République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et application

Par

Zahem Abdellah et Zeghba Ayyoub

Sujet

Corde Elastique de Kirchhoff avec des limites Variables

Date de soutenance :

Devant le jury :

Mr. Y.Arioua…………………………	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. A.Sengouga ……………………….	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. A.Saâdi …………………………….	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Tout remerciement est du à dieu, et tout effort est à l'aide de dieu, grâce à dieu toutes les portes sont ouvertes, il nous a offert la volonté, et nous a éclairé toutes les chemins, et comme notre prophète que le salut soit sur lui.

Un grand merci à notre encadreur: Dr. A. Sengouga, qui est toujours à nos côtés pour nous consultons, et nous guidons, durant toute la période de la préparation de cette recherche.

Nous souhaitons lui transmettre nous reconnaissance et nous plus profonde gratitude.

Nous remercions les membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en participant au jugement de ce travail.

Nous ne pouvons pas clôturer nous remerciements sans se retourner vers les êtres qui nous sont les plus chers; nous familles qui ont en un rôle essentiel et continu dans nous réussite.

Merci.

Dédicaces

Je tiens a dédier ce modeste travail à mes chères parents, les plus patients du monde pour le soutien moral, matériel et leurs sacrifices, encouragements qu'ils m'ont portés durant toute ma vie .

J'éspère que je puisse arriver à les satisfaire et que Dieu les garde pour moi.

Mes soeurs:Aya, Manar, Soudjoud.

Et tous mes enseignants(es) sans exception et tous mes camarades chacun par son nom.

Pour toutes ces personnes et d'autres, je dédie ma mémoire en signe de respect et de reconnaissance et ma gratitude.

J'Espère qu'ils soient satisfaites.

Z.Ayoub

Dédicaces

Je tiens a dédier ce modeste travail à mes chères parents, les plus patients du monde pour le soutien moral, matériel et leurs sacrifices, encouragements qu'ils m'ont portés durant toute ma vie .

J'éspère que je puisse arriver à les satisfaire et que Dieu les garde pour moi.

Mes soeurs:Atika, Dalale, Ranai, Aicha.

Mes frère:Abdellwahab, Hani .

Et tous mes enseignants(es) sans exception et tous mes camarades chacun par son nom.

Pour toutes ces personnes et d'autres, je dédie ma mémoire en signe de respect et de reconnaissance et ma gratitude.

J'Espère qu'ils soient satisfaites.

Z.Abdellah

Table des matires

Introduction

Dans l'étude des ondes et de leurs propagations plusieurs modèles mathématiques sont proposée pour décrit la variation, dans le temps et dans l'espace, d'une quantité ondulante. Dans le cas d'une corde vibrante, le modèle le plus simple est celui de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in \,]\alpha, \beta[\ , \ t \geq 0.$$

Dans ce modèle on suppose que longueur de la corde ne change pas pour les "petites" vibrations transversale. Un modèle plus réaliste est proposé par Kirchhoff et prend en compte cette variation dans la longueur,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a + b \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in \,]\alpha, \beta[\ , \ t \geq 0,$$

mais ce modèle est nonlinéaire et plus difficile à résoudre mathématiquement.

Dans ce travail, on s'intéresse au problème de Kirchhoff mais dans un intervalle avec de limites variable avec le temps, i.e. $]\alpha, \beta[\, = \,]\alpha(t), \beta(t)[$. En détaillant le travail de Limaco et Medeiros [3], on démontre que le problème de Kirchhoff admet une solution faible locale dans le temps.

Ce mémoire est composé de trois chapitres: Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels sur les origines physiques du modèle de Kirchhoff dans un domaine fixes et aussi dans les domaines des limites variables. Dans le deuxième chapitre, on détaille le travail de Limaco et Medeiros et on obtient l'existence et l'unicité de la solution locale du problème de Kirchhoff , En fin dans le dernier chapitre, on utilise les différence finie pour résoudre numériquement le problème de Kirchhoff.

Une conclusion et quelque références sur ce sujet sont donnée a la fin de ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappel sur l'équation de Kirchhoff dans les domaines fixes et les domaines des limites variables.

1.1 L'équation de Kirchhoff dans un domaine fixe

On considère une corde en position horizontale (l'axe des x), et de longueur fixe l (de $x = 0$ à $x = l$) cette corde est représentée par le segment $[\alpha_0, \beta_0]$ avec $0 < \alpha_0 < \beta_0$.

Nous supposons τ_0 la tension dans $[\alpha_0, \beta_0]$ à temps $t > 0$.

Les points (x, t), $\alpha_0 < x < \beta_0$, de la corde appartient à une courbe plane $\Gamma(t)$ donnée par l'équation $u = u(x, t)$.

De $\beta_0 - \alpha_0$ et S la longueur de la difformité de la courbe $\Gamma(t)$ à temps t, la variation de la tension est $\tau - \tau_0$ et la variation du longueur difformité est $\dfrac{S - \gamma_0}{\gamma_0}$.

La loi de Hooke

La variation de la tension

$\tau - \tau_0$ est une fonction linéaire de $\dfrac{(S - \gamma_0)}{\gamma_0}$ i.e.

$$\tau - \tau_0 = K\frac{(S - \gamma_0)}{\gamma_0},$$

avec le K est constant quand la corde est homogène.

La tension dans les points (x, u), de la courbe de la difformité $\Gamma(t)$ est un vecteur $\vec{\tau}$ lequel a la direction de la tangente à $\Gamma(t)$, nous supposons $\Gamma(t)$ régulière et $\Gamma(\alpha_0) = \Gamma(\beta_0) = 0$, la corde a des limites fixes (Voyez 1.1).

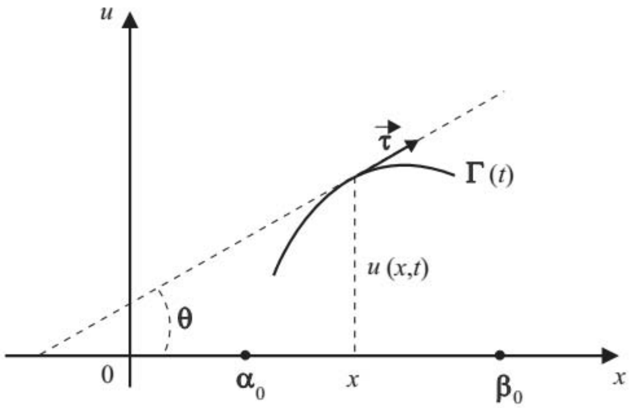

Figure 1.1: Tension d'une corde avec des limites fixes

Soit θ est l'angle de la direction du (ox) avec le vecteur $\vec{\tau}$, les composants de $\vec{\tau}$ sont:

$$\tau(t)\sin\theta \qquad \tau(t)\cos\theta.$$

Par hypothèse nous avons des petites difformités verticales de la corde $[\alpha_0, \beta_0]$, ce que implique que la composant horizontal $\tau\cos\theta$ qui est "très petit", et sera négligée dans la suite.

Soit $d(x,t)$ la densité de la corde au points x à l'instant t qui est le masse par unité de longueur, les variations de la tension τ donne l'origine à un force sur $\Gamma(t)$ et, par *la loi de Newton*, nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_0 d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\tau\sin\theta, \tag{1.1}$$

avec $\gamma_0 d(x,t)$ est la masse de la corde.

Des petites difformités c.-à-d. l'inclinaison de difformités est petite, nous devons avoir:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| << 1. \tag{1.2}$$

Comme une conséquence de $\frac{\partial u}{\partial x} << 1$ nous avons:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De *La loi de Hooke* (1.1), la matière est non homogène, la tension $\tau - \tau_0$ dépend de x, t, donc nous obtenons de (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau\sin\theta) = \frac{\partial\tau}{\partial x}\sin\theta + \tau\frac{\partial\sin\theta}{\partial x},$$

où:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau\sin\theta) = \frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.3}$$

L'analyse de $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ En fait, la longueur de $\Gamma(t)$ est:

$$S = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx. \tag{1.4}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ satisfait (1.2) on peut développer la racine dans (1.1) ou voisinage de 0, on obtient:

$$S \approx \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx,$$

où:

$$S - \gamma_0 = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{1.5}$$

et par *la loi de Hooke* (1.1) on a

$$\tau - \tau_0 = \frac{K}{2\gamma_0}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.6}$$

Alors:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{2\gamma_0}\frac{\partial K}{\partial x}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.7}$$

De (1.3) et (1.7) nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\tau \sin\theta) &= \left[\frac{1}{2\gamma_0}\frac{\partial K}{\partial x}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad - \left[\tau_0 + \frac{K}{2\gamma_0}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

De (1.8) dans (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_0 d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \left[\tau_0 + \frac{K}{2\gamma_0}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.9}$$

Donc, (1.9) est le modèle mathématique pour le problème physique de petites vibrations verticales d'une corde étirée aux fins $(\alpha_0, 0)$, $(\beta_0, 0)$, quand la matière de la corde n'est pas homogène.

Nous changeons la notation pour formuler le problème mathématique pour (1.9). en fait:

$$\begin{cases} \gamma_0 d(x,t) = \rho(x,t) \qquad \rho(x,t) \geq \rho_0 > 0, \\ M(x,t,\lambda) = \tau_0 + \frac{K}{2\gamma_0}\lambda, \end{cases} \tag{1.10}$$

tell que (1.9) peut être écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) - M\left(x, t, \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \alpha_0 \leq x \leq \beta_0. \tag{1.11}$$

Ce modèle a été obtenu par *G. Kirchhoff–Vorlesungen uber mechanik, Tauber - Leipzig 1883*, est appelé *Kirchhoff modèle*.

