

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

Faculté des Sciences  
Département de Physique

N° : .....



Domaine : Sciences de la matière  
Filière : Physique  
Option : Physique des Particules à  
haute Energie

Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master Académique

Par: Saidoune Cherif

Intitulé

**Effet de casimir en présence des  
longueurs minimales**

Soutenu le :01/06/2017 devant le jury composé de:

Bouferrache Karim	Université de M'sila	Président
Sabri Youcef	Université de M'sila	Rapporteur
Debabi Mourad	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2016 / 2017

## *Dédicace*

*Je remercie le Bon-Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah. Je dédie ce travail à mes parents, pour leurs encouragement et leurs aide, et soutien et surtout les sacrifices qu'ils ont fait pour nous voir réussir. Je le dédie aussi à mes frères et sœur A toute ma grande Famille Saidoune A tous mes amis et mes professeurs sans exception A tous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de près comme de loin, parmi eux : l'enseignante Sabri Youcef et Baadji Nadijib. A tous les enseignants de département de Physique a l'université de M'sila*

*Saidoune Cherif*

## *Remerciements*

*Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur : Sabri Youcef , mon promoteur. Je le remercie pour sa gentillesse et sa disponibilité, j'ai eu le grand plaisir de travailler sous sa direction.*

*Mes remerciements à tous les membres de jury qui ont acceptés de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions. Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs soutiens. Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion Physique Master (2) de l'année 2016/2017.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mécanique quantique déformée</b>	<b>4</b>
2.1	Longueur minimale . . . . .	4
2.2	Principe d'incertitude généralisé (GUP) . . . . .	5
2.3	L'espace de Hilbert . . . . .	7
2.3.1	Représentation dans l'espace des impulsions . . . . .	7
2.3.1.1	produit scalaire et relation de fermeture . . . . .	9
2.3.1.2	Fonctions propres de l'opérateur de position . . . . .	11
2.4	Quasi-représentation de configuration : États à localisation maximale . . . . .	12
2.4.1	États à localisation maximale . . . . .	12
2.4.2	Quasi-représentation de configuration . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Effet de casimir standard</b>	<b>19</b>
3.1	Quantification des champ électromagnétique . . . . .	19
3.2	Propagateur . . . . .	21
3.3	Fluctuations de vide . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Effet de casimir en présence des longueurs minimales</b>	<b>26</b>
4.1	Quantification de champ de Maxwell en présence de longueurs minimales . . . . .	26
4.2	Énergie de vide . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

# Table des figures

3.1	Casimir entre deux plaques parallèles . . . . .	22
4.1	Longueurs d'onde de Compton associées aux l'impulsion $k_3$ (solide), $p_3$ ( point) pour $\beta = 0.01$ et cas standard (tiret-point) par rapport au nombre quantique $n$ .	29
5.1	Force de Casimir $\mathcal{F}$ [ $eV/nm^3$ ] par rapport à la séparation des plaques $\mathbf{a}$ [ $nm$ ] pour différentes valeurs de la longueur minimale. . . . .	35

# Chapitre 1

## Introduction

L'effet Casimir est généralement défini comme le phénomène physique qui montre que l'énergie du point zéro est non nulle. Il est donnée par les fluctuations de vide de n'importe quel champ quantique s'il existe des conditions aux limites sur les modes de champ. Dans l'article original de Casimir [1], l'énergie est le résultat de la différence entre l'énergie de vide du champ électromagnétique dans deux configurations différentes : Un volume rectangulaire Bornée par deux plaques conductrices parallèles séparées par une distance  $a$ , le long de l'axe  $z$ , et celle du même volume non délimitée par des plaques conductrices. La force de Casimir est alors définie par la différentiation habituelle de l'énergie de vide par rapport à la distance  $a$  entre les plaques. Dans Réf. [2] l'effet Casimir est obtenue en considérant la force relativiste de van der Waals entre les plaques métalliques.

Expérimentalement, cet effet peut être mesuré avec une grande précision ( voir par exemple [3] et [4]), mais il faut de noter que la mesure de la force de Casimir entre deux plaques parfaitement conducteurs et parallèles est techniquement très difficile. Habituellement, la force de Casimir est mesurée entre des plaques et des sphères pour surmonter le problème du parallélisme entre les plaques [5].

L'effet Casimir a également été largement étudié du point de vue théorique en raison de sa connexion avec la physique au-delà du modèle standard de la physique des particules. Dans la littérature, il existe plusieurs travaux qui traitent les corrections apportées à l'énergie de Casimir due à l'existence des longueurs minimales (voir [6], [7]), ou des dimensions supplémentaires [8] et aussi due à la non commutativité de l'espace-temps [9].

L'existence d'une longueur minimale dans la théorie limite explicitement la résolution de petites distances dans l'espace-temps. Cette échelle se pose naturellement dans les théories de la gravité quantique sous la forme d'une incertitude minimale effective dans les positions  $\Delta x_0 > 0$ . La théorie des cordes, par exemple, prédit qu'il est impossible d'améliorer la résolution spatiale inférieure à la longueur caractéristique des cordes (Refs [10, 11, 12]). Par conséquence, ces études donnent une correction à la relation d'incertitude position-moment qui est liée à cette longueur caractéristique. Dans une dimension, cette longueur minimale peut être implémentée en ajoutant des corrections à la relation d'incertitude de la manière suivante

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta (\Delta p)^2 + \gamma], \quad \beta, \gamma > 0 \quad (1.1)$$

ce qui implique l'apparition d'une incertitude minimale finit  $\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta}$ . Le développement d'une théorique quantique généralisé qui implémente l'apparition d'une incertitude minimale non nulle des positions est décrite en détail dans la réf. [13]. Réf. [14]. Souligne que l'éq. Généralisée (1) contient uniquement le terme de premier ordre d'une expansion en fonction de paramètre de longueur minimale. La relation d'incertitude modifiée implique un petit terme de correction à la relation de commutation d Heisenberg habituelle :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2) \quad (1.2)$$

Contrairement à la mécanique quantique ordinaire, dans ces théories, les états propres de l'opérateur de position ne sont plus des états physiques dont les éléments de matrice  $\langle x | \psi \rangle$  auront l'interprétation physique directe sur les positions. On est obligé d'introduire la « représentation quasi-position », qui Consiste à projeter les états sur l'ensemble des états de localisation maximale. Ces états de localisation maximale  $|\psi_x^{ml}\rangle$  minimisent l'incertitude  $(\Delta x)_{|\psi_x^{ml}\rangle} = \Delta x_0$  sont centrés autour de la position moyenne  $\langle \psi_x^{ml} | \hat{x} | \psi_x^{ml} \rangle = x$ . Dans le cas de la commutation ordinaire et des relations d'incertitude, les états de localisation maximale sont la position habituelle des états propres  $|x\rangle$ , pour lesquels l'incertitude dans Position disparaît.

