



Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



N° d'ordre...

N° de série..

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MASTER en Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

**Uniformly bounded and Lipschez of superposition
operators in φ - variation**

Présenté par:
KHADRAOUI Brahim

devant le jury composé de :

Président :	Mostefa NADIR	Prof	Univ. M'Sila
Encadreur	Bachir GAGUI	MC	Univ. M'Sila
Examineurs	Noui DJAIDJA	MAA	Univ. M'Sila

Année universitaire: 2019 - 2020

DEDICACES

Avec l'aide de dieu le tout puissant, j'ai pu achever ce modeste travail que je dédie:

A ma très cher femme dont l'aide et les encouragements permanents m'a permis de poursuivre mes études dans les meilleures conditions. Je la remercie infiniment.

En souhaitant que dieu l'accorde longue vie, plein de bonheur et de prospérité.

A mes chers enfant.

A toutes mes amies et mes collègues.

tous ce qui me sont chers, de près ou de loin.

KHADRAOUI Brahim

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force, le courage et la patience d'accomplir ce présent travail.

*Ce mémoire a été réalisée, sous la direction de Monsieur **Dr. Bachir gagui**, Professeur à l'université Mohamed Boudiaf M'sila, que je tiens à lui exprimer ici ma gratitude et le remercier vivement pour m'avoir proposé le sujet de Ce mémoire et avoir accepté de m'encadrer avec beaucoup de patience, le sérieux et la compétence qui le caractérisent. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie aussi vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.*

*Je remercie ensuite Monsieur **Dr. Mostefa NADIR** d'avoir accepté d'être président du jury et aux Messieurs **Dr. Noui DJAIDJA** d'en être examinateurs et d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.*

*Ensuite, je remercie Monsieur **Dr. Aissa Guesmia** Professeur à l'université de Lorraine France, qui n'a pas lésiné de mes instructions et mes conseils.*

*De même je remercie vivement Monsieur **Abdelkebir Saad** Professeur à l'université Mohamed Boudiaf M'sila, qu'il ne m'a pas épargné les références.*

*Mes sincères remerciements à **ma femme** dont le travail n'aurait pu aboutir sans son inépuisable soutien et encouragements. Qu'elle trouve dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de ses efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.*

Je tiens également à remercier mes enfants pour leur présence et leur soutien constant..

De tous mon cœur je remercie ma belle-famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin Je tiens à remercier toutes mes amies et mes collègues pour toute leur compréhension et encouragement dans la réalisation de ce travail.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقديم دراسة لبعض خواص المؤثرات غير الخطية.

في الفصل الأول ، نذكر بعض أدوات التحليل التابعي التي تفيدنا في بقية المذكرة (فضاءات لوبيغ وبعض خواص المؤثرات الخطية في الفضاءات النظمية).

في الفصل الثاني ، نقدم تعريفات لمؤثرات التركيب (مؤثرات نيميشكي) والنظريات الرئيسية حول خواصها (الاستمرار والمحدودية في فضاءات لوبيغ).

1 . الاستمرار والمحدودية لمؤثر نيميشكي $Fu(x) = f(x, u(x))$ في فضاءات

لوبيغ L^p .

2 . الاستمرار والمحدودية لمؤثر نيميشكي $Fu(x) = f(x, u(x))$ في فضاءات

لوبيغ $L^{p(x)}$.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire est de présenter quelques propriétés d'opérateurs non linéaires .

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques outils d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder la suite du mémoire (espaces de Lebesgue L^p et $L^{p(x)}$, et quelques propriétés des opérateurs linéaires).

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions des opérateurs de superpositions (opérateurs de Nemysky) les principaux théorèmes sur les propriétés de l'opérateur de Nemysky.

1. *Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky*

$Fu(x) = f(x, u(x))$ dans l'espace L^p .

2. *Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky*

$Fu(x) = f(x, u(x))$ dans l'espace $L^{p(x)}$.

ABSTRACT

The objective of this memory is to present some properties of nonlinear operators. In the first chapter, we recall some functional analysis tools useful for approaching the rest of the memory (Lebesgue spaces L^p and $L^{p(x)}$, and some properties of linear operators).

In the second chapter, we present the definitions of the superposition operators (Nemyshky operators) and the main theorems on the properties of the Nemyshky operator.

- 1. Continuity and boudedness of the Nemyshky operator $Fu(x) = f(x, u(x))$ in the space L^p .*
- 2. Continuity and boudedness of the Nemyshky operator $Fu(x) = f(x, u(x))$ in the space $L^{p(x)}$.*

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : Notions fondamentales et préliminaires

1 – Espaces	04
1.1- Norme	04
1.2- Espaces Normés	04
1.3- Espaces de Banach	06
1.4- Espaces de Lebesgue L^p	10
1.4.1- Définitions et premières propriétés	10
1.4.2 - Espaces L^∞	15
1.5 – Espaces de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}$	15
2 - Opérateurs linéaires	17
2.1- Définitions et exemples	17
2.2- Opérateurs continus	18
2.3 - Opérateurs bornés	19
2.4 - Principe de la borne uniforme	22

Chapitre II :

3- Opérateurs non linéaires	24
3.1- Opérateur de Nemysky	24
3.2- Théorème de Carathéodory	24
3.3- Domaine de définition de l'opérateur de Nemysky	25
3.4- Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky dans l'espace L^p	26
3.5- Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky dans l'espace $L^{p(x)}$	31
Bibliographie.....	39

INTRODUCTION

Les propriétés des opérateurs de composition, comme des opérateurs non linéaires, ont été étudiées par des nombreux auteurs. Cette notion s'est imposée, en raison de son importance, et a influencé certaines autres branches des mathématiques, telle que la théorie des équations intégrales, équations différentielles, calcul variationnel ou en théories d'optimisation. Il y a plusieurs littératures consacrées aux applications des résultats liés à la théorie de l'économie, l'ingénierie, la science de gestion, la théorie des probabilités et d'autres sciences appliquées.

*Dans ce mémoire, sous le titre " **les propriétés des opérateurs de Nemyshky dans les espaces de Lebesgue L^p et $L^{p(x)}$** ", nous proposons de donner des théorèmes à des conditions de continuité et de bornitude de l'opérateur de Nemyshky (de composition) dans les espace L^p et $L^{p(x)}$.*

Ce mémoire est scindé en deux chapitres. Dans le premier, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires avec des outils d'analyse fonctionnelle essentiels à l'atteinte des objectifs visés par le présent mémoire. Nous donnons de brefs de rappels de quelques notions, théorèmes et résultats sur les espaces normés, espaces de Banach. On présente ensuite d'une façon un peu plus détaillée les espaces de Lebesgue L^p et $L^{p(x)}$. On termine par les opérateurs linéaires et nous mentionnons quelques théorèmes et certaines propriétés que nous utilisons dans l'autre chapitre (types de continuité et bornitude dans les espaces normés).

*Dans le deuxième chapitre, nous avons commencé notre études par définition d'opérateur de Nemyshky à partir de la fonction de **Carathéodory** (fonction satisfaisant les conditions de Carathéodory), i.e.,*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, et soit $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction satisfaisant les conditions de Carathéodory suivantes:

- (i) $f(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est continue presque pour tout $x \in \Omega$;
- (ii) $f(\cdot, \xi): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

Soit $u \in L^p(\Omega)$: On peut définir une autre fonction par composition $F(u)(x) := f(x, u(x))$, p.p. $x \in \Omega$. **(1.1)**

L'opérateur de composition F est appelé l'opérateur de Nemyshky engendré par f .

