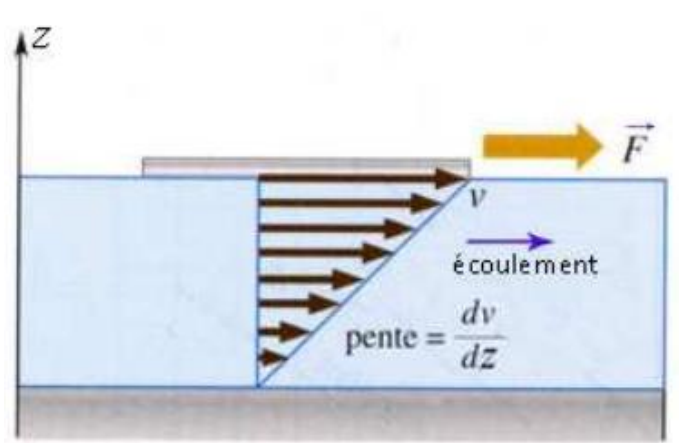


Figure I.2 : Illustration de la force de viscosité

La formule de Newton définit la viscosité dynamique « μ » comme étant le rapport entre la contrainte de cisaillement (Force sur Surface) et le gradient de vitesse (taux de déformation) :

$$\mu = \frac{F/S}{dv/dz} = \frac{\tau}{(dv/dz)} [Pa.s] \quad (I.8)$$

- Dans le système international (SI), l'unité de viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : $1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Pl} = 1 \text{ Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.
- Dans le système (CGS) : l'unité est le Poise (Po) ; $1 \text{ Pl} = 10\text{Po}$.

Remarque :

- Les fluides newtoniens, sont des fluides qu'ont une viscosité constante, comme l'air, l'eau, l'huile. Alors que les fluides non-newtoniens ont une viscosité variable, comme les boues, les produits laitiers,
- Nous pouvons dire, que les fluides parfaits ont une viscosité nulle (c'est un fluide qui n'existe pas dans la nature).
- La viscosité existe dès qu'il y a mouvement relatif entre particules, que ce soit en régime laminaire ou turbulent.
- La viscosité dynamique de l'eau diminue avec l'augmentation de la température.

5. 2. Viscosité cinématique : Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique et de la masse volumique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[m^2/s \right] \quad (I.9)$$

- Dans le système international (SI), l'unité de viscosité cinématique n'a pas de nom particulier : (m^2/s).
- Dans le système CGS, l'unité est le Stokes (St) : $1 m^2/s = 10^4 \text{ St}$.

I.2. Les Gaz parfaits

Introduction :

On ne peut appliquer les équations de la mécanique à une collection de molécules dont le nombre est de l'ordre de 10^{23} . Faute de pouvoir connaître à tout instant, la position et la vitesse de chaque molécule.

1.2.1. Définition :

Un gaz est parfait lorsque ses molécules n'interagissent pas entre elles, en dehors des chocs survenant lorsqu'elles se rencontrent. Par ailleurs, la taille des molécules doit également être considérée comme négligeable par rapport à la distance intermoléculaire moyenne.

1.2.2. Caractéristiques des Gaz parfaits :

Le gaz parfait est un modèle simplifié des gaz. Ce modèle est donné lieu à une répartition homogène dans l'espace, et à une distribution isotrope des vitesses. Ce modèle est basé sur les deux hypothèses suivantes:

1. Les molécules sont considérées comme des points matériels. C'est-à-dire que l'on néglige leur volume propre devant le volume occupé par le gaz ;
2. On néglige toutes les interactions entre les molécules à l'exception des interactions qui ont lieu lors des chocs entre ces molécules.

Les gaz parfaits obéissent aux lois suivantes :

- 1) Loi de **Boyle-Mariotte** : à température constante, le volume d'un gaz est inversement proportionnel à sa pression P ;
- 2) Loi de **Gay-Lussac** : à pression constante, le volume occupé par un gaz est proportionnel à la température absolue ;

- 3) Loi de **Charles** : à volume constant, la pression d'une masse de gaz donnée est proportionnelle à sa température absolue ;

Hypothèse d'**Avogadro Ampère** : il y a toujours le même nombre de molécules dans des volumes égaux de gaz parfaits différents, à condition que ceux-ci soient pris dans les mêmes conditions de température et de pression.

Note : Tous les gaz peuvent être parfaits :

- Selon une approche plus macroscopique, on qualifie de gaz parfait un gaz qui vérifie simultanément la loi de Boyle-Mariotte, la loi d'Avogadro, la loi de Charles, la loi de Gay-Lussac, et enfin la loi de Dalton.

- Tous les gaz réels, quelle que soit leur nature chimique, peuvent être parfaits à des pressions suffisamment basses. Par exemple, le modèle des gaz parfaits s'applique au dioxygène et à l'azote dans des conditions normales, notamment à 0 °C et à pression ambiante.

1.2.3. Équation d'état du gaz parfait :

Pour un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermodynamique, on a :

Les variables d'état, pression P , volume V , température T et quantité de matière n , d'un gaz parfait en équilibre et au repos sont liées par une relation appelée équation d'état des gaz parfaits:

$$PV = nRT \quad (I. 10)$$

P : est la pression d'un gaz (en pascals) ;

V : le volume occupé par le gaz (en m^3) ;

n : la quantité de matière (nombre de moles du gaz) ;

R : la constante universelle des gaz parfaits ($8,3144621 \text{ J/K/mol}$) ;

Et T est la température (en kelvins).

Exemple d'application :

Dans un récipient de 2 litres thermiquement isolé, on a enfermé de l'hélium sous une pression de 5 bar et à température de 25°C. Au bout d'un certain temps, et à cause d'une fuite, la pression tombe à 3 bar et la température à l'intérieur tombe à 14,4°C.

Estimer le nombre de moles de l'hélium (He) qui sont échappées (en assimilant à un gaz parfait).

Solution :

Etat initial : $P_1 = 5 \text{ bar}$, $V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ et $T_1 = 298 \text{ °K}$;

Etat final : $P_2 = 3 \text{ bar}$, $V_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ et $T_2 = 287,4 \text{ °K}$;

Le nombre de moles de l'Hélium(He) qui sont échappés : $n_{\text{échapp}} = n_1 - n_2$

Avec $n_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,3144 \cdot 298} = 0,40 \text{ mol}$;

$$n_2 = \frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,3144 \cdot 287,4} = 0,25 \text{ mol} .$$

Donc

$$n_{\text{échapp}} = n_1 - n_2 = 0,40 - 0,25 = 0,15 \text{ mol}$$

1.2.3. Mélange des gaz parfaits :

On considère un mélange de gaz chimiquement inerte (mélange qui ne donne pas lieu à une réaction chimique).

Loi de Dalton : Soit V , le volume occupé par le mélange. Chaque gaz occupe le volume V comme s'il été seul sous une pression P_i appelée pression partielle.

La pression du mélange est égale à la somme des pressions partielles des gaz composants : $P = \sum P_i$

Exemple : mélange de 02 gaz (1) et (2)

$P_1V = n_1RT$ (n_1 moles gaz (1)) et $P_2V = n_2RT$ (n_2 moles gaz (2)). L'équation d'état de mélange est : $(P_1+P_2).V = (n_1+n_2).RT$ ou $P.V = n.R.T$ tels que

n : nombre de moles du mélange.

P : pression du mélange.

Finalemment on a donc : *Un mélange de gaz parfaits chimiquement inertes est un gaz parfait.*

1.2.3.1. Paramètres d'état d'un mélange de gaz parfaits :

1) La fraction molaire x_i du gaz i dans le mélange est le rapport entre ni nombre de moles de gaz i et n , nombre de moles du mélange : $x_i = n_i/n$ avec, $n = \sum n_i$ et $\sum x_i = 1$

2) La fraction volumique v_i du gaz i dans le mélange est le rapport entre V_i volume qu'occuperait le gaz i sous la pression P et la température T du mélange et V : volume total du mélange : $v_i = V_i/V$

I.3. Tension de vapeur :

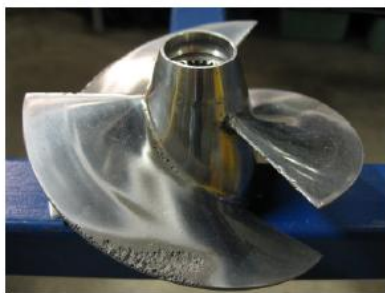
1.3.1. Définition : Si nous avons un système fermé de volume constant, on a :

- La pression de vapeur est la pression de gaz présent (P) au-dessus d'un liquide.

- La pression de vapeur saturante ou d'équilibre (P_{sat}) ou tension de vapeur d'une substance pur, est la pression de vapeur au-dessus du liquide lorsque l'équilibre est atteint. C'est une propriété physique de la substance qui ne dépend que de la température. Sachant que l'équilibre d'évaporation (phase gazeuse) et de condensation (phase liquide ou solide), s'exprime que pour une température T donnée et sur un laps de temps donné ; les vitesses de ces processus vont être identiques, ce qu'on appelle la situation d'équilibre c'est-à-dire la même quantité d'évaporation que de condensation. Dans ce cas la pression prend une valeur fixe pour même T , est appelé la tension de vapeur ou la pression de vapeur saturante. Si en change la température on aura une autre tension de vapeur correspond à autre état d'équilibre.

1.3.2. L'importance de la tension de vapeur en Hydraulique :

Lorsque l'on aspire un liquide dans une installation de pompage d'eau on crée une dépression, si cette baisse de pression fait descendre la pression du liquide au-dessous de sa pression de vapeur saturante, le liquide se met en ébullition. (Production de vapeur).



(a) Sur une hélice



(b) Sur une turbine



(c) Sur du béton

Figure I.3 : *Effet de la cavitation sur différentes installations*

En effet, lors du déplacement de liquides, une chute de la pression peut entraîner l'apparition de bulles de gaz. Outre les problèmes liés au fait que le transport d'un mélange diphasique (liquide + gaz) est plus complexe que celui d'un corps simple, les changements brutaux d'état s'accompagnent de variations rapides de volume qui peuvent entraîner des détériorations importantes des installations (voir figure I.3). Ce phénomène s'appelle la cavitation et l'on cherche à l'éviter notamment pour les installations d'eau potable.

La cavitation est une formation de bulles de vapeur due à une baisse de pression. En se formant ces bulles augmentent le volume de fluide présent dans la zone de basse pression ce qui à effet d'augmenter la pression en certains endroits ou la bulle de gaz se condense violemment en implosant. Les chocs engendrés par l'éclatement des bulles détruisent les parois des organes en contact avec le fluide.

Exemple :

Une pompe qui Cavite s'use rapidement.

1.3.3. Calcul de la pression M : masse molaire de la substance, en kg/mol de vapeur saturante (tension de vapeur) :

Le calcul approximatif de la pression de vapeur saturante peut se faire à l'aide d'une formule issue de l'équation de Clausius-Clapeyron, en prenant comme hypothèses que la vapeur se comporte comme un gaz parfait et que l'enthalpie de vaporisation ne varie pas avec la température dans la plage considérée :

$$\ln \frac{P_{sat}}{P_0} = \frac{ML_v}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (I. 11)$$

Avec :

- T_0 : température d'ébullition de la substance à une pression P_0 donnée, en K ;
- P_{sat} : pression de vapeur saturante, dans la même unité que P_0 ;
- M : masse molaire de la substance, en kg/mol ;
- L_v : chaleur latente de vaporisation de la substance, en J/kg ;
- R : constante des gaz parfaits, égale à 8,31447 J/K/mol ;
- T : température de la vapeur, en K.

Exemple :

Calculer la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de 25 °C. Avec les données suivantes :

$M = 0,018 \text{ kg/mol}$; $L_v = 2,365 \times 10^6 \text{ J/kg}$; $P_0 = 1013 \text{ mbar}$ et $T_0 = 373 \text{ K}$.

Rép=3,2KPa

I.4. Tension superficielle :

1.4.1. Définition :

- La tension superficielle est un phénomène physico-chimique lié aux interactions moléculaires d'un fluide. La surface libre du liquide se comporte comme une membrane élastique tendue.
- La tension superficielle. est le contact entre deux fluides, généralement un liquide et un gaz. Une molécule dans un liquide immobile est soumise aux forces d'attraction de ses proches voisines. Si cette molécule est située au sein du liquide, la résultante de ces forces est nulle. Mais si cette molécule est située en surface du liquide, la résultante est une force dirigée vers l'intérieur du liquide.

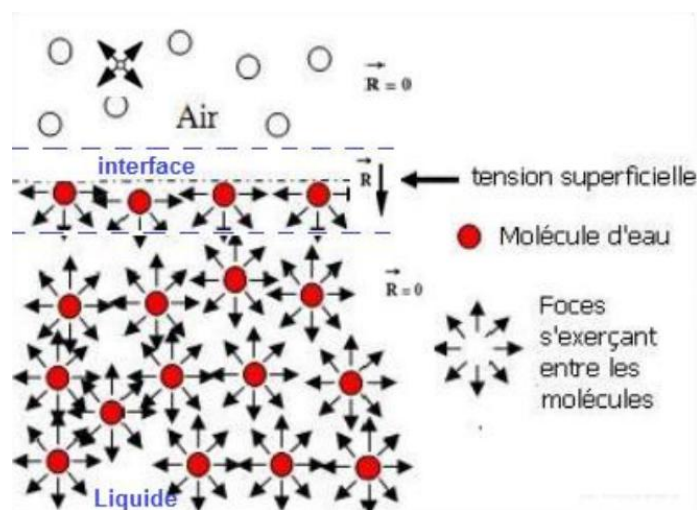


Figure I.4 : Schéma de la tension superficielle

Prenons le cas de l'eau :

Sa forte cohésion, due à l'existence de liaisons hydrogènes, permet d'expliquer le fait que des insectes, ou des objets légers comme des trombones peuvent être posés sur la surface de l'eau sans qu'ils coulent ou que l'on puisse verser de l'eau dans un verre, jusqu'à ce que le niveau de l'eau dépasse les bords du verre, sans pour autant qu'elle ne coule.

1.4.2. Caractérisation énergétique de la tension superficielle :

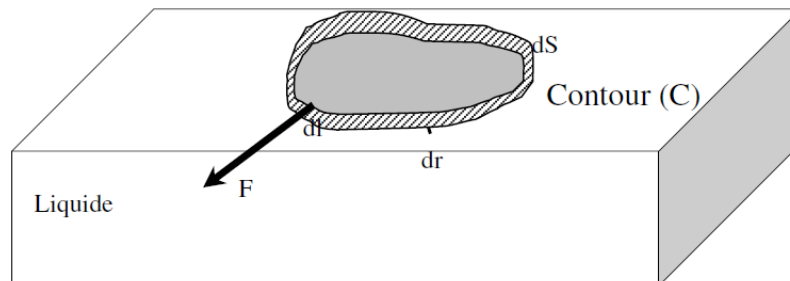


Figure I.5 : Schéma de la tension superficielle

Isolons par la pensée une surface (S) située à l'interface entre un liquide et l'air. Soit un élément de longueur $d\ell$ du contour (C) de la surface. (Fig : I.5). on a :

- 1) Soit une force dF exercée sur l'élément de longueur $d\ell$, dirigée vers l'extérieur de (S) et proportionnelle à sa longueur. Cette force tend la surface, s'écrit comme suit :

$$dF = \sigma d\ell \quad (I.12)$$

σ : est le coefficient de tension superficielle : c'est une force par unité de longueur, exprimé en $N.m^{-1}$.

dF : est la force partielle de cohésion des molécules de l'eau en (N)

$d\ell$: est la longueur partielle dans laquelle est appliquée la force en (m)

A température ordinaire, le coefficient de tension superficielle σ vaut, pour les liquides, quelques dizaines de mNm^{-1} . L'eau liquide possède une tension de surface très élevée. À 25°C, sa tension de surface est égale à $71,99 \times 10^{-3} N/m$. La tension de surface dépend fortement de la température et peut varier considérablement s'il y a des impuretés.

- 2) Soit dE l'énergie partielle fournie pour faire passer des molécules de l'intérieur vers la surface d'une unité dS . Cette énergie augmente l'interface entre un liquide (ou un solide) et sa vapeur (ou encore l'air) traduit par le travail de la force de tension superficielle :

$$\int dE = \int dF dr = \sigma \int dS \quad (I.13)$$

Alors d'après les deux relations (I.12) et (I.13), nous pouvons déduire la relation de la tension superficielle comme suit :

$$\sigma(N/m) = \frac{F(N)}{l(m)} = \frac{E(J)}{S(m^2)} \quad (I.14)$$

La tension superficielle, σ manifeste dans la dissymétrie de cohésion des molécules d'eau.

La tension superficielle, σ dépend de :

- 1) La nature du liquide ;
- 2) La nature du gaz ;
- 3) Varie avec la température.

1.5. La capillarité :

Le phénomène de capillarité est un phénomène d'interaction qui regroupe l'ensemble des phénomènes qui ont lieu à la surface d'un liquide au contact d'une paroi solide. Donc les molécules d'une surface solide attirent les molécules du liquide avec une force plus grande que celle qui existe entre les molécules du liquide (à l'exception du mercure).

Le liquide s'élève au-dessus du niveau de l'eau ou descend en-dessous du niveau en fonction des caractéristiques du liquide (masse volumique), en fonction du diamètre de tube capillaire, et en fonction de la tension superficielle de ce liquide. La surélévation d'eau dans le tube est appelée *montée capillaire*, et l'abaissement de mercure est appelée la *descente capillaire*.

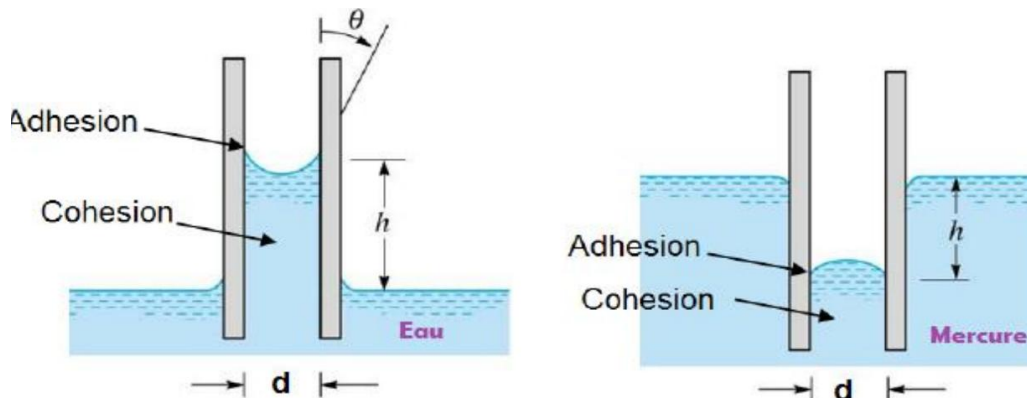


Figure I.6: Phénomène de capillarité

5.1.1. Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de JURIN

Lorsqu'on plonge un tube fin et ouvert dans un liquide, celui-ci "monte" dans le tube d'une certaine hauteur h . Il se forme également un ménisque. Au contact de la paroi, une force due à la tension superficielle s'exerce sur le liquide verticalement vers le haut. Cette force s'oppose au poids de la colonne de liquide au-dessus de la surface libre du liquide. Puisqu'il y a équilibre, on peut écrire la relation suivante :

$$\pi d \cdot \sigma \cdot \cos\theta = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h \cdot \rho \cdot g ;$$

Donc on a :

$$h = \frac{4\sigma \cdot \cos\theta}{d \cdot \rho g} \quad (I.15)$$

Avec

σ : tension superficielle [N/m]

r : rayon du capillaire [m]

ρ : masse volumique [kg/m³]

θ : angle de raccordement [rad]

h : hauteur de l'ascension capillaire [m]

Dans le cas où le liquide mouille parfaitement la paroi du capillaire, l'angle de raccordement est nul (c'est le cas de l'eau dans un capillaire en verre propre). La loi de Jurin est encore plus simple :

$$h = \frac{4\sigma}{d \cdot \rho g} \quad (I.16)$$

Donc l'ascension capillaire est d'autant plus importante que le tube est fin et que la masse volumique du liquide est faible.

1.6. Types d'écoulements :

Écoulement Unidimensionnel, Bidimensionnel et Tridimensionnel :

- ✓ En général l'écoulement d'un fluide est tridimensionnel, si les caractéristiques de l'écoulement et les propriétés du fluide variaient dans les trois directions : Ox , Oy et Oz en fonction de temps.
- ✓ Un écoulement est considéré comme étant bidimensionnel, si les caractéristiques de l'écoulement variaient dans le temps et dans les deux directions : Ox et Oy .
- ✓ Un écoulement est considéré comme étant unidimensionnel, si les caractéristiques de l'écoulement variaient dans le temps et dans seule direction.

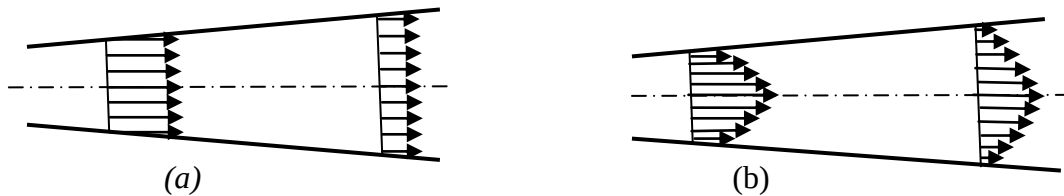


Figure II.7 : Variation de vitesse pour un écoulement (a) unidimensionnel et (b) bidimensionnel

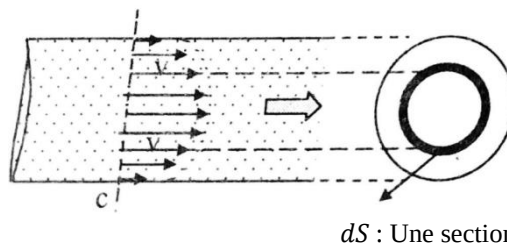
1.7. Débit volumique et débit massique

1.7.1. Définitions : En Hydraulique, il est essentiel de pouvoir connaître la quantité du fluide qui circule à l'intérieur des différents éléments (pompes, tuyauterie, canaux,...). Par conséquent, il est nécessaire de définir la notion de débit.

On considère un fluide avec un vecteur vitesse $\vec{v}$, une surface S et le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à chaque élément dS qui compose S .

Le débit volumique Q (ou flux) est défini par :

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (I.17)$$



dS : Une section différentielle

Figure II.8 : Cas où le vecteur de vitesse n'est normal à la section

Le débit correspond donc au volume de fluide qui a traversé la surface S pendant une unité de temps. On le mesure en $m^3.s^{-1}$. En hydraulique, on rencontre également les unités suivantes : $l.s^{-1}$, $l.h^{-1}$ et $m^3.h^{-1}$. Quand on s'intéresse à des écoulements compressibles, on s'intéresse souvent au débit massique : $Q_m = \rho Q_V$.

Par habitude, le terme « débit : Q » désigne le débit volumique : Q_V .

Exemple d'application :

L'eau de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ à 4°C s'écoule à une vitesse moyenne $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$ dans une conduite de diamètre $D = 0,6 \text{ m}$. Calculer les débits volumique et massique.

Solution :

Le débit volumique : $Q = v_{\text{moy}} \cdot S = v_{\text{moy}} \cdot (\pi D^2 / 4) = 0,283 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

Le débit massique Q_m se calcule par la relation : $Q_m = \rho \cdot Q = 10^3 \cdot 0,283 = 283 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

1.7.2. Débit pour le vecteur de vitesse n'est pas normal à la section :

Dans ce cas, seulement la composante normale à dS de la vitesse à contribuer au débit à travers la section c-c', ce qui nous ramène à considérer seulement la composante normale à la section :

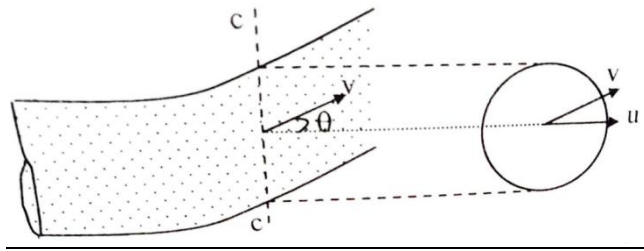


Figure II.9 : Cas ou le vecteur de vitesse n'est pas normal à la section

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_S v \cos \theta \cdot dS \quad (I.18)$$

Or, on sait que par définition $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \vec{v} \wedge \overline{d\mathbf{S}}$, d'où, l'équation (I.18) s'écrit :

$$Q = \int_S \vec{v} \wedge \overline{d\mathbf{S}} \quad (I.19)$$

$$Q_m = \int_S \rho \cdot \vec{v} \wedge \overline{d\mathbf{S}} \quad (I.20)$$

Et si la vitesse est constante à travers la section c-c' « fluide parfait » :

$$Q = \vec{v} \wedge \vec{S} = v \cos \theta \cdot S \text{ et } Q_m = \rho \vec{v} \wedge \vec{S} = \rho v \cos \theta \cdot S$$

1.7.3. La vitesse moyenne :

La vitesse moyenne à travers une section donnée d'écoulement réel est calculée par l'expression suivante :

$$U = v_{\text{moy}} = \frac{\int_S \vec{v} \wedge \overline{d\mathbf{S}}}{S} = \frac{Q}{S} \quad (I.21)$$

Travaux dirigés

Exercice 1 :

Soit un volume d'huile $V = 6 \text{ m}^3$ qui pèse $G = 47 \text{ kN}$. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

. Calculer le poids G et la masse M d'un volume $V = 3$ litres d'huile de boîte de vitesse ayant une densité égale à 0.9

Solution :

1. La masse volumique : $\rho = \frac{M}{V} = \frac{G}{gV} = \frac{47 \cdot 1000}{9.81 \cdot 6} = 798.5 \text{ kg/m}^3$
2. Le poids spécifique : $\gamma = \rho \cdot g = 798.5 \cdot 9.81 = 7833.3 \text{ N/m}^3$
3. La densité : $d_{\text{hui}} = \frac{\rho_{\text{hui}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{798.5}{1000} \approx 0.8$
4. Le poids volumique : $G = \rho_{\text{hui}} g \cdot V = d \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V = 0.9 \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot \frac{3}{1000} = 26.49 \text{ N}$
5. La masse : $M = \frac{G}{g} = \frac{26.49}{9.81} = 2.7 \text{ Kg}$

Exercice 2 :

On comprime un liquide dont les paramètres à l'état initial sont : $P_1 = 50 \text{ bar}$ et $V_1 = 30.5 \text{ dm}^3$ et les paramètres à l'état final sont : $P_2 = 250 \text{ bar}$ et $V_2 = 30 \text{ dm}^3$. Calculer le coefficient de compressibilité β_V de ce liquide.

Solution :

$$\beta_V = - \frac{\left(\frac{dV}{V} \right)}{dP} = - \frac{dV}{dPV} = - \frac{(30 - 30.5)}{30.5(250 - 50)10^5} = 8.2 \text{ Pa}^{-1}$$

Exercice 3 :

Soit un récipient de volume V , de surface S , rempli d'un liquide à hauteur de 10 cm, dont le coefficient de compressibilité volumique β_V est égal à $10^{-8} \text{ m}^2/\text{N}$.

Déterminer la variation de la hauteur du liquide dans le récipient, lorsqu'on fait exercer une pression $dP = 1 \text{ N/m}^2$ sur le piston.

Solution :

$$\beta_V = - \frac{dV}{dPV} = - \frac{dh \cdot S}{dP \cdot h \cdot S} \Rightarrow dh = -\beta_V \cdot dP \cdot h = -10^{-8} \cdot 1 \cdot 0.1 = -10^{-9} \text{ m}$$

$$dh = 10^{-6} \text{ mm}$$

Exercice 4 :

Soit un volume d'un liquide de masse volumique ρ , comprimer à l'aide d'un piston. Le liquide subit une petite variation de volume dV .

Déterminer la variation de la masse volumique $d\rho$.

Solution :

Le coefficient de compressibilité volumique est donné par :

$$\beta_V = - \frac{\left(\frac{dV}{V} \right)}{dP} \dots \dots \dots (1)$$

On suppose que la masse reste constante égale à : $M = \rho V$;

$$(M: \text{masse du liquide}), \text{ on a : } \rho = M/V \Rightarrow d\rho = - \frac{M dV}{V^2} \Leftrightarrow d\rho = -\rho \left(\frac{dV}{V} \right) \dots \dots \dots (2)$$

En remplaçant l'équation (2) dans l'équation (1), on a :

$$d\rho = \rho \cdot \beta_V \cdot dP$$

Exercice 5 :

Un récipient rigide en acier est rempli d'un liquide à 15 atm. Le volume du liquide est de 1,232 litre. A une pression de 30 atm, le volume du liquide est de 1,231 litre.

-Trouver le module d'élasticité du liquide pour la gamme de pressions données dans le cas isotherme ?

- Quel est alors le coefficient de compressibilité ?

Solution :

Le module d'élasticité est donné par l'équation : $E = 1/\beta_V$

Alors :

$$E = -\frac{dP}{(dV/V)} = -\frac{(30 - 15)10^5 1,232}{(1,231 - 1,232)} = 1,848 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

Le coefficient de compressibilité : $\beta_V = \frac{1}{E} = \frac{1}{1,848 \cdot 10^9} = 0,541 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

Exercice 6 :

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stokes.