Après avoir donner une introduction ou on parler sur l'effet Casimir et le principe d'incertitude generalise, nous allons formuler la mécanique quantique basée sur un principe d'incertitude

généralisé dans le chapitre 2.

Dans le chapitre 3, nous allons étudier l'effet Casimir dans le cas habituelle ou nous discuterons la quantification du champ électromagnétique et le Fluctuations de vide (l'effet casimir simple).

Dans la chapitre 4, nous étudierons l'effet Casimir en présence des longueurs minimales. Et on termine ce mémoire par une conclusion.

## Chapitre 2

# Mécanique quantique déformée

### 2.1 Longueur minimale

Les études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg [16, 17, 19, 20] qui impliquent une incertitude minimale non nulle  $(\Delta X)_{min}$  sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck  $l_p = 10^{-35}m$ , ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires [21].

En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ; l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisabilité des particules : à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle [16].

La notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempf et ses collaborateurs [16, 17, 20].

Dans la section qui suit, nous allons présenter une approche [18] qui généralise le principe d'incertitude de Heisenberg en tenant compte de cette notion de longueur élémentaire.

## 2.2 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale)  $l_m$  en mécanique quantique, nous allons suivre l'approche de GUP [18, 24]. Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion  $p$  de la particule, le vecteur d'onde  $k$  ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de  $1/l_m$  [18].

En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire,  $(\vec{p} = \hbar \vec{k})$  lors que  $p$  approche l'échelle  $(\hbar/l_m)$ . on suppose une relation  $p = f(k)$  entre  $k$  et  $p$ . Cette fonction doit être impaire est bien définie, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre  $(1/l_m)$  lorsque  $p$  tend vers l'infini [18, 24, 35, 36].

on pose que :

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k). \quad (2.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan(y) = y + \frac{y^3}{3} + \dots,$$

au deuxième ordre en  $l_m, P$  s'écrit :

$$p = \hbar(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots). \quad (2.2)$$

Supposant que le commutateur entre  $\hat{X}$  et  $\hat{k}$  garde la forme standard, c'est-à-dire  $[\hat{X}, \hat{A}(k)] = i\delta_{ij}$ , et utilisant la relation générale :

$$[\hat{X}, A(\hat{k})] = i \frac{\partial A}{\partial k},$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$[\hat{X}, \hat{P}(k)] = i \frac{\partial \hat{p}}{\partial k}. \quad (2.3)$$

La relation (1.2) donne :

$$i \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} = i\hbar(1 + l_m^2 k^2 + \dots)$$

Or, on a

$$l_m^2 k^2 \simeq \frac{l_m^2 \hat{P}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4).$$

Alors on trouve :

$$[\hat{X}, \hat{P}(k)] = i\hbar \left( 1 + \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2 \hat{P}^2 + \dots \right).$$

En introduisant un paramètre  $\beta$ , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = \left(\frac{l_m}{\hbar}\right)^2, \quad \text{soit} \quad l_m = \hbar\sqrt{\beta},$$

on aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \left( 1 + \beta \hat{P}^2 + \dots \right). \quad (2.4)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule :

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.$$

ce qui donne :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} \right\rangle \right|. \quad (2.5)$$

au premier ordre du paramètre, la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left( 1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle \right),$$

en utilisant la définition de l'écart quadratique moyen :  $(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$ , on peut écrire :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left\{ 1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2 \right\},$$

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{ 1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma \}, \quad (2.6)$$

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2,$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres positifs. Le paramètre  $\beta$  est relié à la longueur élémentaire à travers la relation  $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$ ;  $\gamma$  dépend de la valeur moyenne de l'impulsion par la formule  $\gamma = \beta \langle P \rangle^2$ , En mécanique quantique ordinaire ( $\beta = \gamma = 0$ ).

La relation d'incertitude (2.6) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs [16, 17, 25]. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence [16], pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

## 2.3 L'espace de Hilbert

Maintenant nous allons construire une représentation de l'espace de Hilbert à partir la relation de commutation déformée, il est plus simple de travailler dans l'espace des impulsions qui permet d'explorer les conséquences physiques d'une longueur minimale d'une manière est plus facile [16].

### 2.3.1 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$ , satisfaisant à la relation de commutation :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2), \quad \beta > 0. \quad (2.7)$$

La relation d'incertitude correspondante est :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma), \quad (2.8)$$

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2. \quad (2.9)$$

Pour un  $\Delta X$  fixe, l'inégalité (2.8) est satisfaite dans l'intervalle :  $[\Delta P_-, \Delta P_+]$  , tel que :

$$(\Delta P)^2 - \frac{2(\Delta X)}{\hbar\beta}(\Delta P) + \left(\frac{1+\gamma}{\beta}\right) \geq 0$$

$$\text{delta} = b^2 - 4ac = \left(2\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - 4\frac{\gamma+1}{\beta}$$

$$\Delta P_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{\beta}} \quad (2.10)$$

La plus petite valeur de  $\Delta X$  est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d.,  $\Delta P_+ = \Delta P_-$ , soit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{\beta} &= 0, \\ (\Delta X)_0 &= \hbar\sqrt{\beta}(\gamma+1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

.La valeur minimale  $(\Delta X)_{min}$  , correspond à  $\gamma = 0$  ( $\langle \hat{P} \rangle = 0$ ).

$$(\Delta X)_{min} = \hbar\sqrt{\beta} \quad (2.12)$$

Dans l'espace des impulsions, où  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  agissent sur les fonctions  $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$ , ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  , satisfaisant la relation de commutation canonique :  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Alors on peut trouver une représentation de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.7). La réalisation la plus simple s'écrit :

$$\hat{X} = (1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x} \quad \hat{P} = \hat{p}, \quad (2.13)$$

où l'on a :

$$\begin{aligned}\widehat{p}\psi(p) &= p\psi(p), \\ \widehat{x}\psi(p) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p),\end{aligned}$$

Alors,  $\widehat{X}$  et  $\widehat{P}$  s'écrivent explicitement :

$$\widehat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}\psi(p), \quad \widehat{P} = p. \quad (2.14)$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.7). Il est important de souligner qu'il est possible de trouver une représentation plus générale en ajoutant un terme  $\tilde{\gamma}f(p)$  à l'opérateur  $\widehat{X}$ ,  $\tilde{\gamma}$  étant une constante et  $f(p)$  est une fonction arbitraire de  $p$ . L'importance de cette représentation réside dans le fait que la valeur de  $\tilde{\gamma}$  peut être choisie de façon à rendre  $\widehat{X}$  auto-adjoint sans altérer les valeurs propres des observables physiques [22, 23].