Cas de tension constant Supposez maintenant nous avons matière homogène et la tension est constant $\tau = \tau_0$, $\forall t$. Dans ce cas, nous n'avons pas la contribution:

$$\frac{K}{2\gamma_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

L'équation (1.11) réduit à:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

où:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \quad C^2 = \frac{\tau_0}{\rho}.$$

Ce modèle a été obtenu par *Jean D'Alembert* dans *1741*.

1.2 Equation de Kirchhoff dans un domaine avec des limites variables

On considère maintenant le cas ou la longueur de corde est variable.

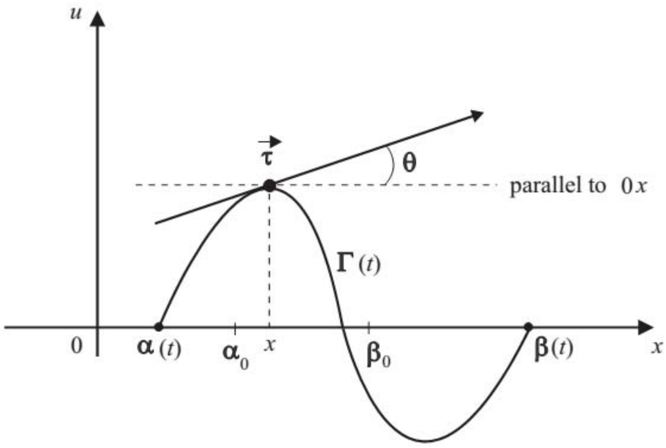

Figure 1.2: Tension d'une corde avec des limites variables

Soit

$$0 < \alpha(t) \leq \alpha_0 < x < \beta_0 < \beta(t), \forall t > 0.$$

On considère une corde (Voire 1.2) dans l'intervalle de l'espace $[\alpha(t), \beta(t)]$ avec $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\beta_0 = \beta(0)$ de longueur

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t), \ \forall t > 0,$$

la longueur de corde à $t = 0$ est $\gamma(0) = \beta(0) - \alpha(0) > 0$.

On garde les même notations de la section précédent, et on note:

- $\hat{\tau}(t)$ tension dans la déformation $[\alpha(t), \beta(t)]$ de $[\alpha_0, \beta_0]$.

Par *la loi de newton* on suppose que la corde est homogène et que la masse est constante,i.e.

$$\gamma(t)d(x,t) = \text{constante} = mg,$$

alors on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(t)\sin\theta\right) = mg\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.12}$$

avec m la masse de la corde, nous supposons que les difformités sont très petites donc que la densité de $[\alpha_0, \beta_0]$, $[\alpha(t), \beta(t)]$ et $\Gamma(t)$ est approximativement le même, donc $m = \rho\gamma_0$ sont constants.

1.2.1 Analyse de la tension $\tau(t)$

Par *la loi de Hooke* (*1.1*) nous obtenons:

- la difformité de $[\alpha_0, \beta_0]$ dans $[\alpha(t), \beta(t)]$ est :

$$\hat{\tau}(t) - \tau_0 = K\frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0}, \tag{1.13}$$

- la difformité de $[\alpha(t), \beta(t)]$ dans $\Gamma(t)$ est:

$$\tau(t) - \hat{\tau}(t) = K\frac{S(t) - \gamma(t)}{\gamma(t)}, \tag{1.14}$$

  avec $S(t)$ est le longueur de la courbe $\Gamma(t)$.

Comme dans la première schéma on a:

$$S(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \gamma(t) + \frac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Cette approximation peut être faite parce qu'il est supposé la petite difformité $\frac{\partial u}{\partial x} << 1$.

Donc nous avons:

$$S(t) - \gamma(t) = \frac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.15}$$

Substituer (1.15) dans (1.14) nous obtenons:

$$\tau(t) - \hat{\tau}(t) = \frac{K}{2\gamma(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.16}$$

De (1.13) et (1.16) nous obtenons la tension $\tau(t)$ sur $\Gamma(t)$ donné par:

$$\tau(t) = \tau_0 + K\frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{K}{2\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.17}$$

Nous revenons à l'équation de l'équilibre (1.12) nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(t)\sin\theta\right) = \tau(t)\frac{\partial}{\partial x}\sin\theta = \tau(t)\frac{\partial}{\partial x}\tan\theta = \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et substituer dans (1.12) nous obtenons:

$$mg\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.18}$$

Par (1.17) et (1.18) nous avons:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{gm} + \frac{K}{gm\gamma_0}(\gamma(t) - \gamma_0) + \frac{K}{2gm\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.19}$$

1.2.2 Cas particuliers

1. Si $\alpha(t) = \alpha_0$ et $\beta(t) = \beta_0$ on a $\gamma(t) = \gamma_0$ on retrouve le modèle précédent:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{gm} + \frac{K}{2gm\gamma_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (\alpha_0, \beta_0)\ ,\ t \geq 0,$$

   c'est le *modèle Kirchhoff* de la section précédente.

2. Si la tension est constante $\tau_0 = \tau$ la perturbation dans modèle Kirchhoff est zéro et nous avons:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{gm}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (\alpha(t), \beta(t))\ ,\ t \geq 0,$$

   qui est le modèle du *D'Alembert*.

1.3 Inégalité de Gronwall

Inégalité de Gronwall est une Inégalité fonctionnelle très important pour obtenir les estimations a priori pour les solutions des EDO ou EDP.

Lemme 1.1 *Soit $Y(x)$ et $F(x)$ sont doux fonctions continues positives dans $[a, b]$, et soit $K \geq 0$ et $M \geq 0$ donc on a:*

$$Y(x) \leq K + M\int_a^x F(t)Y(t)dt,$$

implique l'autre inégalité:

$$Y(x) \leq K \exp M\int_a^x F(t)dt.$$

Démonstration. voir [1] ■

Dans la suite, on a besoin d'une forme générale de ce lemme.

Lemme 1.2 *Soit $Y(x)$ et $F(x)$ sont doux fonctions continues positives dans $a \leq x \leq b$ et soit $K \geq 0$ et $M \geq 0$. Soit $\omega(u)$ une fonction continue positive pour tous $u \geq 0$, alors l'inégalité:*

$$Y(x) \leq K + M \int_a^x F(t)\omega(Y(t))dt, \quad a \leq x \leq b, \tag{1.20}$$

implique l'inégalité:

$$Y(x) \leq G^{-1}\left(G(K) + M \int_a^x F(t)dt\right), \quad a \leq x \leq b' \leq b, \tag{1.21}$$

où:

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d(t)}{\omega(t)}dt, \quad u_0 > 0, \text{ et } u \geq 0. \tag{1.22}$$

Et $G^{-1}(u)$ la fonction inverse de $G(u)$ ($G^{-1}(u)$existe à cause du monotonie de $G(u)$), avec x doit être dans l'intervalle $[a, b']$,donc $G(K)+M\int_a^x F(t)dt$ contient la domaine de $G^{-1}(u)$, par conséquent (1.21) influences pour $x \leq b' < b$, $\forall b$.

Démonstration. on suppose $V = V(x) = M\int_a^x F(t)\omega(Y(t))dt$ nous avons $Y \leq V$ pour $\omega(Y) \leq \omega(V)$ donc:

$$\frac{MF(x)\omega(Y)}{\omega(V)} \leq MF(x) \Longleftrightarrow \frac{V}{\omega(V)} \leq MF(x),$$

de (1.22) on a:

$$\frac{dG(V)}{dx} \leq MF(x),$$

et intégrer entre a et x on trouve:

$$G(V(x)) - G(V(a)) \leq M \int_a^x F(t)dt,$$

où, depuis $V(a) = K$

$$G(V(x)) \leq G(K) + M \int_a^x F(t)dt,$$

d'où, $G^{-1}(u)$

$$V(x) \leq G^{-1}\left(G(K) + M \int_a^x F(t)dt\right).$$

De (1.20) on trouve:

$$Y(x) \leq G^{-1}\left(G(K) + M \int_a^x F(t)dt\right), \quad a \leq x \leq b' \leq b.$$

■

1.4 Quelques résultats de convergences et de compacité

1.4.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $\left(\varphi_f\right)_{f \,\in\, E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $\left(\varphi_f\right)_{f \,\in\, E'}$.*

Proposition 1.4 *Soit (x_n) une suite de E. On a*

- $[x_n \rightharpoonup x$, *pour* $\sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E']$.
- *Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E'*

  i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, alors:
$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle .$$

1.4.2 La topologie faible * $\sigma(E, E')$

Soit E" le bidual de E, i.e. le dual de E', muni de la norme :

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle| .$$

Proposition 1.5 *Soit (f_n) une suite de E'. On a*

- $[f_n \rightharpoonup^* f$, *pour* $\sigma(E', E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E]$.
- *Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$,*

  si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$ alors $f_n \rightharpoonup^* f$, pour $\sigma(E', E)$.
- *Si $f_n \rightharpoonup^* f$ faiblement pour $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f_n\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

- *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *faiblement pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* E *alors*

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle .$$

Lemme 1.6 *Toute ensembles borné dans un espace Banach réflexive est compact faiblement, c.-à-d, toute suite de cette ensemble admet sous-suite faiblement convergeant .*

Exemple 1.7 *Si* $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *est un espace Banach réflexive, donc toute les ensembles bornés dans* L^p *sont compact faiblement.*

Lemme 1.8 *Soit* B *un espace de Banach tell que* $B = (B^*)'$ *où* B^* *est un espace de Banach réflexive,*

toute suite dans un ensemble borné dans B *admet sous-suite convergeant faiblement étoile.*

Démonstration. voir [7].