Solution :

La viscosité dynamique : $\mu = \rho \cdot \nu = d \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot \nu = 0,918 \cdot 1000 \cdot 1,089 \cdot 10^{-4} \approx 0,1 \text{ Pas}$

Exercice 7 :

Du fuel porté à une température $T=20^\circ\text{C}$ a une viscosité dynamique $\mu = 95 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$. Calculer sa viscosité cinématique ν en stockes sachant que sa densité est $d=0,95$.

On donne la masse volumique de l'eau est $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ Kg/m}^3$.

Solution :

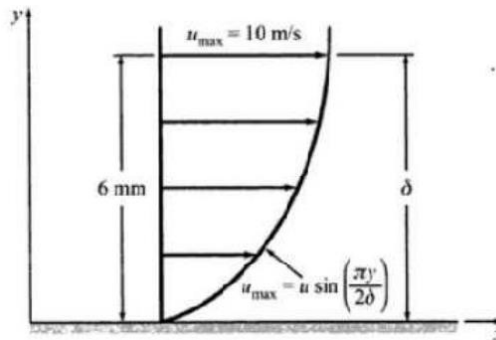
La viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho_{\text{fuel}}} = \frac{\mu}{d \cdot \rho_{\text{eau}}} = \frac{95 \cdot 10^{-3}}{0,95 \cdot 10^3} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

Ou bien : $\nu = 1 \text{ stockes}$

Exercice 8 :

Soit un écoulement d'air à 20°C sur une plaque ayant une distribution de vitesse sinusoïdale :

$$u = u_{\text{max}} \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$



- Calculer le taux de cisaillement sur la paroi, à $y=3 \text{ mm}$ et $y=6 \text{ mm}$ si la viscosité du fluide est égale à $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$.

Solution :

Selon la loi de Newton des fluides visqueux, le taux de cisaillement :

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \left(u_{\text{max}} \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \right) = \mu \cdot \frac{u_{\text{max}} \cdot \pi}{2\delta} \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

- 1) $\tau(y = 0 \text{ m}) = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{10\pi}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \cos(0) = 0,047 \text{ N/m}^2$
- 2) $\tau(y = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{10\pi}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2 \cdot 6}\right) = 0,033 \text{ N/m}^2$
- 3) $\tau(y = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{10\pi}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \cos\left(\frac{6\pi}{2 \cdot 6}\right) = 0,0 \text{ N/m}^2$

Exercice 9 :

Trois récipients contiennent respectivement du dihydrogène H_2 ($V_1=2,25\text{L}$; $P_1=250 \text{ mmHg}$, $T_1=20^\circ\text{C}$), du diazote N_2 ($V_2=1,45 \text{ L}$; $P_2=760 \text{ mmHg}$, $T_2=0^\circ\text{C}$) et de l'hélium He ($V_3=3,5 \text{ L}$; $P_3=350 \text{ mmHg}$, $T_3=20^\circ\text{C}$).

- 1) Calculer la quantité de matière de chaque gaz (mol et masse en g) supposé parfait.
- 2) On introduit les 3 gaz dans un même récipient de volume $V=6 \text{ L}$ à la température 285K , on suppose le mélange idéal. Pour chaque gaz.
- 2.1) le nombre de mole total présent dans le mélange ;

- 2.2) la fraction molaire de chaque gaz dans le mélange ;
- 2.3) la pression partielle de chaque gaz dans le mélange ;
- 2.4) la pression totale du mélange ;
- 2.5) La masse molaire moyenne du mélange.

On donne :

Masse molaire en ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$): $\text{H}_2 = 2$; $\text{N}_2 = 14$; $\text{He} = 4$ et $R=8,314 \text{ (JK}^{-1} \text{ mol}^{-1})$.

Solution :

1. La quantité de matière de l'échantillon (Gaz)

Par l'application de la loi des gaz parfaits : $PV = nRT \Rightarrow n = PV/RT$

$$1) \text{ Dihydrogène } \text{H}_2 : n_{\text{H}_2} = \frac{\frac{250}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 293} = 0,031 \text{ mol}$$

$$2) \text{ Diazote } \text{N}_2 : n_{\text{N}_2} = \frac{\frac{760}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1,45 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 273} = 0,065 \text{ mol}$$

$$3) \text{ Hélium } \text{He} : n_{\text{He}} = \frac{\frac{350}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 293} = 0,072 \text{ mol}$$

La masse de chaque substance :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\text{masse du matière en (g)}}{\text{masse molaire en (g}\cdot\text{mol}^{-1})}$$

$$1) \text{ Dihydrogène } \text{H}_2 : m_{\text{H}_2} = 0,031 \cdot 2 = 0,062 \text{ g}$$

$$2) \text{ Diazote } \text{N}_2 : m_{\text{N}_2} = 0,065 \cdot 14 = 0,784 \text{ g}$$

$$3) \text{ Hélium } \text{He} : m_{\text{He}} = 0,072 \cdot 4 = 0,288 \text{ g}$$

2.1. Le nombre total dans le mélange : $n_t = n_{\text{H}_2} + n_{\text{N}_2} + n_{\text{He}} = 0,031 + 0,065 + 0,072 = 0,168 \text{ mol}$

2.2. Les fractions molaires des constituants dans le mélange :

$$1) \text{ Dihydrogène } \text{H}_2 : x_{\text{H}_2} = 0,031/0,168 = 0,185$$

$$2) \text{ Diazote } \text{N}_2 : x_{\text{N}_2} = 0,065/0,168 = 0,387$$

$$3) \text{ Hélium } \text{He} : x_{\text{He}} = 0,072/0,168 = 0,428$$

$$\sum x_i = 0,185 + 0,387 + 0,428 = 1$$

2.3. Les pressions partielles des constituants dans le mélange :

$$1) \text{ Dihydrogène } \text{H}_2 : P_{\text{H}_2} = 0,031 \cdot \frac{8,314 \cdot 285}{6 \cdot 10^{-3}} = 0,12 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$2) \text{ Diazote } \text{N}_2 : P_{\text{N}_2} = 0,065 \cdot \frac{8,314 \cdot 285}{6 \cdot 10^{-3}} = 0,26 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$3) \text{ Hélium } \text{He} : P_{\text{He}} = 0,072 \cdot \frac{8,314 \cdot 285}{6 \cdot 10^{-3}} = 0,28 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2.4. La pression totale du mélange : Le mélange est idéal, d'après la loi de DALTON

$$P_t = \sum P_i = P_{\text{H}_2} + P_{\text{N}_2} + P_{\text{He}} = (0,12 + 0,26 + 0,28)10^5$$

$$P_t = 0,66 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2.5. La masse molaire moyenne du mélange :

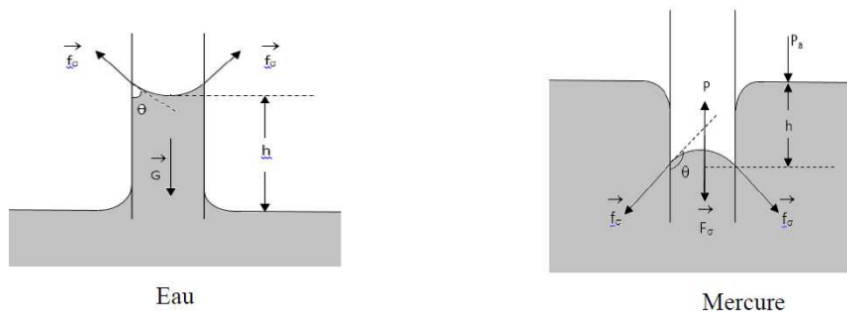
$$M_{\text{moy}} = \sum x_i M_i = x_{\text{H}_2} \cdot M_{\text{H}_2} + x_{\text{N}_2} \cdot M_{\text{N}_2} + x_{\text{He}} \cdot M_{\text{He}} = 0,185 \cdot 2 + 0,387 \cdot 14 + 0,428 \cdot 4$$

$$M_{\text{moy}} = 7,5 \text{ g mol}^{-1}$$

Exercice 10 :

Calculer la hauteur capillaire dans un tube de verre de 2,5 mm de diamètre lorsqu'il est immergé verticalement dans :

- 1) L'eau ;
- 2) Mercure.



On prend : $\sigma_{eau} = 0,0725 \text{ N/m}$ pour l'eau et $\sigma_{Hg} = 0,52 \text{ N/m}$ pour le mercure en contact avec l'air. La densité du mercure est égale à 13,6. L'angle de contact θ de l'eau est égal à zéro et celui du mercure est égal à 130° . La gravité g est prise égale à $9,81 \text{ m/s}^2$

Solution :

La hauteur capillaire dans un tube de verre :

1. L'eau : Loi de Jurin : $h = \frac{4\sigma \cos\theta}{d \cdot \rho \cdot g} = \frac{4 \cdot 0,0725 \cdot \cos(0)}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 11,82 \text{ mm}$
2. Le mercure : Loi de Jurin : $h = \frac{4\sigma \cos\theta}{d \cdot \rho \cdot g} = \frac{4 \cdot 0,52 \cdot \cos(130^\circ)}{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = -4 \text{ mm}$

Exercice 11 :

Un tube capillaire a été étalonné à 20°C avec de l'eau qui s'est élevée de 8,31 cm pour que l'équilibre soit atteint. Avec le même capillaire, un échantillon de mercure s'est abaissé de 3,67 cm.

- ❖ Sachant que $\rho_{Hg} = 13595 \text{ Kg/m}^3$ pour le mercure, évaluer σ pour le mercure ? $\sigma_{eau} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$.
- ❖ Quel est le diamètre du capillaire utilisé ?

Solution :

1. La tension superficielle du mercure :

Par application de la loi de Jurin :

$$h_{eau} = \frac{4\sigma_e}{d \cdot \rho \cdot g} \dots \dots \dots (1)$$

$$h_{Hg} = \frac{4\sigma_{Hg}}{d \cdot \rho_{Hg} \cdot g} \dots \dots \dots (2)$$

En divisant (2) par (1), on obtient :

$$\frac{h_{Hg}}{h_{eau}} = \frac{\sigma_{Hg}}{\sigma_e} \cdot \frac{\rho}{\rho_{Hg}} \Rightarrow \sigma_{Hg} = \left(\frac{h_{Hg}}{h_{eau}} \right) \cdot \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} \right) \cdot \sigma_e = \frac{3,67 \cdot 13595}{8,31 \cdot 1000} \cdot 73 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{Hg} = 438,3 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

2. Le diamètre du capillaire utilisé :

La relation (1)

$$\Rightarrow d = \frac{4\sigma_e}{h_{eau} \cdot \rho \cdot g} = \frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Exercice 12 :

L'eau coule dans un canal rectangulaire de largeur $b = 30 \text{ cm}$, incliné d'un angle 30° par rapport à l'horizontal. Si la vitesse est constante et égale $0,2 \text{ m/s}$ et si la hauteur de l'eau mesurée le long d'une ligne verticale $h = 50 \text{ cm}$.

- Trouver le débit volumique qui passe à travers une section droite d'écoulement.

Solution :

$$Q = \vec{v} \wedge \vec{S} = \vec{v} \cos\theta \cdot S = \vec{v} \cdot (h \cdot b) \cos\theta = 0,2 \cdot (0,5 \cdot 0,3) \cos 30$$

D'où $Q = 0,026 \text{ m}^3/\text{s} = 26 \text{ l/s}$

Chapitre II

LES ECOULEMENTS DANS LES CONDUITES EN CHARGE

II.1. Ecoulement en charge définition et objectifs

1 Définition : Les écoulements en charges sont des écoulements confinés à l'intérieur d'un contenant, en général une conduite (Fg : II.1). La pression à l'intérieur de ces écoulements peut être de beaucoup plus élevée que la pression atmosphérique ($P > 1atm = 1,013bar = 760mmHg$), ou encore s'abaisser à des valeurs aussi faibles que la pression de vapeur saturante. Même si la pression à l'intérieur de ce type d'écoulement peut atteindre la pression atmosphérique, en aucun cas nous considérons la présence de la surface libre dans cette catégorie d'écoulements.

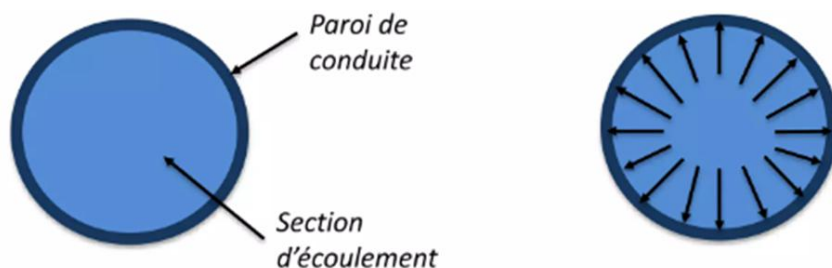


Figure II.1: Schéma d'un contenant de forme circulaire

Les formes des contenants les plus rencontrées sont les circulaires, rectangulaires et triangulaires. La forme circulaire est optimale et plus répandue en raison de la répartition homologue de pression à l'intérieur du tube.

2.Objectif : L'alimentation en eau potable, ainsi que l'irrigation des terres, nécessitent de transporter l'eau de la source ou du stockage vers les lieux de consommation, se font dans la très grande majorité des cas par des conduites sous pression, dans lesquelles les écoulements sont en charge. Cette technique a divers avantages qui sont :

- 1) Livraison de l'eau potable aux consommateurs à l'abri de tout effets extérieurs ;
- 2) Contrôle facile de la vitesse et de la pression d'écoulement ;
- 3) Vaincre la pente par refoulement ;
- 4) Pompage de l'eau souterraine ;
- 5) Avantage d'enterrer les réseaux d'eau.



Figure II.2: Phénomène de capillarité

6) Ouvrage de transfert des grandes quantités d'eau :

Exemple 1 : Entre les barrages réservoirs (Barrage Tabloute de Jijel vers les hauts plateaux Sitéfien, barrage de Draâ Eddis (Tachouda), avec un débit $Q = 7 \text{ m}^3/\text{s}$, comprenant 42 km de conduites en charge de diamètre = 1,5 m , avec une différence de niveau égale 200 m.

Exemple 2 : Le transfert d'eau potable entre In-Salah, au sud d'Alger, et Tamanrasset, sur 700 Km à travers les immensités du Sahara.

En effet il y a des inconvénients à propos de cette technique, traduits par le coût élevé de réalisation et plus de ça l'importance des pertes de charges engendrées.

II.2. Etude de l'écoulement en charge :

L'étude de l'écoulement en charge, est motivée par le grand nombre et la diversité des applications, naturelles ou industrielles, dans lesquelles on les rencontre. Pour une bonne compréhension, nous essayons d'expliquer aux étudiants quelques notions de base ; concernant l'étude des fluides en mouvement. Il s'agit d'une partie importante vise à aborder les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits.

II.2.1. Notions générales :

Dans les écoulements en charge, le milieu fluide étant en mouvement, on introduit la notion de « particule fluide ». Lors de l'écoulement d'un fluide, le mouvement d'une particule peut s'effectuer dans tous les sens (en trois dimensions) comme il peut être rotationnel ou irrotationnel.

11.2.1.1. Cinématique des fluides :

La cinématique des fluides est l'étude du mouvement des particules fluides indépendamment de ce qui provoque ou modifie l'écoulement. C'est-à-dire, on cherche à accéder à une description de l'écoulement en termes de trajectoires, vitesses, accélérations et évolutions spatio-temporelles.

Dans la description du milieu fluide, la particule fluide est assimilée à un point au sens mathématique du terme (c'est-à-dire avec un diamètre nul)

Rappels mathématiques

1) Champs scalaires et vectoriels :

1.1 scalaire : est une quantité qui peut être exprimée par un nombre unique représentant sa grandeur. Exemple : masse, pression, densité et température.

1.2 Champ scalaire : Si à chaque point d'un domaine, une fonction scalaire a une valeur définie, le domaine est appelé un champ scalaire. Exemple : Distribution de pression, distribution de température dans une ailette.

1.3 Vecteur : Le vecteur est une quantité, qui est spécifiée à la fois par la magnitude et la direction. Exemple : Force, Vitesse et Déplacement.

1.4 Champ de vecteur : Si à chaque point d'un domaine, une fonction vectorielle a une valeur définie, le domaine est appelée un champ vectoriel. Exemple : champ de vitesse d'un fluide en écoulement.

2) Champ d'écoulement :

Le domaine dans lequel les paramètres d'écoulement, c'est-à-dire la vitesse, la pression, etc., sont définis à chaque point et à chaque instant est un champ d'écoulement. Ainsi, un champ d'écoulement serait spécifié par les vitesses à différents points de la région à des moments différents.

3) Les opérateurs mathématiques :

3.1 L'opérateur Nabla : On simplifie les écritures en utilisant la notation dyadique qui introduit le vecteur symbolique nabla, noté $\vec{\nabla}$, dont les composantes formelles sont les opérateurs de dérivation partielle par rapport aux variables d'espace x, y, z.

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La notation des différents opérateurs en fonction de Nabla est donnée dans le tableau ci-dessous.

Tableau II.1: La notation des différents opérateurs en fonction de Nabla

Opérateur	Notation
Gradient, $\overrightarrow{\text{grad}}\phi$	$\vec{\nabla}\phi$
Divergent, $\text{div}\vec{\phi}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}$
Rotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\phi}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{\phi}$
Laplacien, $\Delta\phi$	$\vec{\nabla}^2\phi$
Laplacien vectoriel, $\Delta\vec{\phi}$	$\vec{\nabla}^2\vec{\phi}$

3.2 Le gradient : En mathématiques, le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres, généralisant la notion de dérivée d'une fonction dans le cas de plusieurs variables. En physique et en analyse vectorielle, le gradient est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace.

Il est courant, selon la façon de noter des vecteurs, d'écrire le gradient d'une fonction ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}v = \vec{\nabla}v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix}$$

3.3 Le divergent : L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure, pour faire simple, si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace, comme ce que l'on peut observer sur un diagramme de lignes de champ. Il donne donc une information très liée aux sources qui créent le champ. Comme nous le précisons, l'opérateur divergence est l'équivalent local de la mesure d'un flux.

$$\text{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}$$

3.4 Le rotationnel : Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.

La notion de rotationnel de la vitesse est essentielle en mécanique des fluides. Elle décrit une rotation de la particule fluide. Si l'écoulement est irrotationnel (son rotationnel est nul en tout point), en termes mathématiques, le vecteur de vitesse est alors le gradient du potentiel (on dit alors que les vitesses « dérivent d'un potentiel »). Si le fluide peut être considéré comme incompressible, la divergence de ce vecteur s'annule.

Le Laplacien du potentiel est donc nul : il s'agit d'un potentiel harmonique qui satisfait l'équation de Laplace.

Le rotationnel d'un champ vectoriel est donné par :

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3.4 Le Laplacien : ou simplement le Laplacien, est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence. Intuitivement, il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.

Il s'applique le plus souvent aux champs scalaires, et son résultat est alors également un champ scalaire.

$$\Delta P = \vec{\nabla}^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$\Delta P = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(P))$$

Un champ de gradient est à rotationnel partout nul.

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}(P)) = 0$$

II.2.1.1.1. Description du fluide en écoulement :

II.2.1.1.1.1. Description de Lagrangienne et Eulérienne :

Deux approches différentes existent. Le point de vue de *Lagrange*, consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celle d'*Euler* se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps.

1) Description de Lagrange (1736 – 1813)

On suit l'évolution d'écoulement au cours du temps d'une de ces particules fluides : M_i . Soit $\vec{v}_i$ son vecteur vitesse ($\vec{v}_i$ est défini, comme toutes les grandeurs physiques dans le fluide, en valeur moyenne sur l'élément de volume. Il se confond en fait avec la vitesse de son centre d'inertie). Soit $\overrightarrow{OM}_i$ le vecteur position de la particule fluide. On a alors :

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)\vec{k} = \vec{v}_i(t)$$

Cette vitesse ne dépend explicitement que du temps (les coordonnées d'espace sont des fonctions du temps). Plus précisément $\vec{v}_i(t)$ dépend de t et de la position à l'origine des temps de la particule fluide.

Le changement temporel de la vitesse dans une telle mesure est désigné par :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \quad (II.1)$$

Appelé dérivé matériel ou dérivé substantiel. Il reflète le changement temporel de la vitesse (ou de toute autre propriété) de la particule fluide marquée (ciblée), observée par un observateur se déplaçant avec la particule fluide. L'approche *Lagrangienne* est également appelée «approche basée sur la trajectoire d'une particule».

L'approche *Lagrangienne : trajectoire* : La trajectoire d'une particule fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement.

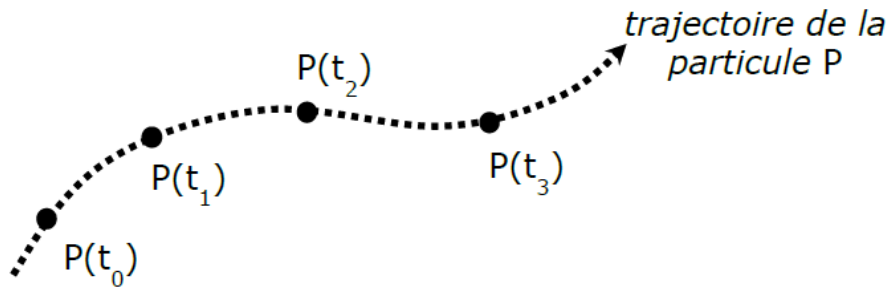


Figure II.3: Trajectoire d'une particule de fluide

Considérons une particule de fluide M_{oi} située en $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}, t_0)$ et essayons de calculer sa trajectoire, c'est-à-dire l'évolution temporelle de sa position à une date t de référence (instant initial). On étudie les vecteurs position.

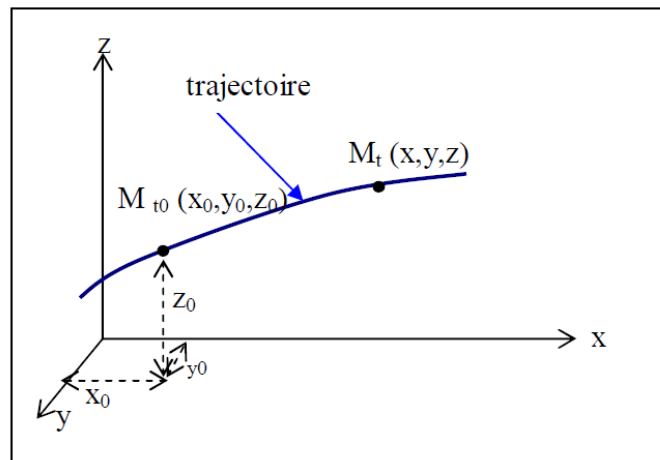


Figure II.4: Représentation Lagrangienne : trajectoire

Connaissant le champ de vitesse $\vec{v}_i = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}, t)$ elle s'obtient par intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{dx_i}{v_{xi}(t)} = \frac{dy_i}{v_{yi}(t)} = \frac{dz_i}{v_{zi}(t)} = dt \quad (II.2)$$

2) Description d'Euler (1703 – 1783)

La description Eulérienne consiste à établir à chaque instant t donné, l'ensemble des vitesses associées à chacun des points M de l'espace fluide. $\vec{V}_M = (x, y, z, t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement est alors décrit par un ensemble de vecteurs appelé « champ de vecteurs vitesse ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée à chaque instant.

Approche Eulérienne : lignes de courants

Les lignes de courants sont les lignes du champ de vecteurs $\vec{v}$: elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\vec{v}(x, y, z, t_0)$ à un instant donné t_0 .

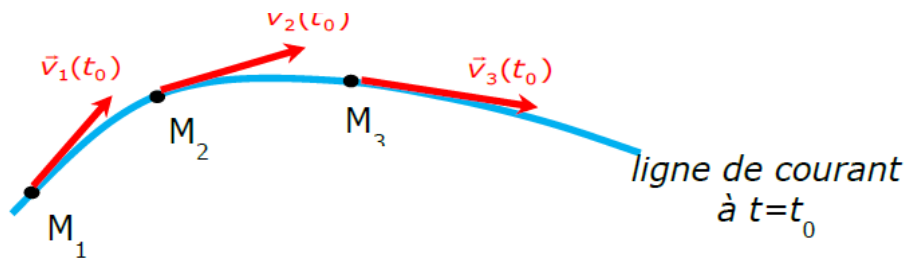


Figure II.5: Représentation Eulérienne : lignes de courant

Mathématiquement, ces lignes sont définies par l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels qu'un déplacement élémentaire $d\vec{M}(dx, dy, dz)$ le long de la ligne soit colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}$; ceci peut s'exprimer par :

$$d\vec{M} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ soit } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (II.3)$$

On obtient l'équation des lignes de courants par intégration, après avoir rendu explicite la dépendance de v_x , v_y et v_z vis-à-vis de x, y, z . Pour définir les trois constantes d'intégration, il suffit d'identifier un point particulier (x_0, y_0, z_0) par lequel passe la ligne de courant.

Exemple :

Un écoulement est caractérisé par le champ de vitesse suivant : $\vec{v} = Ax \cdot t\vec{i} - By \cdot t^2\vec{j}$ avec : $A = 0,2s^{-2}$ et $B = 0,1s^{-3}$. Calculer la vitesse de fluide en (2,8) à l'instant $t=2$ puis trouver l'équation de la ligne de courant passant par (2,8). Etablir l'expression donnant la trajectoire de la parcelle de fluide située en (2,8) à l'instant $t=2$.

Solution

$$\vec{v}(2,8) = 0,2 \cdot 2 \cdot 2\vec{i} - 0,1 \cdot 8 \cdot 2^2\vec{j} = 0,8\vec{i} - 3,2\vec{j}$$

Sa norme est d'environ : $v = \sqrt{0,8^2 + (-3,2)^2} = 3,3 \text{ m.s}^{-1}$

L'équation de la ligne du courant : $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \int \frac{dy}{-By \cdot t^2} = \int \frac{dx}{Ax \cdot t}$, la grandeur t est considérée comme constante, alors on a : $\int \frac{dy}{y} = \left(\frac{-Bt}{A}\right) \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \left(\frac{-Bt}{A}\right) \ln x + c \Leftrightarrow \ln y = \ln x^{\frac{-Bt}{A}} + c$

Or

$$y = Cx^{\frac{-Bt}{A}}$$

La constante d'intégration C est donnée par la condition initiale ; on obtient $C = 16$. A chaque instant t , la ligne de courant passant par le point (2, 8) a pour équation :

$$y(x) = 16x^{\frac{-t}{2}}$$

Considérons une particule de fluide P_{oi} située en $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}, t_0)$, pour calculer la trajectoire d'une parcelle de fluide, dans un intervalle $[t_0, t]$ on utilise l'équation (II.2) : $\frac{dx_i}{v_{x_i}(t)} = \frac{dy_i}{v_{y_i}(t)} = dt$ qui se décline sous la forme de : $dx(t) = Ax \cdot t dt$ et $dy(t) = -By \cdot t^2 dt$

Alors on a :

$$\int_{x_0}^{x_p} \frac{dx}{x} = A \int_{t_0}^t t dt \quad \text{et} \quad \int_{y_0}^{y_p} \frac{dy}{y} = -B \int_{t_0}^t t^2 dt$$

$$\ln \frac{x_p}{x_0} = A \frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) \quad \text{et} \quad \ln \frac{y_p}{y_0} = -B \frac{1}{3} (t^3 - t_0^3)$$

On obtient l'expression de trajectoire recherchée :

$$x_p(t) = x_0 e^{\frac{A}{2}(t^2 - t_0^2)}$$

$$y_p(t) = y_0 e^{\frac{-B}{3}(t^3 - t_0^3)}$$

Compatibilité de deux descriptions :

- ✓ En description *Lagrangienne*, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M du fluide est le vecteur de la particule fluide qui l'entoure.
- ✓ En description *Eulérienne*, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M du fluide à un instant t est le vecteur vitesse de la particule fluide qui se trouve en M à cet instant t .

A chaque instant, les lignes de champ des vitesses dans les deux descriptions coïncident. Une même vitesse peut être analysée de deux façons différentes.

Un tube de courant (Veine fluide) est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé.

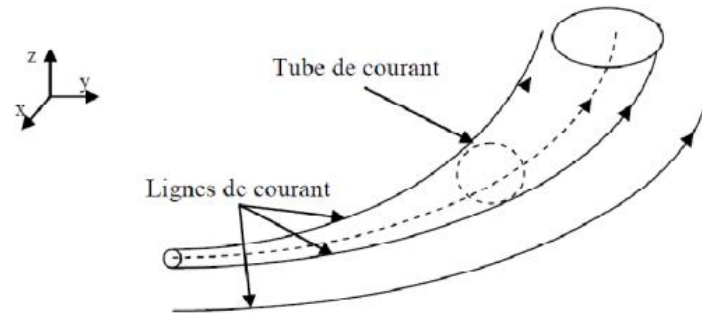


Figure II.6: Représentation : Tube de courant

Remarque :

- 1) Dans un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules et les lignes de courant sont identiques, mais attention, ce n'est pas le cas dans un écoulement instationnaire.
- 2) D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la méthode Eulérienne est mieux adaptée à l'étude de la description de l'écoulement d'un fluide.
- 3) **Fonction de courant :** Considérons un écoulement plan (x,y) bidimensionnel, l'équation (II.3) peut devenir :

$$-v_y dx + v_x dy = 0 \quad (II.4)$$

L'écoulement est permanent et le fluide incompressible. Soit une fonction que l'on désigne par φ et qui en chaque point du plan x, y satisfait :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ Et } v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (II.5)$$

φ : est alors appelée Fonction de courant.