Ensuite on a consacré un théorème plus important sur les conditions de Carathéodory qui est le théorème de Carathéodory.

Si la fonction $u: M \subset \mathbb{R}^N \rightarrow U$ est mesurable, alors la fonction $F: M \rightarrow Y$ est aussi mesurable à condition que les assertions suivantes soient satisfaites :

- (i) L'ensemble M est mesurable et U et Y sont des espaces de Banach réels séparables.
- (ii) La fonction $f: M \times U \rightarrow Y$ satisfait les conditions de Carathéodory.

Précisons en outre, nous utilisons ce théorème pour étudier la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemyshky dans l'espace L^p .

A cet égard, nous obtenons le théorème suivant :

Soit $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisant les conditions de Carathéodory. Soient $p, q \in [1, \infty[$, $k \in L^q(\Omega)$. Supposons que

$$|f(x, \xi)| \leq C|\xi|^{\frac{p}{q}} + k(x), \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Alors l'opérateur de Nemyshky F défini par **(1.1)** est une application bornée et continue de $L^p(\Omega)$ à $L^q(\Omega)$.

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin des théorèmes que nous devons étudier appuyées par des preuves. Etant donné que l'opérateur de Nemyshky n'est pas linéaire, la preuve de théorème de continuité et de bornitude vise à le limiter à une application linéaire.

Enfin, nous généralisons les résultats obtenus pour l'espace L^p à l'espace $L^{p(x)}$. Nous allons illustrer que la continuité et la bornitude de l'opérateur de Nemyshky dans l'espace $L^{p(x)}$, car cet espace de Lebesgue a une variable exposant, et sa norme est différente que la norme dans l'espace L^p .

Nous avons étudié la continuité et la bornitude par ce théorème,

Soit $f: \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait la condition de croissance

$$|f(x, u)| \leq C_1(x) + C(x) \sum_{i=1}^M |u_i|^{p_1(x)/p_2(x)}, x \in \Omega, u \in \mathbb{R}^M,$$

où $C_1 \in L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ et C est une fonction non négative de $L^\infty(\Omega)$. Alors $N_f : N_f(u)(x) = f(x, u(x))$ est un opérateur continu et borné bien défini de $[L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M$ dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$.

Pour prouver ce théorème, nous avons utilisé la convergence des suites des fonctions dans l'espace $L^{p(x)}$, lemme de Brézis, et l'inégalité de Hölder.

Nous avons conclu l'étude avec le cas particulier $M = 1$, par le théorème suivant :

Si $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Caratheodory vérifiant

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \text{ pour tout } x \in \Omega, u \in \mathbb{R},$$

$p, q \in C_+(\bar{\Omega})$, $a \in L^{q(x)}(\Omega)$, $a(x) > 0$ et $b > 0$. Alors l'opérateur de Nemyshky N_f défini par $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$, de $L^{p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$, est un opérateur continu et borné.

Chapitre I: Notions fondamentales et préliminaires

1- Espaces. Voir [13].

1.1 - Norme

Définition 1.1.1.

Soit E un espace vectoriel sur K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Une fonction notée par $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** sur E si elle vérifie les conditions suivantes:

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation)
- 2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K; \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)
- 3) $\forall x, y \in E; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

1.2 - Espaces Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). On dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$. On le note par le couple $(E, \|\cdot\|)$

Remarque 1.2.1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Les boules et les sphères peuvent être définis en terme de norme comme suis:

- La boule ouverte $B_E(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble
$$\{x \in E; \|x - x_0\| < r\}$$
- La boule fermée $\bar{B}_E(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r est l'ensemble
$$\{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\}$$
- La sphère $S_E(x_0, r)$ de centre x_0 de rayon r est l'ensemble
$$\{x \in E; \|x - x_0\| = r\}$$

Exemple 1.2.3.

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Il est facile d'établir que la fonction

$x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{i=1..n} |x_i|$ est une norme sur \mathbb{R}^n

Fixons maintenant un réel $p \geq 1$, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{R}^n

L'inégalité triangulaire $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, qui n'est pas triviale si $p > 1$, est appelé l'**inégalité de Minkowski**⁽¹⁾

Remarque 1.2.4.

L'inégalité de Minkowski se montre à l'aide de l'**inégalité de Hölder**⁽²⁾, qui est valable sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{C}^n

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \|x\|_p + \|y\|_q,$$

où $1 \leq p \leq \infty$ et que q est l'exposant conjugué de p défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$)

Exemple 1.2.5.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on peut munir l'ensemble $l^p(K)$ des suites de K de puissance p -ième sommable d'une structure d'espace vectoriel normé en posant

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{l^\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \text{ pour } p = \infty$$

L'inégalité triangulaire se démontre comme dans l'exemple précédent en faisant tendre n vers ∞ .

L'ensemble $l^p(K)$ des suites bornées de K peut être muni de la norme $\|x\|_{l^\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

¹- **Hermann Minkowski**, né à Alexotas le 22 juin 1864 et mort à Göttingen le 12 janvier 1909, est un mathématicien et un physicien théoricien allemand.

²- **Otto Ludwig Hölder** (1859-1937) est un mathématicien allemand né à Stuttgart, capitale de l'actuel Land Bade-Wurtemberg (Allemagne).

Exemple 1.2.6.

L'ensemble $C([0, 1]; \mathbb{R})$ peut être muni d'une norme en posant

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|,$$

la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ainsi définie est appelée norme uniforme. D'autres choix sont possibles, par exemple:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}, \quad \|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$(1 \leq p < \infty).$$

Définition 1.2.7. (Normes équivalentes). Voir [12].

Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes ssi il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout $x \in E$: $\alpha \cdot N_1 \leq N_2 \leq \beta \cdot N_1$.

Proposition 1.2.8.

Deux normes sont équivalentes ssi les topologies associés sont équivalents.

Proposition 1.2.9.

Si $\dim(E) < \infty$, alors toutes les normes sont équivalentes.

1.3 -Espace de Banach⁽³⁾. Voir [10].

Définition 1.3.1. (Suite de Cauchy)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de **Cauchy** si, on la relation suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q > N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

³- **Stefan Banach** (prononcé en polonais [*stɛfan 'banax*]), (1892-1945) est un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.

Lemme 1.3.2.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contenant une sous suite (x_{n_k}) convergente vers x . Alors la suite (x_n) est aussi convergente vers le même élément x .

Remarque 1.3.3.

- Une suite convergente est de Cauchy ;
- Une suite de Cauchy est bornée ;
- Une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence est convergente.

Démonstration 1.3.4.

Pour la Démonstration Voir **[10]**.

Définition 1.3.5. (Espace complet)

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E .

Autrement dit,

(x_n) de Cauchy implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Exemple 1.3.6.

- L'ensemble \mathbb{R} des nombre réels est un espace complet.
- L'ensemble Q des nombre rationnels n'est pas un espace complet.
car la suite de Cauchy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ne converge pas dans Q .

Définition 1.3.7. (Espaces de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, tout espace vectoriel normé complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Exemples 1.3.8.

1) L'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est complet.

Démonstration 1.3.9.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}([a, b])$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}([a, b])$ et montrons qu'elle converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

D'après le critère de Cauchy, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} complet, ce qui assure l'existence d'un nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} . Par passage à la limite quand $m \rightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x , il vient que, pour tout $n \geq N$, $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$,

ce qui assure que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Il reste à montrer que la fonction f est continue.