Exemple 1.9 *Si* $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *est un espace Banach réflexive et* $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$, *donc toute les ensembles bornés dans* L^p *sont compact faiblement étoile, en particulier tout les ensembles bornés dans* L^∞ *sont compact faiblement étoile.*

■

Théorème 1.10 *Soient* B, B_0, B_1*sont des espaces de Banach tel que* B_0, B_1*sont réflexives, supposons que* B_0 *est continue inclusion vers* B *et* B_1 *est inclusion de* B_0 *vers* B *est compact,* $\forall p_0 > 1$ *et* $p_1 < \infty$ *donc:*

$$W = \{v : v \in L^{p_0}([0, T], B_0), v_t \in L^{p_1}([0, T], B_1)\} .$$

Démonstration. voir [7]. ■

Chapitre 2

Existence et unicité locale

Dans ce chapitre, on parle sur l'existence et l'unicité de la solution locale de l'équation de Kirchhoff dans un domaine non-cylindrique.

2.1 Notations, hypothèses et résultats locales

Soit $\alpha : [0, T] \to R$ et $\beta : [0, T] \to R$ t.q.: $\alpha(t) < \beta(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et soit $\hat{\mathbb{Q}}$ le domine non cylindrique définie par :

$$\hat{\mathbb{Q}} = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \alpha(t) < x < \beta(t) \ , \forall t \in [0, T]\right\},$$

et soit $\hat{\Sigma}$ est la frontière de $\hat{\mathbb{Q}}$ t.q:

$$\hat{\Sigma} = \cup_{0<t<T}\{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}.$$

On considère le modèle de Kirchhoff dans un domaine non-cylindrique suivant.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & \text{dans } \hat{\mathbb{Q}}, \\ u \ = \ 0 & \text{dans } \hat{\Sigma}, \\ u(x, 0) = u_0(x) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \alpha(t) < x < \beta(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

On note

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Appelé l'opérateur *de Kirchhoff*.

On suppose que les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $M(\lambda)$ satisfait les conditions suivants :

(H1): $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2([0, +\infty] : \mathbb{R})$ tell que:

$$\alpha(t) < \beta(t), \alpha'(t) \leq 0 \text{ et } \beta'(t) \geq 0,$$

et:
$$\max\left\{\left|\alpha'(t)\right|, \left|\beta'(t)\right|\right\} \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}, 0 \leq t \leq +\infty.$$
(H2): $M \in C^1([0, +\infty[: \mathbb{R})$, $M(\lambda) \geq m_0 \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

Remarque 2.1 *L'hypothèse $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$, veut dire le domaine non cylindrique $\hat{\mathbb{Q}}$ est croissante donc la longueur: $\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ est croissante aussi.*

Lemme 2.2 *La condition*
$$\max\left\{\left|\alpha'(t)\right|, \left|\beta'(t)\right|\right\} \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}},$$
est équivalent à :
$$\left|\alpha'(t) + y\gamma'(t)\right| \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}} \qquad , \textit{pour tous } 0 \leq y \leq 1.$$

Démonstration. En effet si $y = 0$ ou $y = 1$, on retrouve l'hypothèse (H1). D'autre part si on a
$$\max\left\{\left|\alpha'(t)\right|, \left|\beta'(t)\right|\right\} \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}},$$
alors:
$$\left|\alpha'(t)\right| \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}} \text{ et } \left|\beta'(t)\right| \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}},$$
et de **(H1)** on a $\alpha'(t) \leq 0$ et $\beta'(t) \geq 0$,alors:
$$\alpha'(t) \leq \alpha'(t) + y\gamma'(t),$$
$$\alpha'(t) + y\gamma'(t) = (1 - y)\alpha'(t) + y\beta'(t) \leq y\beta'(t).$$
D'après $(H1)$ on a :
$$y\beta'(t) \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{pour } 0 \leq y \leq 1,$$
donc:
$$\alpha'(t) + y\gamma'(t) \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$
D'autre part on a
$$\alpha'(t) + y\gamma'(t) \geq \alpha'(t), \tag{2.3}$$
de (2.3)$*(-1)$ on trouve:et de: $-(\alpha'(t) + y\gamma'(t)) \leq -\alpha'(t)$ on a
$$\left|\alpha'(t)\right| \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -\alpha'(t) \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}},$$
donc:
$$-\left(\alpha'(t) + y\gamma'(t)\right) \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$
Alors de (2.2) et (2.4) on trouve:$\left|\alpha'(t) + y\gamma'(t)\right| \leq (\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}}$. ■

2.2 Changement de variable

Remarquons que si (x,t) varies dans $\hat{\mathbb{Q}}$ alors (y,t) avec $y=\frac{x-\alpha}{\gamma}$ est varies dans $\mathbb{Q}=]0,1[$ $\times\,]0,T[$, l'application:

$$T:\hat{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathbb{Q},$$

donner par $T:(x,t)\longrightarrow(y,t)$ est un diffeomorphisme, on transformons le système (2.1) par la changement de variables :

$$u(x,t)=v(y,t)\text{ avec }y=\frac{x-\alpha}{\gamma},$$

dans l'opérateur de Kirchhoff

$$\hat{L}u=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-M(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}.$$

Pour cela on calcule les dérivée u_{tt}, u_{xx}, u_x, on obtient

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+v_t,\\
u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})+\frac{\partial v_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial v_t}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t},
\end{aligned}$$

de:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial^2v}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial t})^2+\frac{\partial^2y}{\partial t\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}v_y,\\
\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial t}{\partial t} &= \frac{\partial^2v}{\partial y\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\right],
\end{aligned}$$

et de:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma}\text{ et }\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=\frac{\gamma(-\alpha''-\gamma''y)-2\gamma'(-\alpha'-\gamma'y)}{\gamma^2},$$

donc:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial y}{\partial t}=v_{yy}(\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma})^2+v_y\left[\frac{-\gamma'}{\gamma}\left[\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma}\right]\right],$$

donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{\partial^2v}{\partial y\partial t}\left[\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma}\right]+v_y\left[\frac{\gamma(-\alpha''-\gamma''y)-2\gamma'(-\alpha'-\gamma'y)}{\gamma^2}\right],$$

alors on trouve:

$$u_{tt}=v_{yy}(\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma})^2+3v_y(\frac{\gamma'}{\gamma}(\frac{\alpha'+\gamma'y}{\gamma}))+2v_{ty}(\frac{-\alpha'-\gamma'y}{\gamma})+v_{tt}+v_y(\frac{-\alpha''-\gamma''y}{\gamma}),$$

et on a:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma}v_y,$$
$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\gamma^2}v_{yy},$$
$$\check{M}(\lambda) = M(\lambda) - \frac{m_0}{2}.$$

On a $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$ ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 \leq x - \alpha(t) \leq \beta(t) - \alpha(t) \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)} \leq \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{\gamma(t)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Le nouveau opérateur est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{L}u = v_{yy}(\frac{-\alpha' - \gamma' y}{\gamma})^2 + 3v_y(\frac{\gamma'}{\gamma}(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})) + 2v_{ty}(\frac{-\alpha' - \gamma' y}{\gamma}) + v_{tt} \\ + v_y(\frac{-\alpha'' - \gamma'' y}{\gamma}) - \frac{1}{\gamma^2}M(\frac{1}{\gamma}\int_0^1 (v_y)^2 dy)v_{yy} = g(y,t), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \hat{L}u = v_{tt} - \frac{1}{\gamma^2}\left[\check{M}(\frac{1}{\gamma}\int_0^1 (v_y)^2 dy) + \frac{m_0}{2}\right] v_{yy} + v_{yy}(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2 \\ + 2v_y(\frac{\gamma'}{\gamma}(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})) + 2v_{ty}(\frac{-\alpha' - \gamma' y}{\gamma}) \\ + v_y(\frac{-\alpha'' - \gamma'' y}{\gamma} + (\frac{\gamma'}{\gamma}(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})) = g(y,t). \end{aligned}$$

Qui s'écrit sous la forme

$$\check{L}v = v_{tt} - \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\int_0^1 (v_y)^2 dy)v_{yy} - \frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}) + b(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} = g(y,t) = \check{L}v,$$

avec

- $dx = \gamma dy$.
- $\check{M}(\lambda) = M(\lambda) - \frac{m_0}{2} \geq \frac{m_0}{2} > 0$.
- $a(y,t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - (\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2 > 0$.
- $b(y,t) = -2(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})$.
- $c(y,t) = -(\frac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma}) + \frac{\gamma'}{\gamma}(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})$.