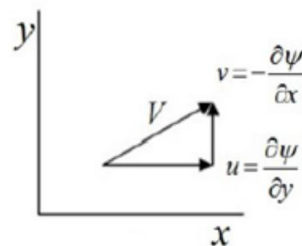


Figure II.7 : Composantes de vitesse le long d'une ligne de courant

Substituant l'équation (II.5) dans l'équation (II.4), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi = 0 \quad (II.6)$$

ce qui permet d'écrire que : $\varphi = Cte$ le long d'une ligne de courant.

- 4) Le débit entre deux lignes de courant :

En effet, $Q = \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ où $\mathbf{n}$ est la normale à une ligne quelconque joignant les lignes de courant $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$. Si (dx, dy) sont les composantes du vecteur tangent à la ligne d'intégration, celles de $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ sont $(dx, -dy)$ et le débit Q est :

$$Q = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (-dy) = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi$$

La distance d entre les lignes de courant est inversement proportionnelle à la vitesse locale du fluide :

$$v = \frac{\Delta \varphi}{d}$$

II.2.1.1.1.2. Évolution d'une particule fluide :

A) La divergence du champ des vitesses est égale au taux de variation relative du volume de la particule fluide en M (admis) :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (II.7)$$

(V = volume de la particule fluide)

B) Le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad (II.8)$$

Vecteur tourbillon par ses coordonnées cartésiennes :

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La relation décrit la rotation locale des particules fluides.

C) Dérivée particulaire en description Eulérienne : On cherche à calculer l'évolution temporelle d'une grandeur Eulérienne $G(M, t)$ sur un petit volume autour du point M , en suivant cette particule (par exemple la concentration en colorant ou la vitesse ou encore la masse volumique). Cette vitesse de variation est appelée dérivée totale de G et est notée dG/dt .

Si l'on note $\vec{v}$ la vitesse de déplacement du point de mire M . En généralisant à trois dimensions, cela permet d'écrire :

$$M \text{ quelconque} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})G \quad (II.9)$$

Avec :

$\frac{\partial G}{\partial t}$: Dérivée locale (influence du temps en M fixe) Terme $\neq 0$ si écoulement non stationnaire ;

$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})G$: Dérivée convective (influence du déplacement) Terme $\neq 0$ si écoulement non uniforme.

L'opérateur $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})G = v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z}$

On expliquant par ces cas particulières :

✓ cas particulier n°1 : le point de mire M est fixe ($\vec{v} = \vec{0}$). On est alors dans une description eulérienne et la vitesse de variation de G est égale à la dérivée partielle ou locale, notée $\frac{\partial G}{\partial t}$:

$$M \text{ fixe} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}$$

✓ cas particulier n°2 : le point de mire est attaché à une molécule de fluide ($\vec{v} = \vec{u}$). On est alors dans une description lagrangienne et la vitesse de variation de G est égale à ce qu'on appelle la dérivée matérielle ou dérivée particulaire ou dérivée en suivant le mouvement notée DG/Dt .

$$M \text{ fluide} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{DG}{Dt} \text{ avec } \frac{DG}{Dt} \equiv \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})G \quad (II.10)$$

Exemple sur quelques grandeurs physiques :

Dérivée particulière du champ de masse volumique : $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho$

Dérivée particulière du champ de vitesse : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$. c'est l'accélération d'une particule de fluide.

D) Conservation de la masse :

L'équation de continuité exprimant la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire (Lagrange) ou encore dans un élément fixe (Euler) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho\vec{v}) + \sum_i \rho q_{Vi} \quad (II.11)$$

On appelle q_{Vi} le débit volumique de fluide créé ($q_{Vi} > 0$: source) ou détruite ($q_{Vi} < 0$: puits) par unité de volume.

Cas particulières :

1. Ecoulement permanent ou stationnaire : il n'y a pas de variation explicite avec le temps :

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \sum_i \rho q_{Vi} \quad (II.12)$$

2. Ecoulement conservatif : pas de puits ni de sources $\Rightarrow \sum_i \rho q_{Vi} = 0$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (II.13)$$

3. Ecoulement permanent et conservatif :

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (II.14)$$

4. Fluide incompressible ($\rho = \text{Cst}$) :

$$\text{div}(\vec{v}) = \sum_i q_{Vi} \quad (II.15)$$

5. Ecoulement conservatif, permanent et iso-volume :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (II.16)$$

L'opérateur divergence est lié au flux d'un vecteur : il intervient très souvent en physique dans les équations de conservation.

II.2.1.1.1.3. Modèles d'écoulements et propriétés :

Lorsqu'un fluide est en mouvement, les grandeurs telles que la pression, la vitesse, la masse volumique, ... sont généralement fonctions à la fois du temps et de l'espace.

1) Ecoulement permanent ou stationnaire :

Un écoulement du fluide est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement. Autrement dit, les dérivées partielles par rapport au temps des grandeurs physiques sont nulles ($\partial/\partial t = 0$). C'est-à-dire que les champs Eulériens : $\vec{v}(M, t), P(M, t), \rho(M, t)$ sont indépendants du temps :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (II.17)$$

Propriété :

2) Régime transitoire ou non-permanent ou instationnaire :

Chaque grandeur dépend de l'instant considéré. Il en découle que la vitesse dépend alors nécessairement de la position dans le fluide.

3) Uniforme / non-uniforme

Un écoulement permanent est dit uniforme lorsque ses grandeurs sont indépendantes des coordonnées d'espace. La dérivée partielle de toutes les variables par rapport aux coordonnées d'espace est nulle : $\partial/\partial x = \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.

Par opposition, on définit les écoulements non-uniformes parmi lesquels on distingue les écoulements graduellement (ou lentement) variés dont les changements du vecteur vitesse sont progressifs et les écoulements rapidement (ou brusquement) variés marqués par des changements rapides.

4) Ecoulement tourbillonnaires ou non tourbillonnaire (irrotationnel)

Définitions :

- i. Dans un écoulement non tourbillonnaire, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est nul en tout point de l'espace, $\vec{v}$ est à circulation conservative et les lignes de courants ne peuvent être fermées.
- ii. Si le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est non nul en au moins un point donné de l'espace, l'écoulement est dit tourbillonnaire
- iii. Propriété d'écoulement non tourbillonnaire (Potentiel des vitesses)

Un écoulement non tourbillonnaire tel que en tout point de l'espace $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ le champ de vitesse est nécessairement un gradient ($\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi$). C'est-à-dire, $\vec{v}$ dérive donc d'un potentiel ϕ scalaire, appelé potentiel de vitesse, défini à une constante additive près. Et l'écoulement est dit écoulement potentiel. Alors,

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \phi \text{ tel que } \vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi \quad (II.18)$$

Un écoulement non tourbillonnaire dérive d'un potentiel scalaire défini à une constante additive près :

- En chaque point le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux surfaces équipotentielles $\phi = Cste$
- Si l'écoulement est de plus incompressible alors $div(\vec{v}) = 0$ soit :
 - En introduisant l'équation de conservation de la masse (II.13), on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{grad} \phi) = 0$$

- Si, de plus, le fluide est incompressible ($\rho = Cst$), on obtient :

$$div(\rho \overrightarrow{grad} \phi) = 0 \Rightarrow div(\overrightarrow{grad} \phi) = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad (II.19)$$

Donc : ϕ obéit à l'équation dite de Laplace: $\Delta \phi = 0$.

On montre que si un fluide part du repos et si la viscosité est négligeable, son écoulement est irrotationnel.

Remarque :

- ✓ De la relation (II.18), on peut donc exprimer les composantes du vecteur vitesse à partir du potentiel des vitesses :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi \Rightarrow v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ et } v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (II.20)$$

- ✓ Pour un écoulement irrotationnel plans, on peut satisfaire l'équation de continuité en posant :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \phi: \text{ fonction du courant}$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \phi: \text{ fonction de potentiel}$$

Les fonctions ϕ et ψ sont donc liées par les relations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (II.21)$$

Travaux dirigés

Exercice 1 : l'accélération et vitesse

Un champ de vitesse est défini par $v_x = 2y^2$, $v_y = 3x$, $v_z = 0$. Au point (1,2,0), calculer :

1. la vitesse ;
2. l'accélération locale ;
3. l'accélération convective.

Solution :

1. La vitesse à (1,2,0) $\vec{v} = 2y^2\vec{i} + 3x\vec{j}$ Or : $\vec{v} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$ et La valeur absolue : $v = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

La dérivée particulière de champ de vitesse c'est l'accélération $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

2. On a la dérivée locale est nulle $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

3. On a : $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12xy \\ 6y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'accélération convective : $\vec{a} = 12xy\vec{i} + 6y^2\vec{j}$

L'accélération a (1,2,0) : $\vec{a} = 12 \cdot 1 \cdot 2\vec{i} + 6 \cdot 2^2\vec{j}$, Or : $\vec{a} = 24\vec{i} + 24\vec{j}$

La valeur absolue : $a = 24\sqrt{2}$

Exercice 2 :

On considère un écoulement permanent, défini dans un repère (O, x, y, z) par le champ des vitesses suivant : $v_x = 2x - 3y$, $v_y = 3x - 2y$ et $v_z = 0$

- 1) Montrer que le fluide est incompressible ;
- 2) Déterminer la forme des lignes de courant ;
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur tourbillon.

Solution :

1. Le fluide est incompressible, si la divergence de champ de vitesse est nulle, $div(\vec{v}) = 0$

On a :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$$

Donc $div \vec{v} = 0 \Rightarrow$ fluide incompressible

2. L'équation de la ligne de courant : est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{2x - 3y} = \frac{dy}{3x - 2y} \Leftrightarrow \int (3x - 2y)dx = \int (2x - 3y) dy$$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 4xy = c$$

La forme est elliptique.

3. Les coordonnées du vecteur tourbillon

$$\text{Vecteur tourbillon : } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} [0\vec{i} + 0\vec{j} + (3+3)\vec{k}] = 3\vec{k}$$

Exercice 3 :

Soit un écoulement dont le potentiel des vitesses est donné par : $\phi = x^2 - 2y - y^2$

Avec $\vec{v} = \overrightarrow{grad\phi}$

Démontrer que l'écoulement est :

- bidimensionnel
- permanent
- continu (vérifiant l'équation de continuité) ?

Solution :

1. On a :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad\phi} \Rightarrow v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \text{ et } v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Alors on cherche à déterminer les composantes de la vitesse :

$$v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y - 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ la composante selon l'axe Oz : } v_z = 0 \Rightarrow \text{l'écoulement est donc}$$

bidimensionnel.

$$2. \text{ L'écoulement est permanent si : } \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \text{ on a } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(grad\phi)}{\partial t} = \frac{\partial(x^2 - 2y - y^2)}{\partial t} = 0$$

La vitesse ne dépend pas du temps : l'écoulement est donc permanent

$$3. \text{ D'autre part, nous avons : } div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$$

L'équation de continuité est vérifiée, donc l'écoulement est continu.

Exercice 4 :

Supposant que les composantes du vecteur vitesse sont : $v_x = x^2 + z^2$ et $v_y = x^2 + y^2$.

Déterminer les composantes du vecteur vitesse suivant la direction z, qui satisfont l'équation de continuité ?

Solution :

$$\text{La condition qui satisfait l'équation de la continuité : } div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$div(v) = 2x + 2y + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2(x + y)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -2(x + y) \Rightarrow v_z = -2(x + y)z$$

Exercice 5 :

Soit un fluide parfait d'un écoulement plan stationnaire, dont le champ de vitesse locale au point $M(x, y, z)$:

$$v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xy^2 \\ -3x^2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide
- 2) Calculer l'accélération $\mathbf{a}$ de la particule du fluide de l'écoulement en utilisant une description Eulérienne.

Solution :

- 1) 1. L'équation cartésienne : Pour cet écoulement les lignes de courant (ou lignes de champ) confondues avec la trajectoire des particules du fluide (car l'écoulement étudié est stationnaire) sont telles que le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}(dx, dy, 0)$ d'une particule fluide est parallèle à la vitesse d'écoulement $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$ du fluide au point $(x, y, 0)$.

Donc : $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$

- 1) 2. L'équation des lignes de courant du fluide : on a

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Leftrightarrow \frac{dx}{3xy^2} = \frac{dy}{-3x^2y} \Leftrightarrow \int -3x^2y dx = \int 3xy^2 dy$$

$$\Rightarrow -yx^3 = xy^3 + C \Rightarrow xy^3 + yx^3 = xy(x^2 + y^2) = C$$

La ligne passe par le point $(x_0, y_0, 0)$, alors la forme est comme suit : $x_0^2 + y_0^2 = Cst$

Les lignes de courants sont des cercles, dans le plan Oxy , de centre O origine du repère cartésien $Oxyz$ et de rayon $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

- 2) 1'accélération $\vec{a}$ de la particule du fluide par la description *Eulérienne*.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

L'écoulement plan stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

$$\vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + 0 \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9xy^4 - 18x^3y^2 \\ 9x^4y - 18x^2y^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre III**LES ECOULEMENTS DES FLUIDES REELS DANS LES CONDUITES EN CHARGE****(Les lois de conservation)****Objectifs spécifiques :**

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- 1 D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible avec ou sans échange d'énergie ;
- 2 Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Et l'exploiter dans divers domaines.

Introduction :

L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

III.1. Fluide Réel :

Pour un fluide en mouvement, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles mêmes. Un fluide réel est un fluide dont le mouvement est soumis à des processus de dissipation d'énergie qui apparaissent avec celui-ci. Ces processus sont à lier aux frottements dus aux mouvements des molécules qui constituent le fluide et qui font perdre de l'énergie à celui -ci sous forme de chaleur.

- ✓ Dans l'hydraulique, on s'intéresse au fluide incompressible, lorsque la divergence de vitesse de l'écoulement est nulle.
- ✓ Dans le modèle réel d'un fluide, on ne néglige pas les forces de viscosité tangentielle qui s'opposent au glissement relatif de deux couches voisines du fluide.

III.2. Profil des vitesses :

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un profil des vitesses.

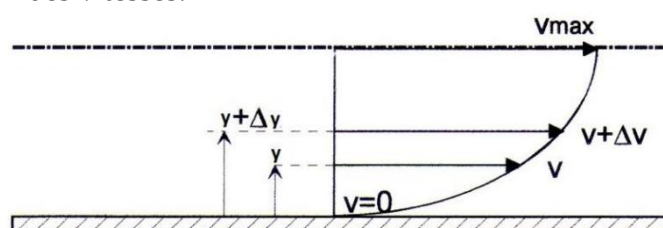


Figure III.1 : Profil de vitesse

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe, lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance y de cette couche au plan fixe : $v = v(y)$.

III.2.1. La vitesse moyenne :

La vitesse moyenne apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assure le même débit que la répartition réelle des vitesses.

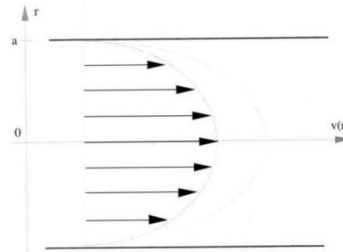


Figure III.2: Profil de vitesse dans la section transversale d'une conduite.

III.3. Les lois de conservation

III.3.1. Loi de conservation de matière (Equation de continuité) :

Pour un écoulement permanent d'un fluide incompressible circule dans une conduite de section circulaire, il s'agit d'étudier le principe de conservation de la matière en présence des grandeurs moyennes de vitesse et de pression. Considérons un tube de lignes de courant d'un fluide de masse volumique ρ .

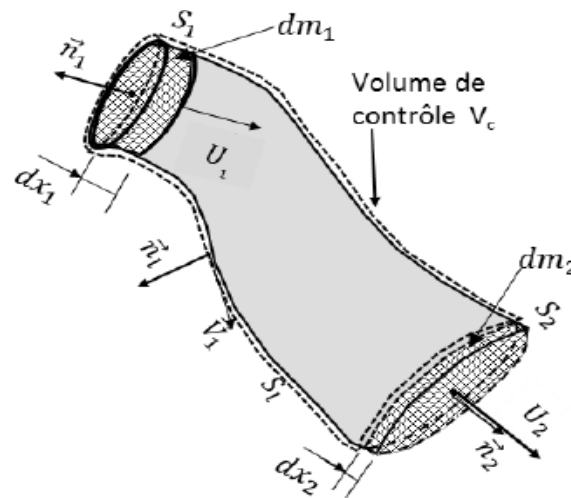


Figure III.3: Tube de lignes de courant d'un fluide

Voir la figure ci-dessus, la conservation de la masse d'un fluide incompressible : $dm_1 = dm_2$

Donc $\rho \cdot dV_1 = \rho \cdot dV_2$ ou encore $\rho \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par dt

$$\frac{\rho \cdot S_1 \cdot dx_1}{dt} = \frac{\rho \cdot S_2 \cdot dx_2}{dt} \Rightarrow \rho \cdot S_1 \cdot U_1 = \rho \cdot S_2 \cdot U_2$$

Nous pouvons aboutir à :

$$S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2 \Leftrightarrow Q_1 = Q_2 \quad (III.1)$$

III.3.2. Loi de conservation d'énergie (Equation de Bernoulli) :

Considérons un écoulement entre deux volumes de contrôle (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite voir la figure ci-dessous, tel que entre les points (1) et (2) il n'y ait pas de machine hydraulique..

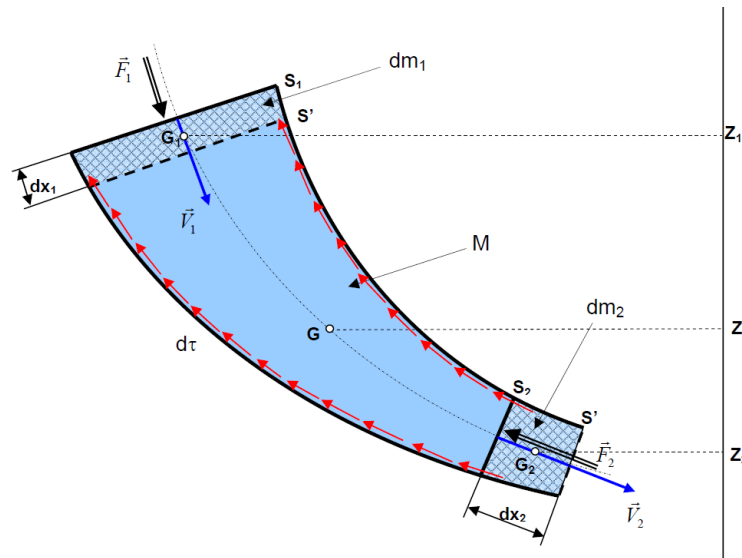


Figure III.4: Un écoulement entre deux points (1) et (2)
d'un fluide réel dans une conduite

Dans le cas d'un fluide réel et avec les hypothèses suivantes :

- Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux $d\tau$ qui contribue dans l'équation de bilan d'énergie et donner naissance à des pertes de charge.
- L'écoulement est permanent.
- On considère un écoulement peu perturbé avec une courbure faible des lignes de courant.

On considère un axe $\vec{Oz}$ vertical dirigé vers le haut. On désigne par, z_1 , z_2 et z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin}$$

$$E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot gz_1 + M \cdot gz) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{pot} + E_{cin} = (M \cdot gz + dm_2 \cdot gz_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ». On prendra en considération cette fois ci le travail des forces de frottement visqueux $d\tau$.

$$\Delta E_{mec} = E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression} + \sum W_{d\tau} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + \sum W_{d\tau}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + \sum W_{d\tau} = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + \sum W_{d\tau}$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot gz_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2 - dm_1 \cdot gz_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 = P_1 \cdot \frac{dm_1}{\rho_1} - P_2 \cdot \frac{dm_2}{\rho_2} + \sum W_{d\tau}$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$

Et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On aboutie à l'équation de **Bernoulli** (1700-1782):

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm} \quad (III.2)$$

On définit la perte de charge entre les points (1) et (2) par : $J_{1-2} = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$ qui est la perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

$$(III.2) \Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = J_{1-2} \quad (III.3)$$

L'unité de chaque terme de la relation (III.3) est le joule par kilogramme (J/kg).

En introduisant l'accélération gravitationnelle g , la relation (III.3) devient homogène à des longueurs en mètre :

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{J_{1-2}}{g} \quad (III.4)$$

III.3.2.1. Charge hydraulique d'un écoulement :

Donc, la charge hydraulique (H) fait référence à la quantité d'énergie cinétique et potentielle de pression et de différence d'altitude dans un écoulement.

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \quad (III.5)$$

$$H = H_c + H_p$$

Le terme $H_c = \frac{v^2}{2g}$ est la charge cinétique ou la charge dynamique, le terme $H_p = \frac{P}{\gamma} + z$ est la charge statique ou la charge piézométrique.

, H_c , H_p : sont des hauteurs par mètre de colonne de fluide (*mc fluide*) [*mcf*].

D'une façon générale, la charge hydraulique moyenne d'un écoulement dans une conduite est donnée par la formule suivante :

$$H = \frac{1}{S} \iint \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \right) dS$$

Remarques :

- ✓ La vitesse v : vitesse instantanée en un point de l'écoulement de la section S, en [m/s].
- ✓ Le terme $(\frac{P}{\gamma} + z)$ est constant dans la section transversale d'une conduite, la pression P et Z sont estimés au centre de gravité de la section transversale. Par contre le terme $\frac{v^2}{2g}$ varie.
- ✓ On préfère généralement travailler avec la vitesse moyenne U , du fluide à l'échelle de la conduite en hydraulique en charge. On a donc :

$$U^2 = \alpha v_{moy}^2 = \alpha \left(\frac{Q}{S} \right)^2$$

Où

- U : est grandeur pour le calcul hydraulique

- Le coefficient α (Coefficient de Coriolis) tient compte de la forme du profil de vitesse dans la section. Dans la plupart des calculs hydrauliques, on prend $\alpha = 1,0$ sans que le résultat soit entaché d'une erreur grave, puisque la charge cinétique due à la vitesse n'est en général qu'une petite fraction de la charge totale.

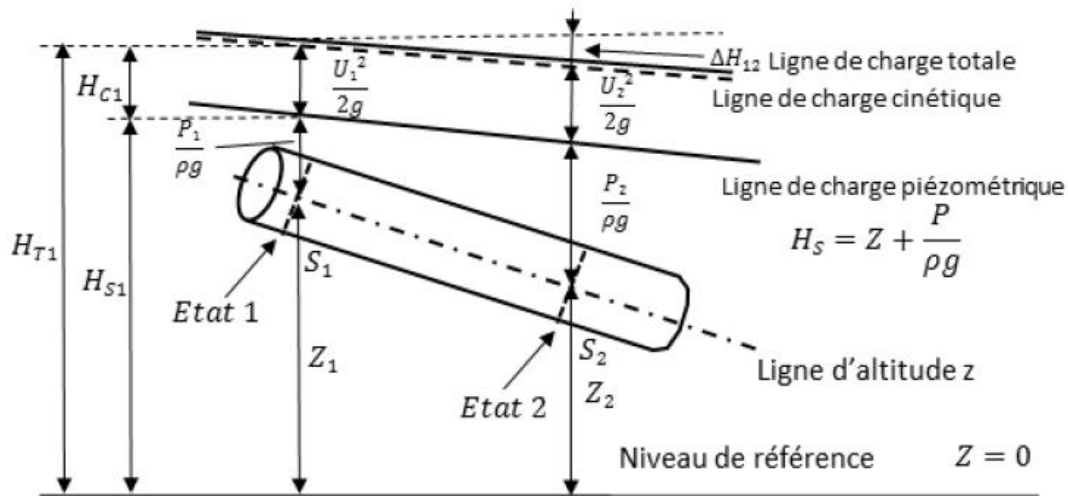


Figure III.6: Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique d'un fluide réel dans une conduite inclinée

III.3.2.2. Théorème de Bernoulli généralisé: Ecoulements avec échange d'énergie :

Cas d'un écoulement avec échange d'énergie :

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un système de conduites, il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- ✓ Les pompes donneront de la puissance mécanique au fluide ;
- ✓ Les turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note P la puissance échangée avec le fluide, l'équation de Bernoulli se généralise et on obtient :

$$P_1 + \rho g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{P}{Q_v} = P_2 + \rho g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (III.6)$$

On a : $P > 0$ pour les pompes et $P < 0$ pour les turbines.

III.3.2.3. Application du théorème de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli pose la base de la dynamique des fluides et plus généralement de la mécanique des fluides. Il permet d'expliquer de nombreux phénomènes et de comprendre le principe de fonctionnement de beaucoup d'instruments de mesure de débits tels que le tube de Pitot, le tube de Venturi et le diaphragme...etc.

Réservées aux fluides incompressibles, ces lois et équations peuvent être employées dans certains cas particulier pour les fluides compressibles à faible variation de pression.

1) Formule de Torricelli (1608 - 1647)

Il s'agit d'un écoulement de vidange d'un réservoir à travers un orifice, voir la figure.

Un réservoir plein de section (S_1), la vitesse de vidange à travers un orifice de section (S_2) est très petite devant (S_1). Nous appliquons le théorème de Bernoulli sur l'écoulement entre l'état (1) de la surface libre et l'état (2) de la section juste après la sortie du jet.

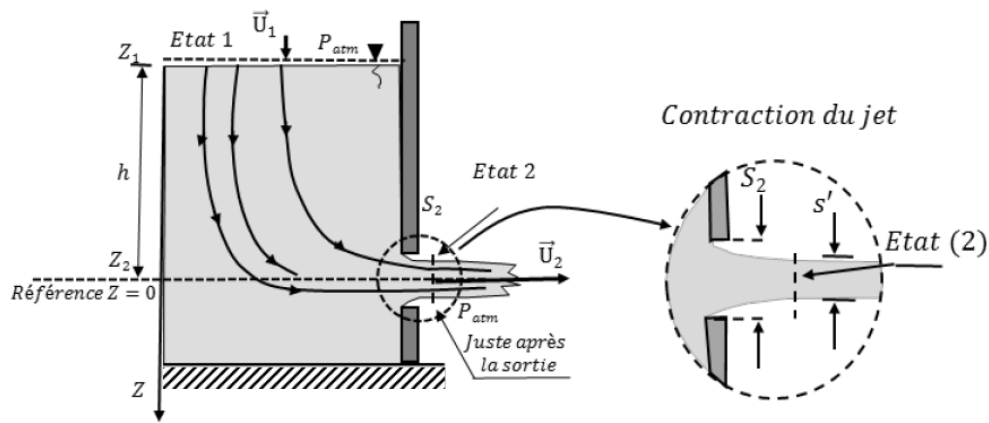


Figure III.7: Ecoulement de vidange d'un réservoir à travers un orifice

Pour un fluide parfait

La relation de Bernoulli entre les sections S_1 et S_2 , mène à écrire :

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{12} \quad \text{et} \quad \Delta H_{12} = 0$$

$$P_1 + \rho g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \rho g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

La pression juste après la S_2 du jet est égale à la pression atmosphérique, et qui est également celle de la surface libre ($P_1 = P_{atm}$). Par conséquent $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du jet ; la surface libre est pratiquement au repos.

Suivant le principe de conservation de masse $Q_1 = Q_2 \Rightarrow U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2$ on a $U_1 \ll U_2$

Par conséquent :

$$\rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho U_2^2 \Rightarrow U_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

D'où la formule théorique de Torricelli reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au-dessus de l'orifice est :

$$U_2 = U_{th} = \sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $U_r = C_v U_{th}$:

$$U_r = C_v \sqrt{2gh}$$

$$Q = C_c C_v \sqrt{2gh} = C_Q \sqrt{2gh} \quad (III.7)$$

Avec : $C_c \approx \frac{\text{Section juste avant la sortie}}{\text{Section juste après la sortie}}$ est le coefficient de contraction, dépend de la géométrie de l'orifice. C_v est le coefficient de correction de vitesse par rapport à l'expérimental.

De manière générale, le coefficient de débit C_Q est déterminé expérimentalement. Dans le tableau III.1, vous trouvez quelques valeurs du coefficient .

Tableau III.1 : Coefficient de débit C_Q en fonction de la forme d'orifice.

Forme	Nomination	Valeur de C_Q
	Paroi mince	0.61
	Paroi mince aiguë	0.61
	Orifice à bords profilés	0.50
	Orifice à bords rentrants	1.00

1.1) Calcul du temps de vidange :

L'objet de cette note est de calculer le temps de vidange d'un réservoir ouvert, communiquant à l'atmosphère. Le fluide s'échappe à l'air libre par un orifice calibré.