### 2.3.1.1 produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2.14), est la préservation de la symétrie des opérateurs  $\widehat{X}$  et  $\widehat{P}$ , pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que  $\widehat{P}$  n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur  $\widehat{X}$ . En effet, la condition de symétrie s'écrit [16] :

$$\langle\psi|\widehat{x}|\varphi\rangle = (\langle\psi|\widehat{x}|\varphi\rangle). \quad (2.15)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\psi^*(p)\varphi(p).$$

Pour que l'opérateur  $\widehat{X}$  soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p). \quad (2.16)$$

Le facteur  $(1 + \beta p^2)^{-1}$  est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur  $\widehat{X}$ . En effet :

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\widehat{x} | \varphi \rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \left[ i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p). \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte que  $\psi(p)$  et  $\varphi(p)$  sont nulles à l'infini, on obtient :

$$\langle \psi | (\widehat{x} | \varphi \rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p).$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} (\langle \psi | \widehat{x} | \varphi \rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \left[ i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right]^* \varphi(p). \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p). \end{aligned}$$

Ceci montre bien que  $\widehat{X}$  est symétrique par rapport au produit scalaire (2.16). La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture ; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1 \quad (2.17)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p'' | p' \rangle \langle p | p' \rangle .$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation :

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p') . \quad (2.18)$$

### 2.3.1.2 Fonctions propres de l'opérateur de position

Dans l'espace des impulsions, le problème des valeurs propres de l'opérateur  $\widehat{X}$  s'écrit :

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_x(p) = x \psi_x(p) , \quad (2.19)$$

où  $\psi_x(p) = \langle p | x \rangle$ ,  $|x\rangle$  étant un vecteur propre de  $\widehat{X}$  ayant une localisation infinie ( $(\Delta\widehat{X})_{|x\rangle} = 0$ ), donc il ne représente pas un état physique car la relation d'incertitude généralisée ne permet pas l'existence de tel état. Les fonctions  $\psi_x(p)$  seront considérées alors comme des "fonctions propres formelles" de l'opérateur de position. La solution de l'équation (2.19) est donnée par la formule suivante

$$\psi_x(p) = c \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta p}\right) ,$$

c est une constante de normalisation, elle se calcule en utilisant la relation (2.16); on obtient :

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} = \frac{cc^* \pi}{\sqrt{\beta}} ,$$

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} .$$

Alors, les fonctions propres normalisées de l'opérateur de position ont la forme :

$$\psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta p}\right) , \quad (2.20)$$

En utilisant les relations (2.18) et (2.20), on peut montrer que la nouvelle relation de fermeture

satisfaite par les vecteurs formels  $|x\rangle$  a la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |x\rangle \langle x| = 1 \quad (2.21)$$

Calculons maintenant le produit scalaire entre deux états formels  $|x\rangle$  et  $|x'\rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle x' | x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi_{x'}^*(p) \psi_x(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp \left[ -i \frac{(x - x')}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p \right] \end{aligned}$$

en pose  $y = \arctan(\sqrt{\beta} p) \longrightarrow p = \frac{\tan(y)}{\sqrt{\beta}}$  et  $dp = \frac{dy}{\sqrt{\beta} \cos^2(y)}$  avec  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left[ -i \frac{(x - x')}{\hbar \sqrt{\beta}} y \right] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} i \frac{\hbar \sqrt{\beta}}{(x - x')} \exp \left[ -i \frac{(x - x')}{\hbar \sqrt{\beta}} y \right] \right] \quad \text{avec } \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \end{aligned}$$

$$\langle x' | x \rangle = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(x - x')} \sin \left( \frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (2.22)$$

## 2.4 Quasi-représentation de configuration : États à localisation maximale

### 2.4.1 États à localisation maximale

Les états à localisation maximale autour de la position  $x$  sont, par définition, des états  $|\psi_x^{lm}\rangle$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\langle \psi_x^{lm} | \hat{X} | \psi_x^{lm} \rangle = x, \quad (2.23)$$

$$(\Delta X)_{|\psi_x^{lm}\rangle} = (\Delta X)_{min}$$

Rappelons que  $(\Delta X)_{min}$  représente la plus petite valeur de l'incertitude minimale  $(\Delta X)_0$ ; cette valeur correspond à  $\langle \hat{P} \rangle = 0$ . On sait, en mécanique quantique, que la relation d'incertitude peut être établie en exprimant que la norme d'un vecteur d'état est positive. En effet, à partir de la condition :

$$\left\| \left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle \right\| \geq 0, \quad (2.24)$$

$\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle$  étant imaginaire, on obtient :

$$\left\langle \psi \left| \left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle \right)^2 - \left( \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} \right)^2 (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)^2 \right| \psi \right\rangle \geq 0,$$

qui implique immédiatement la relation d'incertitude :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right|. \quad (2.25)$$

Il est clair que pour qu'un état  $|\psi\rangle$  obéisse à l'équation  $\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right|$ , il faut qu'il satisfasse à la condition :

$$\left( \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0. \quad (2.26)$$

Dans l'espace des impulsions, cette dernière équation prend la forme suivante :

$$\left( i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta (\Delta P)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) \psi(p) = 0.$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\int \frac{d\psi}{\psi} = \int \left[ \frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar} - \frac{(1 + \beta (\Delta P)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2) \langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta P)^2} \right] \frac{dp}{(1 + \beta p^2)}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \left[ \frac{(1 + \beta (\Delta P)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2) \langle \hat{p} \rangle}{2 (\Delta P)^2} \right] \frac{\hat{p} dp}{(1 + \beta P^2)} \\
\psi(p) = N & \frac{\exp \left[ \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle}{i \hbar \sqrt{\beta}} - \frac{(1 + \beta (\Delta P)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2) \langle \hat{p} \rangle}{2 (\Delta P)^2} \right) \arctan \sqrt{\beta} p \right]}{(1 + \beta p^2)^{\frac{1 + \beta (\Delta P)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2}{4 (\Delta P)^2}}}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Les états à localisation maximale correspondent au cas  $\langle \hat{P} \rangle = 0$  ou  $\Delta X = (\Delta X)_{min} = \hbar \sqrt{\beta}$ . Ce qui implique  $\Delta P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ . Alors, en remplaçant dans l'équation (2.27), on obtient l'expression des états à localisation maximale :