Donc le problème (2.1) devient un problème cylindrique a coefficients mixte :

$$\begin{cases} \breve{L}v(y,t) = g(y,t) & \text{dans } \mathbb{Q}, \\ v(0,t) = v(0,t) = 0 & \text{dans } 0 < t < T, \\ u(y,0) = v_0(y), \ \frac{\partial v}{\partial t}(y,t) = v_1(y) & 0 < y < 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.3 Existence est unicité locale

On note $((.,.))\,, ||.||\,,$ et $(.,.)\,, |.|$ respectivement le produit scalaire et la norme dans $H_0^1(0,1)$ et $L^2(0,1)$, et par $a(t,v,w)$ la forme positive bilinéaire, symétrique et continue dans $H_0^1(0,1)$:

$$a(t,v,w) = \int_0^1 a(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dy \text{ avec } v,w \in H_0^1(0,1).$$

Théorème 2.3 *soit Ω_t l'intervalle $]\alpha(t),\beta(t)[\ ,\ t<0<T$ si:*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0) \quad et \quad u_1 \in H_0^1(\Omega_0) \ \ et \ f \in L^\infty([0,T]\,, H_0^1(\Omega_0)),$$

donc il existe $0 < T_0 < T$ et une unique fonction u t.q.:

$$u : \hat{\mathbb{Q}}_0 \to \mathbb{R}, \ \hat{\mathbb{Q}}_0 = \ \Omega \times \,]0,T_0[\,,$$

satisfait les conditions :

$$u \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)), \ u' \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega_t)), \ u'' \in L^2(\Omega_t),$$

solutions de (2.1) dans $\hat{\mathbb{Q}}_0$.

Théorème 2.4 *Si:*

$$v_0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0.1) \ \ et \ v_1 \in H_0^1(0,1) \ \ et \ g \in L^\infty([0,T]\,, H_0^1(0,1)),$$

donc il existe $0 < T_0 < T$ et une fonction unique

$$v : \hat{\mathbb{Q}}_0 \to \mathbb{R}$$

qui satisfait les conditions:

$$v \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)), \ v' \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(0,1)),$$

solutions de (2.5) dans $\mathbb{Q}_0 =]0,1[\, \times \,]0,T_0[\,.$

Remarque 2.5 *Par le changement de variables* $y = \dfrac{x-\alpha}{\gamma}$ *dans* $\hat{\mathbb{Q}}$ *en trouve le terme:*

$$2(\frac{\alpha+\gamma y}{\gamma})(\frac{\gamma'}{\gamma})\frac{\partial v}{\partial y}+(\frac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma})^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

dans (2.5) cela donne un problème sérieux quand nous multiplions les deux coté d'équations (2.5) par $\left(-\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$ *et intégrer dans* $\mathbb{Q}$, *cependant, sous les hypothèses* ***(H1)*** *et* ***(H2),*** *les mauvais termes peuvent être absorbés par les positives termes non linéaire* $M(\lambda)$, *en effet, nous incorporons le terme* $(-\dfrac{m_0}{2\gamma^2}+\dfrac{m_0}{2\gamma^2})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ *dans* $\breve{L}v$ *donc* $\breve{M}(\lambda)=M(\lambda)-\dfrac{m_0}{2}\geq\dfrac{m_0}{2}$ *les termes restant peuvent être écrits sous la forme de divergence.*

$$\frac{m_0}{2\gamma^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\frac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma}(\frac{\gamma'}{\gamma})\frac{\partial v}{\partial y}+(\frac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma})^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}(\left[\frac{m_0}{2\gamma^2}-(\frac{\alpha'+\gamma' y}{\gamma})\right]\frac{\partial v}{\partial y}).$$

Donnant une forme symétrie bilinéaire continue sous la forme $a(t,v,w)$ *qui est positive.*

Remarque 2.6 *Quand on obtenir des évaluations pour* v' *dans* $H_0^1(0,1)$ *et* v *dans* $H^2(0.1)$,*les termes du forme :*

$$\frac{\beta'}{\gamma}\left[\frac{\partial v'(1,t)}{\partial y}\right]^2+\frac{(-\alpha')}{\gamma}\left[\frac{\partial v'(0,t)}{\partial y}\right]^2,$$

pour garantir sa positivité nous avons besoins des conditions $\alpha'\leq 0$ *et* $\beta'\geq 0$.

2.4 Approximations et estimations

Soit $\{w_j\}$ $j=1,2....$ solutions de problème spectral :

$$((w_j,v))=\lambda_j\,(w_j,v)\quad,\forall v\in H_0^1(0,1),$$

ils peuvent être choisis pour constituer un base orthonormée de $L^2(0,1)$, nous représentons par $V_m=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ le sous-espase de $H_0^1(0,1)$ engendré par w_j, noter que cela équivalente a dire que $-w_j=\lambda_j w_j$, $w_j(0)=w_j(1)=0$ pour $j=1,.....$, ils sont fonctions propres de l'équation laplacien avec zéro conditions Dirichlet sur les frontières.

Dans notre cas on obtient:

$$\lambda_j=(j\pi)^2 et w_j=\sqrt{2}\sin j\pi y\quad j=1,2,....$$

On recherchons des $v_m(t)\in V_m$ les solutions du système des équations différentielle ordinaire:

$$\begin{cases}(\breve{L}v_m(t),v)=(g(t),v)\quad\forall v\in V_m,\\ v_m(0)=v_{0m}\\ v_m'(0)=v_{1m}\end{cases}\tag{2.6}$$

Où v_{0m} et v_{1m} désigne les projections de v_0 et v_1 sur V_m t.q.:

$$v_{0m} \to v_0 \text{ dans } H_0^1(0,1) \cap H^2(0.1).$$
$$v_{1m} \to v_1 \text{ dans } H_0^1(0,1).$$

2.4.1 Estimation 1

Considérons $v = v'_m$ dans (2.5) :

$$(\check{L}v_m(t), v_m^{'}) = (\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2}, v_m^{'}) - \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\int_0^1 (\frac{\partial v_m}{\partial y})^2 dy)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v_m^{'})$$
$$- (\frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}), v_m^{'}) + (b(y,t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial t \partial y}, v_m^{'}) + (c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m^{'}) = (g, v_m^{'}).$$

Notons que:

$$(\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2}, v_m^{'}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m^{'}(t)\right|^2.$$
$$\int_0^1 (\frac{\partial v_m}{\partial y})^2 dy = ||v_m||^2.$$
$$(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v_m^{'}) = -(\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2.$$
$$-(\frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}), v_m^{'}) = (a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}) = a(t, v_m, v_m^{'}).$$

Et on obtient l'équation:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m^{'}(t)\right|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}||v_m(t)||^2)\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2$$
$$+ a(t, v_m, v_m^{'}) + (b(y,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}, v_m^{'}) + (c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m^{'}) = (g, v_m^{'}). \quad (2.8)$$

Si on note:

$$\hat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda \check{M}(s)ds,$$

on a:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\gamma}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}||v_m(t)||^2)\right] = -\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^3}\hat{M}'(\frac{1}{\gamma}||v_m(t)||^2)\,||v_m(t)||^2$$
$$-\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^2}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\|v_m(t)\|^2) + \frac{1}{2\gamma^2}\hat{M}'(\frac{1}{\gamma}||v_m(t)||^2)\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2,$$

ce implique:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\gamma}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)\right]+\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^3}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2$$
$$+\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^2}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)=\frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)\frac{d}{dt}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2, \qquad (2.9)$$

et de:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m) &= \frac{d}{dt}\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial v_m}{\partial y})^2dy\\ &= \int_0^1 a^{'}(y,t)(\frac{\partial v_m}{\partial y})^2dy+2\int_0^1 a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy,\end{aligned}$$

donc:

$$a(t,v_m,v_m^{'})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m)-\frac{1}{2}a^{'}(t,v_m,v_m), \qquad (2.10)$$

où:

$$a^{'}(t,v,w)=\int_0^1 a^{'}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Nous avons aussi:

$$\begin{aligned}(b(y,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y},v_m^{'}) &= (\frac{1}{2}b(y,t)v_m^{'}(y,t)^2)|_{y=0}^{y=1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y}(v_m^{'}(t))^2dy\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y}(v_m^{'}(t))^2dy. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

On considérant de (2.9), (2.10) et (2.11) dans (2.8) on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m^{'}(t)\right|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\gamma}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)\right]+$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m)+\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^3}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2+\frac{\gamma^{'}}{2\gamma^2}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left|\left|v_m(t)\right|\right|^2)$$
$$=\frac{1}{2}a^{'}(t,v_m,v_m)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y}(v_m^{'}(t))^2dy+(c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y},v_m^{'})+(g,v_m^{'}). \qquad (2.12)$$

On a les majorations suivantes:

1. $\left|a^{'}(t,v_m,v_m)\right|\leq c_1\left\|v_m\right\|\left\|v_m\right\|\leq c_1\left\|v_m\right\|^2.$
2. $\left|\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y}(v_m^{'})^2dy\right|\leq c_2\left|v_m^{'}\right|^2.$
3. $\left|(g,v_m^{'})\right|\leq\frac{1}{2}\left|g\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_m^{'}\right|^2.$