A un instant t donné, on a :

$$Q = -\frac{dV}{dt} = C_Q \cdot S \sqrt{2gz}$$
$$dt = -\frac{dV}{C_Q \cdot S \sqrt{2gz}} = -\frac{S_R(z) dz}{C_Q \cdot S \sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : $S_R(z) = S_R$ et z : variable de niveau d'eau dans le réservoir tel que : $z \in [H_0, h]$ avec H_0 la hauteur initiale de l'eau dans le réservoir et h : la hauteur voulue.

$$\int_0^T dt = -\int_{H_0}^h \frac{S_R}{C_Q \cdot S \sqrt{2gz}} dz$$
$$\Leftrightarrow T = 2 \frac{S_R}{C_Q \cdot S \sqrt{2g}} (\sqrt{H_0} - \sqrt{h}) \quad (III.8)$$

2) Tube de Pitot (Henry Pitot (1692-1771))

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse locale dans divers écoulements. Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

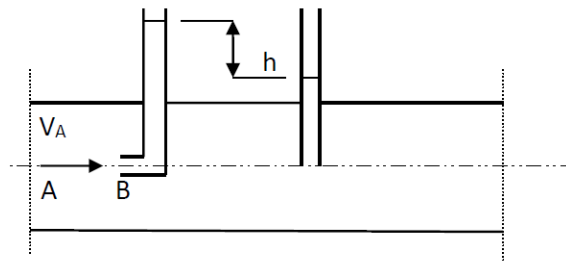


Figure III.8: Présentation de tube de Pitot

On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.

En point A, on a $P = P_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $v = v_A$, et $z = z_A$

En point B, on a $P = P_B$, $v_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B \Leftrightarrow (P_B - P_A) = \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

Donc la vitesse locale du fluide est :

$$v = v_A = \sqrt{2 \frac{(P_B - P_A)}{\rho}} \quad (III.9)$$

De l'hydrostatique, on a : $(P_B - P_A) = \rho g h$, ce qui donne :

$$v = v_A = \sqrt{2gh}$$

3) Venturi-mètre (Venturi 1746-1822)

Le tube de Venturi est un tube horizontal qui présente un étranglement. Lors d'un écoulement stationnaire, la conservation du débit impose une augmentation de la vitesse au niveau de l'étranglement et la relation de Bernoulli impose une dépression au même niveau.

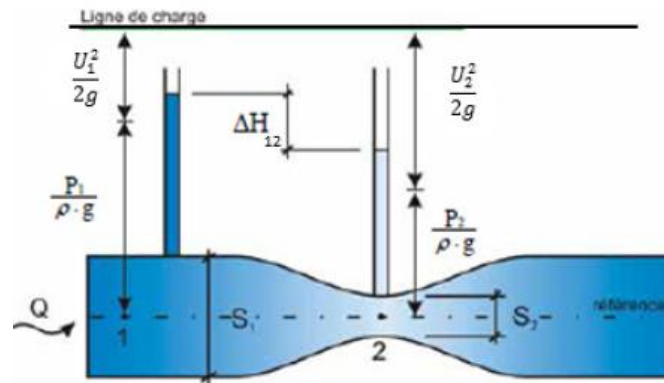


Figure III.9: Présentation de tube de Venturi

Entre les deux sections (1) et (2), l'application du théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent et fluide parfait donne :

On a : $z_1 = z_2$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{U_2^2}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (U_2^2 - U_1^2) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} \quad (III.10)$$

En outre, de l'équation de continuité donne : $U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2 = Q$

En conséquence, $S_1 > S_2 \Rightarrow U_1 < U_2$ suivant le principe de conservation de masse et $U_1 < U_2 \Rightarrow P_1 > P_2$.

On cherche à déterminer l'expression de U_1 :

La conservation de débit s'écrit $U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2 = Q \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{S_2}{S_1}$

$$(III.10) \Rightarrow \frac{U_1^2}{2} \left(\left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 - 1 \right) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} \Leftrightarrow \frac{U_1^2}{2} \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho}$$

Connaissant les caractéristiques du tube Venturi (S_1 et S_2), la mesure de la différence de pression ($P_1 - P_2$) permet de déterminer le débit :

$$U_1 = \sqrt{2 \frac{(P_1 - P_2)}{\rho \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)}} \text{ et } Q = S_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)}} \quad (III.11)$$

En réalité, le débit réel sera légèrement différent du débit trouvé à partir de l'équation précédente. En effet, il y a toujours des frottements (dont on n'a pas tenu compte) qui engendrent une différence de pression plus importante.

Par conséquent, il est nécessaire d'étalonner cet appareil.

$$Q_{\text{réel}} = C \cdot S_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)}} \quad (III.12)$$

C : Coefficient de correction obtenu par étalonnage du venturi.

4) Diaphragmes :

Le diaphragme est utilisé comme instrument de mesure de débit d'un fluide parcourant un circuit hydraulique. Il existe, pour un débit donné, une différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

L'étude consiste à établir une relation entre le débit d'eau Q traversant le diaphragme et la différence de hauteur d'eau h dans les tubes.

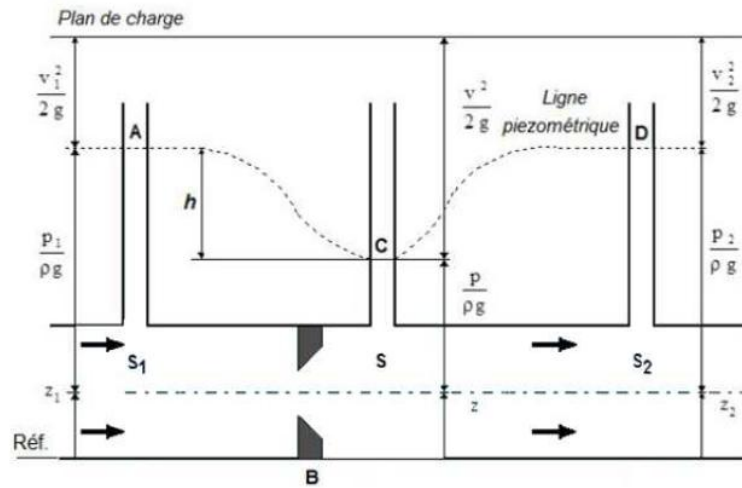


Figure III.10: Présentation d'un diaphragme

De l'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible, le débit du fluide est le même à travers toutes les sections des tubes.

On écrit : $Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = v \cdot S$

D'où : $v_1 = v \cdot \frac{S}{S_1}$

On applique l'équation de Bernoulli exprimée en hauteur piézométrique entre les points A et C.

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} v_1^2 + z_1 = \frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 + z$$

Le tube est horizontal, il vient donc : $z_1 = z_2 = z$

On obtient :

$$\frac{1}{\rho g} (P_1 - P) = \frac{1}{2g} (v^2 - v_1^2) = h$$

Avec, h est la différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

La synthèse de l'équation de Bernoulli et de l'équation de continuité permet d'exprimer le débit théorique Q_{th} dans le diaphragme : $Q_{th} = v \cdot S$ et l'équation de Bernoulli est : $\frac{1}{2g} (v^2 - v_1^2) = h$

Soit : $(v^2 - v_1^2) = 2gh$

L'équation de continuité permet d'exprimer v_1 en fonction de v : $v_1 = v \cdot \frac{S}{S_1}$

On obtient : $v^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2 \right) = 2gh$

D'où : $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S}{S_1} \right)^2}}$

La relation du débit devient :

$$Q_{th} = \frac{S}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right)}} \sqrt{2gh}$$

La mesure n'a pas lieu en **B** où il se produit une contraction de la veine fluide, mais en **C**. Pour tenir compte de la section en C, il faut utiliser un coefficient de contraction C .

Le débit réel s'écrit finalement :

$$Q_{réel} = C \cdot \frac{S}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right)}} \sqrt{2gh} \quad (III.13)$$

III.3.3. Loi de conservation des quantités de mouvement (Equation d'Euler)

III.3.3.1. Définition :

On appelle quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant suivant une trajectoire T , le produit $(m \cdot v)$ de la masse par la vitesse de déplacement.

La quantité de mouvement a la même direction que le vecteur dont elle est issue.

III.3.3.2. Théorème de l'impulsion :

Soit F la résultante des forces qui agissent sur un système de points matériels pendant les instants t et $(t + dt)$; le principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

qui peut s'écrire sous forme d'accroissement :

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \Delta t} = \underbrace{m \Delta \vec{v}}$$

$\underbrace{\vec{F} \cdot \Delta t}$: impulsion

$\underbrace{m \Delta \vec{v}}$: quantité de mouvement

Le produit de la force estimée constante par la durée du temps pendant lequel se poursuit son action s'appelle impulsion. Alors L'impulsion reçue par un élément matériel est égale au produit de sa masse par la variation de vitesse que subit cet élément pendant le temps Δt .

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q (\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \quad (III.14)$$

Où :

$\sum \vec{F}_{ext}$ est la résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse U_1 et sort par S_2 à une vitesse U_2 .

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Travaux dirigés

Exercice 1 :

Un tuyau d'arrosage a un diamètre de 15 mm. Il débite 0.5 l d'eau par seconde à travers un orifice terminal de 0,5 cm² de surface.

Calculer la suppression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique (l'eau est considérée ici comme un fluide parfait).



Solution

Considérons deux points A et B, à l'entrée et à la sortie du tuyau : soit l'équation de Bernoulli :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Les points A et B ont le même niveau : $z_A = z_B \Rightarrow P_A - P_B = \frac{\rho}{2} (v_B^2 - v_A^2)$

Soit l'équation de la conservation du volume : $Q = S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_A = \frac{Q}{S_A}$ et $v_B = \frac{Q}{S_B}$

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0,5}{1,767 \cdot 10^{-1}} = 2,83 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{0,5}{0,5 \cdot 10^{-1}} = 10 \text{ m/s}$$

La suppression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique :

$$\Delta P = P_A - P_B = P_A - P_{atm} = \frac{\rho}{2} (v_B^2 - v_A^2)$$

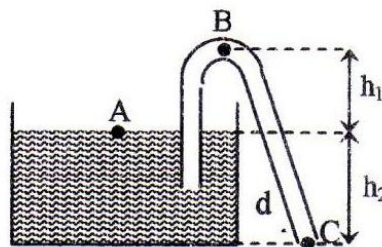
Donc :

$$\Delta P = \frac{10^3}{2} (10^2 - 2,83^2) = 4,6 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Exercice 2 :

Un réservoir muni d'un siphon de diamètre ($D = 60 \text{ mm}$). Si $h_1 = 2 \text{ m}$ et $h_2 = 3,5 \text{ m}$. Déterminer la vitesse du liquide (eau) à la sortie du siphon, le débit et la pression absolue au point B.

En négligeant tous sorte de pertes de charge.



Solution

1) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et C :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z_C$$

On a : $P_A = P_C = P_{atm}$ et $\frac{1}{2} \rho v_A^2 \approx 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_C^2 = \rho g (z_A - z_C)$

$$\text{Donc : } v_C = \sqrt{2g(z_A - z_C)} = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3,5} = 8,28 \text{ m/s}$$

$$v_C = 8,28 \text{ m/s}$$

2) Le débit à la sortie du siphon : $Q = v_C \cdot S_C = 8,28 \frac{\pi}{4} 0,06^2 = 23,41 \text{ l/s}$

3) La pression absolue au point B :

On a aussi l'équation de Bernoulli entre les points A et B :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

On a aussi : $v_B = v_C$ et $P_A = P_C = P_{atm}$

$$\text{Alors : } P_B = P_A - \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \rho g(z_B - z_A) = 1,0123 \cdot 10^5 - \frac{1}{2} 10^3 \cdot 8,28^2 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2$$

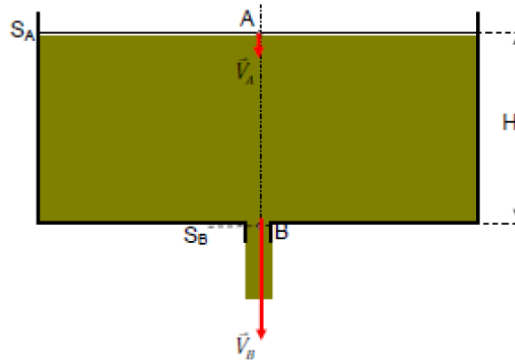
$$P_B = 4,73 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Exercice 3 :

Le réservoir cylindrique représenté ci-dessous, ouvert à l'air libre, a une section S_A de diamètre $D_A=2$ m. Il est muni, à sa base, d'un orifice de vidange de section S_B et de diamètre $D_B=14$ mm. Le réservoir est plein jusqu'à une hauteur $H=2,5$ m d'un liquide considéré comme fluide parfait, de masse volumique $\rho=817 \text{ kg/m}^3$.

On donne : La pression atmosphérique $P_{atm}=1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

L'accélération de la pesanteur $g=9,81 \text{ m/s}^2$. On note $\alpha = (S_B / S_A)$.



On procède à la vidange du réservoir. Le liquide a une vitesse moyenne d'écoulement au point A notée v_A , et sa vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice est notée v_B .

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire v_A en fonction de v_B et α .

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, établir l'expression littérale de la vitesse v_B en fonction de g , H et α .

3) Calculer la valeur de α .

4) Calculer v_B en considérant que le niveau de liquide varie lentement.

5) Déterminer le débit volumique Q du fluide qui s'écoule à travers l'orifice. (En litres par seconde)

6) Quelle serait la durée T de vidange si ce débit restait constant ?

Solution

1) L'équation de la quantique : $Q = v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \Rightarrow v_A = v_B \left(\frac{S_B}{S_A} \right) = \alpha \cdot v_B$

2) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections A et B.

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

On a $P_A = P_B = P_{atm}$ donc :

$$\frac{1}{2} \rho v_B^2 = \frac{1}{2} \rho \alpha^2 v_B^2 + \rho g(z_A - z_B) \Rightarrow \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) v_B^2 = g(z_A - z_B)$$

Donc :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{(1 - \alpha^2)}}$$

$$3) \alpha = \left(\frac{S_B}{S_A}\right) = \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2 = \left(\frac{14}{2000}\right)^2 = 49 \cdot 10^{-6}$$

4) En considérant que le niveau de liquide varie lentement : $v_A = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Donc :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{(1-\alpha)}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,5} = 7 \text{ m/s}$$

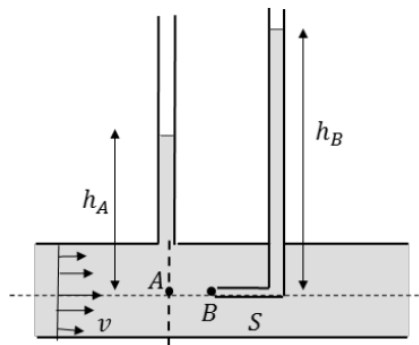
$$5) Q = v_B \cdot S_B = 7 \cdot \frac{\pi}{4} 0,014^2 = 1,07 \text{ l/s}$$

$$6) \text{ Le débit reste constant : } Q = \frac{V}{T} \Rightarrow T = \frac{V}{Q} = \frac{S_A \cdot H}{Q} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 2,5}{4 \cdot 1,07 \cdot 10^{-3}} = 2h \text{ } 2min$$

Exercice 4 :

On utilise un tube de Pitot pour mesurer la vitesse de l'eau au centre de la section transversale d'une conduite. La hauteur de pression au point d'arrêt (B) est de 5,58 m et la pression statique au point (A) est de 4,65 m. Quelle est la vitesse de l'eau ?

On néglige les pertes de charge entre les deux points A et B. Et l'écoulement permanent et uniforme.



Solution

Considérons une ligne de courant entre les points A et B.

Suivant l'équation de Bernoulli entre les points A et B, on a :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$v_B = 0$ (point d'arrêt, section d'entrée du tube en équilibre statique)

$$z_A = z_B \Rightarrow P_B - P_A = \frac{\rho}{2} (v_A^2)$$

$$\text{D'où la vitesse instantanée est : } v_A = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_B - P_A)}$$

Suivant la loi hydrostatique : $P_A = \rho g h_A$ et $P_B = \rho g h_B$

$$\text{Donc : } v_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

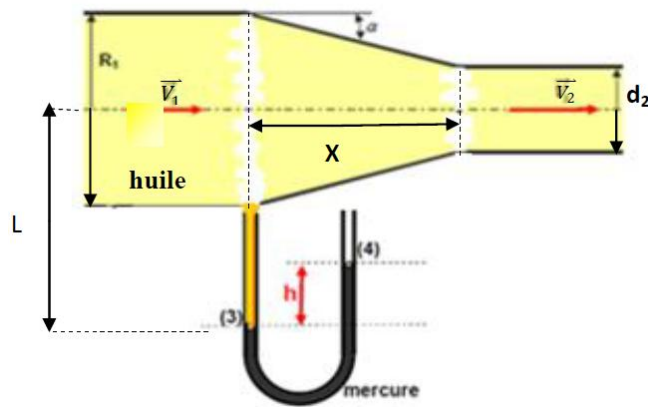
Exercice 5 :

De l'huile supposée comme fluide parfait est accélérée à travers une buse horizontale en forme de cône convergent. La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.

A) Etude de la buse :

Un débit volumique $Q = 0,4 \text{ l/s}$, l'huile traverse la section S_1 de diamètre $d_1 = 10 \text{ mm}$ à une vitesse d'écoulement v_1 et une pression P_1 , sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement $v_2 = 4 \cdot v_1$ et une pression P_2 .

On donne la masse volumique de l'huile : $\rho_{\text{huile}} = 800 \text{ kg/m}^3$



- 1) Calculer la vitesse d'écoulement v_1 . En déduire le diamètre d_2 .
- 2) Calculer la longueur X , si l'angle de convergence $\alpha = 15^\circ$.
- 3) En appliquant le Théorème de Bernoulli, déterminer la pression P_1 .

B) Etude du manomètre (tube en U)

Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

On donne : $L = 1274 \text{ mm}$, l'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Déterminer la dénivellation h du mercure.

Solution

A) Etude de la buse :

1) La vitesse : $v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} = 5,09 \text{ m/s}$

On a : $v_2 = 4 \cdot v_1 \Leftrightarrow \frac{Q}{d_2^2} = 4 \frac{Q}{d_1^2} \Leftrightarrow d_2^2 = \frac{1}{4} d_1^2 \Rightarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ mm}$

2) La longueur X : $\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{d_1 - d_2}{X} \Rightarrow X = \frac{d_1 - d_2}{2 \cdot \tan \alpha} = \frac{10 - 5}{2 \cdot \tan 15^\circ} = 9,33 \text{ mm}$

3) Appliquons l'équation de Bernoulli entre les sections (S_1) et (S_2) :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

On a $P_2 = P_{atm}$ et $z_1 = z_2$ donc :

$$P_1 = P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 (16 - 1) = P_{atm} + \frac{15}{32} \rho v_1^2 = 10^5 + \frac{15}{2} \cdot 800 (5,09)^2$$

$$P_1 = 2,55 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

B) Etude du manomètre :

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points (1) et (3):

$$P_3 - P_1 = \rho_{huile} g L \Rightarrow P_3 = \rho_{huile} g L + P_1 = 800 \cdot 9,81 \cdot 1,274 + 2,55 \cdot 10^5$$

$$P_3 = 2,65 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points (3) et (4):

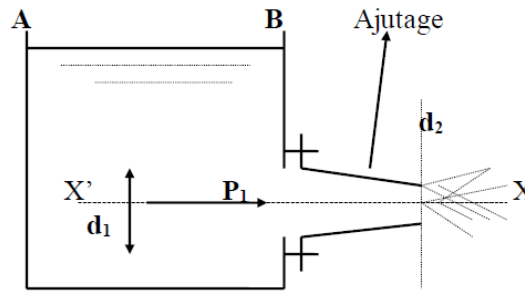
$$P_3 - P_4 = \rho_{Hg} g h \Rightarrow h = \frac{P_3 - P_4}{\rho_{Hg} g} = \frac{(2,65 - 1) 10^5}{13600 \cdot 9,81} = 1236 \text{ mm}$$

$$h = 1236 \text{ mm}$$

Exercice 6 :

Calculer la force qui agit sur la colonne de rivet sachant: la masse volumique du liquide $\rho = 600 \text{ kg/m}^3$, $d_1 = 100 \text{ mm}$, $P_1 = 3 \text{ bars}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$, le coefficient de contraction $C_C = 0,8$, $\Delta H_T = 0$.

Solution



Le théorème de quantité de mouvement permet de déterminer quel va être l'effort exercé sur la colonne de rivet. On a:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho \cdot \alpha \cdot Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (1)$$

Avec : ρ masse volumique du fluide (kg/m³),

α Coefficient de quantité de mouvement pris égal à 1,

$\vec{V}_2$ vitesse finale du fluide (m/s),

$\vec{V}_1$ vitesse initiale du fluide (m/s),

Q : débit d'écoulement (m³/s),

Si on projette l'équation (1) selon l'axe XX', confondu avec l'axe de l'ajutage on obtient:

$$\sum F_X = \rho \cdot Q(V_2 - V_1) \quad (2)$$

Les forces qui agissent sur les parois sont transmises aux fixations :

$$\sum F_X = F_{P_1} - R_X = \rho \cdot Q(V_2 - V_1) \quad (3)$$

Détermination de V_1 , V_2 et Q :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + \Delta H_T$$

On a $P_2(\text{relative}) = 0$, $\Delta H_T = 0$ et $z_1 = z_2$ donc :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad (4)$$

De l'équation de continuité: $Q = C^{ste}$

$$Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_C \quad \text{avec : } S_C = C_c \cdot S_2 \Rightarrow V_1 = C_c \frac{S_2}{S_1} V_2$$

L'équation (4) devient :

$$V_2^2 \frac{1}{2} \rho \left(1 - \left(C_c \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right)^2 \right) = P_1$$

Donc la vitesse V_2 :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2P_1}{\rho \left(1 - \left(C_c \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right)^2 \right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{600 \left(1 - \left(0,8 \left(\frac{20}{100} \right)^2 \right)^2 \right)}} = 31,64 \text{ m/s}$$

Et la vitesse V_1 : $V_1 = C_c \frac{S_2}{S_1} V_2$

$$V_1 = C_c \frac{S_2}{S_1} V_2 = 0,8 \left(\frac{20}{100} \right)^2 31,64 = 1,01 \text{ m/s}$$

Le débit $Q = V_1 \cdot S_1 = 1,01(\pi 0,1^2/4) = 7,93 \ell/s$

Détermination de R_X :

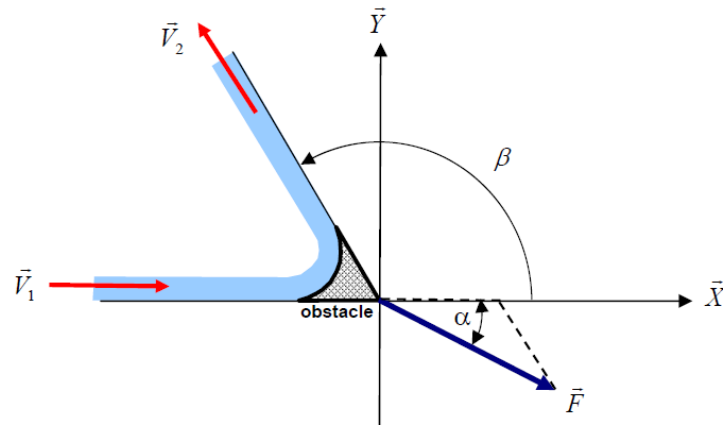
De l'équation (3) :

$$R_X = P_1 \cdot S_1 - \rho \cdot Q(V_2 - V_1) = 3 \cdot 10^5(\pi 0,1^2/4) - 600 \cdot 7,93 \cdot 10^{-3}(31,64 - 1,01) =$$

$$R_X = 2210,456 N$$

Exercice 7 :

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit massique $Q_m = 2 \text{ kg/s}$. L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle $\beta = 120^\circ$.



On désigne par $\vec{V}_1$ la vitesse d'écoulement de l'eau en entrée de l'obstacle. Elle est portée par l'axe $\vec{X}$, $\vec{V}_2$ désigne la vitesse d'écoulement de l'eau en sortie de l'obstacle. Elle est portée par une direction inclinée de l'angle $\beta = 120^\circ$ par rapport à l'axe $\vec{X}$. On admettra que: $V_1 = V_2 = 3 \text{ m/s}$

- 1) En appliquant le théorème d'Euler, donner l'expression vectorielle de la force F exercée par le liquide sur l'obstacle en fonction de Q_m, V_1 et V_2 ensuite calculer ses composantes F_x et F_y
- 2) Quel est son angle d'inclinaison α ?

Solution

- 1) L'expression vectorielle de la force F exercée par le liquide sur l'obstacle :

$$\vec{F} = Q_m(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = Q_m \|\vec{V}_1\| \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow F_x = Q_m \|\vec{V}_1\| (1 - \cos \beta)$$

$$\Rightarrow F_y = Q_m \|\vec{V}_1\| (-\sin \beta)$$

A.N :

$$F_x = 2 \cdot 3(1 - (-0,5)) = 9 N$$

$$F_y = 2 \cdot 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5,19 N$$

- 2) Angle d'inclinaison α :

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5,19}{9} = -0,5773 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Chapitre IV**LES ECOULEMENTS DES FLUIDES REELS DANS LES CONDUITES EN CHARGE****(Les régimes d'écoulement)****Objectifs**

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- D'évaluer le nombre de Reynolds ;
- D'identifier les différents régimes d'écoulement d'un fluide (laminaire, transitoire et turbulent) ;
- De calculer les pertes de charge singulières et linéaires ;
- D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible.

IV.1. Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Ce ci les conséquences sont multiples, la première d'entre elles étant la difficulté de résolution de l'équation fondamentale de la dynamique (équation de Navier-Stokes). Dans cette raison pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

IV.2. Les régimes d'écoulement**IV.2.1. Expérience d'Osborne Reynolds (1842-1912) :**

Photo IV.1 : Osborne Reynolds

La figure ci-dessous montre le montage expérimental qui comprend un réservoir de liquide s'ouvrant sur une conduite cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre qu'elle fluctue de manière aléatoire.

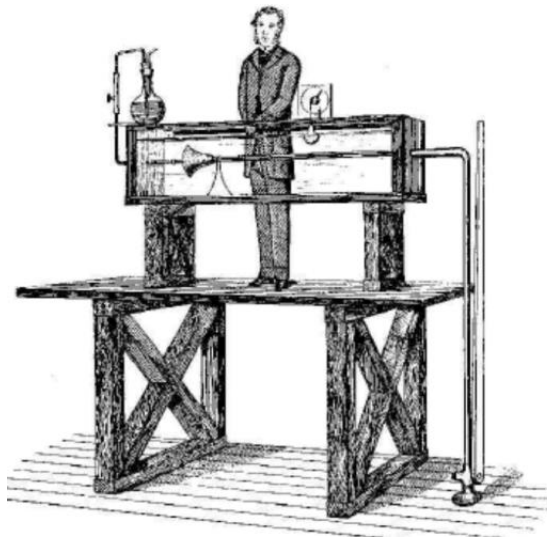


Figure IV.1: Présentation d'un Montage de l'expérience Reynolds

Reynolds a réalisé une étude systématique du régime d'écoulement en fonction de différents paramètres intervenant dans le régime d'écoulement : vitesse d'écoulement, viscosité, diamètre. Il a mis en évidence deux catégories d'écoulement pour un liquide réel : un régime laminaire et un autre turbulent, avec un régime de transition entre les deux régimes.

Reynolds a constaté à partir de ses travaux, qu'il existe deux forces :

- 1- La force d'inertie, qui dépend de la vitesse moyenne du liquide, du diamètre de la conduite et de la masse volumique du liquide ;
- 2- La force de viscosité, qui est la viscosité dynamique du liquide.

Donc Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de *Reynolds* R_e . Il exprime le rapport entre la force d'inertie ρU^2 et la force visqueuse $\mu \cdot \left(\frac{U}{D}\right)$. Il est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{D}} = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (IV.1)$$

U : Vitesse moyenne d'écoulement en m/s

D : Diamètre de la conduite en m ;

μ : Viscosité dynamique du fluide en $Nm^{-2}s$;

ν : Viscosité cinématique du fluide en m^2/s

- ✓ Si $R_e < 2300$: le régime d'écoulement est laminaire.
- ✓ Si $R_e \approx 2300$ jusqu'à 4000 : zone de transitoire.
- ✓ Si $R_e \gg 2300$: l'écoulement est turbulent
- ✓ Les expériences classiques de Reynolds ont montré que le point de passage du régime laminaire au régime turbulent correspond à une vitesse caractéristique que Reynolds a appelé vitesse critique :

$$U_{cr} = \frac{R_{e\ cr} \nu}{D} \text{ tell que } R_{e\ cr} \approx 2300 \quad (IV.2)$$

Pour des vitesses $U < U_{cr}$ le régime d'écoulement est laminaire ;

Pour des vitesses $U > U_{cr}$ le régime d'écoulement est turbulent ;

Pour des vitesses $U \approx U_{cr}$ le régime d'écoulement est critique.