Pour ce faire, on utilise la continuité de f_N qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, si $y \in [a, b]$ et $|x-y| \leq \delta$, alors $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon$. Donc,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 2\varepsilon''; \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

- 1) L'espace $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet. On peut par exemple considérer la suite (f_n) , $n \geq 2$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1; & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - t\right); & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 0; & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On voit que (f_n) est de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ mais ne converge pas dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$.

Remarque 1.3.10.

Tout espace de dimension finie est de Banach.

Preuve

Toute suite de Cauchy dans un espace de dimension finie est bornée, alors d'après le théorème de Polzano-Weirstress, elle admet une sous suite convergente.

Corollaire 1.3.11.

Soit E un e.v.n. (quelconque). L'ensemble des formes linéaires continues sur E est un espace de Banach.

Notation 1.3.12.

L'ensemble des formes linéaires continues sur E est appelé **dual topologique** de E , et noté E' .

La norme $\|f\|_{E'}$ d'un élément de E' est donc définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$$

Théorème 1.3.13.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. quelconque et F un s.e.v. de E de dimension finie. Alors F est fermé dans E .

Théorème 1.3.14.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, alors f est nécessairement continue.

Preuve.

Fixons une base (e_1, \dots, e_p) de E . Puisque sur E toutes les normes sont équivalentes, on peut supposer que $\|x\|_E = \sup_{0 \leq i \leq p} |x_i|$, pour

$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, où (x_1, \dots, x_p) sont les coordonnées de x . On a donc, d'après l'inégalité triangulaire et la linéarité de f ,

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^p x_i f(e_i) \right\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^p \|f(e_i)\|_F \right) \|x\|_E$$

d'où la continuité de f .

Proposition 1.3.15.

L'espace $\mathcal{C}([a; b])$ est un espace de Banach.

Preuve.

Pour la preuve voir [6].

1.4 – Espaces de Lebesgue⁽⁴⁾ L^p .

1.4.1 - Définitions et premières propriétés

Nous présentons ici les espaces de Lebesgue dans \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue (notée dorénavant).

Cependant, les résultats restent vrais dans n'importe quel espace mesuré $(X; \mathcal{A}; \mu)$, où X est un ensemble, \mathcal{A} est une tribu sur X et μ une mesure positive sur \mathcal{A} .

Définition 1.4.1.1.

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble Lebesgue mesurable. On définit $\mathcal{L}^p(E) = \{f : E \mapsto \mathbb{R} \text{ mesurable; } \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} < \infty\}$,

où

⁴- **Henri-Léon Lebesgue** (1875-1941), plus connu sous le nom de **Henri Lebesgue**, est l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du XX^e siècle. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation *Intégrale, longueur, aire* à l'université de Nancy en 1902.

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} dx, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in E} |f(x)| = \inf\{c \geq 0 : \mu(|f| > c)\} = 0 \text{ si } p = \infty \end{cases}.$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

Proposition 1.4.1.2. (Inégalité de Hölder).

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$).

1). Si $f \in \mathcal{L}^p(E)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(E)$ et

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(E)}$$

Démonstration 1.4.1.3.

Par concavité du logarithme sur $]0; +\infty[$, et pour $a; b > 0$ et

$1 < p, p' < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$\begin{aligned} \log(ab) &= \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(a^{p'}) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \end{aligned}$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'inégalité de Young

$$(ab) \leq \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right)$$

qui reste valable si a ou b est nul. En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(E)}$ (les cas où $\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ ou $\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(E)}$ est nul sont triviaux car alors f ou g est nulle presque partout, voir la

Remarque 1.4.1.4.

(Ci-dessous) et en intégrant sur E , on obtient l'inégalité voulue.

Dans les cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat avec ce lemme.

Lemme 1.4.1.5.

- Si $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$, alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} \text{ pour presque tout } x \in E.$$

- Si E est un intervalle (ouvert ou fermé) de \mathbb{R} et si $f \in \mathcal{C}(E)$, alors

$$\text{ess sup}_{x \in E} |f(x)| = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

La deuxième partie de ce lemme permet d'expliquer que si une fonction f est continue, on peut manipuler \sup et \sup -essentiel indifféremment (et donc utiliser sans distinction les notations $\|f\|_\infty$ ou $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$). Mais si la fonction f n'est pas continue, il faut a priori être vigilant.

Démonstration 1.4.1.6.

Pour la démonstration voir [6].

Proposition 1.4.1.7. (Inégalité de Minkowski)

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}$$

Démonstration 1.4.1.8.

On commence par le cas $p = \infty$. Par la première partie du

Lemme 1.4.1.5.

$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ pour presque tout $x \in E$,
d'où

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$$

pour presque tout $x \in E$, et donc

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$$

Si $p = 1$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(E)} = \int_E |f + g| dx \leq \int_E (|f| + |g|) dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(E)}$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(E)}^p &= \int_E |f + g|^p dx = \int_E |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \int_E |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_E |g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \left(\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)} \right) \left(\int_E (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \\ &\leq \left(\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)} \right) \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(E)}^{p-1} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat.

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(E) \ni u \rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f \in L^p(E)$, et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(E)} = 0$.

Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} = 0$, n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(E) \ni u \rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(E)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

Proposition 1.4.1.9.

Soit $f: E \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable telle que $\int_E f dx = 0$

Alors $f(x) = 0$ presque pour tout $x \in E$.

Démonstration 1.4.1.10.

Pour la démonstration voir [\[6\]](#).

Proposition 1.4.1.11.

Soit $f \in L^p(E)$. On note

$$\|f\|_p = \|f\|_{p(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in E} |f(x)| & p = \infty \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et de Minkowski restent vraies dans les $L^p(E)$.

Proposition 1.4.1.12. (Inégalité de Hölder).

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$).

Si $f \in L^p(E)$ et $g \in L^{p'}(E)$. Alors $fg \in L^1(E)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Remarque 1.4.1.6.

Pour $p = p' = 2$, on applique l'inégalité de Hölder et on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\int fg|^2 &\leq (\int |f|^2)(\int |g|^2), \text{ comme suivant:} \\ |\int fg|^2 &\leq (\int |fg|)^2 = \|fg\|_1^2 \leq \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 = (\int |f|^2) \cdot (\int |g|^2) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1.13. (Inégalité de Minkowski).

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et tout $f, g \in L^p(E)$, on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Théorème 1.4.1.12.

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $C_c(I)$ est dense dans $L^p(I)$

Démonstration 1.4.1.13.

Pour la démonstration voir [6].

1.4.2 - Espace L^∞

Définition 1.4.2.1. (Espace \mathcal{L}^∞)

Soient (E, T, μ) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de E dans \mathbb{R})

1. On dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}_{(\mathbb{R})}^\infty(E, T, \mu)$, s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq C$ p.p.
2. Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+; |f| \leq C \text{ p.p.}\}$.
3. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

Définition 1.4.2.2. (Espace L^∞)

Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}_{(\mathbb{R})}^\infty(E, T, \mu)$.

1. On définit $L^\infty = L_{(\mathbb{R})}^\infty(E, T, \mu)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence sur \mathcal{L}^∞ pour la relation d'équivalence " $=$ p.p.".
2. Soit $F \in L^\infty$. On pose $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ avec $f \in F$, de sorte que $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty; g = f \text{ p.p.}\}$. (Cette définition est cohérente car $\|f\|_\infty$ ne dépend pas du choix de f dans F).