Donc:

$$\left|a'(t,v_m,v_m)\right| + \left|\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(v_m')^2 dy\right| + \left|(g,v_m')\right| \leq \frac{1}{2}\left|g\right|^2 + C_1\left|v_m'(t)\right|^2 + C_2\left\|v_m(t)\right\|^2, \quad (2.13)$$

de (2.12) et (2.13) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\gamma}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2)\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,v_m,v_m) \\ + \frac{\gamma'}{2\gamma^3}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2)\left\|v_m(t)\right\|^2 + \frac{\gamma'}{2\gamma^2}\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2) \\ \leq \frac{1}{2}\left|g(t)\right|^2 + C_1\left|v_m'(t)\right|^2 + C_2\left\|v_m(t)\right\|^2,\end{aligned} \quad (2.14)$$

nous avons par hypothèse γ' :

$$\hat{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2) \geq C\left\|v_m\right\|^2, \quad (2.15)$$

$$a(t,v_m,v_m) > 0. \quad (2.16)$$

Intégrer (2.14) sur $[0,t[$ a contenu dans l'intervalle d'existence de $v_m(t)$ solution de (2.6), nous obtenons:

$$\left|v_m'(t)\right|^2 + \left\|v_m(t)\right\|^2 \leq K_0 + K_1\int_0^t(\left|v_m'(s)\right|^2 + \left\|v_m(s)\right\|^2)ds, \quad (2.17)$$

tell que K_0 et K_1 sont des constant indépendant de m, en appliquant *l'inégalité de Gronwall (1.2)* on trouve:

$$\left|v_m'(t)\right|^2 + \left\|v_m(t)\right\|^2 < C \text{ dans } [0,T]. \quad (2.18)$$

2.4.2 Estimation 2

Dans le système approximatif (2.6) nous prenons $v = -\dfrac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}$ cela donne:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m'\right\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2 \\ + a(t,v_m,-\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}) + (b(y,t)\frac{\partial v_m'}{\partial y},-\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}) + (c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y},-\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}) \\ = (g,-\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}),\end{aligned} \quad (2.19)$$

nous avons:

$$\begin{aligned}a(t,v_m,-\frac{\partial^2 v_m'}{\partial y^2}) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2 dy \\ &- \frac{1}{2}\int_0^1 a'(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2 dy \\ &- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right] - \frac{\partial v_m'}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\Big|_{y=0}^{y=1}.\end{aligned} \quad (2.20)$$

Notez que:

$$\begin{aligned}(b(y,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m^{'}}{\partial y^2}) &= -\int_0^1 b(y,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m^{'}}{\partial y^2}dy \\ &\quad -\int_0^1 b(y,t)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2 dy,\end{aligned}$$

et de l'intégral par partie on trouve:

$$\begin{aligned}(b(y,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m^{'}}{\partial y^2}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2 dy \\ &\quad -\frac{1}{2}b(y,t)(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Remarque 2.7 *Comme* $b(y,t) = -2\dfrac{\alpha^{'} + \gamma^{'} y}{\gamma}$, *alors*

$$-\frac{1}{2}b(y,t)(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2|_{y=0}^{y=1} = \frac{\beta^{'}}{\gamma}(\frac{\partial v_m^{'}(1,t)}{\partial y})^2 - \frac{\alpha^{'}}{\gamma}(\frac{\partial v_m^{'}(0,t)}{\partial y})^2,$$

qu'est positive, par l'hypothèse $\alpha^{'} \leq 0$ *et* $\beta^{'} \geq 0$. *D'autre part:*

$$\begin{aligned}(c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m^{'}}{\partial y^2}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy \\ &\quad -c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En rapportant (2.20), (2.21) et (2.22) dans (2.19) en trouve:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m^{'}\right\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m(t)\right\|^2)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2 \\ &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2 dy \; - \frac{1}{2}\int_0^1 a^{'}(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2 dy \\ &-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1} \\ &+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2 dy - \frac{1}{2}b(y,t)(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2|_{y=0}^{y=1} \\ &+\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy - c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1} = (\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Remarque 2.8 *Notons par* $\mu(t) = \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v\right\|^2)$, *nous avons:*

$$\mu^{'}(t) = -\frac{2\gamma^{'}}{\gamma^3}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v\right\|^2) + \frac{2}{\gamma^3}\check{M}^{'}(\frac{1}{\gamma}\left\|v\right\|^2)((v,v^{'}))\frac{\gamma^{'}}{\gamma^4}\check{M}^{'}(\frac{1}{\gamma}\left\|v\right\|^2)\left\|v^2\right\|,$$

et par l'estimation (2.18) et $M \in C^1([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ *en trouve par l'hypothèse* ***(H1)*** *sur* α *et* β *on a:*

$$\left|\mu^{'}(t)\right| \leq C + \left\|v_m^{'}\right\|,$$

de (2.23) et (2.8) on a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m^{'}\right\|^2+\frac{1}{2}\mu(t)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2dy\ )$$
$$+\frac{\beta^{'}}{\gamma}(\frac{\partial v_m^{'}(1,t)}{\partial y})^2+\frac{(-\alpha^{'})}{\gamma}(\frac{\partial v_m^{'}(0,t)}{\partial y})^2$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 a^{'}(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2dy\ +\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]-\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy$$
$$-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial b}{\partial y}(\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y})^2dy$$
$$-\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left[c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}dy+c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1}+(\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}). \tag{2.24}$$

Remarque 2.9 *Nous avons l'identité:*

$$\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]dy=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy-\int_0^1\frac{\partial v_m}{\partial y}dy,$$

ou:

$$\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\right|_{\mathbb{R}}\leq\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|_{L^2(0,1)}+\|v_m\|\leq C+\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|_{L^2(0,1)},$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left[y\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]dy=\int_0^1 y\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}dy+\int_0^1\frac{\partial v_m}{\partial y}dy,$$

ou:

$$\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|_{\mathbb{R}}\leq\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|_{L^2(0,1)}+\|v_m\|\leq C+\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|_{L^2(0,1)},$$

par l'estimation (2.18).

Remarque 2.10 *Nous avons:*

$$a(y,t)=\frac{m_0}{2\gamma^2}-(\frac{\alpha^{'}+\gamma^{'}y}{\gamma})^2>0\ \ et\ \ \frac{\partial a}{\partial y}=-2\frac{\alpha^{'}+\gamma^{'}y}{\gamma}\frac{\gamma^{'}}{\gamma},$$

$$c(y,t)=-\frac{\alpha^{''}+\gamma^{''}y}{\gamma}-\frac{\alpha^{'}+\gamma^{'}y}{\gamma}\frac{\gamma^{'}}{\gamma},$$

puis de $\beta^{'}=\alpha^{'}+\gamma^{'}$ on trouve

$$-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1}=\frac{2\beta^{'}\gamma^{'}}{\gamma^2}\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}(1,t)-\frac{2\alpha^{'}\gamma^{'}}{\gamma^2}\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}(0,t),$$

$$\begin{aligned}c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}|_{y=0}^{y=1}&=-(\frac{\beta^{'}\gamma^{'}+\gamma\beta^{''}}{\gamma^2})\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}(1,t)\\&\quad+(\frac{\alpha^{'}\gamma^{'}+\gamma\alpha^{''}}{\gamma^2})\frac{\partial v_m}{\partial y}(0,t)\frac{\partial v_m^{'}}{\partial y}(0,t),\end{aligned}$$

considérons par exemple:

$$\left|\frac{\beta'\gamma'}{\gamma^2}\right|\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|\left|\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1,t)\right| \leq$$

$$\lambda\left|\frac{\beta'\gamma'}{\gamma^2}\right|^2\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2+\frac{1}{4\lambda}\left|\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1,t)\right|^2, \ (de\ ab \leq a^2+\frac{1}{4}b^2),$$

si $\frac{1}{\lambda}=\frac{\beta'}{\gamma}$ *alors* $\frac{1}{4}\frac{\beta'}{\gamma}(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1,t)^2)$ *peut être éliminer par le terme* $\frac{\beta'}{\gamma}(\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1,t)^2)$ *dans* (2.24)*.Le terme* $\left|\frac{\beta'\gamma'}{\gamma^2}\right|\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}(1,t)\right|^2$ *peut être estimé comme dans* (2.9)*, nous obtenons:*

$$\left|\frac{\beta'\gamma'}{\gamma^2}\right|\left|\frac{\partial v'_m}{\partial y}(1,t)\right|^2 \leq C+\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2,$$

avec une constant C peut-être différent, le même argument est vrai pour le terme avec $\frac{\partial v'_m}{\partial y}(0,t)$.