Si l'on mesure la composante de la vitesse selon x , son évolution au cours de temps nous indique que :

- Pour un écoulement laminaire et permanent, la vitesse en un point, U reste constante avec le temps.
- Pour un écoulement turbulent, la vitesse en un point, U « vitesse instantanée », indique des fluctuations aléatoires de hautes fréquences

La figure ci-dessous illustre les différents régimes d'écoulement :

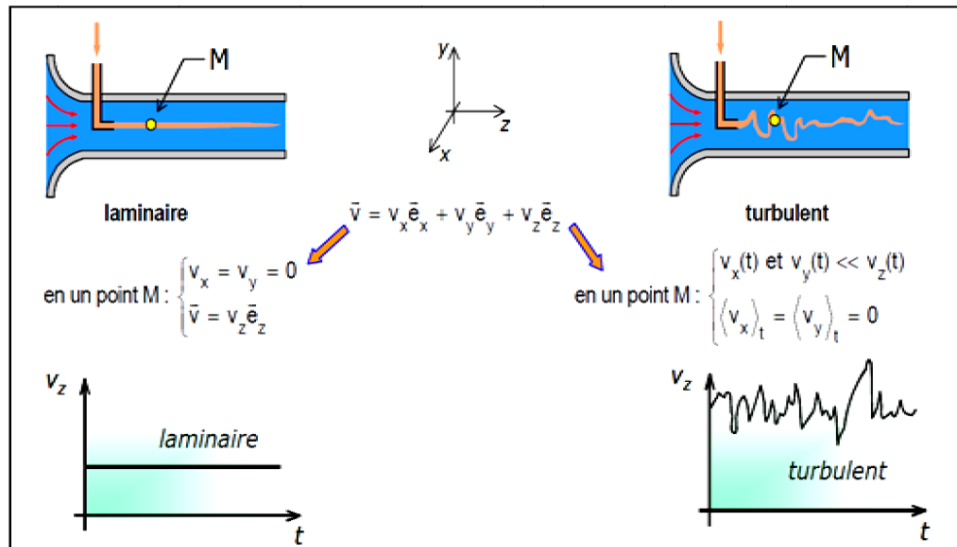


Figure IV.2: Présentation de différents régimes d'écoulement

Remarque :

Il faut noter que les valeurs numériques de nombre de Reynolds R_e correspondent à un écoulement uniforme. Pour un écoulement non uniforme, les conditions changent brusquement et pour un rétrécissement du canal, l'écoulement est plus stable. Les parois convergentes rigides du canal produisent un effet stabilisateur, et le régime laminaire peut conservé même pour des nombres de Reynolds supérieur à 2300.

Exemple :

L'eau à 20 °C, s'écoule dans une conduite de 30 cm de diamètre à une vitesse de 2 m/s. Quel est le régime d'écoulement ?

On donne : à 20 °C : $\mu = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$, $\rho = 997,4 \text{ kg/m}^3$

Solution :

Utilisant l'expression (IV.1)

$$R_e = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu} = \frac{997,4 \cdot 2 \cdot 0,3}{9,8 \cdot 10^{-4}} = 61 \cdot 10^4$$

$R_e = 61 \cdot 10^4 > 2300$, donc le régime d'écoulement est turbulent.

IV.2.2. Écoulement à l'entrée des conduites :

L'écoulement à l'entrée de conduite est illustré dans la figure suivante. Nous pouvons constater que l'écoulement est en développement près de la paroi due aux effets de cisaillement et d'accélération du fluide dans la région loin de la paroi. En conséquence le gradient de la distribution de pression dans la région de l'entrée est plus grand par rapport à celui de l'écoulement développé.

Au début de la conduite, la couche limite de liquide se développe et son épaisseur augmente au fur et à mesure jusqu'à complètement envahir la section de l'écoulement à la distance : L_e (longueur d'entrée)

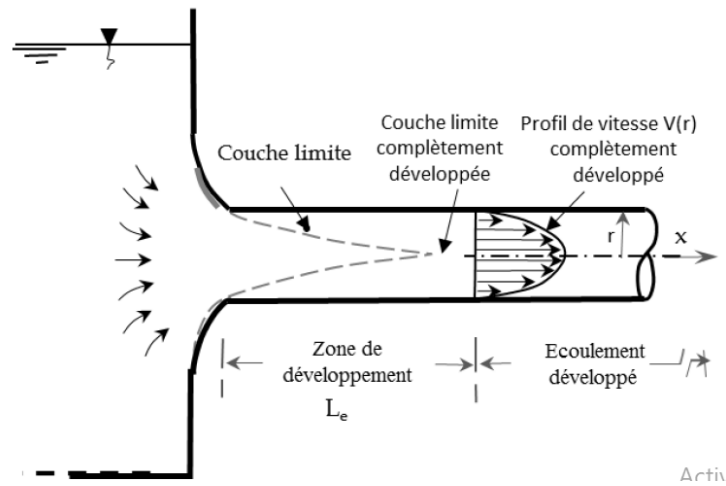


Figure IV.3: Présentation de l'écoulement à l'entrée des conduites

Après cette distance l'écoulement est devenu pleinement développé. Il existe des relations semi-empiriques liant cette distance au nombre de Reynolds de l'écoulement :

- ✓ Pour l'écoulement laminaire : la longueur de la région d'entrée de l'écoulement est donnée :

$$\frac{L_e}{D} \approx 0,0065 R_e \quad (\text{Boussinesq Nikuradse})$$

- ✓ Et pour un écoulement turbulent ($R_e > 4000$): la longueur d'établissement de l'écoulement développée :

$$\frac{L_e}{D} \approx 4,4 R_e^{1/6} \quad (\text{Latzko})$$

$$\frac{L_e}{D} \approx 25 \text{ à } 40 \quad (\text{Nikuradse})$$

IV.2.3. Ecoulement des liquides visqueux : Ecoulement laminaire dans les conduites cylindriques : (Lois de Poiseuille).

Définition et description :

L'écoulement laminaire est également appelé écoulement simplifié ou écoulement visqueux. Dans la dynamique des fluides, l'écoulement laminaire est caractérisé par:

- 1) Les particules se déplacent selon des trajectoires ou des lignes de courant définies et observables ;
- 2) Le fluide s'écoule en couches parallèles sans interruption entre les couches ;
- 3) L'écoulement laminaire a tendance à se produire à des vitesses plus faibles et à une viscosité élevée ;
- 4) Une distribution de vitesse parabolique ;

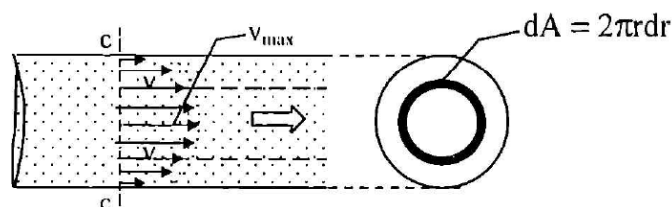


Figure IV.4: Répartition de vitesse le long d'une section droite d'écoulement dans une conduite en régime laminaire

- 5) La vitesse d'écoulement moyenne correspond à environ la moitié de la vitesse maximale ;
- 6) L'écoulement laminaire se produit à n'importe quel nombre de Reynolds près des limites solides, appelé sous-couche laminaire et elle est très importante dans le transfert de chaleur.

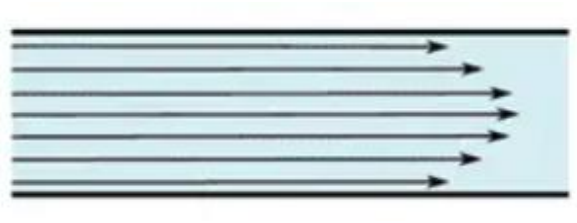


Figure IV.5: Présentation de l'écoulement laminaire dans une conduite

Pour étudier ce régime on considère un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite de section circulaire et rectiligne de rayon R et de longueur $L \gg R$. La conduite est horizontale, et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite. On supposera que l'écoulement est laminaire.

L'objet de ce cours est pour déterminer le profil de vitesse, la vitesse moyenne, le débit et la relation de coefficient de friction.

Nous allons écrire les forces agissant sur un élément cylindrique comme montré dans la figure ci-après :

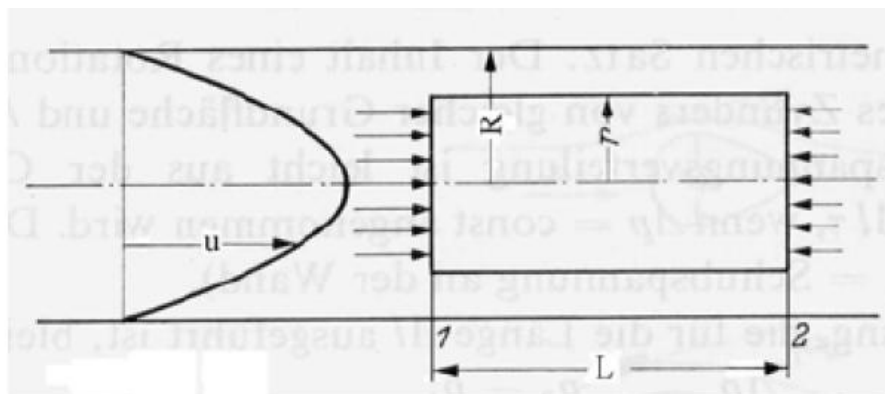


Figure IV.6: Écoulement de Hagen-Poiseuille

Le fluide compris entre 0 et r subit sur une longueur L des forces de pressions à chaque extrémité du tube et la force de frottement sur la paroi latérale de surface $S = 2\pi rL$: On a donc à l'équilibre :

$$F = -S_L \cdot \tau(r) = -2\pi rL \cdot \mu \cdot \frac{du(r)}{dr} = (P_1 - P_2)\pi r^2 = \Delta P \pi r^2 \quad (IV.3)$$

Avec $S_L = 2\pi rL$ (surface latérale) et $S = \pi r^2$ (surface de base)

Et $\tau(r)$: est la contrainte de cisaillement locale

La relation (IV.3) permet à écrire :

$$\frac{du(r)}{dr} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) r \Rightarrow du(r) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) r dr$$

Nous pouvons l'intégrer de $r = 0$ à r :

$$\Leftrightarrow u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) r^2 + C$$

Et on détermine la constante d'intégration en utilisant la condition de $u = 0$ pour $r = R$ (sur la paroi)

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2$$

Nous obtenons alors le profil de vitesse :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) (R^2 - r^2) \quad (IV.4)$$

- ✓ On obtient un profil de vitesse parabolique, la vitesse est maximale sur l'axe:

$$u_{max}(r = 0) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \quad (IV.5)$$

- ✓ Et elle est nulle sur les parois $u(r = R) = 0$.
- ✓ Ainsi nous pouvons obtenir le profil de vitesse sans dimension :

$$\frac{u(r)}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (IV.6)$$

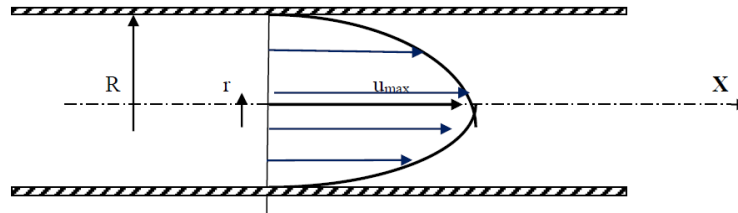


Figure IV.7: Répartition des vitesses à écoulement laminaire dans la conduite

IV.2.3.1. Expression de débit et de la vitesse moyenne :

- 1) La formule de Poiseuille relie le débit volumique avec la différence de pression imposée :

$$Q = \iint \vec{u} \cdot dS \vec{n} = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$Q = \frac{\pi}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^4$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^4 \quad (IV.7)$$

- 2) La vitesse moyenne :

On a l'expression du débit : $Q = u_{moy} S \Rightarrow u_{moy} = Q/S$ avec $S = \pi R^2$

$$u_{moy} = \frac{1}{8\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \quad (IV.8)$$

- 3) Selon les relations (IV.5) et (IV.8) on déduit le résultat suivant :

$$u_{moy} = \frac{1}{2} u_{max} \quad (IV.9)$$

- 4) En appliquant le principe de la loi de Poiseuille :

➤ La surpression dans la canalisation est :

$$\Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4} Q \quad (IV.10)$$

➤ La chute pression par unité de longueur en fonction de la vitesse moyenne :

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\mu}{R^2} u_{moy} \quad (IV.11)$$

En posant : $R_M = \frac{8\mu L}{\pi R^4}$ qui représente la résistance à l'écoulement :

$$\Delta P = R_M \quad (IV.12)$$

La signification physique de ΔP est la perte de charge entre les extrémités d'une canalisation horizontale, traversée par un fluide visqueux de débit Q .

IV.2.4. Écoulement turbulent :

Une connaissance détaillée du comportement du régime d'écoulement turbulent est importante en génie, car la plupart des écoulements industriels, en particulier en hydraulique, sont turbulents.

Définition et description :

En dynamique des fluides, l'écoulement turbulent est caractérisé par le mouvement irrégulier des particules (on peut dire chaotique) du fluide. Contrairement au flux laminaire, le fluide s'écoule avec des variations de vitesse brusques et aléatoires en chaque point. Dans un écoulement turbulent, les vitesses fluctuent en permanence. Il n'y a donc de régime permanent qu'au sens des vitesses moyennes, et non des vitesses instantanées qui sont totalement chaotiques. et génèrent du bruit.

L'écoulement turbulent est caractérisé par :

- 1) Un écoulement turbulent a tendance à se produire à des vitesses plus élevées, à une faible viscosité;
- 2) L'écoulement est caractérisé par le mouvement irrégulier des particules du fluide;
- 3) Le mouvement moyen est dans le sens de l'écoulement;
- 4) La vitesse d'écoulement moyenne est approximativement égale à la vitesse au centre du tuyau ;
- 5) Le profil de vitesse d'écoulement pour un écoulement turbulent est assez plat sur la section centrale d'un tuyau et tombe rapidement extrêmement près des parois.

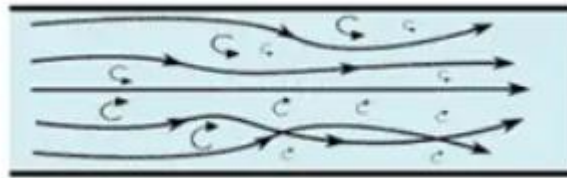


Figure IV.7: Présentation de l'écoulement turbulent dans une conduite

IV.2.4.1. Notion de la turbulence :

En dynamique des fluides, la turbulence ou l'écoulement turbulent est un régime d'écoulement caractérisé par des changements chaotiques de pression et de vitesse d'écoulement, présentent des variations rapides et instantanées. Les particules de fluide ne se déplacent plus sur des lignes de courant régulières, mais courbes instantanées, et forment des tourbillons. La turbulence est causée par l'excès d'énergie cinétique dans certaines parties de l'écoulement du fluide, l'énergie cinétique en excès venant contrecarrer l'effet d'amortissement apporté par la viscosité du fluide. Pour cette raison, les turbulences sont plus faciles à produire au sein de fluides à faible viscosité et inversement.

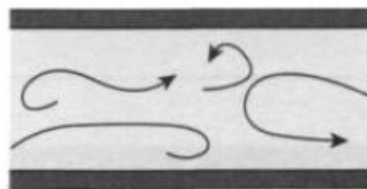


Figure IV.8: Courbes instantanées forment des tourbillons dans une conduite

IV.2.4.2. Profil de vitesse turbulente :

Le profil de vitesse dans un écoulement turbulent est plus plat dans la partie centrale du tuyau (c'est-à-dire dans le noyau turbulent) que dans un écoulement laminaire. La vitesse d'écoulement chute rapidement très près des murs. Ceci est dû à la diffusivité de l'écoulement turbulent.

Généralement, on distingue une zone de forte gradient de vitesse $\left(\frac{du}{dz}\right)$ au voisinage de la paroi la « Couche limite », et on considère que la vitesse est quasi-uniforme sur la partie intérieure à l'écoulement.

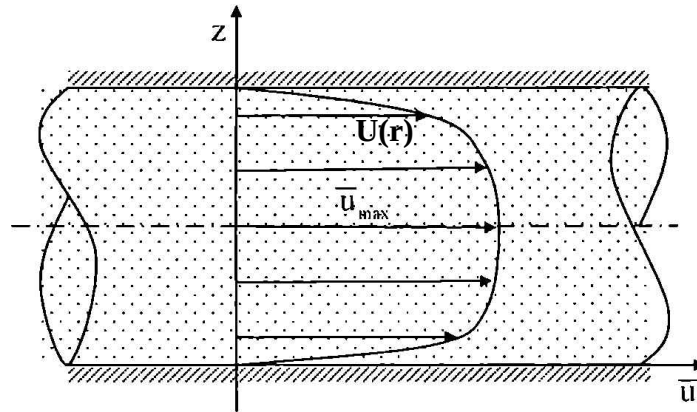


Figure IV.9 : Répartition de vitesse en régime turbulent dans une conduite

En cas d'écoulement turbulent dans la conduite, il existe de nombreux profils de vitesse empiriques. Le plus simple et le plus connu est le profil de vitesse loi de puissance :

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(\frac{z}{R}\right)^{1/n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (IV.13)$$

Où l'exposant n est une constante relié empiriquement à f par :

$$n = f^{-1/2} \quad (IV.14)$$

La valeur de l'exposant n pour les conduites lisse sont regroupées dans le tableau suivant :

R_e	$4 \cdot 10^3$	10^5	10^6	$> 2 \cdot 10^6$
n	6	7	9	10

Le profil de la loi de puissance ne peut pas être utilisé pour estimer la contrainte de cisaillement de la paroi car il a une pente infinie pour toutes les valeurs de n . Il n'a pas non plus de pente nulle à l'axe du tuyau, il n'est donc pas valide près du ligne médiane. Il est utilisé pour estimer le flux d'énergie et le flux de quantité de mouvement des écoulements de conduite.

Notons enfin que le facteur de correction de l'énergie cinétique est de 1,03 pour $n = 7$; donc, c'est souvent pris comme unité pour les écoulements turbulents.

II.2.4.3. La structure d'un écoulement turbulent :

L'analyse des écoulements turbulents a permis de mettre en évidence trois zones de couches près des parois : une zone interne, une zone de transition et une zone externe.

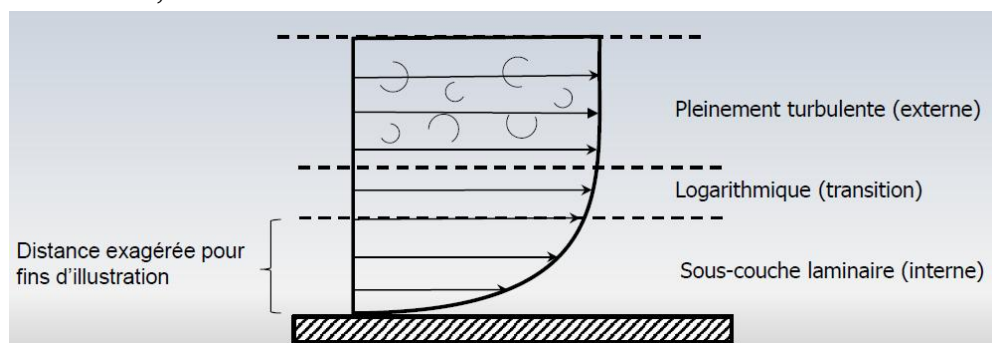


Figure IV.10 : Schéma simplifier de la structure d'écoulement turbulent

- 1) La couche la plus interne, valable très près de la paroi, est très fine et elle est appelée sous-couche visqueuse, ou sous-couche laminaire. Le profil de vitesse est quasi-linéaire et le gradient est fort. La viscosité moléculaire μ est dominante et τ est quasi-constant.

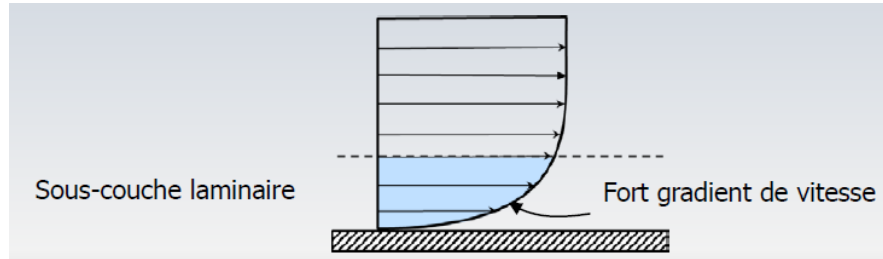


Figure IV.10. a : Schéma simplifié de sous-couche laminaire

- 2) Dans la couche extérieure, appelée "pleinement turbulente", la viscosité turbulente μ_t joue un rôle majeur et le gradient de vitesse est faible.

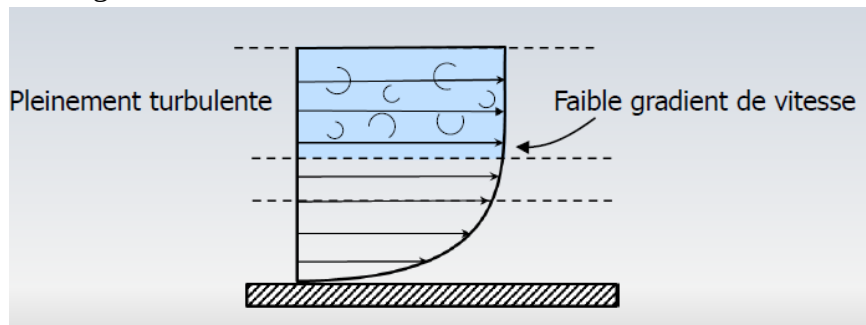


Figure IV.10. b : Schéma simplifié de couche pleinement turbulente

- 3) La couche connue comme zone *logarithmique*, fait la jonction entre la périphérie et la partie centrale d'un écoulement. Dans cette région la viscosité turbulente μ_t prend progressivement le dessus sur la viscosité moléculaire μ .

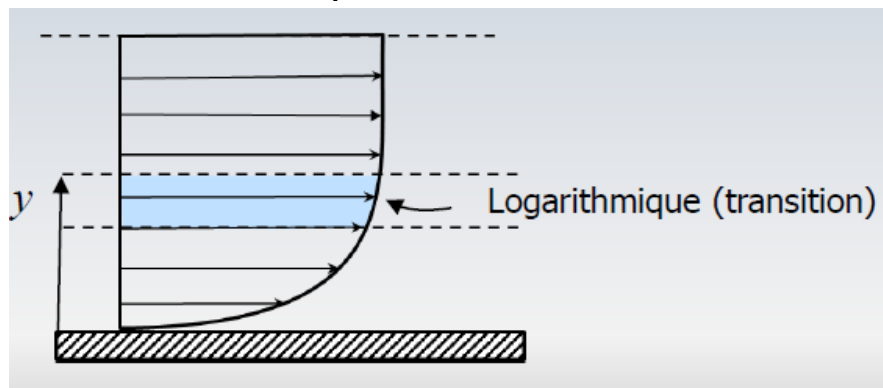


Figure IV.10. c : Schéma simplifié de couche logarithmique (transition)

IV.3. Coefficient de Friction (frottement) pour un écoulement Laminaire et Turbulent :

Nous allons définir un coefficient de friction, dit « le coefficient de friction de Darcy-Weisbach » pour l'écoulement dans les conduits droits comme :

$$f = \frac{\Delta P}{\frac{L}{2D} \rho U^2} \quad (IV.15)$$

Où ΔP est la chute de pression due à la friction seulement. Sa dimension est en N/m^2 ou Pa. Étant donné que (L/D) est sans dimension et que $\rho U^2/2$ a la dimension de Pa, on a donc le coefficient de friction f sans dimension.

Nous pouvons écrire cette équation pour calculer la chute de pression :

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho U^2 \quad (Pa) \quad (IV.16)$$

ou bien, en utilisant $\Delta P = \rho g \Delta H$, nous pouvons l'écrire pour la chute de pression en dimension de mètre de colonne de fluide :

$$\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (m) \quad (IV.17)$$

Note :

Le coefficient de friction est défini pour l'écoulement laminaire ou turbulent, mais f doit être déterminé pour le régime de l'écoulement du problème.

IV.3.1. Coefficient de Friction pour un écoulement Laminaire :

La forme classique de Poiseuille :

On remplace l'expression de la chute de pression par unité de longueur, $\left(\frac{\Delta P}{L}\right)$ de la relation (IV.11) dans la relation (IV.15), on obtient :

$$f = \frac{8\mu \cdot U}{R^2} \cdot \frac{4R}{\rho U^2} = \frac{32(\mu/\rho)}{R \cdot U} = \frac{64\nu}{D \cdot U} = \frac{64}{Re}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{64}{Re} \quad (IV.18)$$

IV.3.1.1. La contrainte à la paroi pour un régime d'écoulement laminaire :

La relation (IV.3) mène à écrire :

$$-2\pi r L \cdot \mu \cdot \tau(r) = \Delta P \pi r^2 \Rightarrow \tau(r) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) r$$

Le signe (-) physiquement est le sens opposé du mouvement de fluide.

$$\tau(r = R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) R \quad (IV.19)$$

IV.4. Contrainte de Cisaillement pour Écoulement Laminaire ou Turbulent :

Pour un écoulement dans une conduite, en utilisant le théorème de quantité de mouvement et la définition du coefficient de friction, nous pouvons déduire la relation entre la contrainte de cisaillement τ et le coefficient de friction f comme suivant :

$$f = \frac{4\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (IV.19)$$

Note :

Cette relation est valable aussi bien pour l'écoulement laminaire que turbulent, mais le coefficient de friction doit être déterminé selon le régime de l'écoulement. La rugosité de la conduite intervient également.

IV.5. Estimation des pertes de charge :

Introduction : Dans la plupart des calculs hydrauliques, il est indispensable de connaître la variation de la charge hydraulique totale, d'un fluide qui s'écoule entre deux états l'état (1) et l'état (2), par le bilan d'application du théorème de Bernoulli suivant :

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{12}$$

ΔH_{12} : Pertes de charge entre l'état (1) et l'état (2) en [mcfluide].

Les pertes de charge ΔH_{12} sont liées aux multiples grandeurs hydrauliques et géométriques. Elles dépendent du régime d'écoulement, de la géométrie et de la nature de surface intérieure **D**.

IV.5.1. Pertes de charge hydraulique :

Les pertes de charge par frottement sont produites dans la section transversale par l'interaction entre les volumes élémentaires de fluide en déplacement et les parois internes de son contenant (ex. conduite, accessoire, compteurs ...). De façon générale les pertes d'énergie sont causées par :

- 1) Frottement contre les surfaces internes ;
- 2) Effet de la turbulence ;
- 3) Action des forces de viscosité moléculaire ;
- 4) Obstacles induisant un changement prononcé des lignes de courants.

Deux types de perte de charge existent linéaires et singuliers :

IV.5.1.1. Perte de charge linéaire :

Elle est appelée aussi perte de charge régulière (ΔH_l) : due aux frottements du fluide contre la paroi intérieure d'une conduite rectiligne de longueur L . On définit la perte de charge linéaire :

$$\Delta H_l = f \frac{L}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (IV.20)$$

L : est la longueur de la conduite en (m) ;

D : est le diamètre de la conduite en (m) ;

U : est la vitesse moyenne de fluide (m/s) ;

g : est l'accélération de la pesanteur (m/s^2).

f : est le coefficient de perte de charge linéaire. Il varie selon le régime d'écoulement.

Soit : $f = F \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right)$. Le coefficient de perte de charge linéaire dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la conduite.

IV.5.1.2. Pertes de charge singulières :

La présence d'une singularité sur l'écoulement dans une conduite comme un coude, un diaphragme, un élargissement brusque, une contraction ...etc.

Dans la pratique industrielle, cette perte de charge est écrite sous la forme :

$$\Delta H_{sing} = k \frac{U^2}{2g} \quad (IV.21)$$

Où U est la vitesse moyenne prise avant ou après la singularité, k est le coefficient de perte de charge singulière, et qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds.

Remarque :

Quelques singularités typiques sont données aux étudiants au cours des travaux dirigés (TD).

IV.5.2. Notion de la rugosité :

La rugosité absolue représente l'épaisseur moyenne des aspérités de la surface du matériau constituant la conduite. On la note ε et on l'exprime en général en millimètres.



Figure IV.11 : Les aspérités de la surface intérieure d'une conduite

On définit la rugosité relative d'une conduite de diamètre D par le rapport ε/D . Pour calculer ce rapport, il faut veiller à exprimer les deux termes dans la même unité.

La rugosité ne joue aucun rôle dans les pertes des charges en écoulement Laminaire, mais décisive pour une certaine classe d'écoulement turbulents.

Généralement la rugosité est prise en compte de manière simplifiée, en considérant une valeur standard correspondant à un matériau et un état de surface.

Exemple :

Tuyau en acier laminé Neuf : $\varepsilon = 0,05$ mm

Tuyau en acier soudé Neuf : $(0,03 < \varepsilon < 0,1)$ mm

Tuyau en ciment Brut : $(1 < \varepsilon < 3)$ mm

Note :

Lorsque la taille des aspérités est inférieure à la hauteur de couche limite laminaire, elles n'ont plus d'effet sur le frottement, on dit alors que le tuyau est **lisse**. Dans le cas contraire, on a affaire à un tuyau **rugueux**.