$$\psi_x^{lm}(p) = N (1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp \left( -i \frac{x}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p \right), \tag{2.28}$$

calcule La constante de normalisations  $N$  en utilisant la formule (2.16) :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^*(p) \psi(p)}{(1 + \beta p^2)} dp = 1 \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N^* N}{(1 + \beta p^2)^2} dp,
\end{aligned}$$

en pose que  $\sqrt{\beta} p = \tan(y) \longrightarrow dp = \frac{dy}{\sqrt{\beta \cos^2(y)}}$  avec  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) dy = \frac{N^2}{\sqrt{\beta}} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left( y + \frac{\sin(2y)}{2} \right) \right] = \frac{N^2 \pi}{2 \sqrt{\beta}}$$

$$N = \sqrt{\frac{2 \sqrt{\beta}}{\pi}}. \tag{2.29}$$

Les états (2.28) généralisent les ondes planes (les fonctions  $\delta$ ), dans l'espace des impulsions (des coordonnées), qui représentent des états à localisation maximale en mécanique quantique ordinaire. Contrairement aux ondes planes, maintenant, les états  $|\psi_x^{lm}\rangle$  sont des états physiques ; la valeur moyenne de l'énergie n'est plus infinie. En effet :

$$\widehat{P}\psi_x^{lm}(p) = p\psi_x^{lm}(p) \quad \widehat{P}(\widehat{P}\psi_x^{lm}(p)) = p^2\psi_x^{lm}(p)$$

$$\left\langle \psi_x^{lm} \left| \frac{\widehat{P}^2}{2m} \right| \psi_x^{lm} \right\rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2 dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{1}{2m}$$

en pose que  $\sqrt{\beta}p = \tan(y) \longrightarrow dp = \frac{dy}{\sqrt{\beta \cos^2(y)}}$  avec  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{m\pi\beta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(y) dy = \frac{1}{m\pi\beta} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left( y - \frac{\sin(2y)}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2m\beta}. \quad (2.30)$$

Du fait du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace, les états à localisation maximale ne sont pas en général orthogonaux. Ainsi, en utilisant la définition du produit scalaire modifié (2.16) et la relation (2.28), on a :

$$\langle \psi_x^{lm} | \psi_{x'}^{lm} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \exp \left[ \frac{-i(x - x')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right]$$

en pose  $y = \arctan(\sqrt{\beta}p) \longrightarrow p = \frac{\tan(y)}{\sqrt{\beta}}$  et  $dp = \frac{dy}{\sqrt{\beta \cos^2(y)}}$  avec  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$\langle \psi_x^{lm} | \psi_{x'}^{lm} \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) \exp \left[ \frac{-i(x - x')}{\hbar\sqrt{\beta}} y \right] dy, \text{ avec } \cos^2(y) = \frac{1 + \cos(2y)}{2}$$

intégrale par partie :  $\int f'.g = [f.g] - \int f.g'$

$$\langle \psi_x^{lm} | \psi_{x'}^{lm} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left( \frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left( \frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (2.31)$$

#### 2.4.2 Quasi-représentation de configuration

Comme il a été déjà mentionné, l'introduction d'une incertitude minimale finie sur la position avait comme conséquence l'inexistence d'une base complète  $\{|x\rangle\}$ , états propres de

l'opérateur de position  $\hat{X}$ . Néanmoins, on peut utiliser les états à localisation maximale  $|\psi_x^{lm}\rangle$ , pour projeter des états arbitraires  $|\varphi\rangle$ . Les projections  $:\varphi(x) = \langle \psi_x^{lm} | \varphi \rangle$  seront considérées comme des fonctions d'onde dans une représentation que l'on appelle "quasi représentation de configuration".  $|\varphi(x)|^2$  sera interprété comme étant l'amplitude de probabilité pour que la particule soit localisée avec une incertitude  $(\Delta x)_{min}$  autour du point. Alors en utilisant les relations (2.16) et (2.28), on peut écrire :

$$\varphi(x) = \langle \psi_x^{lm} | \varphi \rangle = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\varphi(p)}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right). \quad (2.32)$$

Cette relation représente la transformée de Fourier généralisée, permettant le passage de la représentation des impulsions à la quasi-représentation de configuration. Les fonction d'onde  $\varphi_{p_0}(x)$  ( $\delta(p - p_0)$  dans l'espace des impulsions), états propres de l'opérateur  $\hat{P}$ , peuvent se calculer aisément à partir de la dernière relation :

$$\varphi_{p_0}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}}{(1 + \beta p_0^2)^{3/2}} \exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p_0)\right). \quad (2.33)$$

où  $p_0 = \sqrt{2mE}$ . La relation de dispersion modifiée qui correspond à cette onde plane généralisée est :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p_0)}{\hbar\sqrt{\beta}}, \quad \omega(p) = \frac{c}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \quad (2.34)$$

$$\lambda(p) = \frac{2\pi\sqrt{\beta}}{\arctan(\sqrt{\beta}p)} \quad (2.35)$$

La relation (2.34) coïncide exactement avec la relation (2.1), qui a été postulée pour introduire la longueur élémentaire. La transformée de Fourier inverse peut être déduite comme suit : en multipliant les deux membres de (2.32) par :

$$\exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p')\right).$$

et en intégrant par rapport à la variable, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p')\right) \\
&= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp \varphi(p)}{(1+\beta p^2)^{3/2}} \exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} (\arctan(\sqrt{\beta}p) - \arctan(\sqrt{\beta}p'))\right) \\
&= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp \varphi(p)}{(1+\beta p^2)^{3/2}} 2\pi \delta\left(\frac{\arctan(\sqrt{\beta}p) - \arctan(\sqrt{\beta}p')}{\hbar\sqrt{\beta}}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{f'},$$

$x_i$  étant une racine de  $f(x)$ , on obtient ainsi le résultat suivant :

$$\varphi(p) = \frac{1}{\hbar\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \exp\left(i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right), \quad (2.36)$$

Il est à noter que les états à localisation maximale, ne satisfont plus à une relation de fermeture comme celle des états  $|x\rangle$  en mécanique quantique ordinaire. En effet, en utilisant les relations (2.28) et (2.36), on trouve la relation modifiée suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_x^{lm}\rangle \langle \psi_x^{lm}| = 4\hbar\sqrt{\beta} (1+\beta p^2)^{-1}, \quad (2.37)$$