1.5 - Espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}$. Voir [2].

1.5.1- Définitions et propriétés.

Définition 1.5.1.1.

Soit Ω un ensemble de \mathbb{R}^n avec $|\Omega| > 0$. On note par

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\text{Tous les fonctions mesurables } p : \Omega \rightarrow [1, +\infty]\}$$

$$\Omega_1^p = \Omega_1 = \{x \in \Omega; p(x) = 1\}.$$

$$\Omega_\infty^p = \Omega_\infty = \{x \in \Omega; p(x) = \infty\}.$$

$$\Omega_0^p = \Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_\infty).$$

Remarque 1.5.1.2.

• Si $|\Omega_0| > 0$, $p_* = \text{ess inf}_{\Omega_0} p(x)$, $p^* = \text{ess sup}_{\Omega_0} p(x)$

• Si $|\Omega_0| = 0$, $p_* = p^* = 1$.

$$C_p = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\| \text{ et } r_p = Cp + 1/p_* - 1/p^*$$

Définition 1.5.1.3.

Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. On définit la fonction ρ_p et $\|\cdot\|_p$ par

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega \setminus (\Omega_\infty)} |f(x)|^{p(x)} dx + \text{ess sup}_{\Omega_\infty} |f(x)|,$$

$\rho_p(f)$ et $\|f\|_p$ s'appelle modulaire et la norme de l'espace (respectivement).

Définition 1.5.1.4.

L'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$, c'est les classes de toutes les fonctions u , telles que

$$\rho_p(\lambda u) < \infty, \text{ pour } \lambda > 0$$

Remarque 1.5.1.5.

Si la fonction $p(x) = p = C^{st}$, donc la norme coïncide avec la norme usuelle de l'espace $L^p(\Omega)$, autrement dit

$$L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

1.5.2- Inégalités auxiliaires.

Théorème 1.5.2.1. (Inégalité de Hölder).

Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour toute fonction f dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et pour toute $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq r_p \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

avec la constante r_p définie par : $r_p = Cp + 1/p_* - 1/p^*$.

Preuve.

Pour la preuve voir [2].

Théorème 1.5.2.2.

Soit l'ensemble $L^{p(x)}(\Omega) = \{f: \|f\|_p^0 < \infty\}$. Pour $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. On a l'inégalité suivante:

$$c_p^{-1} \|f\|_p \leq \|f\|_p^0 \leq r_p \|f\|_p.$$

Preuve.

Pour la démonstration voir [2].

Théorème 1.5.2.3.

L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach.

2 - Opérateurs linéaires. Voir [9].

2.1- Définitions et exemples

Définition 2.1.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} . On dit que l'application ou l'opérateur $A: E \rightarrow F$ est linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : 1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Cas particuliers 2.1.2.

- Si A est bijectif, alors A est un isomorphisme.
- Si $E = F$, alors A est un endomorphisme de E .
- Si A est un isomorphisme de E dans E , alors A est un automorphisme.
- Si $F = \mathbb{K}$, alors A est une forme linéaire sur E . Quand E est un ensemble de fonctions, A est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.

Exemple 2.1.3.

Dans l'espace usuel les rotations, les homothéties, les similitudes et les projections sont des applications linéaires.

Définition 2.1.4.

Soit $A: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

On définit l'image de l'opérateur A par $Im(A) = \{Ax, x \in E\}$

et le noyau de l'opérateur A par $Ker(A) = \{x \in E: Ax = \mathbf{0}\}$.

2.2- Opérateurs continus. Voir [10].

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a la propriété suivante:

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G convergeant vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0).$$

Remarque 2.2.1.

L'opérateur A est dit continu sur G s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 2.2.2.

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire A , défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en un point x_0 de G .

Démonstration.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers x . Alors cette suite peut s'écrire sous la forme $x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)$
 $= y_n + (x - x_0)$.

Il est clair que la suite y_n est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim y_n = \lim [x_0 + (x_n - x)] = x_0.$$

La composition des deux membres par l'opérateur A donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0) \end{aligned}$$

L'opérateur A étant continu au point x_0 alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x) \end{aligned}$$

2.3 - Opérateurs bornés. Voir [10].

Un opérateur linéaire A , défini sur E dans F , est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E; \forall x \in E$$

Définition 2.3.1.

La plus petite des constantes C vérifiant la relation

$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E; \forall x \in E$, est appelée **norme** de A et notée $\|A\|$

$$\|A\| = \inf\{C: \|Ax\| \leq C\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}$$

Proposition 2.3.2.

La norme de l'opérateur A est donnée par la relation

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F$$

Démonstration.

Pour la démonstration voir [10].

Proposition 2.3.3.

Soit A un opérateur continu. Alors sa norme défini par $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est finie.

Démonstration.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F = \infty$. Donc pour toute suite (x_n) de E telle que $\|x_n\| \leq 1$ et $\sup_{\|x_n\| \leq 1} \|A(x_n)\|_F = \alpha_n$, on a $\lim \alpha_n = \infty$.

On définit la suite (β_n) par $\beta_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$.

Il est claire que la suite (β_n) converge vers l'élément 0,

alors il vient $\lim \|A(\beta_n)\|_F = \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F$

$$= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1$$

donc on a Contradiction avec le fait que A est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim \beta_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(x_n)\|_F = 0$$

Alors la norme $\|x\|$ est finie pour tout opérateur A linéaire et continu.

Théorème 2.3.4.

Un opérateur linéaire A est **continu** si et seulement si il est **borné**.

Démonstration.

Pour la démonstration voir [10].

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire :

Théorème 2.3.5.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) A est continu,
- (2) A est continu en 0 ,
- (3) il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leq c \|x\|$, pour tout $x \in E$.

Démonstration.

L'implication (1) \Rightarrow (2) est évidente.

On va montrer l'implication (2) \Rightarrow (3).

On suppose que A est continu en 0 . Alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : (\|x\| < \delta) \Rightarrow (\|Ax\| < \varepsilon)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E, x \neq 0$. On pose $x' = \frac{\delta}{2\|x\|}x$. Alors $\|x'\| = \frac{\delta}{2}$,

d'où $\|x'\| < \delta$, et par conséquent $\|Ax'\| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}\|Ax'\| &= \left\| A\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|} \|A(x)\| < \varepsilon\end{aligned}$$

Il résulte que $\|Ax\| < \frac{2\|x\|}{\delta} \varepsilon$. Il existe alors c satisfaisant (3).

Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ et (3) est vérifiée avec $c = \frac{\delta}{2}$.

On va montrer l'implication (3) \Rightarrow (1). On suppose que (3) est vérifiée, alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|A(x - y)\| \leq c \|x - y\|, \text{ i.e., } \|Ax - Ay\| \leq c \|x - y\|.$$

L'application A est lipschitzienne, donc elle est continue.

Remarque 2.3.6.

Une application linéaire $A: E \rightarrow F$ entre espaces vectoriels normés et qui est continue est souvent dite bornée.

Exemple 2.3.7.

L'opérateur différentiel $(Df)(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, défini sur l'espace de toutes les fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b] \in X$, qui est un sous-espace de $L^2([a, b])$, est un opérateur linéaire non borné.