Remarque 2.11 *De l'hypothèse sur α et β nous pouvons estimer tout les termes dans la partie à gauche de* (2.24) *par* $C\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|$ *et* $C\left\|v'_m\right\|^2$ *puis par les Remarques au-dessus ,nous modifions* (2.24) *obtenir:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|v'_m\right\|^2+\mu(t)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2+ &\quad \frac{d}{dt}\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2dy \\ \leq C_0+ &\quad C_1\left\|v'_m\right\|^2+\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Substituer $\mu(t)\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2$ *dans* (2.25) *par* $\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2-\mu'(t)\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2\right]$ *et par* (2.8) *en trouve:*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\|v'_m(t)\|^2+\mu(t)\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}(t)\right|^2+\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2dy\right] \\ &\leq C_0+C_1\|v'_m(t)\|^2+\|v'_m(t)\|\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right|^2 \ dans\ [0,T], \end{aligned} \tag{2.26}$$

on note:

$$h_m(t)=\left[\|v'_m(t)\|^2+\mu(t)\left|\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}(t)\right|^2+\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2})^2dy\right].$$

Alors on a l'inégalité suivante:

$$\frac{dh_m}{dt}\leq C_0+C_1h_m^2+C_2h_m^{\frac{3}{2}}.$$

On intégrant sur $[0,T]$ *on obtient:*

$$h_m(T) \leq h_m(0) + C_0 T + \int_0^T (C_1 h_m^2(s) + C_2 h_m^{\frac{3}{2}}(s))ds,$$

on pose:

$$K = h_m(0) + C_0 T \ \ et\ g(h(s)) = C_1 h_m^2(s) + C_2 h_m^{\frac{3}{2}}(s),$$

donc d'après l'inégalité de Gronwall généralisée, $\exists T_0, 0 \leq T_0 \leq T$

$$h_m(T) \leq G^{-1}(G(K) + \int_0^T ds), \qquad 0 \leq t \leq T_0,$$

$$h_m(T) \leq G^{-1}(G(K) + T),$$

où:

$$G(\lambda) = \int_\xi^\lambda \frac{1}{C_1 s + C_2 s^{\frac{3}{2}}} ds.$$

En particulier $h_m(t)$ *est borné dans* $[0,T_0]$ *indépendamment de* m, *i.e.*

$$\|v_m'(t)\|^2 + \mu(t) \left| \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}(t) \right|^2 < C, \tag{2.27}$$

notez qui $\mu(t)$ *est strictement positif.*

2.4.3 Estimation 3

Prenant $v = v_m''(t)$ dans le système approximatif (2.6) nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left|v_m''(t)^2\right| - \mu(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v_m'' \right) - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[a(y,t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right] v_m'' dy \\ + \int_0^1 b(y,t) \frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m'' dy + \int_0^1 c(y,t) \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m'' dy \\ = (g, v_m''), \end{aligned}$$

on a:

$$\left| (\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2 \right| \leq \frac{m_0}{2\gamma^2},$$
$$\left| \gamma' \right| = |\beta' - \alpha'| \leq 2(\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}},$$

donc:

$$\begin{aligned} a(y,t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - (\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2, \\ |a(y,t)| &\leq \frac{m_0}{2\gamma^2} + \left| (\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2 \right| \Rightarrow |a(y,t)| \leq \frac{m_0}{\gamma^2}, \end{aligned}$$

et: $\dfrac{\partial a}{\partial y} = -\dfrac{2\gamma'}{\gamma}(\dfrac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma})^2$ donc:

$$\left|\frac{\partial a}{\partial y}\right| \leq 2\frac{m_0}{\gamma^2},$$

et on a $c(y,t) = -\dfrac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma} - \dfrac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ donc

$$|c(y,t)| \leq \frac{1}{\gamma^2}(\frac{m_0}{2})^{\frac{1}{2}} + C_0,$$

et de:

$$b(y,t) = -2(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}) \Rightarrow |b(y,t)| \leq \frac{(2m_0)^{\frac{1}{2}}}{\gamma}$$

donc:

$$\begin{aligned}
|v''_m|^2 =& \mu(t)\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v''_m\right) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right] v''_m dy \\
&- \int_0^1 b(y,t)\frac{\partial v'_m}{\partial y} v''_m dy - \int_0^1 c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y} v''_m dy + (g, v''_m) \\
=& \int_0^1 [\mu(t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right] - b(y,t)\frac{\partial v'_m}{\partial y} - c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y} + g] v''_m dy \\
\leq& \frac{1}{2}\left|[\mu(t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right] - b(y,t)\frac{\partial v'_m}{\partial y} - c(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y} + g]\right|^2 + \frac{1}{2}|v''_m|^2 .
\end{aligned}$$

Des premiers et deuxièmes estimations (2.4.1), (2.4.2) on a :

$$\frac{1}{2}|v''_m|^2 \leq \frac{1}{2}C,$$

donc:

$$|v''_m(t)|^2 \leq C, \text{ dans } [0, T_0]. \tag{2.28}$$

2.5 Preuve des théorèmes

2.5.1 Preuve de Théorème 2.4

L'Existence

Dans cette étape nous prouvons que les estimations obtenu au-dessus sont suffisantes pour passer à la limite dans l'équation approximative (2.6).

Vu (2.18), (2.27) et (2.28) un sous-séquence représenté par (v_k) peut être extrait de v_m tell que:

$$v_k \rightharpoonup^* v \text{ converge faiblement étoile dans } L^\infty(0, T_0; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)), \tag{2.29}$$

$$v_k' \rightharpoonup^* v' \text{ converge faiblement étoile dans } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)). \tag{2.30}$$

En particulier $v_k \rightharpoonup^* v$ dans $L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$, et par l'injection compact de $L^\infty(0,T_0;H_0^1(0,1))$ dans $L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega))$, on a la convergence forte.

$$v_k \to v \text{ converge fortement dans } L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega)). \tag{2.31}$$

De plus (2.28) implique:

$$v_k'' \rightharpoonup v'' \text{ converge faiblement dans } L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)). \tag{2.32}$$

D'hypothèse **(H1)**, **(H2)** et les estimations (2.18) et (2.27), nous obtenons:

$$\left(\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_m'(t)\right\|^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) < C, \text{ dans } [0,T_0[\,. \tag{2.33}$$

Et comme l'image par $\check{M}$ d'une suite bornée est bornée, alors $\left\|v_m'(t)\right\|^2$est bornée donc, $\dfrac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}$ est bornée aussi.

Donc on peut extraire une sous suite v_k t.q.:

$$\left(\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_k'(t)\right\|^2)\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}\right) \rightharpoonup \chi.$$

Reste à déterminer χ.

Lemme 2.12

$$\chi = \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v'(t)\right\|^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{2.34}$$

avec v est la limite de (2.29).

Démonstration. Soit $\mu_k(t) = \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_k(t)\right\|^2)$ et $\mu(t) = \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v(t)\right\|^2)$ à cause de (2.34), pour chaque $w \in L^2(0,T_0;L^2(0,1))$ on a:

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0}(\chi - \mu(t)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},w)dt &= \int_0^{T_0}(\chi - \mu_k(t)\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2},w)dt+ \\ &+\int_0^{T_0}\mu(t)(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},w)dt+ \\ &+\int_0^{T_0}[\mu_k(t)-\mu(t)]\,(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2},w)dt. \end{aligned}\tag{2.35}$$

Par (2.34) le premier côté droit intégrant de (2.35) va tendre à zéro quand $k \to +\infty$ et le deuxième par (2.27), aussi va tendre à zéro. Pour analyser le troisième membre du droit le côté de (2.35) nous employons l'hypothèse **(H2)** sur $M(\lambda)$. Alors, nous avons:

$$|\mu_k(t) - \mu(t)| \le C\left|\left\|v_k(t)\right\|^2 - \left\|v(t)\right\|^2\right| = C\left|\left\|v_k(t)\right\| - \left\|v(t)\right\|\right|\left|\left\|v_k(t)\right\| - \left\|v(t)\right\|\right|.$$

Comme $\check{M}$ est de $C^1([0,+\infty[:\mathbb{R})$ donc elle est lipshtizienne et on a

$$\left|\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v_k(t)\right\|^2)-\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\left\|v(t)\right\|^2)\right|\leq\frac{1}{\gamma^3}\left|\left\|v_k(t)\right\|^2-\left\|v(t)\right\|^2\right|,$$

donc:

$$|\mu_k(t)-\mu(t)|\leq C\left\|v_k(t)-v(t)\right\|\left(\left\|v_k(t)\right\|+\left\|v(t)\right\|\right),$$

de (2.31)

$$|\mu_k(t)-\mu(t)|\to 0.$$

Alors, de (2.31), estimation (2.18), (2.27) que le dernier terme de (2.35) va tendre à zéro quand $k\to+\infty$. ■

Par l'Intégration par parties nous obtenons:

$$a(t,v_k,w)\to a(t,v_k,w) \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(0,1)),$$

et:

$$\frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial v_k}{\partial y})\to\frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}) \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.36}$$

Nous avons aussi, par la même discussion:

$$b(y,t)\frac{\partial v_k'}{\partial y}\to b(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(0,1)), \tag{2.37}$$

$$c(y,t)\frac{\partial v_k}{\partial y}\to c(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.38}$$

À cause de (2.32), (2.34), (2.12), (2.36), (2.37) et (2.38) nous prenons $m=k$ dans le l'équation approximative (2.18) et si $k\to+\infty$ on a:

$$(\check{L}v,w)=g,\ \forall w\in L^2(0,T_0;L^2(0,1)),$$

ou:

$$\check{L}v=g, \text{ dans } \ L^2(0,T_0;L^2(0,1)), \tag{2.39}$$

de (2.29), (2.30) and (2.32),le système

$$\left(\check{L}v_m,g\right)\to\left(\check{L}v,g\right),$$

donc les conditions devient:

$$v(0)=v_0 \text{ et } v'(0)=v_1 \quad \text{dans } \Omega\ .$$

L'Unicité

Si v et v' sont deux solutions dans les conditions de (**2.4**), alors $w = v - \hat{v}$ satisfait:

$$\begin{aligned} w'' - \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v\|^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|\hat{v}\|^2)\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} & \\ -\frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)\frac{\partial w}{\partial y}) + b(y,t)\frac{\partial w'}{\partial y} + c(y,t)\frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \quad \text{dans } L^2(0,T_0;L^2(0,1)), \end{aligned} \tag{2.40}$$

$w(0) = w'(0) = 0$ dans Ω et $w = 0 \ \ ]0,1[\times]0,T_0[$.