À partir de (2.36), on déduit immédiatement la représentation de l'opérateur impulsion dans cet espace de configuration :

$$\hat{P}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x). \quad (2.38)$$

Quant à l'action de l'opérateur position sur les fonctions  $\psi(x)$ , elle peut être déduite en utilisant les équations (2.14) et (2.36) :

$$\hat{X}\psi(x) = \left[ x + \hbar\sqrt{\beta}\tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \psi(x). \quad (2.39)$$

## Chapitre 3

# Effet de casimir standard

### 3.1 Quantification des champ électromagnétique

Nous rappelons que le Lagrangien de Maxwell est donné par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2. \quad (3.1)$$

En utilisant les équations d Euler-Lagrange, on obtient les équations de maxwell suivantes

$$\square A_\mu - (1 - \lambda) \partial_\mu (\partial \cdot A) = 0 \quad (3.2)$$

Le moment conjugué de quatre-vecteur  $A$  est donné par

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0} (\partial \cdot A) \quad (3.3)$$

Sachant que  $A$  et le son moment conjugué verfiants la relation de commutation canonique suivante

$$[A_\rho(t, \mathbf{r}), \pi^\rho(t, \mathbf{r}')] = ig'_\rho \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.4)$$

Dans la jauge de Feynman. ( $\lambda = 1$ ), l'équation (3.2) réduit à

$$\square A^\mu = 0 \quad \lambda = 1 \quad (3.5)$$

les autres relations de commutations canoniques sont données par :

$$[A_\rho(t, \mathbf{r}), A_\nu(t, \mathbf{r}')] = [\pi_\rho(t, \mathbf{r}), \pi_\nu(t, \mathbf{r}')] = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} [A_\rho(t, \mathbf{r}), A_\nu(t, \mathbf{r}')] &= [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{r}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{r}')] = 0 \\ [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{r}), A_\nu(t, \mathbf{r}')] &= ig_{\rho\nu} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.7)$$

La solution des équations de Maxwell (3.5) est donnée par

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{(2\pi)^4 \hbar c^2}{\omega(\mathbf{p})}} \sum_\lambda \left[ a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ipx} + a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}, t) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) \cdot e^{ipx} \right] \quad (3.8)$$

Soit  $n$  l'axe de temps  $n^2 = 1$ ,  $n^0 > 0$ . Si on choisit  $\varepsilon^{(1)}$  et  $\varepsilon^{(2)}$  dans le plan orthogonal à  $p$  et  $n$  tel que

$$\varepsilon^{(\lambda)}(p) \varepsilon^{(\lambda')}(\mathbf{p}) = -\delta_{\lambda, \lambda'} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2$$

on a alors  $\varepsilon^{(3)}$  dans le plan  $(p, n)$  orthogonal à  $n$  et normalisé

$$\varepsilon^{(\lambda)}(p) \cdot n = 0 \quad [\varepsilon^{(3)}(p)]^2 = -1$$

Enfin on prend  $\varepsilon^{(0)}$  égal à  $n$ . Avec ces conventions on appelle respectivement  $\varepsilon^{(1)}$  et  $\varepsilon^{(2)}$  transversales,  $\varepsilon^{(3)}$  longitudinales, et  $\varepsilon^{(0)}$  polarisation scalaire. Dans le cadre où  $n^0 = 1$  et  $k$  est le long du troisième axe, nous avons simplement

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En résumé, nous avons

$$\sum_{\lambda} \frac{\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{p})}{\varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \cdot \varepsilon^{(\lambda)*}(\mathbf{p})} = g_{\mu\nu} \quad \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} \quad (3.9)$$

Le dénominateur dans la première expression est nécessaire en raison du produit scalaire indéfini.

En utilisant les relations de commutation (3.7), on obtient

$$\left[ a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a^{(\lambda')\dagger}(\mathbf{p}) \right] = -g^{\lambda\lambda'} 2\omega^{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.10)$$

De plus, nous trouvons facilement que

$$[A_{\mu}(r), A_{\nu}(r')] = -ig_{\mu\nu} \Delta(r - r') \quad (3.11)$$

avec  $\Delta$  est défini par

$$\Delta(r - r') = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2) \varepsilon(\omega^{\mathbf{p}}) e^{-ip \cdot r}$$

Comme nous savons,

$$a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) |0\rangle = 0 \quad \lambda = 0, 1, 2, 3$$

et

$$|1\rangle = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) a^{(0)\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad p = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient l'expression de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H = \int dr : (\pi \dot{A}_{\mu} - \mathcal{L}) &= \frac{1}{2} \int dr \left( \sum_i \left[ \dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2 \right] - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{(2\pi)^4 \hbar c^2 \omega(\mathbf{p})} \sum_{\lambda} \left[ a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) - a^{(0)}(\mathbf{p}) a^{(0)\dagger}(\mathbf{p}) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2 Propagateur

On définit le produit chronologique  $T$ , de deux opérateurs de champ  $A(r)$  et  $A(r')$

$$T A_{\mu}(r') A_{\nu}(r) = \theta(t' - t) A_{\mu}(r') A_{\nu}(r) + \theta(t - t') A_{\nu}(r) A_{\mu}(r') \quad (3.13)$$

En utilisant cette définition, on obtient la fonction de Green de Feynman donnée par

$$ig_{\mu\nu}G_F(r-r')|_{m=0} = \langle 0|TA_\mu(r)A_\nu(r')|0\rangle = -ig_{\mu\nu}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip\cdot(r-r')}}{p^2+i\varepsilon} \quad (3.14)$$

### 3.3 Fluctuations de vide

Soient deux grandes plaques métalliques planes de surface  $L^2$ , parallèles entre elles, et séparées par une distance  $a$ . On suppose de plus que les plaques sont des conducteurs parfaits et qu'elles ne sont pas chargées