On résume le calcul des pertes de charge par l'organigramme ci-dessous :

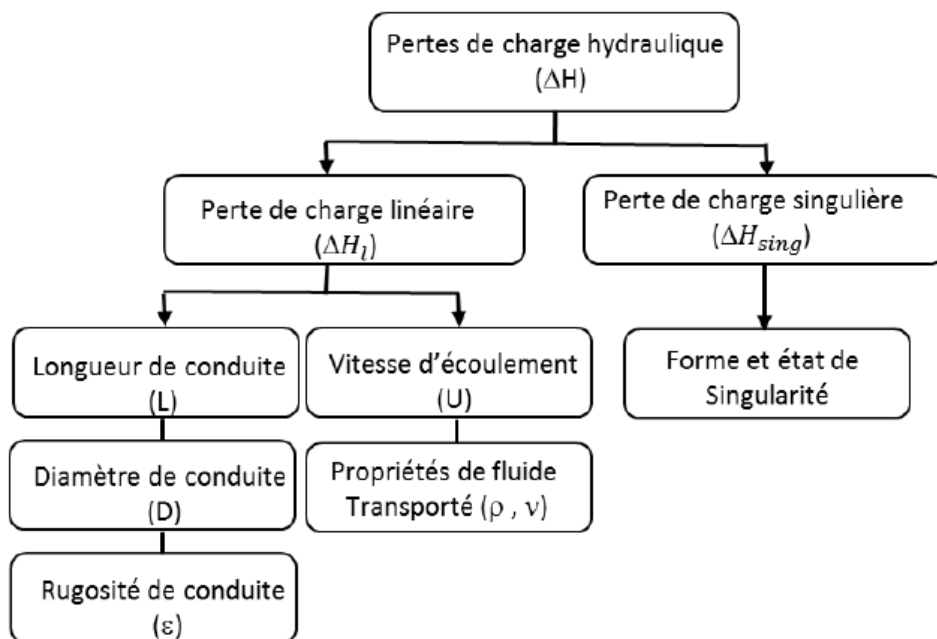


Figure IV.12 : L'organigramme de calcul des pertes de charges

IV.5.3. Détermination du coefficient de perte de charge linéaire (f) :

Suivant l'importance de la rugosité et la turbulence de l'écoulement, on distingue deux comportements différents et on définit deux types de rugosité : lisse et rugueuse. Physiquement, cela peut être relié à l'épaisseur de la couche limite (voir partie II.6). Donc pour faire l'analyse de l'écoulement turbulent

dans les conduits rectilignes avec section circulaire, des méthodes empirique et semi-empirique sont disponibles pour déterminer le coefficient de frottement f :

1) Régime turbulent lisse :

Le régime turbulent lisse est défini empiriquement par :

$$Re > 4000 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{D} Re \sqrt{f} \leq 1$$

Dans cette zone, la turbulence est encore modérée. L'épaisseur de la sous-couche limite est suffisante pour englober toutes les aspérités de la conduite qui se comporte dès lors comme un tuyau lisse. Deux expressions empiriques sont souvent utilisées :

1.1) Formule de Blasius (1911):

$$f = (100Re)^{-0.25} \quad \text{pour } Re < 10^5 \quad (IV.22)$$

1.2) Formule (implicite) de Von Karman (1930) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{Re \sqrt{f}}{2,51} \right) \quad \text{pour } Re > 10^5 \text{ à } 10^6 \quad (IV.23)$$

2) Régime turbulent rugueux :

Le régime turbulent rugueux est défini empiriquement par :

$$Re > 4000 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{D} Re \sqrt{f} \geq 200$$

La turbulence devient très importante et le coefficient de perte de charge ne dépend plus que de la rugosité. On utilise alors la formule de Nikuradse (1933) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} \right) \quad \text{pour } Re > 10^5 \quad (IV.24)$$

3) Régime turbulent généralisé :

3.1) Formule de Colebrook-White (1939) :

C'est une formule généralisée empirique pour estimer le coefficient f dans les régimes turbulent (hydrauliquement lisse et rugueux) et transitoire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (IV.25)$$

C'est une relation implicite qui représente assez bien les résultats expérimentaux obtenus par plusieurs chercheurs de Von Karman et Nikuradse, en utilisant différents fluides. Cette formule est considérée exacte sur l'ensemble des écoulements courants, pour les parois lisses et totalement rugueuses, pour $10^4 < Re < 10^8$.

L'inconvénient de cette relation est le procédé itératif. Généralement on obtient la convergence après 3 ou 4 boucles.

A partir de l'année 1970, des nouvelles formules ont été proposées pour obtenir le coefficient de frottement. L'une des premières utilisée avec succès à été introduite par (Swamee-Jain, 1976), suivi par celle de (Haaland, 1983).

3.2) Formule de Swamee-Jain (1976) :

$$f = \left(-2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right)^{-2} \quad (IV.26)$$

Valable pour : $5 \cdot 10^3 < R_e < 10^8$ et $10^{-6} < \left(\frac{\varepsilon}{D}\right) < 0,05$

3.3) Formule de Haaland (1983) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left(\frac{6,9}{R_e} + \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} \right)^{1,11n} \right) \quad (IV.27)$$

Cette relation pour $n = 1$, conduit à la formule de Colebrook-White avec une erreur maximale de l'ordre de 2%. Avec $n=3$, la formule donnerait selon certains auteurs, de meilleurs résultats que celle de Colebrook-White pour des conduites quasi-lisses de grands diamètres, c'est-à-dire pour des conduites dont la rugosité relative $\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)$ très faibles (Gazoduc par exemple).

3.4) Diagramme de Moody et Stanton (1944)

Le diagramme de *Moody* permet d'évaluer graphiquement le facteur de frottement f en fonction de la vitesse d'écoulement moyenne U , du diamètre D et de la rugosité ε de la conduite et de la viscosité du fluide ν . Ces quatre variables sont regroupées en deux nombres adimensionnels :

- La rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{D}$
- Le nombre de Reynolds : $R_e = UD/\nu$

On détermine alors le régime d'écoulement. Si le régime est laminaire alors : $f = 64/R_e$

Si le régime est turbulent, on choisit le point d'intersection de la courbe correspondant au $\frac{\varepsilon}{D}$ de la conduite et au nombre de Reynolds. On projette ensuite ce point sur l'ordonnée de gauche du diagramme pour estimer f .

Exemple d'utilisation du diagramme :

le mode d'utilisation est indiqué sur l'abaque avec un exemple explicatif de ($Re = 4 \cdot 10^4$, $\varepsilon/D = 0,01$) qui donne la valeur de $f = 0,0387$

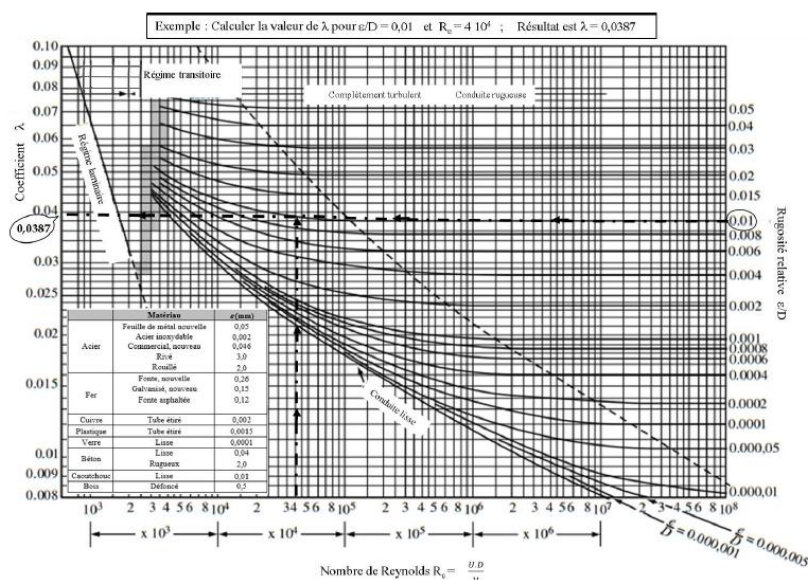


Figure IV.13 : Diagramme de Moody

IV.5.4. Perte de charge par frottement pour une conduite de section quelconque :

En basant sur la définition du rayon hydraulique R_h comme étant le rapport de l'aire de la section d'écoulement S sur le périmètre mouillé P :

$$R_h = \frac{S}{P}$$

Dans le cas d'une conduite circulaire : $R_h = \frac{\pi D^2}{4} / \pi D = \frac{D}{4}$, d'où $D = 4R_h$. En introduisant D dans l'expression (IV.20), on obtient une expression applicable à une conduite de section quelconque :

$$\Delta H_l = f \frac{L}{4R_h} \frac{U^2}{2g} = \frac{fL}{8gR_h} U^2 \quad (IV.28)$$

Ou encore en fonction du débit :

$$\Delta H_l = \frac{fL}{128\pi^2 g R_h^5} Q^2 \quad (IV.29)$$

IV.6. La notion de couche limite :

Introduction : En général, lorsqu'un fluide s'écoule sur une surface fixe, par exemple la plaque plate, le lit d'une rivière ou la paroi d'un tuyau, le fluide en contact avec la surface est amené à reposer par la contrainte de cisaillement sur la paroi. La région dans laquelle l'écoulement s'ajuste d'une vitesse nulle au mur à un maximum dans le flux principal de l'écoulement est appelée **couche limite**. Le concept de couche limite est important dans toute la dynamique des fluides visqueux.

IV.6.1. Le concept de couche limite :

Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par un ingénieur allemand, Prandtl, en 1904. Selon la théorie de Prandtl, lorsqu'un fluide réel s'écoule sur une paroi solide fixe, l'écoulement est divisé en deux régions :

- Une couche mince au voisinage de la paroi solide où les forces visqueuses et la rotation ne peuvent être négligées.
- Une région externe où les forces visqueuses sont très petites et peuvent être négligées.

Le comportement de l'écoulement est similaire à l'écoulement libre en amont.

Considérons un écoulement sur une plaque plane, comme illustré à la figure IV.14.

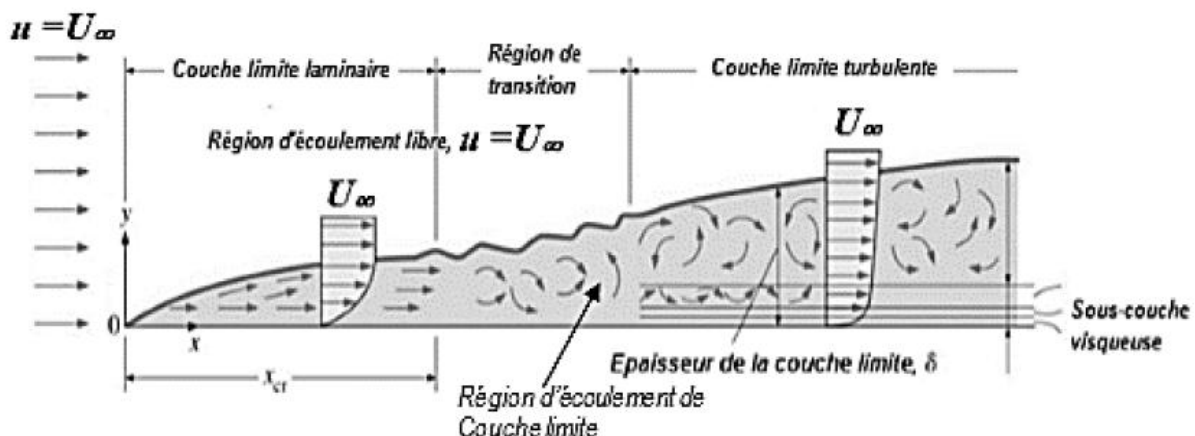


Figure IV.14 : Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane

La figure ci-dessous présente, les caractéristiques de base de toutes les couches limites laminares et turbulentes sont présentées dans le flux en développement sur une plaque plate.

Note :

Les couches limites peuvent être laminares ou turbulentes en fonction de la valeur du nombre de Reynolds.

La figure IV.14 montre que :

✓ Pour les nombres de Reynolds faibles :

La couche limite est laminaire et la vitesse dans le flux change uniformément à mesure que l'on s'éloigne du mur, comme indiqué à gauche de la figure.

✓ Pour les nombres de Reynolds grands :

À mesure que le nombre de Reynolds augmente (avec x), l'écoulement devient instable, et la couche limite est turbulente et la vitesse en aval est caractérisée par des écoulements tourbillonnants instables (changeant dans le temps) à l'intérieur de la couche limite.

✓ La transition de la couche limite laminaire à la couche turbulente :

se produit lorsque le nombre de Reynolds à x dépasse $R_{e\ x} \sim 500\ 000$. La transition peut se produire plus tôt, mais cela dépend surtout de la rugosité de la surface. La couche limite turbulente s'épaissit plus rapidement que la couche limite laminaire en raison de la contrainte de cisaillement accrue à la surface du corps.

✓ La couche limite peut se détacher ou se «séparer» du corps : créer une forme efficace très différente de la forme physique. Cela se produit car le flux dans la limite a une énergie très faible (par rapport au flux libre) et est plus facilement entraîné par les changements de pression.

IV.6.2. Épaisseur de la couche limite :

l'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance entre le mur et le point où la vitesse est de 99% de la vitesse du «flux libre».

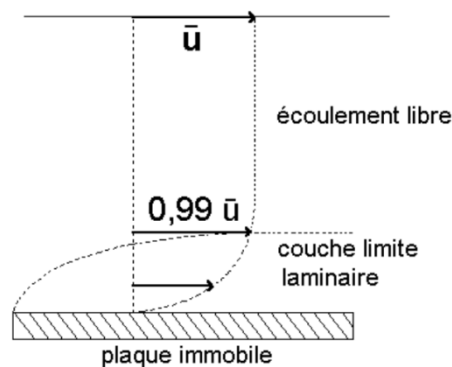


Figure IV.15 : Schéma représentatif d'épaisseur de la couche limite

Pour les couches limites laminaires : sur une plaque plate, la solution de Blasius des équations régissant l'écoulement donne:

$$\delta \approx \frac{5,0}{\sqrt{R_{e\ x}}} x \quad (IV.30)$$

Pour les couches limites turbulentes :

$$\delta \approx \frac{0,37}{R_{e\ x}^{1/5}} x \quad (IV.31)$$

L'équation (IV.31), a été dérivée avec plusieurs hypothèses. La formule d'épaisseur de la couche limite turbulente suppose que l'écoulement est turbulent dès le début de la couche limite.

Travaux dirigés

Exercice 1 :

L'huile de viscosité cinématique $\nu = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ s'écoule dans une conduite de 15 cm avec un débit volumique de 20 ℓ/s .

Quel est le régime d'écoulement ?

Solution :

Utilisant l'expression (IV.1)

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D^2} \frac{D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0,02}{\pi \cdot 0,15 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 283$$

$Re \ll 2300$, donc le régime d'écoulement est laminaire.

Exercice 2:

Déterminer la vitesse critique U_{cr} :

a) pour du fuel moyen à 15°C circulant dans une conduite de 15 cm de diamètre ;

b) pour de l'eau à 15°C circulant dans la même conduite.

La viscosité cinématique à 15°C est : $\nu_{fuel} = 4,47 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\nu_{eau} = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Solution :

Pour l'écoulement laminaire, la valeur maximale du nombre de Reynolds est 2300.

a) pour du fuel à 15°C

$$2300 = Re = \frac{U_{cr} D}{\nu_{fuel}} = U_{cr} \frac{0,15}{4,47 \cdot 10^{-6}}$$

D'où

$$U_{cr} = \frac{2300 \cdot 4,47 \cdot 10^{-6}}{0,15} = 0,068 \text{ m/s}$$

a) pour de l'eau à 15°C

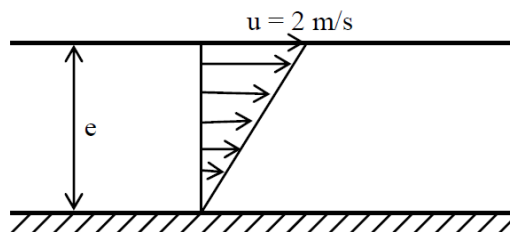
$$2300 = Re = \frac{U_{cr} D}{\nu_{eau}} = U_{cr} \frac{0,15}{1,142 \cdot 10^{-6}}$$

D'où

$$U_{cr} = \frac{2300 \cdot 1,142 \cdot 10^{-6}}{0,15} = 0,0175 \text{ m/s}$$

Exercice 3:

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$, sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



Si l'épaisseur de l'écoulement est $e = 5 \text{ cm}$, déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :

- 1) à la paroi ?
- 2) à une distance de 2 cm de la paroi ?
- 3) à une distance e de la paroi ?

Exercice 4:

Le profil de vitesse pour un écoulement plan d'un liquide, est donné par : $V(y) = 3y^3 + 2y^2$

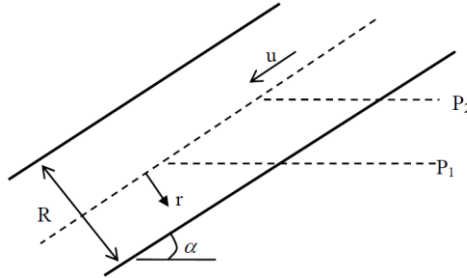
Si la viscosité dynamique du liquide est $\mu = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$. Calculer la valeur de la tension de cisaillement à la paroi et à 30 cm de celle-ci ?

Exercice 5:

Un écoulement de Poiseuille (régime laminaire) :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{\Delta L} \right) (R^2 - r^2),$$

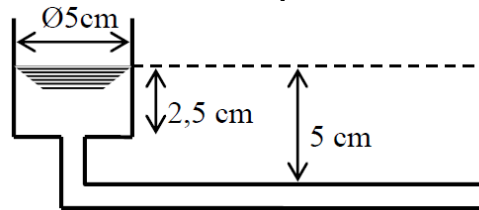
D'une huile dans un tube de 12 mm de diamètre, de longueur L , incliné d'un angle α dont $\sin \alpha = 0,0445$. Si la répartition de la pression à l'intérieure est hydrostatique tout le long du tube, et le débit mesuré égal à 20 l/h, déterminer la viscosité cinématique de cette huile ?



Exercice 6 :

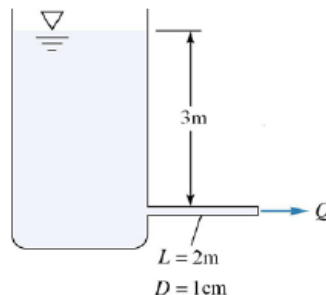
Un récipient cylindrique de 5 cm de diamètre, laisse écouler un liquide visqueux qu'il contient par un tube horizontal de diamètre 1 mm et de longueur 40 cm. Sachant qu'il a fallu 75 minutes pour que la charge en amont du tube passe de 5 à 2,5 cm, déterminer la viscosité cinématique du liquide (on négligera les effets dus aux extrémités du tube ; l'écoulement dans le tube est permanent de type Poiseuille :

$$Q_v = \frac{\pi}{128} \left(\frac{\Delta P}{\Delta L} \right) \frac{D^4}{\mu}$$



Exercice 7 :

Nous avons un réservoir très grand que nous voulons vidanger par gravité. Calculez le débit pour le cas (1) le fluide incompressible, (2) l'écoulement est permanent, (3) le diamètre du réservoir est beaucoup plus grand que celui de la conduite (on négligera les effets dus aux extrémités du conduite). $d = 0.9$ (densité) et $\mu = 0.0328$ kg.m⁻¹.s⁻¹.



Exercice 8 :

Déterminez la chute de pression dans une conduite horizontale de 300 m long et de 0.20 m de diamètre. La vitesse moyenne de l'eau est de 1.7 m/s, la densité de l'eau est de 999 kg/m³, sa viscosité cinématique est de 1.12E-6 m²/s et la rugosité absolue est de 0.26E-3 m.

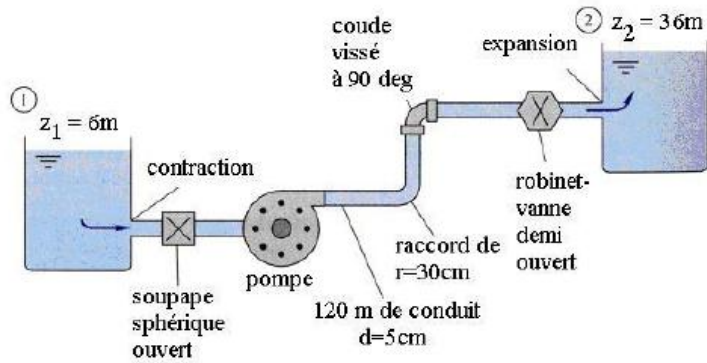
Exercice 9 :

Une perte de charge de 500 kPa est mesurée sur 200 m d'une conduite horizontale en fonte de 8 cm de diamètre transportant de l'eau à 20 °C. Estimer le débit en utilisant :

(a) le diagramme de Moody ; (b) une autre relation.

Exercice 10 :

L'eau ($\gamma = 9790 \text{ N/m}^3$, $\nu = 1.005 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) est pompée du réservoir 1 au réservoir 2 en utilisant un conduit de diamètre de 5 cm et de longueur de 120 m comme montré sur la figure ci-dessous. Le débit est de $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$. La rugosité relative est de $\varepsilon/D = 0.001$. Calculez la puissance théorique de la pompe.

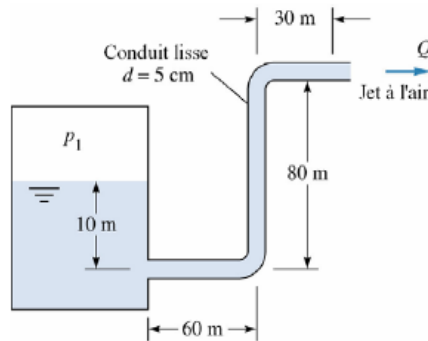


Nous pouvons à présent lister les coefficients de pertes mineures /singulières comme dans le tableau ci-dessous :

Accessoire	K
Contraction à l'entrée	0.5
Soupape sphérique ouverte	6.9
Raccord de $r = 30 \text{ cm}$	0.15
Coude de 90°	0.95
Robinet-vanne demi-ouvert	2.7
Expansion à la sortie	1.0
Total	12.2

Exercice 11 :

L'écoulement dans le système montré à la figure suivante est achevé par l'air comprimé. Déterminez la pression manométrique P_1 pour avoir un débit de $Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}$. Les données : $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.001 \text{ kg/m.s}$, $K_E = 0.5$, $K_S = 1$, $K_{\text{COUDE}} = 0.15$



Chapitre V

SYSTEME DE DISTRIBUTION DES EAUX (Type de réseau de distribution)

V.1. Introduction:

Le réseau de distribution doit être dimensionné en respectant les conditions:

- 1) Assurer une pression minimale au robinet le plus défavorisé de 0.3 bars au moins et 0.5 bars dans le cas de chauffe-eau;
- 2) Ne pas dépasser une pression de 4 bars car cela causerait des fuites, des bruits et un risque de détérioration du matériel;
- 3) Maintenir une vitesse $0,5 \text{ m/s} \leq U \leq 1 \text{ m/s}$.

V.2. Choix du type de réseau:

Il y a deux grandes famille de réseau:

V.2.1. Réseau ramifié:

Economique, mais en cas de panne toute la partie aval à l'endroit de la panne est pénalisée. Il est choisie dans les petites opérations: groupes d'habitations, lotissements, etc.

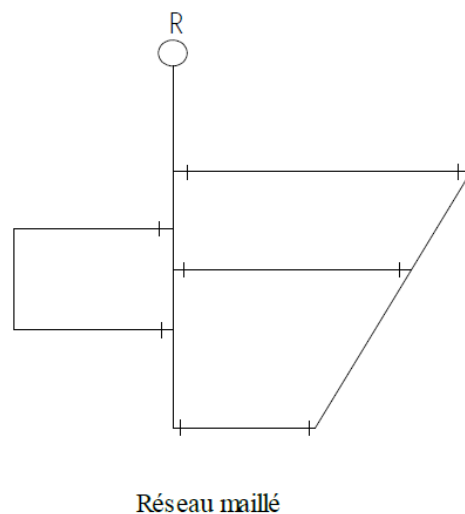
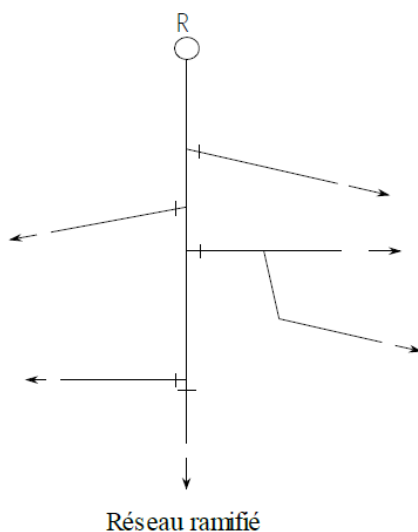


Figure V.1 : Schéma de type de réseau

V.2.2. Réseau maillé:

Plus coûteux, mais en cas de panne on peut isoler la conduite concernée et les autres abonnés sont alimentés par retour d'écoulement. Il est imposé sur les réseaux importants ou pour la desserte de bâtiments présentant des risques d'incendie. Toutefois, en raison de la sécurité qu'il procure, et dans la mesure de possible, on préfère ce type de réseau.

V.2.2.1. Détermination des débits aux nœuds pour les réseaux maillés:

Pour le calcul on fait l'hypothèse selon laquelle les besoins domestiques sont répartis régulièrement sur la longueur du réseau de distribution. Alors, on calcul:

1) **Le débit spécifique:**

$$q_{sp} = \frac{Q_p}{\sum L_i} \left(\frac{\ell}{s} / m\ell \right) \quad (V.1)$$

2) **Le débit en route de chaque conduite i :**

$$q_{ri} = Q_{i\text{ cons}} - Q_{i\text{ conc}} \quad (\ell/s) \quad (V.2)$$

Où :

$Q_{i\text{ cons}}$: Débit de consommation de la conduite i . Dans notre cas :

$$Q_{i\text{ cons}} = q_{sp} \cdot L_i \quad (V.3)$$

$Q_{i\text{ conc}}$: Débit concentré dans la conduite i . En général, on les prend :

$$Q_{i\text{ conc}} = 0$$

3) **Le débit nodale :**

C'est un débit concentré en chaque nœud, alimentant la population répartie autour de la moitié du tronçon de la conduite, ayant en commun les nœud considérés, ils sont déterminés par la formule:

$$q_{nj} = 0,5 \sum q_{ri} + \sum Q_{conc\ i} \quad (\ell/s) \quad (V.4)$$

Où :

q_{nj} : Débit en nœud ;

$\sum q_{ri}$: Somme des débits en route des tronçons reliés au nœud considéré ;

$\sum Q_{conc\ i}$: Somme des débits concentrées au niveau du nœud considéré.

V.2.2.2. Détermination des débits pour les réseaux ramifiés:

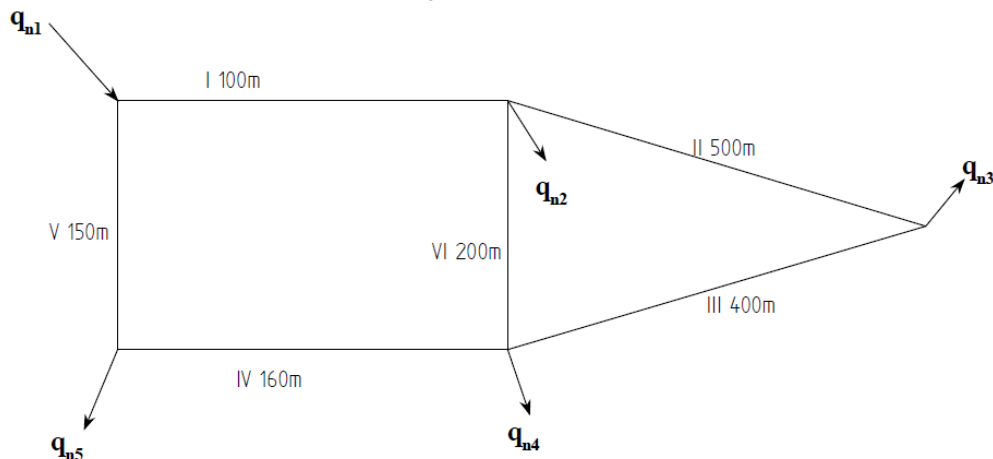
On calcul de la même manière les débits spécifiques et en routes que le réseau maillé, puis on affecte le débit cumulé à chaque conduite en commençant par les tronçons qui se trouvent le plus en aval.