En effet, considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = \sin(nx), n \geq 1, x \in [-\pi, \pi].$$

On a
$$\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 dx} = \sqrt{\pi},$$

Et
$$\|Df_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (n \cos(nx))^2 dx} = n\sqrt{\pi}.$$

Il vient que
$$\|Df_n\|_{L^2} = n\|f_n\|_{L^2}$$

D'où
$$\|D\| \geq \frac{\|Df_n\|_{L^2}}{\|f_n\|_{L^2}} \rightarrow \infty$$

Notation 2.3.8.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F . Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = \mathbb{K}$, on note E' l'espace dual (topologique) de E qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans \mathbb{K} .

Par E'' , on note le bidual de E .

Théorème 2.3.9.

Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration.

Pour la démonstration voir [9].

2.4 - Principe de la borne uniforme

Rappelons un résultat classique des espaces normés complets.

Théorème (Baire⁽⁵⁾) 2.4.1.

Soit $(X; \|\cdot\|)$ un espace normé complet.

Alors

- (i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denses dans X , $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est dense dans X .
- (ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intérieurs vides, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X .

Démonstration.

Pour la démonstration voir [6].

Théorème (Banach-Steinhaus⁽⁶⁾) 2.4.2.

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\|_F < \infty; \forall x \in E$.

Alors $\sup_{i \in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty$.

Démonstration.

Pour la démonstration voir [6].

Exemple 2.4.3.

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{K})$. On définit l'opérateur linéaire de Volterra (primitive s'annulant en 0) A sur E par

⁵- René-Louis Baire, né le 21 janvier 1874 à Paris 6^e et mort le 5 juillet 1932 à Chambéry, est un mathématicien français.

⁶- Władysław Hugo Dionizy Steinhaus, né le 14 janvier 1887 à Jasło et mort le 25 février 1972 à Wrocław, est un mathématicien et professeur polonais.

$$\forall f \in E, Af(x) = \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

Pour tout $f \in E$, on a $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, d'où $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\| \leq 1$.

De plus, $\|A\| = 1$ car, si $f \equiv 1$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Af\|_\infty = 1$.

Exemple 2.4.4.

L'opérateur shift en anglais, opérateur de décalage en français, S défini sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par

$$S(x_0, x_2, \dots) = (0, x_0, x_2, \dots),$$

est borné et on a $\|S\| = 1$.

Chapitre II

3. Opérateurs non linéaires. Voir [7].

3.1. Opérateur de Nemysky.

La présente porte monographie sur une étude approfondie de l'opérateur non linéaire :

$$Fu(s) = f(x, u(x))$$

Ici $f = f(x, u)$ est une fonction donnée qui est définie sur le produit cartésien de certains ensembles Ω , qui dans la plupart des cas sont soit des espaces normés ou des espaces de mesure ou les deux. Avec l'ensemble \mathbb{R} des réels (ou l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes), et prend des valeurs dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}), respectivement.

Par définition, l'opérateur F associe à chaque fonction réelle (ou complexe) $u(x)$ sur Ω la fonction réelle (ou complexe) $f(x, u(x))$ sur Ω . Par conséquent, F est généralement appelé opérateur de superposition (parfois aussi opérateur de composition, opérateur de substitution ou **Opérateur de Nemysky**⁽⁷⁾)

Définition 3.1.1. (Enveloppe convexe).

Soient E un espace vectoriel, et A une partie de E . L'enveloppe convexe de A est l'intersection des parties convexes contenant A . C'est elle-même un convexe, et c'est le plus petit convexe contenant A .

Théorème 3.1.2 . (Théorème de Carathéodory⁽⁸⁾)

Soient E un espace vectoriel normé de dimension n et A une partie de E . Alors tout élément de l'enveloppe convexe de A est combinaison convexe de $(n + 1)$ éléments de A .

Autrement dit, si le point y est dans l'enveloppe convexe de A , il peut s'écrire

⁷- **Wiktor Wladimirowitsch Nemysky** (Mathématicien). (né le 22 /11/ 1900, en Smolensk, Russie. et décédé le : 7 août 1967, en Monts Saïan, Russie)

⁸- **Constantin Carathéodory** (13 septembre 1873 [Berlin] - 2 février 1950 [Münich])

$$y = t_1 a_1 + \dots + t_p a_p,$$

où les a_i sont des éléments de A et les t_i sont des réels positifs dont la somme fait 1 .

Le théorème de Carathéodory dit que l'on peut toujours choisir les points a_i et les réels t_i de sorte que p soit inférieur ou égal à $n + 1$.

Définition 3.1.3. (Fonction de Carathéodory).

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On appelle **fonction de Carathéodory** toute fonction $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow f(x, s)$ est Lebesgue mesurable sur Ω ,
- (ii) la fonction $s \rightarrow f(x, s)$ est continue sur \mathbb{R} , pour presque tout $x \in \Omega$.

Théorème 3.1.4.

Une fonction $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une **fonction de Carathéodory** si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $D \subset \Omega$ tel que $\text{mes}(\Omega \setminus D) < \varepsilon$ et la fonction f est continue sur $D \times \mathbb{R}$.

Nous allons utiliser la fonction de Carathéodory pour définir l'opérateur de Nemyshky. Voir [1]

Définition 3.1.5. Voir [3].

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, et soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisant les conditions de Carathéodory, i.e.,

- (i) $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, presque pour tout $x \in \Omega$,
- (ii) $f(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $u \in L^p(\Omega)$. On peut définir une autre fonction par composition

$$F(u)(x) := f(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega. \tag{1.1}$$

L'opérateur de composition F est appelé l'opérateur de Nemyshky engendré par f .

Théorème 3.1.6. (Définitions des fonctions mesurable via la substitution).

Si la fonction $u : M \subset \mathbb{R}^N \rightarrow U$ est mesurable, alors la fonction $F : M \rightarrow Y$ est aussi mesurable à condition que les assertions suivantes soient satisfaites :

- (iii) L'ensemble M est mesurable et U et Y sont des espaces de Banach réels séparables.
- (iv) La fonction $f : M \times U \rightarrow Y$ satisfait les conditions de Carathéodory.

Démonstration.

Pour la démonstration voir [3].

3.2. Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky dans l'espace L^p

Théorème 3.2.1.

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application satisfaisant les conditions de Carathéodory. Soient $p, q \in [1, \infty[$, $k \in L^q(\Omega)$. Supposons que

$$|f(x, \xi)| \leq C|\xi|^{\frac{p}{q}} + k(x), \quad p.p. \quad x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Alors l'opérateur de Nemysky F défini par (1.1) est une application bornée et continue de $L^p(\Omega)$ à $L^q(\Omega)$.

Pour démontrer le théorème 2.1 en utilisant les théorèmes suivants :

Inégalités algébriques importantes 3.2.2.

Lemme 3.2.2.1. (Inégalité de Jensen⁽⁹⁾).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec $n \geq 2$, des

⁹- *ohan Ludwig William Valdemar Jensen*, (8 mai 1859 à Nakskov – 5 mars 1925 à Copenhague) est un mathématicien et ingénieur danois. Il est surtout connu pour l'inégalité de Jensen. En 1915, il démontra également la formule de Jensen en analyse complexe.

coefficients tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 1$. Alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \text{ pour tous } x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence.

Théorème 3.2.2.2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in]0, +\infty[$. Alors il existe $c > 0$ tel que, pour tous nombres réels positifs ξ_1, \dots, ξ_n , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^r \leq c \sum_{i=1}^n \xi_i^r \quad (1.4)$$

Démonstration. Cas $r \geq 1$.