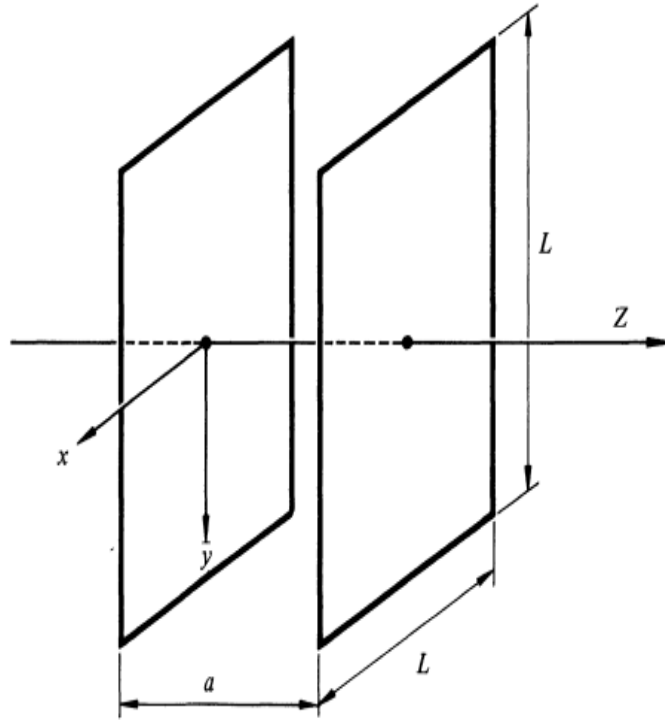


FIGURE 3.1 – Casimir entre deux plaques parallèles

Comme nous savons, seulement les modes transversaux contribuent dans l'énergie. Si  $p_3$ perpendiculaire sur les plaques est différent de zéro elle doit prendre des valeurs discrets  $p_3 = \frac{\hbar\pi n}{a}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Après sommation sur les états de polarisation, on obtient l'expression de l'énergie de point zéro en présence des plaques métalliques donnée par :

$$E = \sum \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha = \frac{c}{2}\int L^2\frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2}\left[|\mathbf{q}| + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{q}^2 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (3.15)$$

Avec  $q$  la l'impulsion transversale dans un plan parallèle aux plaques. Cette énergie peut être infinie. Pour cela, on doit soustraire l'énergie de point zéro en absence des plaques et qui est donnée par

$$E_0 = \frac{c}{2} \int L^2 \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{adp_3}{2\pi\hbar} 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + p_3^2} \quad (3.16)$$

$$= \frac{c}{2} \int L^2 \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{\infty} dn 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + n^2\pi^2\hbar^2/a^2} \quad (3.17)$$

D'ou l'énergie par unité de surface est devient :

$$\mathcal{E} = \frac{c}{2\pi(\hbar)^2} \int_0^{\infty} qdq \left( \frac{q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{q^2 + n^2\pi^2\hbar^2/a^2} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{q^2 + n^2\pi^2\hbar^2/a^2} \right) \quad (3.18)$$

En introduisant le changement de variable  $u = (a^2/\pi^2\hbar^2) q^2$ , on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c\pi^2}{4a^3} \int_0^{\infty} du \left( \frac{\sqrt{u}}{2} + \frac{\pi}{a} \sum_1^{\infty} \sqrt{u + n^2} - \frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} \right)$$

On remarque que cette expression est ultravioletement divergentes. Cette divergence peut être régulariser à l'aide d'une fonction de coupure  $f(k)$ , de sorte que  $f(0) = 1$  et  $f(k \gg \frac{1}{a_0}) \rightarrow 0$ , basée sur la raison physique qui, pour les ondes très courtes, les plaques ne constituent pas un obstacle. D'ou

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c\pi^2}{4a^3} \int_0^{\infty} du \left( \frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u}\right) + \sum_1^{\infty} \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + n^2}\right) - \int_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + n^2}\right) \right). \quad (3.19)$$

En utilisant la définition

$$G(n) = \int_0^{\infty} du \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + n^2}\right),$$

on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{4a^3} \left[ \frac{1}{2} G(0) + G(1) + G(2) + \dots - \int_0^\infty dn G(n) \right] \quad (3.20)$$

Puisque  $f(\infty) = 0$  nous pouvons utiliser la formule d'Euler-Maclaurin pour calculer la différence entre la somme et l'intégrale dans la parenthèse ci-dessus

$$\sum_{n=0}^N G(n) - \int_0^N dn G(n) = -B_1 [G(N) + G(0)] + \sum_{k=1}^1 \frac{B_{2k}}{(2k)!} [G^{(2k-1)}(N) - G^{(2k-1)}(0)]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar c \pi^2}{4a^3} \sum_{k=1}^1 \frac{B_{2k}}{(2k)!} [G^{(2k-1)}(N) - G^{(2k-1)}(0)] \quad (3.21)$$

ou les nombres de Bernoulli sont définis par la série

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \frac{y^v}{v!} \quad (3.22)$$

et  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,... nous avons

$$G(n) = \int_{n^2}^{\infty} du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{u}\right)$$

d'où

$$G'(n) = -2n^2 f\left(\frac{\pi}{a} n\right) \quad G'(0) = 0$$

$$G''(n) = -4nf\left(\frac{\pi}{a} n\right) - \frac{\pi}{a} 2n^2 f'\left(\frac{\pi}{a} n\right) \quad G''(0) = 0$$

$$G'''(n) = -4f\left(\frac{\pi}{a} n\right) - \frac{\pi^2}{a^2} 8nf'\left(\frac{\pi}{a} n\right) - \frac{\pi^2}{a^2} 2n^2 f''\left(\frac{\pi}{a} n\right) \quad G'''(0) = -4$$

Nous remplaçons les dérivés dans l'équation(3.21), on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2}{4a^3} \left[ -\frac{1}{4!} B_4 G'''(0) \right]$$

d'ou l'expression de l'énergie de Casimir,

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c \pi^2 B_4}{a^3 4!} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3} \quad (3.23)$$

La force par unité de surface  $\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{E}$  généré par cette énergie est donné par

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \quad (3.24)$$

Le signe moins indique que cette force est attractive.

On remarque que la force de Casimir par unité de surface dépendant de la distance  $a$  entre les plaques, et elle croit rapidement lorsque la distance entre les plaques diminue.

## Chapitre 4

# Effet de casimir en présence des longueurs minimales

Dans ce chapitre nous dérivons explicitement l'hamiltonien et ensuite les corrections à l'énergie de Casimir en raison d'une longueur minimale .