Exemple d'application I:

Réseau maillé:

Soit le réseau maillé suivant. Déterminer les débits aux nœuds, q_{nj} . On donne :

$$Q_{h\text{ max}} = Q_{j\text{ max}} = 100 \text{ m}^3/j$$



Solution:

$$Q_{\text{max } j} = 100 \text{ m}^3/j = 1,157 \ell/s$$

$$\sum L_i = 10 + 150 + 160 + 200 + 500 + 400 = 1510 \text{ m}$$

Calcul de débit spécifique:

$$q_{sp} = \frac{Q_{h\text{ max}}}{\sum L_i} = \frac{1,157}{1510} = 7,66 \cdot 10^{-2} \ell/s/m\ell$$

Calcul des débits en route de chaque conduite:

Nœud	Tronçon	Longueur	q_{sp}	$0.5 \sum Q_r$	$Q_{conc i}$	$Q_{n j}$
		m	l/s/ml	l/s	l/s	l/s
2	I – II – VI	100 – 500 – 200	7.66×10^{-2}	0.345	0	0.345
3	II – III	500 – 400	7.66×10^{-2}	0.345	0	0.345
4	III – IV – VI	400 – 160 – 200	7.66×10^{-2}	0.291	0	0.291
5	IV – V	160 – 150	7.66×10^{-2}	0.176	0	0.176

$$q_{rI} = 100 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 7,66 \cdot 10^{-2} \ell/s$$

$$q_{rII} = 500 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 0,3830 \ell/s$$

$$q_{rIII} = 400 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 0,3066 \ell/s$$

$$q_{rIV} = 160 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 0,1533 \ell/s$$

$$q_{rV} = 150 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 0,1155 \ell/s$$

$$q_{rVI} = 200 \cdot 7,66 \cdot 10^{-4} = 0,1533 \ell/s$$

Calcul des débits aux nœuds:

$$q_{n2} = q_{rI} + 0,5(q_{rII} + q_{rVI}) = 0,345 \ell/s$$

$$q_{n3} = 0,5(q_{rII} + q_{rIII}) = 0,345 \ell/s$$

$$q_{n4} = 0,5(q_{rIII} + q_{rIV} + q_{rVI}) = 0,291 \ell/s$$

$$q_{n5} = 0,5(q_{rIV}) + q_{rV} = 0,176 \ell/s$$

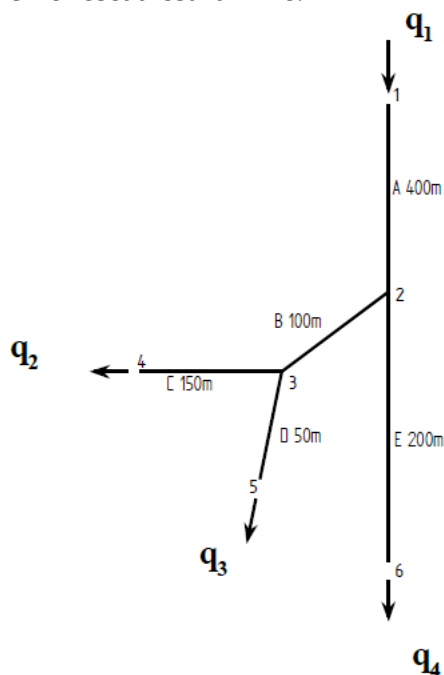
Vérification

$$q_{n2} + q_{n3} + q_{n4} + q_{n5} = 1,157 \ell/s = q_{hmax} = q_{n1}$$

Exemple d'application II:

Réseau ramifié:

Même données, sauf que cette fois ci le réseau est ramifié.



Solution

Débit spécifique:

$$q_{sp} = \frac{Q_{h\max}}{\sum L_i} = \frac{1,157}{1510} = 7,66 \cdot 10^{-2} \ell/s/m\ell$$

Débits en route:

$$q_{ri} = L_i \cdot q_{sp}$$

$$q_{rA} = 0,5144 \ell/s$$

$$q_{rB} = 0,2572 \ell/s$$

$$q_{rC} = 0,1286 \ell/s$$

$$q_{rD} = 0,0643 \ell/s$$

$$q_{rE} = 0,1929 \ell/s$$

Débits de calcul cumulés de chaque tronçon:

$$q_E = q_{rE} = 0,1929 \ell/s$$

$$q_D = q_{rD} = 0,0643 \ell/s$$

$$q_B = q_{rB} = 0,2572 \ell/s$$

$$q_C = q_E + q_D + q_{rC} = 0,3858 \ell/s$$

$$q_A = q_B + q_C + q_{rA} = 1,157 \ell/s$$

V.3. Calcul du réseau de distribution:

V.3.1. Calcul des pressions au sol:

On calcul les pressions au sol (ou pression de service du réseau) par la formule:

$$P_{Si} = C_{Pi} - C_{Ti} \quad (V. 5)$$

D'où :

P_{Si} : Pression au sol au point i ;

C_{Pi} : Cote piézométrique au point i ;

C_{Ti} : Cote du terrain au point i .

La pression au sol demandé au droit d'un immeuble :

$$P_{Sol} = n \cdot 3 + P_{min} \quad (V. 6)$$

Où le chiffre 3 représente la hauteur d'un immeuble et $P_{min} = 0.3$ à 0.5 bar .

V.3.2. Calcul des diamètres:

Après la détermination des débits aux nœuds, on suit les étapes suivantes:

- 1) Pour les réseaux ramifiés, on détermine les débits puis on calcul: les diamètres, pressions au sol, vitesses, ... On constate que le calcul de réseau ramifié est beaucoup plus simple que le réseau maillé.
- 2) Pour les réseaux maillés, on détermine les débits arbitraires dans chaque tronçon en se basant sur la loi de continuité et ce pour déterminer les diamètres avantageux selon le tableau suivant:

Tableau V.1 : Les diamètres avantageux

Diamètres (mm)	Débits limites (L/s)
80	<7.3
100	7.3 à 10.6
125	10.6 à 15.1
150	15.1 à 19.8
175	19.8 à 26.5
200	26.5 à 42
250	42 à 65
300	65 à 93

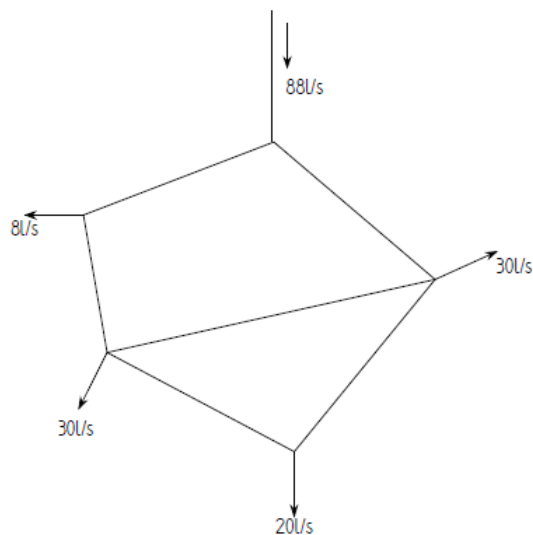
- 3) **Loi de continuité:** la somme des débits dans les conduites reliés au nœud **est égale** au débit en ce nœud.

$$\sum Q_i = q_{n j} \quad (V.7)$$

- 4) Évaluation des débits, vitesses et p.d.c dans chaque conduite ainsi que les charges, pressions au sol en chaque nœud. (on utilise souvent des logiciels appropriés).

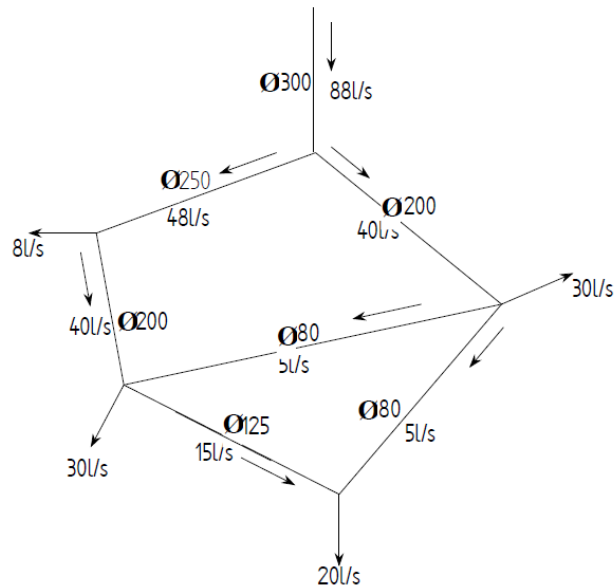
Exemple II:

Déterminer les diamètres avantageux du réseau maillé suivant:



Solution

D'abord, on détermine la répartition arbitraire des débits puis à l'aide du tableau précédent on donne les diamètres avantageux.



V.4. Pose des conduites:

V.4.1. La profondeur et la largeur du tranchée:

La profondeur du tranchée H varie en fonction du diamètre, de plus elle est choisie de façon à protéger la conduite contre les sollicitations des charges mobiles :

$$H = D + h_I + h_L \text{ (m)} \quad (V.8)$$

Où:

D : Diamètre de la conduite ;

h_I : Hauteur entre la surface du sol et la génératrice supérieur de la conduite. $h_{I \min} = 1\text{m}$;

h_L : Epaisseur de lit.

La largeur :

$$L = D + 2 \cdot 0,3 \text{ (m)} \quad (V.9)$$

V.4.2. Lit de pose:

Ce lit de pose est constitué de 15 à 20 cm de:

- ✓ Gravier, dans les terres ordinaires ;
- ✓ Pierre cassée à l'anneau de 5cm pour former drain, dans les terrains imperméables ou rocheux
- ✓ Un lit de béton maigre dans les parties rocheuses très en pente.

V.4.3. Remblai de la tranchée:

Le remblaiement se fait par couches successives arrosée et bien tassées, en commençant par terre fine. Au niveau des robinets on doit aménager des niches pour la manœuvre des vannes.

V.5. Équipement du réseau de distribution:

V.5.1. Robinets vannes:

Ils permettent l'isolement des divers tronçons du réseau, et le réglage des débits. Nous les plaçons à chaque nœud ou sur le parcours d'une longue conduite, (à chaque 150 à 600 m selon le diamètre de la conduite)

V.5.2. Bouches d'incendies:

Ces appareils sont placés en bordures des trottoirs espacés environs 200 m pour des risques importants et 400 m pour des risques faibles.



Photo V.1 : Bouche d'incendie

V.5.3. Robinets de décharges:

Ces robinets sont placés au niveau des points les plus bas du réseau.

V.5.4. Clapets:

Pour empêcher le retour de l'eau en sens inverse.

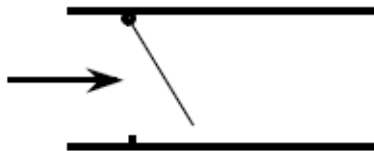


Figure V.1 : Bouche d'incendie

Travaux dirigés

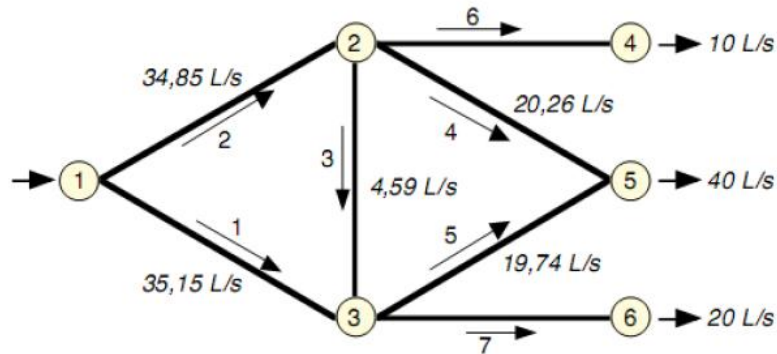
Exercice 1 :

Un réseau hydraulique est décrit ci-dessous. On néglige les pertes de charge singulières et l'énergie cinétique.

- 1) Vérifier si les valeurs des débits proposées comme solution sont bonnes (précision: 4 chiffres après le point) en justifiant votre réponse. Quel est le débit entrant au nœud 1 ?
- 2) Quelle est la charge piézométrique aux nœuds si celle du nœud 5 est 50 m d'eau ?
- 3) Déduire les pressions au sol à chaque nœuds si les cotes du terrain sont comme suit:
 $z_1=10m$, $z_2= 8m$, $z_3=8.6m$, $z_4= 9m$, $z_5=20m$, $z_6=21.5m$

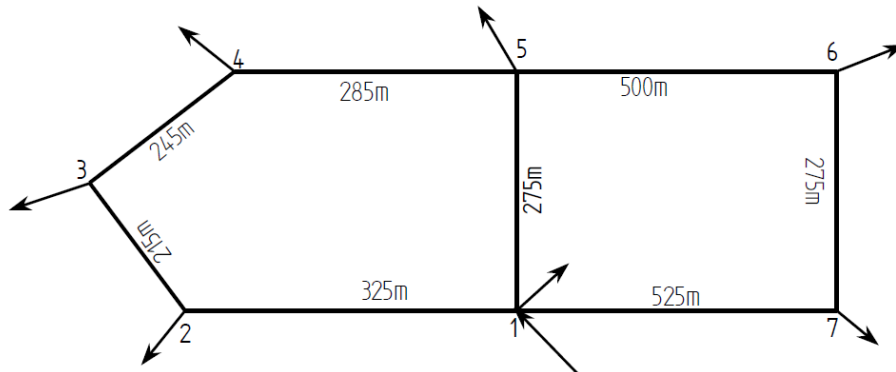
Indication:

la perte de charge est donnée sous la forme: $\Delta H = RQ^2$ où $R=500$ pour chaque conduite.



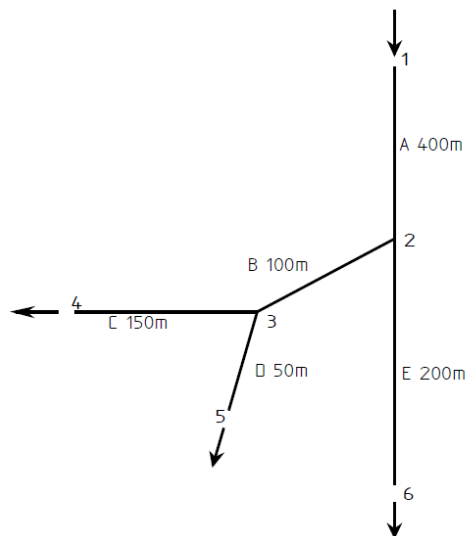
Exercice 2 :

Soit le réseau maillé suivant. Déterminer les débits aux nœuds $q_{n j}$. On donne $Q_{hmax}=300 \text{ m}^3/\text{h}$.



Exercice 3 :

Déterminer la répartition des débits dans chaque conduite sachant que $Q_{hmax}=50 \text{ m}^3/\text{h}$.



LES TRAVAUX A EXPOSER

Les Instruments De Mesure Des Fluides

1.Objectif :

Les objectifs de cette partie sont de connaître les principes instruments de mesure des fluides, dans les installations hydrauliques, a fin de permet aux étudiants l'approfondissement des connaissances relative aux écoulements en charges.

En effet, on demande aux étudiants de répondre à des questions bien précises et pertinentes, visent certains caractéristiques des instruments de mesure des fluides a titre d'exemples : Quel est leur rôle et leur mode opératoire.

Ce devoir pédagogique a motivé les étudiants à apprendre des recherches sérieuses. Où les étudiants respectent des règles de fond et forme.

2.L'activité Devoir :

Peut être demandée individuellement ou en groupe. Pour notre cas « les instruments de mesure des fluides » on préfère on demande à travailler en groupe, cet procédure aide les étudiants à travailler dans un esprit collectif, ce là permis a élargir le cercle de la recherche et acquérir un bon gain de changements des idées.

3.Présentation des devoirs :

Les devoirs doivent être agrafés avec la page de garde officielle, et doivent être présentés en format A4 et dactylographiés comme suit :

- ✓ Caractère : Times New Roman;
- ✓ Corps 12;
- ✓ Interligne simple;
- ✓ Marges : Haut et bas : 2 cm, gauche : 3 cm, droite : 2 cm.

- 1) L'introduction, qui doit être repérable, expose le schéma du développement. La définition du devoir constitue la base de l'étude.
- 2) Lorsqu'un verset est cité, la référence suffit.
- 3) Les livres et les sources utilisés doivent être mentionnés.
- 4) La conclusion doit montrer clairement ce que l'étudiant a tiré de son étude.

Instruction

Le devoir doit démontrer une bonne compréhension du sujet traité. L'étudiant construit son devoir sur la base des notes prises en cours, tout en ayant la possibilité de donner d'autres sources pour conforter la doctrine étudiée, ainsi que sa conviction personnelle.

Note :

La présentation et la propreté des devoirs comptent pour vingt pour cent de la note.

Les principaux instruments de mesures sont dans le tableau suivant :

Tableau 1 : Les principaux instruments de mesures

N°	Instrument de mesure	La nature de mesure
1	Balance de Mohr-Westphal	Mesure des densités des fluides
2	Viscosimètres à chute de bille	Mesure de la viscosité des fluides
3	Manomètre	Mesures des pressions statiques et totales
4	Sonde de Prandtl	Mesure des vitesses
5	Diaphragme et Rotamètre	Mesure des débits

Exemple Devoir N° 1 :

Balance de Mohr-Westphal

1.Introduction

Notions de base : La densité d'un liquide peut être déterminée très exactement à l'aide de la balance à un bras selon le principe de Mohr-Westphal:

Un corps descendant subit une poussée verticale orientée vers le haut lors de son immersion dans le liquide, ceci lui faisant apparemment perdre du poids. D'après sa valeur, la poussée verticale correspond au poids du liquide refoulé par le corps descendant et est donc proportionnelle à la densité du liquide. La perte de poids apparente est compensée sur le fléau par des curseurs. La densité du liquide est donnée directement par la position des curseurs.

Fig. 1 Montage expérimental avec la balance à un bras selon le principe de Mohr-Westphal

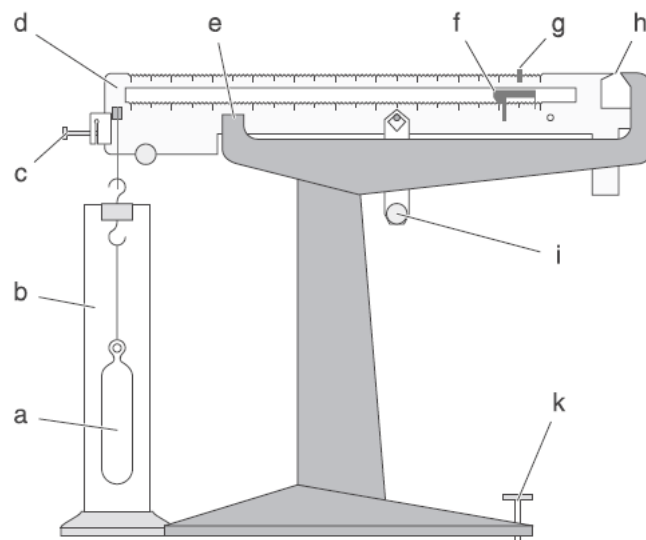


Figure.1 : Montage expérimental avec la balance à un bras selon le principe de Mohr-Westphal

Les éléments de la balance : (a) : Corps descendant , (b) : Verre pour immersion du corps , (c) : Tige compensatrice , (d) : Fléau , (e) : Appui central , (f) : Curseur 1 , (g) : Curseur 2 , (h) : Index , (i) : Masse suspendue , (k) : Vis de l'embase.



Figure.2 : Photo de la balance de Mohr-Westphal

Pour la température de référence $T = 20^\circ \text{C}$, il est ainsi possible de déterminer des densités de liquides entre $0,8 \text{ g cm}^{-3}$ et $1,1 \text{ g cm}^{-3}$ avec une précision de $\Delta r = 0,0003 \text{ g cm}^{-3}$. En dehors de ce domaine, l'affichage de la balance doit être corrigé, étant donné que la poussée aérostatique et les gouttes de liquide sur le fil du corps descendant interviennent dans la mesure.

2. Réalisation :

Une immersion incomplète du corps descendant dans le liquide étudié, le frottement du corps descendant sur la paroi du verre pour immersion, des bulles d'air sur le corps descendant et des gouttes de liquide sur l'attache de suspension du corps descendant risquent de fausser le résultat de la mesure.

2.1.Mode opératoire :

2.1.1.Montage :

Le montage expérimental est représenté sur la figure 1.

- 1° Mettre le fléau avec l'index incliné vers le bas dans le support et l'installer dans l'appui central ;
- 2° Nettoyer le corps descendant et l'accrocher dans l'attache de suspension ;
- 3° Amener le curseur 1 dans l'encoche «0,00», le curseur 2 dans l'encoche «0,0000» et accrocher la masse suspendue ;
- 4° Régler le zéro en faisant tourner la vis de l'embase, si besoin est, réajuster la tige compensatrice jusqu'à ce que les deux index soient face à face, au même niveau ;

2.1.Exemple mesure de la densité de l'eau pure :

- Décrocher le corps descendant du fléau et verser 90 ml d'eau pure dans le verre pour immersion ;
- Ternir le corps descendant par l'attache, l'immerger dans le liquide étudié, l'amener sous le fléau avec le verre pour immersion et l'accrocher dans l'attache de suspension ;
- Accrocher le thermomètre dans le verre pour immersion du corps ;
- Déplacer les deux curseurs jusqu'à ce qu'ils soient tous les deux exactement face à face, au même niveau ;
- Relever et noter la densité donnée par la somme des deux valeurs de graduation.

Exemple de mesure :

Mesure de la densité de l'eau pure:

$$T = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 0,9975\text{ g cm}^{-3}$$

Pour les instruments montrés dans le tableau ci-dessus, nous formulons les devoirs comme suit :

- 1) Introduction : (Définition et objectif)
- 2) Schéma simplifié avec indication des éléments de l'instrument.
- 3) Photo de l'instrument réel (en couleur)
- 4) Le mode opératoire avec exemple
- 5) L'erreur commet par cet instrument de mesure.
- 6) Conclusion

Exemple Devoir N° 2 :

Etude Des Méthodes De Mesure De Débit

1 - But de la manipulation

Déterminer le débit c'est mesurer le volume ou la quantité de matière qui traverse une surface donnée par unité de temps (la section de la conduite par exemple). C'est une notion très importante dont dépendent beaucoup de paramètres hydraulique. Et lors de cette expérience nous allons mesurer le débit via quatre méthodes :

- 1) La méthode du diaphragme ;
- 2) La méthode du venturi ;
- 3) La méthode du rotamètre ;
- 4) Le chronométrage direct pour un volume déterminé.

Les pertes de charge de chaque appareil sont mesurées directement et comparées entre elles au moyen d'un multi-manomètre.

2 - Description de l'appareil utilisé

L'eau traverse d'abord le venturi, passe ensuite par un rotamètre constitué d'un tube en verre calibré et un flotteur pour s'écouler enfin dans un diaphragme en plexiglas. A la sortie de l'appareil on peut mesurer le débit en chronométrant le remplissage d'une quantité précise du liquide.

FME18. Flow Meter Demonstration



Figure.3 : Photo du banc Hydraulique de mesure de débit

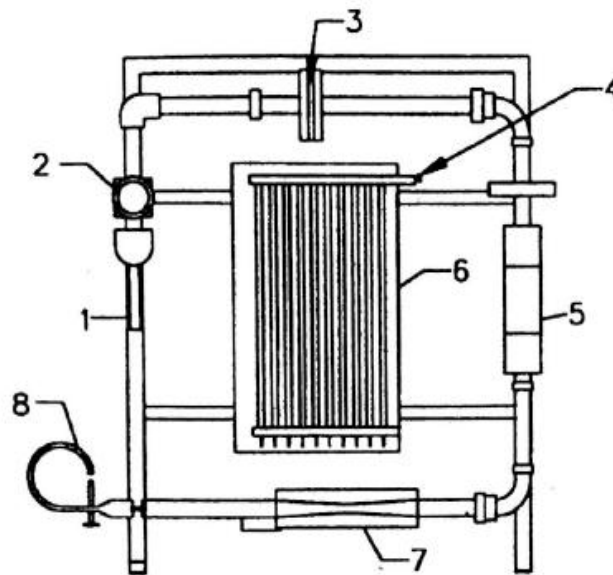
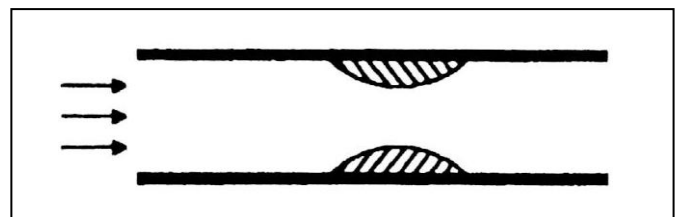


Figure.4 : Schéma du banc Hydraulique de mesure de débit

1	Raccord	Raccordement de la conduite d'évacuation
2	Vanne	Permet d'ajuster le débit de l'eau alimentant l'appareil
3	Diaphragme plexiglas	Permet l'étude d'un diaphragme. Il est équipé d'une prise de pression amont (6), d'une prise de pression aval (8), et d'une prise de pression en aval de l'orifice (7).
4	Valve	Permet d'introduire de l'air dans la partie supérieure du manomètre à colonne de liquide.
5	Débitmètre - Rotamètre	Mesure le débit d'eau alimentant le banc, Il est équipé d'une prise de pression amont (4) et d'une prise de pression aval (5),
6	Multi-manomètre à colonne de liquide (eau)	Le manomètre permet de mesurer la perte de charge sur les différents éléments. Il est constitué de 8 tubes.
7	Venturi en plexiglas	Permet l'étude d'un Venturi. Il est équipé d'une prise de pression amont (1), d'une prise de pression aval (3), et d'une prise de pression sur la gorge (2).

Dimensions du Venturi :

- Diamètre de la conduite en amont : 32mm
- $S_1 = 8.04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Diamètre de la gorge : 20mm
- $S_2 = 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Cône 21° ; cône amont 14°



Dimensions du diaphragme

- Diamètre de la conduite en amont : 35mm
- $S_1 = 9.62 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Diamètre de l'orifice en aval : 19mm
- $S_2 = 2.83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

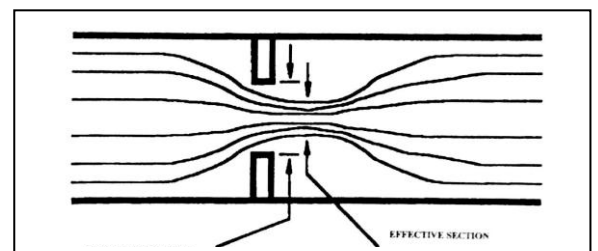


Figure.5: Schémas représentatifs de venturi et de diaphragme

3- Mode Opérateur

La procédure correcte à suivre pour le remplissage des tubes manométriques est la suivante :

- a) L'appareil étant branché au banc hydraulique, procéder au remplissage d'eau des conduites et du multi-manomètre de l'appareil ;
- b) Fermer la vanne du banc hydraulique et celle de réglage de débit de l'appareil ;
- c) Mettre en marche la pompe et ouvrir complètement la vanne de réglage du débit. Ensuite, ouvrir graduellement la vanne du banc hydraulique jusqu'à obtenir un débit important ;
- d) Attendre quelques minutes jusqu'à ce que tous les tubes manométriques soient complètement remplis d'eau et à ce que toutes les bulles d'air soient chassées de l'appareil et du multi-manomètre ;
- e) Fermer les deux vannes ;
- f) Ouvrir la vanne à air ;
- g) Ouvrir graduellement la vanne de réglage du débit de l'appareil. Vous aller observer les tubes monométriques se remplissent d'air de manière égale ;
- h) Lorsque la hauteur manométrique est la même dans tous les tubes qui composent le multi-manomètre, fermer les vannes de réglage de débit et d'air ;
- i) Une fois le réglage terminé, commencer les mesures de débit en agissant uniquement sur la vanne de réglage de débit.

4- Théorie de base :

1. Venturi et diaphragme :

Considérons l'écoulement dans deux sections (1) et (2) du Venturi ou du diaphragme et appliquons l'équation de la conservation de l'énergie. L'équation de Bernoulli peut être écrite :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Pour ces deux équipements $Z_1 = Z_2$ et $P = \rho g H$

L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \Delta H$$

L'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_{th} = V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad \text{d'où :} \quad V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1}$$

L'élimination de V_2 de l'équation de Bernoulli donne :
$$V_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$

L'expression du débit devient :

$$Q_{th} = S_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2g\Delta H}$$

ΔH est la différence de hauteur piézométrique.

Dans le cas d'un fluide réel, le débit réel $Q_{\text{réel}}$ est plus petit que le débit théorique Q_{th} , et l'on pose : $C_d = Q_{\text{réel}}/Q_{\text{th}}$ où C_d est le coefficient de débit ($C_d < 1$).

Le débit réel s'écrit finalement :

$$Q_{\text{réel}} = C_d \frac{S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{2g\Delta H}$$

$$\Rightarrow C_d = \frac{Q_{\text{réel}}}{S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta H}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}} \quad \text{Et en posant } \psi = S_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$

Donc :

$$C_d = \frac{Q_{\text{réel}}}{\psi \sqrt{\Delta H}}$$

1. Rotamètre

Le rotamètre est constitué d'un flotteur pouvant se déplacer dans un tube vertical transparent dont le diamètre est légèrement croissant. Le déplacement du flotteur est sensiblement proportionnel au débit. Le rotamètre peut être assimilé à un convergent suivi d'un divergent ou plutôt un élargissement brusque. La mesure du débit est donnée directement par la lecture en (l/h) de la hauteur du flotteur dans le tube gradué.