Pour prouver (1.4), nous considérons la fonction positive f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(t) = t^r$, avec $1 \leq r < \infty$. Cette fonction est convexe, i.e., pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$(\alpha t_1 + \beta t_2)^r \leq \alpha t_1^r + \beta t_2^r$$

Soit $\alpha_i = \frac{1}{n}, \forall i = 1, \dots, n$. Donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, et pour tous $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}_+$, on a, d'après (1.3),

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i\right)^r \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i^r$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n^r} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^r \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^r$$

D'où

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^r \leq c \sum_{i=1}^n \xi_i^r, \text{ avec } c = n^{r-1}$$

Cas $0 < r < 1$. Montrons (1.4) avec $c = 1$.

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$; il n'y a rien à démontrer.

Pour $n = 2$, on pose $\emptyset(t) = (\xi_1 + t)^r - (\xi_1^r + t^r)$, pour $t \geq 0$.

\emptyset est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée

$$\emptyset'(t) = r[(\xi_1 + t)^{r-1} - t^{r-1}] \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Par conséquent, \emptyset est décroissante sur $[0; +\infty[$, d'où

$$\emptyset(t) \leq \emptyset(0),$$

i.e.

$$(\xi_1 + t)^r \leq \xi_1^r + t^r, \quad \forall t \geq 0.$$

Prenant $t = \xi_2$, il vient $(\xi_1 + \xi_2)^r \leq \xi_1^r + \xi_2^r$.

Ce qui est l'inégalité (1.4) pour $n = 2$ avec $c = 1$.

Supposons que (1.4) est vraie jusqu'au rang $n - 1$, i.e.

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right)^r \leq \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^r$$

Considérons la fonction $\psi(t) := (\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i + t)^r - (\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^r + t^r)$
pour $t \geq 0$.

ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée

$$\psi'(t) = r[(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i + t)^{r-1} - t^{r-1}] \leq 0, \quad t \geq 0,$$

Par conséquent, ψ est décroissante sur $[0; +\infty[$, d'où

$$\psi(t) \leq \psi(0) = (\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i)^r - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^r,$$

par suite en mettant $t = \xi_n$,

$$\psi(\xi_n) = (\sum_{i=1}^n \xi_i)^r - \sum_{i=1}^n \xi_i^r \leq 0,$$

Ce qui achève la démonstration.

Théorème 3.2.3. (Réciproque partielle de TCDL).

Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Alors il existe une sous-suite $(f_{n'})$ de (f_n) telle que

- i) $f_{n'}(x) \rightarrow f(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$, presque pour tout $x \in \Omega$,
- ii) $\exists h \in L^p(\Omega)$ t.q. $|f_{n'}(x)| \leq h(x)$, presque pour tout $x \in \Omega$.

Proposition 3.2.4. (Principe de convergence).

Soient X un espace topologique et (x_n) une suite vérifiant la propriété suivante: il existe $x \in X$ tel que, de toute sous-suite de (x_n) , on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x .

Alors la suite entière (x_n) converge vers x .

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite ne converge pas vers x . Il existe donc un voisinage V de x et une sous-suite $(x_{n'})$ tels que $x_{n'} \notin V$, pour tout n' . Extrayons de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $(x_{n''})$ qui converge vers x . Il existe donc un n_0'' tel que pour tout $n'' \geq n_0''$, $x_{n''} \in V$, contradiction.

Démonstration de Théorème 3.2.5.

Comme $u \in L^p(\Omega)$, la fonction $x \rightarrow u(x)$ est mesurable sur Ω , et par les conditions de Carathéodory et Théorème 1.6, la fonction

$x \rightarrow f(x, u(x))$ est mesurable sur Ω .

Aussi par (1.2) et (1.4), on obtient

$$\int_{\Omega} |f(x, u(x))|^q dx = \int_{\Omega} |F(u)(x)|^q dx \leq \text{const} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega} k(x)^q dx,$$

Donc

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq \text{const} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} + \|k\|_{L^q(\Omega)}.$$

Alors F est borné de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

F est continue, soit la suite (u_n) t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$. Soit $(u_{n'})$ une sous-suite de (u_n) , donc $u_{n'} \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$.

Alors d'après le théorème 2.2.3, il existe une sous-suite $(u_{n''})$ et une fonction $v \in L^p(\Omega)$ t.q.

$$\begin{cases} u_{n''}(x) \rightarrow u(x) & \text{presque pour tout } x \in \Omega \\ |u_{n''}(x)| \leq v(x) & \text{presque pour tout } x \in \Omega \end{cases}$$

Donc, par (1.2),

$$\begin{aligned} |Fu_{n''}(x)| &= |f(x, u_{n''}(x))| \leq c|u_{n''}(x)|^{\frac{p}{q}} + k(x) \\ &\leq c|v(x)|^{\frac{p}{q}} + k(x) = g(x), \text{ et } g(x) \in L^q(\Omega). \end{aligned}$$

Puisque $v \in L^p(\Omega)$, donc $|v|^p \in L^1(\Omega)$, d'où $|v|^{\frac{p}{q}} \in L^q(\Omega)$. Et comme la fonction $u \rightarrow f(x, u)$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$, alors

$$f(x, u_{n''}(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega ;$$

i.e. $Fu_{n''}(x) \rightarrow Fu(x)$ presque pour tout $x \in \Omega$. Par le théorème de Lebesgue, on obtient donc

$$\|Fu_{n''} - Fu\|_{L^q(\Omega)}^q \rightarrow 0; \text{ i.e. } Fu_{n''} \rightarrow Fu \text{ dans } L^q(\Omega).$$

D'après le principe de convergence, on obtient

$$Fu_n \rightarrow Fu \quad \text{dans } L^q(\Omega).$$

Alors F est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Remarque 3.2.6.

Il est facile de voir que le lemme 2.1 ne peut pas tenir pour $p < q = \infty$, sauf pour le cas de la constante f . Le cas $p < q = \infty$ est de caractère très différent. Alors il faut une continuité uniforme de f dans un voisinage de $u(x)$ pour montrer la continuité de F par rapport à $u(x)$. De plus, aucune condition de croissance sur f n'est requise.

Corollaire 3.2.7.

Soient $N \geq 1$ et $f: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions de Carathéodory :

$f(x, \xi)$ est continue en $\xi \in \mathbb{R}^N$ et mesurable en $x \in \Omega$. Soient $p, q \in [1, \infty[$, et $k \in L^q(\Omega)$. Supposons que

$$|f(x, \xi)| \leq C|\xi|^{\frac{p}{q}} + k(x), \text{ p.p. } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N$$

Alors

$$F(u)(x) := f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)), \quad x \in \Omega$$

définit un opérateur $F: (L^p(\Omega))^N \rightarrow L^q(\Omega)$ continu et borné.

Preuve:

Pour la preuve voir [3].

3.3. Continuité et bornitude de l'opérateur de Nemysky dans l'espace $L^{p(x)}$. Voir [11].

Nous passons maintenant en revue quelques définitions et propriétés liées aux espaces de Lebesgue avec exposants variables nécessaires dans tout le document.

Pour les preuves et les références, voir [4].

Préliminaires 3.3.1.

Étant donné une fonction $p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ qui satisfait

$$1 \leq p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) := p^+ < \infty$$

l'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec exposant variable $p(\cdot)$ est défini comme suit ;

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ est mesurable tel que } \rho_{p(\cdot)} := \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

L'espace $L^{p(\cdot)}$ est muni de la norme

$$\mathbf{u} \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \left| \frac{\mathbf{u}(x)}{\lambda} \right|^{p(\cdot)} \leq 1 \right\}$$

L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de Banach et séparable. On note $\text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x) = p^-$ et $\text{ess sup}_{x \in \Omega} p(x) = p^+$.