### 4.1 Quantification de champ de Maxwell en présence de longueurs minimales

La solution général de l'équation de Maxwell en présence des longueur minimale est donnée par :

$$\hat{A}(r, t) = \sqrt{2\pi\hbar^3 c\sqrt{\beta}} \int \frac{dp}{(1 + \beta p^2) \sqrt{\arctan(\sqrt{\beta} |p|)}} \sum_{\gamma=\pm 1} [f_{\gamma}(p, \omega) \hat{a}_{\gamma}(p) + f_{\gamma}^*(p, \omega) \hat{a}_{\gamma}^{\dagger}(p)] \quad (4.1)$$

où  $f_{\gamma}(p, \omega)$  sont des ondes planes généralisées données par

$$f_{\gamma}(p, \omega) = \frac{\varepsilon_{\gamma}(p)}{\sqrt[3]{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar\sqrt{\beta}} \left[ r \arctan(p\sqrt{\beta}) - \hbar\omega(|p|) t \right]\right) \quad (4.2)$$

avec  $\omega(|p|)$  définie par la relation de dispersion généralisée (2.34) et  $\varepsilon$  sont les vecteurs de polarisation vérifiant

$$\varepsilon_\gamma(p) \varepsilon_{\gamma'}^*(p) = \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (4.3)$$

A partir de (4.2), nous obtenons la condition de normalisation suivante

$$\begin{aligned} & \int dr f_\gamma^*(p, \omega(p)) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\gamma'}(p', \omega(p')) \\ &= i \int dr \cdot [f_\gamma^*(p, \omega(p)) \partial_0 (f_{\gamma'}(p', \omega(p')))] - \partial_0 (f_\gamma^*(p, \omega(p))) f_{\gamma'}(p', \omega(p'))] \\ &= \frac{\varepsilon_\gamma(p) \varepsilon_{\gamma'}^*(p)}{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt[3]{2\pi\hbar}} (\omega(p) + \omega(p')) \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\beta}} [\omega(p) - \omega(p')] \cdot t\right) \\ &\quad \times \int dr \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar\sqrt{\beta}} [\arctan(p\sqrt{\beta}) - \arctan(p'\sqrt{\beta})] \cdot r\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

En utilisant l'équation (2.17) et (4.3), on obtient

$$\int dr f_\gamma^*(p, \omega(p)) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\gamma'}(p', \omega(p')) = \delta_{\gamma\gamma'} (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \beta p'^2)^{\frac{1}{2}} \delta(p - p') \quad (4.5)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation sont non relativistes et, puisque les opérateurs de moment sont commutative, ils satisfont la relation de commutation habituelle,

$$[\hat{a}_\gamma, \hat{a}_{\gamma'}^\dagger] = \delta_{\gamma\gamma'} \delta(p - p') \quad (4.6)$$

En utilisant ce résultat et les deux équations (2.22) et (??), on obtient

$$[A^i(r, t), E^j(r', t)] = i \left( \delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2} \right) \frac{\sin\left(\frac{\pi(r-r')}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)}{\pi(r-r')} \quad (4.7)$$

En utilisant la relation connue  $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}$ , on obtient la relation de commutation habituelle dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ .

## 4.2 Énergie de vide

Maintenant nous allons attaquer le problème de l'effet Casimir en présence des distances minimales. Comme on vu dans le chapitre précédent, le champ électromagnétique doit satisfaire la condition aux limites. D'où

$$k_3 = \frac{\hbar n \pi}{a} \quad (4.8)$$

où  $a$  est la distance entre les deux plaques,  $k_3 = \frac{p_3}{\sqrt{\beta(q^2 + p_3^2)}} \arctan\left(\sqrt{\beta(q^2 + p_3^2)}\right)$  et  $q$  est la quantité de mouvement transversale le long des plaques. Dans(4.8) on a un nombre fini de modes  $n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} = \left\lfloor \frac{a}{2(\Delta x)_{min}} \right\rfloor$  où  $[\cdot \cdot \cdot]$  désigne l'entier inférieur suivant. Alors la quantification géométrique donnée par (4.8) remplit l'exigence que dans les modèles quantiques en présence des longueurs minimales, la longueur d'onde de Compton ne peut pas prendre des valeurs arbitraires. En effet, nous avons  $\lambda_{min} = 4\hbar\sqrt{\beta}$ .

Puisque  $\beta$  est un petit paramètre, on peut trouver la solution suivante ou on a utilise le développement en séries

$$p_3(n) = \frac{\hbar \pi n}{a} \left[ 1 + \frac{\beta}{3} \left( q^2 + \left( \frac{\hbar \pi n}{a} \right)^2 \right) + \frac{\beta^2}{45} \left( 2 \left( q \frac{\hbar \pi n}{a} \right)^2 - 4q^4 + 12 \left( \frac{\hbar \pi n}{a} \right)^4 \right) + \dots \right] \quad (4.9)$$

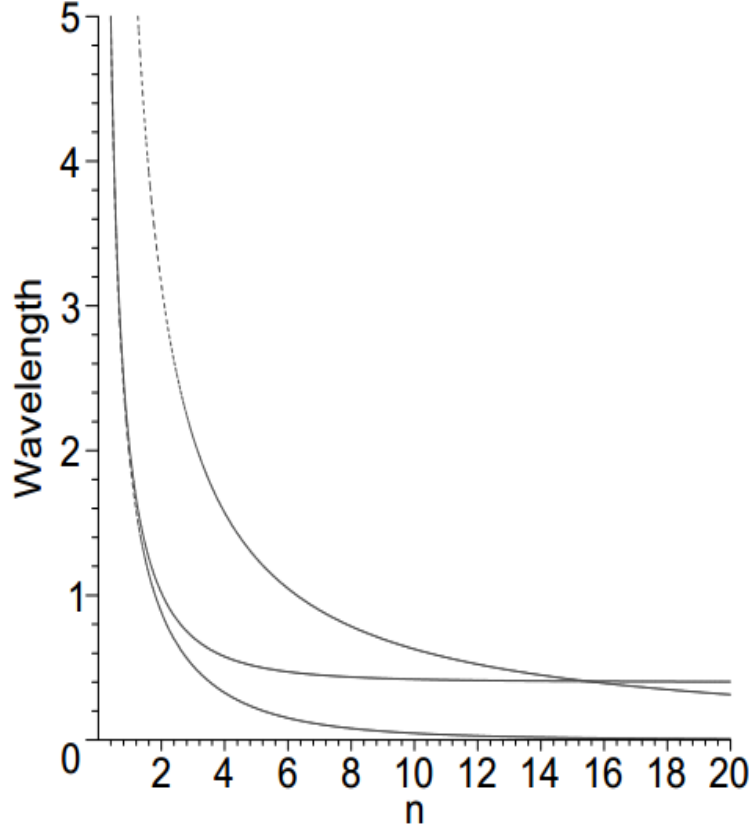


FIGURE 4.1 – Longueurs d’onde de Compton associées aux l’impulsion  $k_3$  (solide),  $p_3$  ( point) pour  $\beta = 0.01$  et cas standard (tiret-point) par rapport au nombre quantique  $n$

Dans la figure 3.1, nous avons représenté graphiquement les longueurs d’onde modifiées associées aux moments  $p_3$  et  $k_3$  à huit ordre dans  $\beta$  pour  $\beta = 0.01$  et  $\hbar = a = q = 1$  . Pour  $n$  grand, la longueur d’onde correspondante à  $k_3$  tend asymptotiquement vers  $\lambda_{min}$  tandis que celle associée à  $p_3$  tend vers zéro plus vite que la longueur d’onde du théorie standard. Un comportement similaire a été obtenu dans [28] en utilisant des relations de dispersion généralisée.