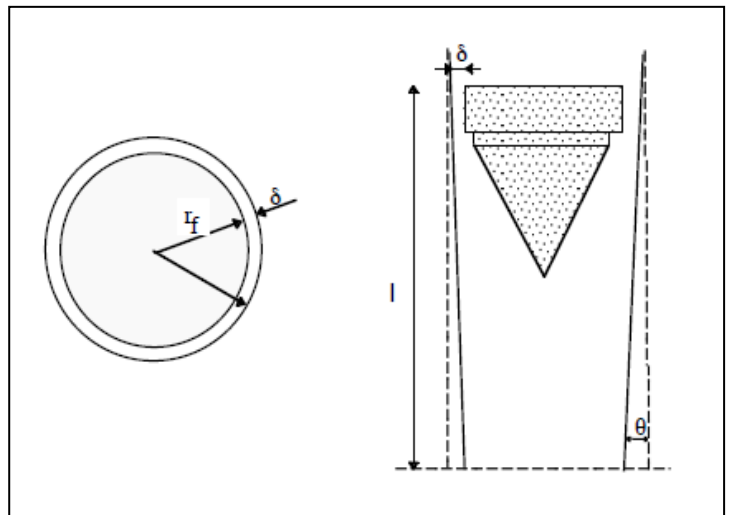


Figure.6 : Sections transverse et longitudinale du rotamètre

4- Expérience :

On varie le débit et on note les valeurs indiquées par les manomètres autour du venturi et du diaphragme, la hauteur du flotteur du rotamètre et le temps nécessaire pour remplir 5 litres d'eau :

Hauteur manométrique (mm)								Débit Rotamètre (ℓ /h)	Volume mesuré (ℓ)	Temps (s)	Débit mesuré (ℓ /s)
H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	H ₅	H ₆	H ₇	H ₈				

- 1. Tracer la courbe : $Q_{réel} = f(\sqrt{H_1 - H_2})$
- 2. Déduire la valeur de coefficient C_d .
- 3. Calculer le coefficient C_d du Venturi pour chaque essai.
- 4. Tracer la courbe $C_d = f(Q_{réel})$.
- 5. Donner vos commentaires et conclusions.

- 1. Tracer la courbe : $Q_{réel} = f(\sqrt{H_6 - H_7})$
- 2. Calculer le coefficient C_d du diaphragme ;
- 3. Donner la relation de calcul de la section effective S_2 de l'orifice du diaphragme qui vérifie $Q_{réel} = Q_{th}$

5. Calcul des pertes de charge :

Débit	Venturi			Rotamètre			Diaphragme			$\Delta H_{(1-8)}$
	H_1	H_3	$\Delta H_{(1-3)}$	H_4	H_5	$\Delta H_{(4-5)}$	H_6	H_8	$\Delta H_{(6-8)}$	

1. Tracer les courbes $\Delta H = f(Q_{Réel})$ des trois composants (Diaphragme, Venturi et Rotamètre) sur le même graphique.
2. Quel est le composant qui a la plus faible perte d'énergie ?
3. Comparer la somme des pertes de charge $[\Delta H_{(1-3)} + \Delta H_{(4-5)} + \Delta H_{(6-8)}]$ avec la perte de charge calculée entre l'amont du venturi et l'aval du diaphragme $\Delta H_{(1-8)}$?
4. Donner vos conclusions.

Note :

Les devoirs doivent être exposés par les groupes des étudiants. Cette tâche à intérêt primordial en raison que l'exposé oral entrecoupé d'occasions d'échanges : favorise la communication étudiants-professeur; favorise la communication étudiants-étudiants; donne aux étudiants l'occasion de profiter d'un certain climat de groupe et d'en vivre les expériences collectives.

Chapitre VI

LES ECOULEMENTS NON PERMANENTS DANS LES CONDUITES EN CHARGE

Introduction et définition :

Ce chapitre est consacré à l'étude des écoulements non permanents. Sont des écoulements qui varient dans le temps et dans l'espace. Le but est de déterminer les caractéristiques de l'écoulement en fonction des coordonnées spatiale (x) et temporelle (t).

- Décrire les mécanismes de circulation oscillante ;
- Ecoulements quasi-permanents vidange d'un réservoir ;
- Ecoulement transitoire (temps d'établissement de l'écoulement) ;
- Coup de bélier et protection des conduites.

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins les variations temporelles $\partial V / \partial t$ sont, dans certains cas, suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme une succession de régime permanent. On peut alors définir ainsi le régime quasi-permanent.

VI.1. Mécanismes de circulation oscillante :

Le nombre de **Strouhal** est un nombre sans dimension décrivant les mécanismes de circulation oscillante. Physiquement, il représente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité:

On le définit de la manière suivante :

$$S_{tr} = \frac{1}{t_c} \cdot \frac{L_c}{U_c} = f \frac{L_c}{U_c} \quad (VI.1)$$

Où :

$\frac{L_c}{U_c}$: Temps d'advection, c'est-à-dire le temps qu'il faut à une perturbation pour être advecté de l'entrée à la sortie du domaine ;

f : Fréquence d'émission de tourbillons ;

L_c : Longueur caractéristique (par exemple le diamètre hydraulique) ;

U_c : Vitesse de mouvement du milieu environnant.

(L'advection est le transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) d'un élément donné (tel que la chaleur, l'énergie interne (l'énergie interne représente l'ensemble de toutes les énergies qui se manifestent à l'échelle microscopique : l'énergie cinétique des particules, les énergies d'interaction, etc. Sa variation entre deux instants.

VI.1.1. Application :

Le nombre de **Strouhal** S_{tr} , joue un rôle important dans mécanique des fluides non seulement d'un point de vue académique, mais surtout pour le champ d'application. En fait, avoir une indication sur la fréquence de formation de tourbillons est très utile pour prédire les charges fluctuantes, à la fois dans la direction d'écoulement que dans la direction transversale, que le même sillage de Von Karman Il

induit à la fois sur le corps à partir de laquelle il se détache, ce qui sur les objets de celle-ci qui sont situés en aval et qui sont placés par le détachement des tourbillons.

Donc le nombre de **Strouhal** S_{tr} , permet de caractériser l'instationnarité du mouvement, notamment tourbillonnaire (f est la fréquence d'émission des tourbillons). Si le nombre de **Strouhal** S_{tr} est nettement inférieur à l'unité, l'écoulement est dit **quasi-stationnaire**.

VI.2. Vidange d'un réservoir :

Généralités:

Pour permettre le nettoyage des réservoirs, ainsi que d'éventuelles réparations, il est nécessaire de pouvoir les vidanger, au moyen d'une conduite généralement raccordée à la conduite de trop-plein. On a intérêt à n'effectuer une vidange que sur un réservoir presque vidé en exploitation.

Lorsque l'on désire assurer la distribution pendant la vidange d'un réservoir non compartimenté, il suffit de disposer d'un by-pass (circuit d'évitement contournant une installation, un dispositif) reliant la conduite d'amenée à la conduite de départ.

Remarque:

Le trop-plein a pour objet d'assurer sans déversement du réservoir l'évacuation du débit d'adduction (désigne l'ensemble des techniques permettant de transporter l'eau par canalisation de sa source à son lieu de consommation), pour le cas où la pompe d'alimentation ne serait pas arrêtée. Il doit donc être dimensionné pour ce débit, et conduire l'eau à l'extérieur en tenant compte des pertes de charge et en limitant la vitesse dans la conduite de trop-plein à 3 ou 4 m/s. Le trop-plein est donc un système permettant la régulation, par débordement, du niveau de l'eau d'un réservoir ou d'un récipient. Il (le trop-plein) consiste à éviter un remplissage excessif pouvant causer des dommages supérieurs à ceux éventuellement acceptés par un débordement contrôlé.

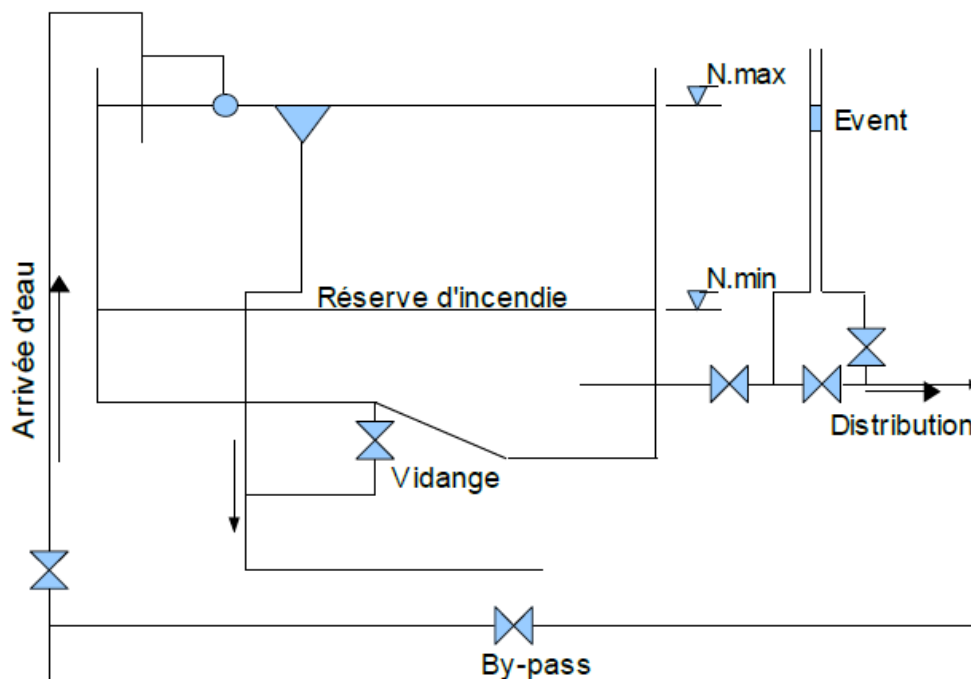


Figure VI.1 : Schéma du fontainerie d'équipement

VI.2.1. Vidange d'un réservoir vers une rivière, vidange d'un réservoir vers un autre réservoir:

VI.2.1. Vidange d'un réservoir vers un autre réservoir:

1. En utilisant une conduite de section circulaire de diamètre constant, raccordée deux réservoirs, à pour but d'un vidange.

Le schéma ci-dessous présente diagramme de charge hydraulique.

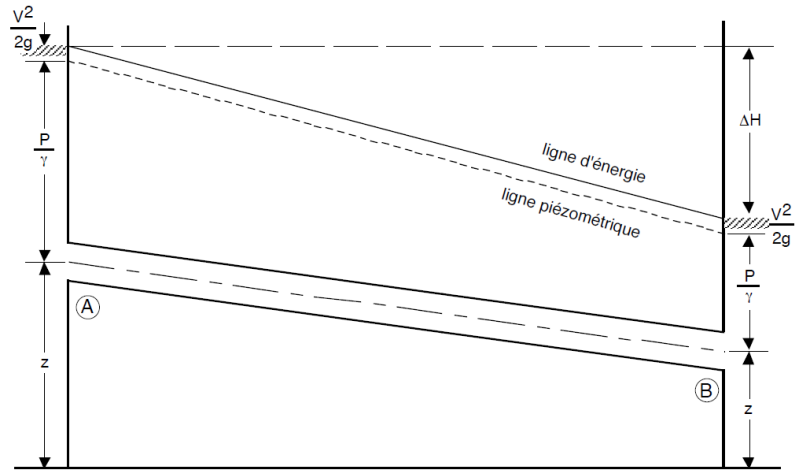


Figure VI.2 : Conduite de diamètre constant entre deux réservoirs.

Dans cette configuration, on peut évaluer le débit qui passe d'un réservoir à l'autre en utilisant l'équation de Bernoulli (Chq.v). Sachant que la charge dans le réservoir du côté A est

$$H_A = \frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{V_A^2}{2g}$$

Et que, pareillement pour le côté B :

$$H_B = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

En tenant compte des pertes de charge, on obtient :

$$H_A - H_B = \Delta H$$

La perte de charge totale étant causée par le frottement dans la conduite si on néglige les pertes locales aux entrée et sortie des réservoirs, donc :

$$\Delta H = \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2$$

La perte de charge totale étant égale à la différence de niveau entre les réservoirs, seul le débit est inconnu :

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8 \frac{fL}{D^5}}} \quad (VI.2)$$

1. Cette fois ci on utilise une conduite de diamètres différents entre deux réservoirs avec perte de charge locale à la restriction :

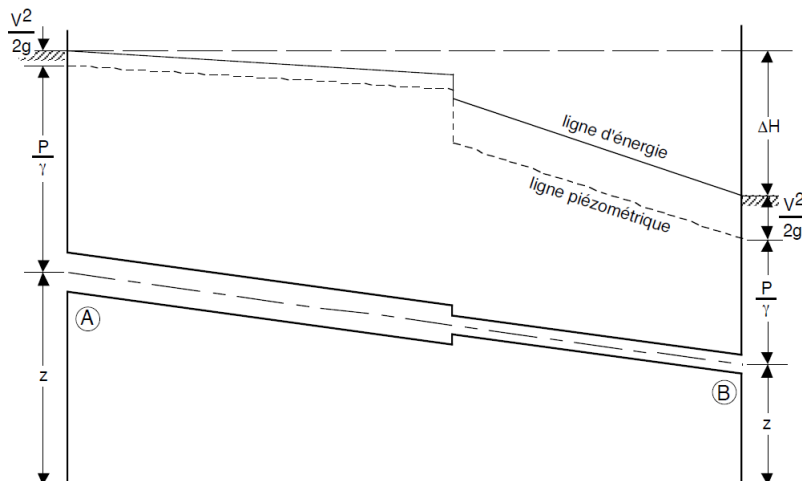


Figure VI.3 : Conduite de diamètres différents entre deux réservoirs.

Deux aspects sont à considérer :

- 1) Le même débit traverse les deux conduites ;
- 2) La perte de charge totale est égale à la somme des pertes par frottement des deux conduites de longueur L_1 et L_2 . Plus la perte singulière dans le rétrécissement.

On peut donc écrire :

$$\Delta H = \frac{8}{g\pi^2} \left(\frac{fL_1}{D_1^5} + \frac{fL_2}{D_2^5} + \frac{k_s}{D_2^5} \right) Q^2$$

D'où :

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8 \left(\frac{fL_1}{D_1^5} + \frac{fL_2}{D_2^5} + \frac{k_s}{D_2^5} \right)}} \quad (VI.3)$$

3. Conduite entre un réservoir et une sortie à l'air libre (rivière)

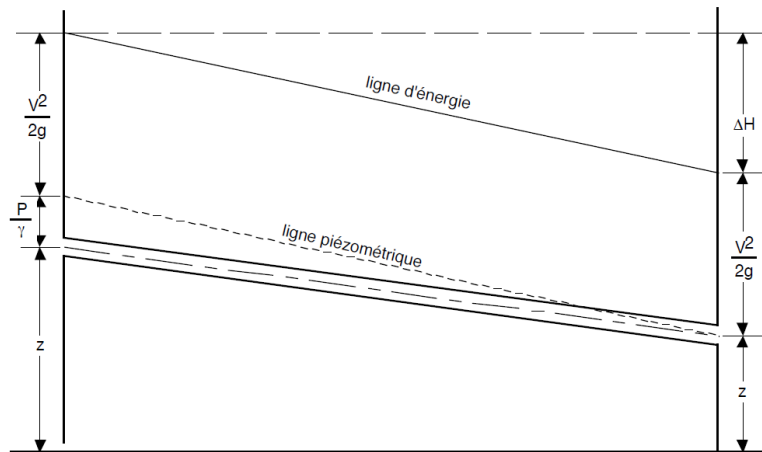


Figure VI.4 : Conduite entre un réservoir et une sortie à l'air libre (rivière)

Ici puisque l'écoulement sort en B à la pression atmosphérique, $P_B = 0$ et V_B est inconnu (comme on n'arrive pas dans un réservoir dont le niveau est connu, le niveau de charge nette est inconnu).

On écrit alors :

$$H_A - \left(Z_B + \frac{V_B^2}{2g} \right) = \Delta H$$

En posant :

$$V^2 = \frac{Q^2}{S^2} \quad \text{avec, pour une conduite circulaire : } S = \pi D^2/4$$

Il vient :

$$H_A - Z_B = \frac{8}{g\pi^2 D^2} \left(1 + \frac{fL}{D} \right) Q^2$$

finalement :

$$Q = \pi D \sqrt{\frac{g(H_A - Z_B)}{8 \left(1 + \frac{fL}{D} \right)}} \quad (VI.4)$$

VI.3. Les écoulements transitoires

Introduction :

Depuis plus d'un siècle, nombreuses ont été les études théoriques et expérimentales portant sur les écoulements transitoires en conduites. Du point de vue pratique et industriel, on s'est surtout intéressé à l'estimation des pressions provoquées par le phénomène dit de coup de bélier, au nom suffisamment évocateur des dommages possibles sur les canalisations et le matériel hydraulique. Les circonstances où peuvent apparaître ces variations de pression suite de perturbations volontaires (changement de régime) ou accidentelles (rupture de conduites, arrêt de pompes) sont nombreuses.

VI.3.1. Protection contre les coups de bélier

VI.3.1.1. Définition du coup de bélier:

Le coup de bélier est un phénomène de propagation d'ondes de surpression et de dépression importantes ; entraînent souvent des ruptures spectaculaires de conduites et de destruction d'appareil de pompage.

VI.3.1.2. Les causes du coups de bélier sont:

1. Arrêt brutal des groupes alimentant la conduite ;
2. Fermeture rapide d'une vanne ;
3. Démarrage des pompes alimentaires ;
4. Fonctionnement des pompes à puissance variable.

L'amplitude du coup de bélier, le changement de pression transitoire dans une conduite lors d'un changement instantané du débit, s'exprime ainsi:

$$\Delta h(max) = \frac{a \cdot \Delta v}{g} \quad (m) \quad (V.10)$$

Où:

Δh : Le changement de pression en mètres de colonne de liquide;

a : Vitesse de propagation de l'onde de pression dans la tuyauterie en (m/s);

Δv : Le changement de vitesse de la colonne de liquide en (m/s);

g : L'accélération de la gravité, 9.81 m/s^2 .

L'équation ci-dessus donne une première indication de l'ordre de grandeur de la pression transitoire qui peut être développée.

Exemple:

Calculer le changement de la pression si la conduite est:

- 1) En polyéthylène $a=250 \text{ m/s}$;
- 2) En acier $a=1000 \text{ m/s}$.

On donne $\Delta v = 1 \text{ m/s}$

Solution:

1. En polyéthylène:

$$\Delta h(max) = \frac{a \cdot \Delta v}{g} = \frac{250 \cdot 1}{9,81} = 25.5 \text{ m} = 2,55 \text{ bar}$$

2. En acier:

$$\Delta h(max) = \frac{a \cdot \Delta v}{g} = \frac{1000 \cdot 1}{9,81} = 102 \text{ m} = 10,2 \text{ bar}$$

VI.3.2. Moyens de protections:

Il y a plusieurs moyens pour éviter ce phénomène, nous indiquons aux des plus utilisés:

1. Volant d'inertie
2. Soupape de décharge
3. Soupapes d'admission et de purge d'air
4. Cheminée d'équilibre (pour les adductions gravitaires)
5. Réservoir d'air:

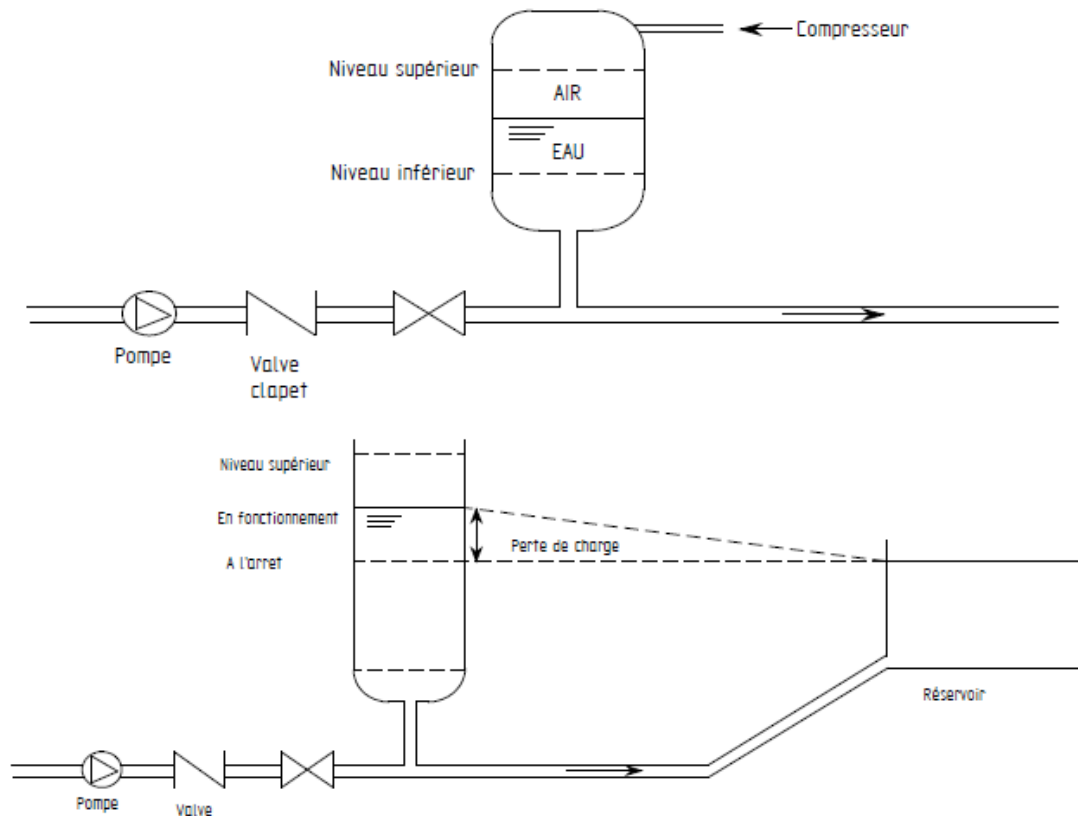


Figure V.1 : Moyens de protections contre le coup de bélier

VI.3.3. Divers types de protections

II.3.3.1. Protection contre la corrosion interne et externe:

La protection se fait soit en reliant la conduite à un métal convenablement choisie (zinc, magnésium) soit en portant la conduite à un faible potentiel. De plus, on remédie efficacement contre la corrosion interne et externe en enduisant la conduite d'un revêtement protecteur isolant de l'intérieur et de l'extérieur.

VI.3.3.2. Protection contre la présence d'air:

Nous prévoyons de doter l'adduction de ventouses installées aux hauts du réseau et de robinet de décharges installés aux points bas.

VI.3.3.3. Protection contre la poussée d'eau:

Des butées en béton massif seront prévues aux endroits des coudes pour s'opposer à la pression de l'eau.

Travaux dirigés

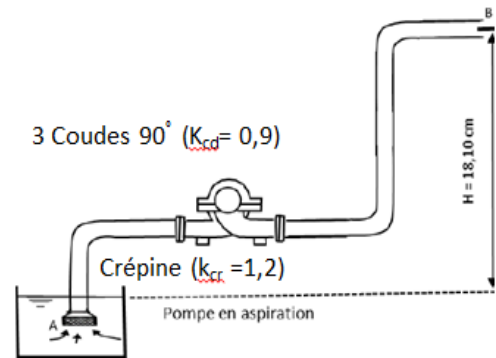
Exercice 1 (Extrait de l'examen)

Une pompe doit refouler un débit volumique de 5 l/s au moyen d'un tuyau de 10 cm de diamètre. La longueur de la conduite d'aspiration est de $5,20 \text{ m}$ et celle de la conduite de refoulement est de $317,40 \text{ m}$. La différence de niveau entre la surface d'eau d'aspiration et la sortie libre de la conduite est de $18,10 \text{ m}$.

- 1) Calculer les pertes de charge linéaires. (1pts)
- 2) Calculer les pertes de charge singulières. (1pts)
- 3) Quelle est la puissance théorique de la pompe? (2pts)
(rugosité $\varepsilon=0,046 \text{ mm}$, $\nu=1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Utiliser seulement la formule de Swamee et Jean (1976)

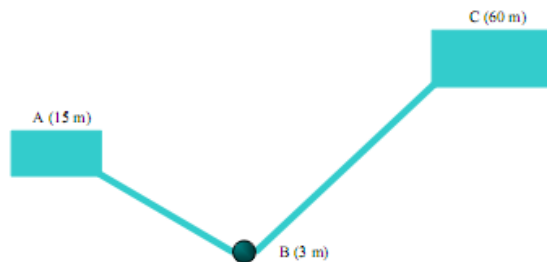
$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2}$$



Exercice 2

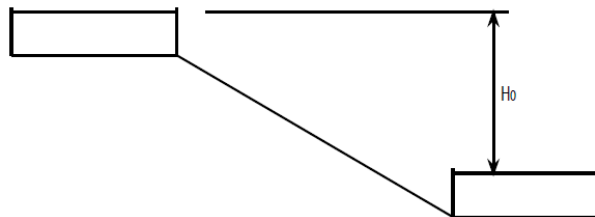
Une pompe (débit 160 l/s), située en B à la cote 3 m , permet de remonter de l'huile (masse volumique 760 kg/m^3), du réservoir A (cote 15 m) au réservoir C (cote 60 m). Les conduites ont un diamètre égal à 30 cm . L'énergie perdue globalement par le fluide entre A et B correspond à $2,5 \text{ m}$ d'huile et à $6,5 \text{ m}$ d'huile entre B et C.

Calculer l'énergie fournie par la pompe. Tracer la ligne de charge



Exercice 3

Le niveau de réservoir amont (voir figure) est de 10 m et que celui du réservoir aval est de 40 m . Calculer le point de fonctionnement pour des conduites de 1 km de long et de 50 cm de diamètre chacune de coefficient de frottement $f=0,02$ (on négligera les effets dus aux extrémités du conduit). Avec une pompe de courbe caractéristique : $H(Q) = 40 - 5Q^2$.

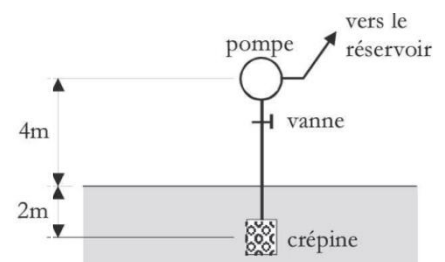


Exercice 4

Vérifions s'il y a risque de cavitation pour la pompe du cas montré à la figure ci-dessous

Les données du problème sont :

- L'eau à 20°C ,
- Coefficient de frottement $f=0,025$
- Les pertes de charge singulières : crépine ($K=10$), vanne ($K=3$),
- Diamètre de la conduite d'aspiration = $0,075 \text{ m}$,
- Pression atmosphérique standard = 101 KPa ,
- Pression de vapeur = 2340 Pa
- Débit pompé $Q=5,0 \text{ l/s}$
- Le $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$ est de $4,5 \text{ m}$ pour le débit de fonctionnement de 5 l/s



Références bibliographiques

- A. Lencastre. (1966). Hydraulique générale, Ed. Eyrolles, Paris,
- B. Achour. (2007). Calcul des conduites et canaux par la MMR/Tome 1/Conduites et canaux en charge. Larhyss / Edition Capitale.
- B. Remini et S. Benmamar. (2005). Mécaniques des fluides, Editions Madani, ISBN : 9961-1-0356-4
- F, G. Brière. (2000). Distribution et collecte des eaux. Presse international polytechnique, ISBN : -10 2-553-00775-2
- J. Vazquez et M. Dufresne. (2012), Hydrostatique et hydraulique en charge. Formation Mastère Eau Potable et Assainissement. Engees edition.
- N. Sad Chemloul. (2013), Mécaniques des fluides. Les manuels de l'étudiant. Pages bleues Internationales.
- M. Carlier, (1986). Hydraulique générale et appliquée, 3ème édition, Eyrolles, Paris.
- M. Dougha et M. Hasbaia. (2011), Mécanique des fluides , O.P.U. I.S.B.N : 978. 9961.0.1540.7
- O. Cadot. (2015). Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA-ParisTech 2A, HAL Id: cel-01228137.
- P. Finaud-Guyot et P,A. Garambois. (2020), Mécanique des fluides, Hydraulique en charge et Hydraulique à surface libre. Polytech Montpellier , France.
- R. Ben Hamouda. (2008), Notions de mécanique des fluides, Cours et exercices. Centre de Publication Universitaire
- R. Ghernaout. (2013), Mécanique des fluides et hydraulique : Cours et exercices. O.P.U. I.S.B.N : 9789961.0.1327.4
- S. Bennis. (2007). Hydraulique et hydrologie. 2^e édition Presse de l'université du Québec. I.S.B.N : 978-2-7605-1521-5
- Walter H. Graf and M. S. Altinakar, (1995), Hydrodynamique, Presses Poly techniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Yunus A. Çengel, John M. Cimbala. (2006). Fluid mechanics: fundamentals and applications. 1st. ed. McGraw-Hill.

https://team.inria.fr/lemon/files/2019/11/Poly_Hydraulique_20192020_light.pdf

http://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/fourar_ali/files/ecoulement_permanent_stationnaire.docx_2_1.pdf

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

https://conseils.xpair.com/consulter_parole_expert/protection-reseau-eau-potable.htm