Lemme 3.3.2.

Une suite $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 1}$ converge en $L^{p(x)}(\Omega)$ vers un certain $\mathbf{u} \in L^{p(x)}(\Omega)$ si et seulement si

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}_n(x) - \mathbf{u}(x)|^{p(x)} dx \rightarrow 0.$$

De plus, il existe une sous-suite $(\mathbf{u}_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge p.p. vers \mathbf{u} .

On se donne $p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ tel que $p^- > 1$. Soit $p'(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ défini par $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ presque pour tout $x \in \Omega$.

Alors, pour tous $\mathbf{u} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, les inégalités suivantes sont valables :

- $\int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)\mathbf{v}(x)| dx \leq \left[\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-} \right] \|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)} \|\mathbf{v}\|_{p'(\cdot)}$, (Inégalité de Hölder). (1)
- Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, alors $\rho_{p(\cdot)}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \leq 2^{p^+} (\rho_{p(\cdot)}(\mathbf{v}) + \rho_{p(\cdot)}(\mathbf{w}))$. (2)

Le théorème suivant résume les relations entre la norme $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ et le modulaire convexe $\rho_{p(\cdot)}$.

Théorème 3.3.3.

Soit $p(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ tel que $p^- > 1$ et soit $\mathbf{u} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Alors

- (a) Si $\mathbf{u} \neq 0$, alors $\|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)} = a$ si et seulement si $\rho_{p(\cdot)}(a^{-1}\mathbf{u}) = 1$.
- (b) $\|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)} < 1$ (resp. $= 1$ ou > 1) si et seulement si $\rho_{p(\cdot)}(\mathbf{u}) < 1$ (resp. $= 1$ ou > 1).
- (c) $\|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)} > 1$ implique $\|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)}^{p^-} < \rho_{p(\cdot)}(\mathbf{u}) < \|\mathbf{u}\|_{p(\cdot)}^{p^+}$.

(d) $\|u\|_{p(\cdot)} < 1$ implique $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} < \rho_{p(\cdot)}(u) < \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}$.

(e) Soient $u, u_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots$. Les assertions suivantes sont équivalents ;

(i) $\|u - u_n\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\rho_{p(\cdot)}(u_n - u) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$,

(iii) $(u_n)_n$ converge vers u dans le sens

$\rho_{p(\cdot)}(u_n) \rightarrow \rho_{p(\cdot)}(u)$ si $n \rightarrow \infty$,

Résultat principal.

Le principal résultat de ce document énonce des conditions suffisantes pour que l'opérateur de Nemyshky définisse une application **continue et bornée** de $[L^{p_1(x)}(\Omega)]^M$ dans $L^{p_2(x)}(\Omega)$.

(i) Sur l'espace $[L^{p_1(x)}(\Omega)]^M$, on considère la norme

(ii) $\|u\| := \left\| \sqrt{T[u, u]} \right\|_{p(\cdot)}$, où $u = (u_1, u_2, \dots, u_M)$, et

$$T[u, u] = \sum_{i=1}^M u_i^2.$$

Théorème 3.3.4.

Soit $f: \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait la condition de croissance

$$|f(x, u)| \leq C_1(x) + C(x) \sum_{i=1}^M |u_i|^{p_1(x)/p_2(x)}, \quad x \in \Omega, u \in \mathbb{R}^M,$$

où $C_1 \in L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ et C est une fonction non négative de $L^\infty(\Omega)$.

Alors $N_f : N_f(u)(x) = f(x, u(x))$, est un opérateur **continu et borné** bien défini de $[L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M$ dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve.

Tout d'abord, nous prouvons que N_f est un opérateur bien défini et borné de $[L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M$, dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$.

Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_M) \in [L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M$. D'après l'inégalité de Hölder

et par intégration sur Ω et compte tenu de (2), il s'ensuit que

$$\int_{\Omega} |N_f(\mathbf{u})(x)|^{p_2(x)} dx \leq$$

$$\leq 2^{p_2^+} \left(\int_{\Omega} |C_1(x)|^{p_2(x)} dx + C \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^M |u_i(x)|^{p_1(x)/p_2(x)} \right)^{p_2(x)} dx \right)$$

$$\leq 2^{p_2^+} \left(\int_{\Omega} |C_1(x)|^{p_2(x)} dx + 2^{(M-1)p_2^+} C \sum_{i=1}^M \int_{\Omega} (|u_i(x)|)^{p_1(x)} dx \right) < \infty,$$

où $C := \text{Max} \left(\|C\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_2^-}, \|C\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_2^+} \right)$. Par conséquent,

$$N_f \left([L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M \right) \subset L^{p_2(\cdot)}(\Omega). \quad (4)$$

Pour prouver que l'opérateur N_f est *borné*, considérons

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M) \in [L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M \text{ tel que } \|\mathbf{u}\| \leq C_1.$$

$$\text{\AA partir de } |u_i| \leq \sqrt{T[\mathbf{u}, \mathbf{u}]}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5)$$

on déduit que $\|u_i\|_{p_1(\cdot)} \leq C_2$. Donc d'après (Théorème 3.3, (c) et (d))

$$\text{on obtient } \rho_{p_1(\cdot)}(u_i) \leq C_3 := \text{Max} \left(C_2^{p_1^+}, C_2^{p_1^-} \right).$$

D'après (4), il s'ensuit que N_f transforme les ensembles bornés normaux de $[L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M$ en moyenne ensembles bornés dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$. Donc dans les ensembles bornés normaux dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$. (Théorème 3.3, (c) et (d)). Par conséquent N_f est *borné*.

Nous prouvons maintenant que l'opérateur N_f est continu.

$$\text{Fixons } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M) \in [L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M.$$

Pour établir la continuité de N_f , il suffit de montrer que de chaque suite

$$(\mathbf{u}^{(n)})_n \in [L^{p_1(\cdot)}(\Omega)]^M \text{ telle que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}\| = 0, \quad (6)$$

on peut extraire une sous-suite $(\mathbf{u}^{(n_k)})_k$ telle que la suite $N_f(\mathbf{u}^{(n_k)})$ converge vers $N_f(\mathbf{u})$ dans $L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$, lorsque $k \rightarrow \infty$.

En effet $(\mathbf{u}^{(n)})_n$ est une suite comme ci-dessus, $\mathbf{u}^{(n)} = (u_1^n, \dots, u_M^n)$

En tenant compte de (5) et de (6), nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_i^n - u_i\|_{p_1(\cdot)} = 0, \quad 1 \leq i \leq M,$$

par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{p_1(\cdot)}(u_i^n - u_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq M,$$

où

$$(u_i^n - u_i)^{p_1(\cdot)} \rightarrow 0 \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ si } n \rightarrow \infty, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (7)$$

En utilisant le **Lemme de Brézis-Lieb**.

[*Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p vers f .*

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f\|_p^p = \lim_n (\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p)$.