Multiplions (2.40) par w' et intégrons sur $]0,1[$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial w}{\partial y})^2 dy - \frac{1}{2}\int_0^1 a'(y,t)(\frac{\partial w}{\partial y})^2 dy + \int_0^1 b(y,t)\frac{\partial w'}{\partial y}w'dy + \int_0^1 c(y,t)\frac{\partial w}{\partial y}w'dy \\ &= \left[\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2) - \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|\hat{v}(t)\|^2)\right]\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, w'\right), \end{aligned} \tag{2.41}$$

nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2) + \frac{\gamma'}{\gamma^3}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\gamma^2}\check{M}'(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\frac{d}{dt}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\int_0^1 b(y,t)\frac{\partial w'}{\partial y}w'dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(w')^2 dy. \tag{2.43}$$

On considérant dans (2.32) et (2.33) dans (2.31) nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + \int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial w}{\partial y})^2 dy\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leq C\left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\right) \end{aligned}$$

par l'intégration sur $0 \leq t < T_0$, nous avons:

$$\left(|w'(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + \int_0^1 a(y,t)(\frac{\partial w}{\partial y})^2 dy\right) \geq |w'(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2.$$

Comme $\check{M}$ est de $C^1([0,+\infty[:\mathbb{R})$

$$|w'(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}\check{M}(\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2)\|w(t)\|^2 \geq |w'(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}C\|w(t)\|^2.$$

Alors

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq C_0\int_0^t \left(|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2\right) ds.$$

Cela implique $w = 0$ par *l'inégalité de Gronwall* (1.2).

2.5.2 Preuve de Théorème 2.3

Si v est la solution de (2.4) nous considérons la fonction:

$$u(x,t) = v(y,t), \quad x = \alpha + \gamma y. \tag{2.44}$$

Nous avons aussi:

$$g(y,t) = f(\alpha + \gamma y, t), \tag{2.45}$$

$$v_0(y) = u(x,0) = u_0(\alpha(0) + \gamma(0)y), \tag{2.46}$$

$$v_1(y) = u'(x,0) = u_1(\alpha(0) + \gamma(0)y) = (\alpha'(0) + \gamma'(0)y)u_0'(\alpha(0) + \gamma(0)y), \tag{2.47}$$

la fonction $u(x,t)$ de (2.44) est la solution de (2.3).

$$(x,t) \to (\frac{x-\alpha}{\gamma}, t),$$

de $\hat{Q}$ dans $]0,1[\times]0,T_0[$ est de classe C^2 et on a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y}(y,t), \tag{2.48}$$

$$u''(x,t) = v''(y,t) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + b(y,t)\frac{\partial v'}{\partial y}(y,t) + c(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.49}$$

avec $y = \dfrac{x-\alpha}{\gamma}$.

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy, \tag{2.50}$$

de (2.48) et (2.50) on a:

$$u''(x,t) - M\left(\frac{1}{\gamma}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \breve{L}v(y,t), \text{ avec } y = \frac{x-\alpha}{\gamma}. \tag{2.51}$$

Alors u résoudre (2.1), avec initiale conditionne u_0 et u_1, la régularité de v donnée par (2.4), implique la régularité de u donnée par (2.3).

De (2.48) et (2.51) nous avons l'équivalence entre les problèmes (2.1) et (2.5) ,alors si u et $\hat{u}$ sont deux solutions de (2.1) donné par (2.3), alors v et $\hat{v}$ obtenus par (2.44) est des solutions dans les conditions de (2.4).

Donc nous avons l'unicité pour v et u i.e.: $v = \hat{v}$ et $u = \hat{u}$.

Chapitre 3

Quelques résultats numériques

Dans ce chapitre, on applique les différences finis pour obtenir quelques résultats numériques sur le problème étudiée. Dans notre cas on considère (3.1) avec

$$u^0 = \frac{1}{2}\sin(\pi x), \quad u^1 = 0, \quad M\left(u\right) = (2 + \int_{-1-kt}^{1+kt} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx) \ \text{ et } f = 0,$$

et on veut résoudre le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (2 + \displaystyle\int_{-1-kt}^{1+kt} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \hat{\mathbb{Q}}, \\ u \ = \ 0 & \text{dans } \hat{\Sigma}, \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & -1 - kt < x < 1 + kt. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Approximation par différence finie

Considérez les approximations suivantes du dérive pour résoudre l'équation (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_i^j &= \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + \left[O\left(\Delta t\right)^2\right], \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_i^j &= \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \left[O\left(\Delta x\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Pour $i = 1........m-1$, et $j = ...n-1$, quand

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

en remplaçant ces termes dans équation (2.1) nous obtenons:

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\Delta t^2}+\left[O\left(\Delta t\right)^2\right]-\left(\int_{-1-kt}^{1+kt}\left(\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{\Delta x}\right)^2dx\right)\left(\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{\Delta x^2}\right)$$
$$+\left[O\left(\Delta x\right)^2\right]=0.$$

en omettant tous les termes de $O\left\{\left(\Delta t\right)^2,\left(\Delta x\right)^2\right\}$ nous avons le schéma de l'explicite

$$u_i^{j+1}=2u_i^j-u_i^{j-1}+\lambda^2\left(2+\int_{-1-kt}^{1+kt}\left(\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{\Delta x}\right)^2dx\right)\left(u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j\right). \tag{3.2}$$

Nous exigeons aussi que la solution discrète satisfasse les conditions de la limite dans

$$u_0^j=u_{m-1}^j=0 \qquad n\geq 0,$$

nous avons besoin de savoir que

$$u_i^0=u^0(x_i),$$

pour écrire le schéma de la différence fini nous avons laissé $u^j\in\mathbb{R}^n$, alors le schéma de la différence au-dessus peut être écrit:

$$u_i^{j+1}=2\left(1-\lambda^2D\right)u_i^j+\lambda^2D\left(u_{i+1}^j+u_{i-1}^j\right)-u_i^{j-1},$$

où

$$u^{j+1}=Bu^j-u^{j-1},\ A=\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix}-1&0&\dots&\dots&0\\1&-1&\ddots&\ddots&\vdots\\0&1&&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&&0\\0&\dots&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Telle que:

$$D=2+\int_{-1-kt}^{1+kt}\left(\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{\Delta x}\right)^2dx=2+\int_{-1-kt}^{1+kt}(Au_i^j)^2dx,,$$

$$B=\begin{pmatrix}2\left(1-\lambda^2D\right)&\lambda^2D&0&\dots&0\\\lambda^2D&2\left(1-\lambda^2D\right)&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\lambda^2D\\0&\dots&0&\lambda^2D&2\left(1-\lambda^2D\right)\end{pmatrix}.$$

3.2 Algorithme de programme

fonction de Kirchhoff

fonction U = sol_Kirchhoff$(n, dt, tf, k, u0)$

input

n/le nombre de points pour chaque intervalle

dt/ temps

tf/le temps final

$nf = ceil(tf/dt)$

k/vitesse

x0 = linspace(-1,1,n+2)

x0 = x0(2:end-1);int x0 = x0(2:end-1)

$h = var$ /le pas de l'axe x

$r = 1/h$

$c = dt/h$ /controle de stabilité

$u0 = (1/2) * sin(pi * x0)$ /la condition initiale

$U = [u0, u0]$

$I = eye(n)$ /diagonale

$R = diag(ones(1, n-1), 1)$ tri-diagonle

$A = r * (I - R\prime)$ tridiagonal

matrice wave=zeros(length($x0$),2+length(nf))

wave $(:, 1) = (u0)$ /onde 1

wave $(:, 2) = (u0)$ /onde 2

output

for $tn = 3 : nf$

$x = linspace(-1 - k * dt * tn, 1 + k * dt * tn, n + 2);$

$x = x(2 : end - 1)$

$h = (x(2) - x(1));$

$r = 1/h;$

$c = dt/h;$

vecteur $ux = A * U(:, 2);$ de dérivée en x

le carré $ux = ux.\hat{}2$ du vecteur de vitesse

fonction trapez $M = 2 + trapz(x, ux)$ pour le vecteur de masse

matrice $B = M * c\hat{}2 * R + 2 * (1 - M * c\hat{}2) * I + M * c\hat{}2 * R\prime$ tridiagonel

```
U2 = B * U(:,2) - U(:,1) / les solutions de problème
U = [U(:,2), U2];   /matrice de solution
wave(:,tn) = U2 / la solution sous forme un onde
end
```

3.3 Exemples

Dans la suite on donne deux exemples avec $k = 0.2$ et $k = 0.8$.