Il s'ensuit qu'il existe une sous-suite $(u_1^{(n_k)})_k \subset (u_1^{(n)})_n \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1^{(n_k)}(x) - u_1(x))^{p_1(x)} = 0, \text{ presque pour tout } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}$$

et

$$\left| (u_1^{(n_k)}(x) - u_1(x))^{p_1(x)} \right| \leq h_1(x), \text{ presque pour tout } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant une autre fois le Lemme de Brézis et en passant à une sous-suite, on déduit qu'il existe $h_2 \in L^1(\Omega)$ tel que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_2^{(n_k)}(x) - u_2(x))^{p_1(x)} = 0, \text{ presque pour tout } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}.$$

Le processus se poursuit. Il existe une sous-suite $(u^{(n_k)})_k$ et $h_1, h_2, \dots, h_M \in L^1(\Omega)$ tels que ;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_i^{(n_k)}(x) - u_i(x))^{p_1(x)} = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega, 1 \leq i \leq M \quad (8)$$

et

$$|(u_i^{(n_k)}(x) - u_i(x))^{p_1(x)}| \leq |h_i(x)|, \text{ p.p. } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq M. \quad (9)$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^{(n_k)}(x) = u_i(x), \text{ p.p. } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq M, \quad (10)$$

et

$$|u_i^{(n_k)}(x)| \leq |h_i(x)|^{1/p_1(x)} + |u_i(x)|, \text{ p.p. } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq M. \quad (11)$$

Puisque f est une fonction de Carathéodory, il est clair que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_f(u^{(n_k)})(x) = N_f(u(x)), \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (N_f(u^{(n_k)})(x) - N_f(u(x)))^{p_2(x)} = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (12)$$

D'après (3), il s'ensuit que

$$|N_f(u^{(n_k)}(x))|^{p_2(x)} = |f(x, u^{(n_k)}(x))|^{p_2(x)} \leq 2^{p_2(x)-1} \times [|C_1(x)|^{p_2(x)} + C \cdot 2^{(M-1)(p_2(x)-1)} \sum_{i=1}^M (|u_i^{(n_k)}(x)|)^{p_1(x)}] \text{ p.p. } x \in \Omega, k \in \mathbb{N}.$$

De (11) on déduit que

$$|N_f(u^{(n_k)}(x))|^{p_2(x)} \leq 2^{p_2^+-1} [|C_1(x)|^{p_2(x)} + C \cdot 2^{(M-1)(p_2^+-1)} \sum_{i=1}^M 2^{p_1(x)} (|h_i(x)| + |u_i(x)|^{p_1(x)})]$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |N_f(u^{(n_k)}(x)) - N_f(u(x))|^{p_2(x)} &\leq (|N_f(u^{(n_k)}(x))| + |N_f(u(x))|)^{p_2(x)} \\ &\leq 2^{p_2(x)-1} [|N_f(u^{(n_k)}(x))|^{p_2(x)} + |N_f(u(x))|^{p_2(x)}] \leq 2^{p_2^+-1} g(x), \end{aligned}$$

où

$$g(x) := 2^{p_2^+ - 1} [|C_1(x)|^{p_2(x)} + C \cdot 2^{(M-1)(p_2^+ - 1) + p_1^+ - 1} \sum_{i=1}^M (|h_i(x)| + |u_i(x)|^{p_1(x)})] + |N_f(u)(x)|^{p_2(x)}.$$

Puisque le bon terme de cette égalité est dans $L^1(\Omega)$, et (12) est vrai, en appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (N_f(u^{(n_k)})(x) - N_f(u)(x))^{p_2(x)} dx = 0,$$

c'est-à-dire que la sous-suite $(N_f(u^{(n_k)}))_k$ converge vers $N_f(u)$, ce qui implique que la sous-suite $(N_f(u^{(n_k)}))_k$ converge en norme vers $N_f(u)$. (Théorème 3.3 (e)), donc l'opérateur N_f est *continu*.

Pour $M = 1$, on obtient :

Corollaire 3.3.5.

Soit $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory qui satisfait la croissance

$$|f(x, u)| \leq C_1(x) + C(x)|u|^{p(x)-1}, \quad x \in \Omega, u \in \mathbb{R},$$

où $C_1 \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ et C est une $L^\infty(\Omega)$ -fonction.

Alors $N_f : N_f(u)(x) = f(x, u(x))$, est un opérateur bien défini *continu et borné* de $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Théorème 3.3.6.

Si pour toute suite $(u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, convergent vers

$(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n) \in L$, il existe une fonction $h \in L^{p(x)}(\Omega)$, où $0 \leq p \leq \infty$,

tel que

$$f(x, u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^n) \leq h(x), \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \Omega.$$

Alors l'opérateur Nemyshky

$N_f: L \ni (u^1, u^2, \dots, u^n) \mapsto f(\cdot, u^1(\cdot), u^2(\cdot), \dots, u^n(\cdot)) \in L^{p(x)}(\Omega)$, est bien défini et **continu**.

preuve.

Pour la preuve voir **[8]**.

Théorème 3.3.7.

Si $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Caratheodory vérifiant

$|f(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{\frac{p(x)}{q(x)}}$, pour tout $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$,

$p, q \in C_+(\bar{\Omega})$, $a \in L^{q(x)}(\Omega)$, $a(x) > 0$ et $b > 0$. Alors l'opérateur de Nemyshky N_f défini par $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$, de $L^{p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$, est un opérateur continu et borné.

Démonstration.

Pour la démonstration voir **[4]**.

Bibliographie

- 1. ANTONIO AMBROSETTI.** A Primer of Nonlinear Analysis
(page 15-16-17) Scuola Normale Superiore, Pisa Giovanni Prodi
Department of Mathematics, University of Pisa.
- 2. B. GAGUI.** Thèse Doctorat en sciences. Spécialité :
Mathématiques. Option: Analyse fonctionnelle et numérique
université M'sila Algerie.
- 3. EBERHARD ZEIDLER.** Nonlinear Functional Analysis and
Its Applications, II/B, Nonlinear monotone operators, Springer-
Verlag, New York, (1990).
- 4. Fan. X. L. and ZHAO. D.** On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and
 $w^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424-446.
- 5. Fatiha BOULAHIA épouse TALBI.** Espaces d'Orlicz Cours,
2eme année master mathématiques. Option : Analyse et
Probabilité. Université de Tizi Ouzou. Algerie.
- 6. JIMMY LAMBOLEY – HERVÉ Le DRET.** Analyse
fonctionnelle approfondie et calcul des variations 4M02-.
- 7. JURGEN APPELL** "Universität at Wurzburg, Fakultat fur
Mathematik, Am Hubland, D-8700 Wurzburg, WEST
GERMANY and PETR P. ZABREIKO Belgosuniversitet,
Matematcheskii Fakul'tet, Pl. Lenina 4, SU-220080 Minsk,
SOVIET UNION. Nonlinear superposition operators. 1989

- 8. MAREK GALEWSKI.** On the continuity of the Nemyshky operator between the spaces $L^{p_1(x)}$ and $L^{p_2(x)}$ – article – Faculty of Mathematics University of Lodz.
- 9. Mme SAIDI Soumia.** Cours sur La théorie spectrale des opérateurs Enseigné aux étudiants de Master Analyse Fonctionnelle Au premier semestre Préparé par à Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel Année universitaire 2016/2017.
- 10. M.NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université M'sila Algerie 2004.
- 11. PAVEL MATEI.** Nemyshky operators in Lebesgue spaces with a variable exponent. Technical University of Civil Engineering of Bucharest Article – January 2013.
- 12. PIERRO** Ens Krlen Lann. Analyse fonctionnelle (p10).
- 13. RAFAIL DANCHIN** cours de topologie et analyse fonctionnelle master 1^{ère} année (p 25).