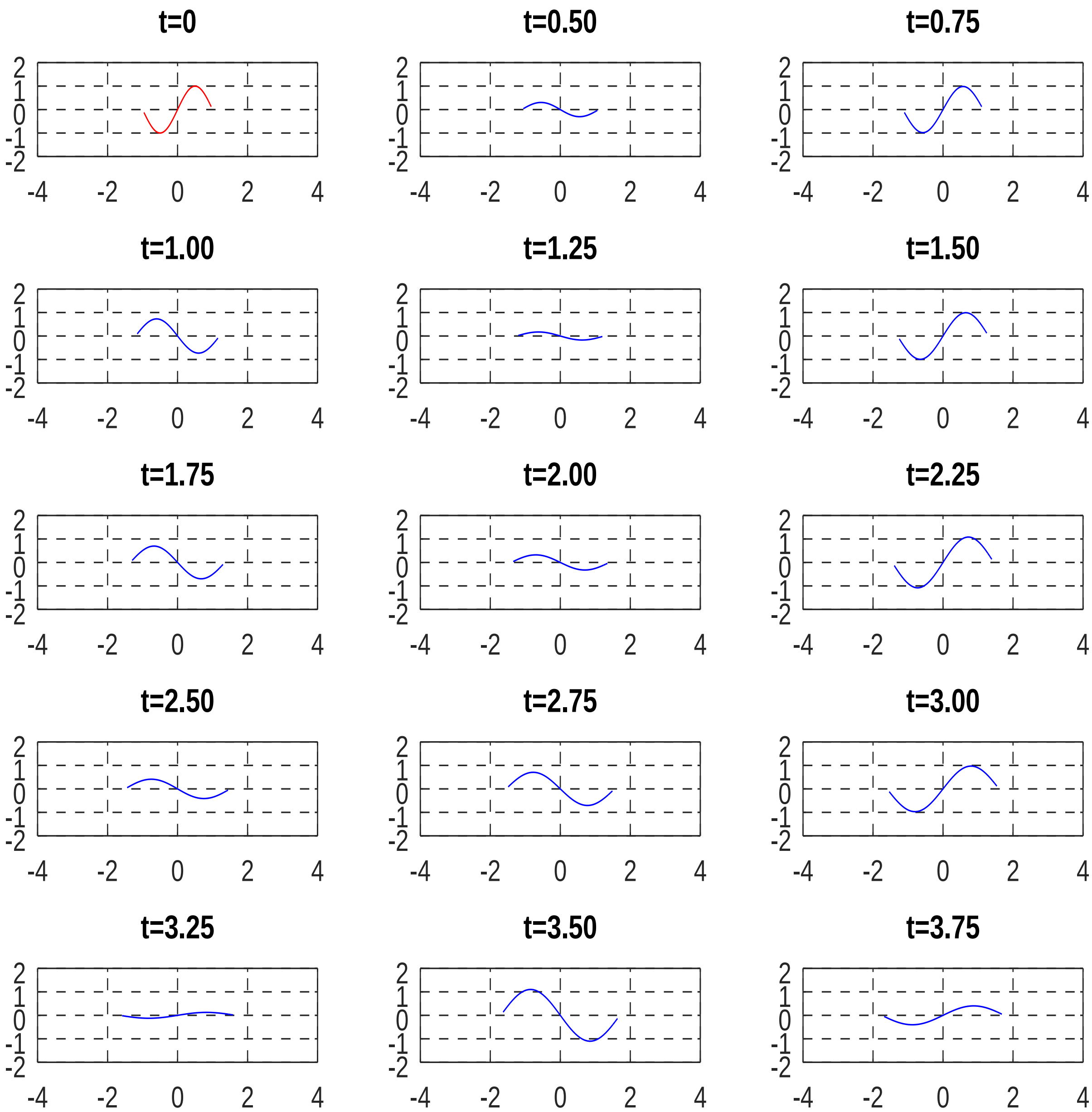

Figure 3.1: $\Omega_t = (-1 - 0.2t, 1 + 0.2t)$

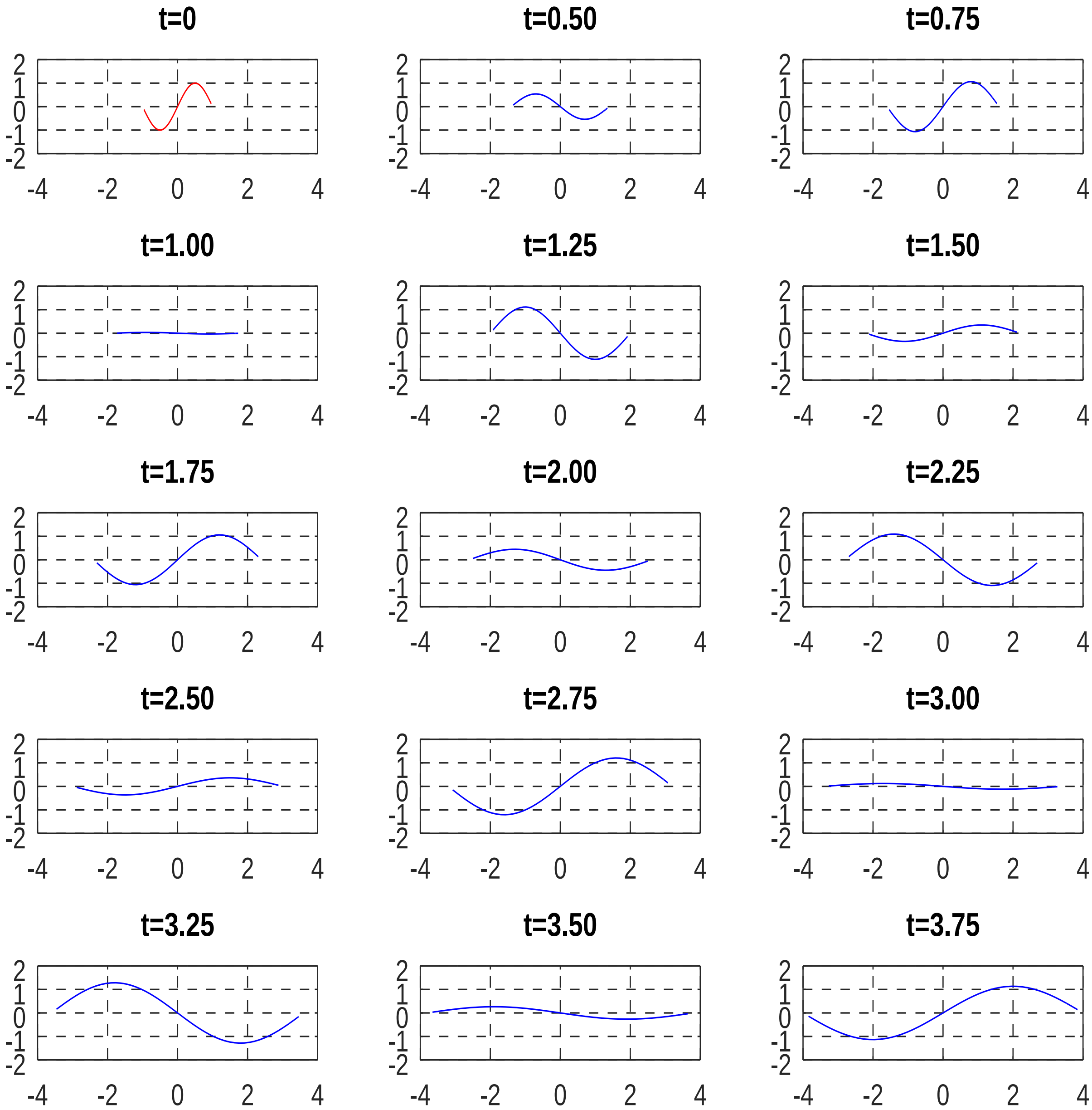

Figure 3.2: $\Omega_t = (-1 - 0.8t, 1 + 0.8t)$

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié le modèle de Kirchhoff pour une corde vibrante a longueur variable.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & \text{dans } \cup_{t\in(0,T)}\Omega_t, \\ u \ = \ 0 & \text{sur } \cup_{t\in(0,T)}\partial\Omega_t, \\ u(x,0) = u_0(x)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega_0. \end{cases}$$

Et obtenir l'existence et l'unicité de la solution locale, on a utiliser un changement de variable pour transformer le problème à un problème posé dans intervalle fixent. Ensuite on a appliquer la méthode des estimations priori avec argument de compacité pour démontrer l'existence est l'unicité et de déduire le même résultat pour le problème originale. Un approche numérique, par les différences finis, est illustré avec quelque exemples.

Bibliography

[1] I. Bihari, *A Generalization of a Bellman and its Application to Uniquenss Problems of Differential Equations. Boudapest.*

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications). Masson,,Paris,*1983.

[3] J. L. Ferrel, L. A. Medeiros, *Kirchhoff-Carrier Elastic Strings in Non Cylindrical Domains. Portugaliae Mathematica, Vol. 56. Fasc4*, 1999.

[4] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes aux Limites Non-linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[5] L.A.Medeiros, *Mathematical Models for Small Deformations of Strings* . Lecture Given at Faculdade of Matemàticas UFPA , March 2008.

[6] A. Tveito R. Winther, *Introduction to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 2005.

[7] S. Zheng, *Nonlinear Evolution Equations.* Chapman & Hall/CRC, 2004.

ملخص

في هذا العمل قمنا بالبحث عن الحل المحلي لمعادلة كيرشوف في مجال ذي حدود متغيرة مع الزمن كما قمنا بإعطاء تطبيقات عددية

الكلمات المفتاحية معادلة كيرشوف، مجال غير اسطواني، الحل المحلي.

Résume

Dans ce travaille on démontre l'éxitence et l'unicité d'une solution locale de l'équation de Kirchhoff dans un intervalle avec une frontière variables. Quelques exemple numérique, obtenus par différences fini, sont aussi présenté.

Mots clés : Equation de Kirchhoff, domaine non cylindrique, solution locale, estimations a priori, differnces finis.

Abstract

In this work we are verifications are given the local solution of a kirchoff equation in domain with moving boundaries. In addition some numerical application.

Keywords: kirchoff equation noncylindrical domain local solution

---