Le vecteur potentiel en présence des plaques est alors donné par

$$\hat{A}_a(r, t) = \sqrt{2\pi\hbar^3 c\sqrt{\beta}\frac{\hbar\pi}{a}} \sum_{\substack{n=-n_{max} \\ \gamma=\pm 1}}^{n=n_{max}} \int \frac{dq}{(1+\beta p^2(a))\sqrt{\arctan\sqrt{\beta}|p(a)|}} \times \sum_{\gamma=\pm 1} [f_\gamma(p(a), \omega) \hat{a}_\gamma(p(a)) + f^*(p(a), \omega) \hat{a}_\gamma^\dagger(p(a))] \quad (4.10)$$

avec

$$p(a) = q + p_3(n) \quad (4.11)$$

La relation de commutation entre les opérateurs de création et d'annihilation est alors affectée par la solution (4.9). Pour notre cas, il suffit d'utiliser l'approximation suivante

$$[\hat{a}_\gamma(p(a)), \hat{a}_\gamma^\dagger(p(a))] \simeq \frac{a}{\pi\hbar} \delta_{n,\hat{n}} \delta_{\gamma,\hat{\gamma}} \delta(q - \hat{q}) + O(\beta). \quad (4.12)$$

L'énergie de Casimir est défini par la relation

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle 0 | \hat{H}(a) - \hat{H} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dr \langle 0 | (\partial_0 \hat{A})^2 - \hat{A} \nabla^2 \hat{A} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dr \langle 0 | (\partial_0 \hat{A}_a)^2 - \hat{A}_a \Delta \hat{A}_a + (\partial_0 \hat{A})^2 - \hat{A} \Delta \hat{A} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

Effectuant le calcul standard, nous obtenons

$$\Delta E = \frac{cL^2}{8\pi\hbar^2\beta^{\frac{1}{2}}} \int dq \left\{ \sum_{n=-n_{max}}^{n=n_{max}} \frac{\arctan\left(\sqrt{\beta(q^2 + p_3^2(n))}\right)}{1 + \beta(q^2 + p_3^2(n))} - \int_{-\nu_{max}}^{\nu_{max}} d\nu \frac{\arctan\left(\sqrt{\beta(q^2 + p_3^2(\nu))}\right)}{1 + \beta(q^2 + p_3^2(\nu))} \right\} \quad (4.14)$$

A partir de cette expression, on voit facilement que des termes proportionnels à  $\beta^{n \geq 1}$  en  $p_3(n)$  et les termes omis dans la relation de commutation (4.12) donnera des contributions négligeables proportionnelles à  $\beta^{n \geq 2}$ . En permutant les sommes et les intégrales et définissant

$$G(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty dx \frac{\arctan\sqrt{\beta(p_3^2(\nu) + x)}}{1 + \beta(p_3^2(\nu) + x)} \quad (4.15)$$

on peut écrire l'énergie par unité de surface  $\mathcal{E} = \Delta E/L^2$  comme suit

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi\hbar^2} \left\{ \sum_{n=0}^{n_{max}} G(n) - \int_0^{\nu_{max}} d\nu G(\nu) - \frac{1}{2}G(0) \right\}. \quad (4.16)$$

En introduisant le changement de variable  $\rho = \frac{\arctan(\sqrt{\beta(x+p_3^2)})}{\sqrt{\beta}}$ , la fonction  $G(\nu)$  devient

$$G(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(p_3(\nu)\sqrt{\beta})}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \tan(\sqrt{\beta}\rho) \rho d\rho. \quad (4.17)$$

En utilisant l'expansion suivante [30]

$$t \tan(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_k}{(2k)!} t^{2k}, \quad |t| < \frac{\pi}{2} \quad (4.18)$$

et intégrant sur  $\rho$  nous obtenons

$$G(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} 2^{2k-1} (2^{2k} - 1) B_k}{(2k-1)(2k)!} \left[ \left( \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \right)^{2k-1} - \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(p_{3(\nu)} \sqrt{\beta}) \right)^{2k-1} \right] \quad (4.19)$$

où  $B_k$  sont les nombres de Bernoulli donnés par  $B_1 = \frac{1}{6}$ ,  $B_2 = \frac{1}{30}$ ,  $B_3 = \frac{1}{42}, \dots$  [29].

Il est important de noter ici que nous n'avons pas introduit de la fonction cut-off comme dans le cas de l'effet Casimir ordinaire. La cut-off  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$  est introduit naturellement dans l'équation (4.17). Dans l'équation (4.19), les contributions pour  $n > n_{max}$  sont négligeables par rapport à celles de  $n \leq n_{max}$  puisque  $\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan(p_{3(\nu)} \sqrt{\beta})$  tend asymptotiquement vers  $\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$  pour  $n > n_{max}$ . on peut étendre la sommation sur  $n$  et  $\nu$  dans l'équation (4.16) de 0 à  $+\infty$ .

En utilisant la formule d'Euler

$$\int_0^{\infty} dn G(n) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) - \frac{1}{2} G(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2k)!} G^{(2k-1)}(0) \quad (4.20)$$

on obtient

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{c}{4\pi \hbar^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} G^{(2m-1)}(0) \quad (4.21)$$

où  $B_{2m}$  sont les nombres de Bernoulli et  $G^{(l)}(0)$  sont des dérivées de  $G(\nu)$  à  $\nu = 0$ .

En utilisant l'expression de  $p_3(\nu)$  donnée par (4.9) dans (4.20), on obtient une expansion du premier ordre en  $\beta$  (Rappelons que les relations de commutation sont valides au premier ordre dans  $\beta$ )

$$G(\nu) = -4B_1 \left( \frac{\hbar\pi\nu}{a} \right)^3 + 4\beta \left[ \frac{B_1}{3} + B_2 \right] \left( \frac{\hbar\pi\nu}{a} \right)^5 \quad (4.22)$$

En utilisant  $B_1 = \frac{1}{6}$ ,  $B_2 = \frac{1}{30}$ , Nous obtenons finalement

$$G(\nu) = -\frac{2}{3} \left( \frac{\hbar\pi\nu}{a} \right)^3 + \frac{48}{135} \beta \left( \frac{\hbar\pi\nu}{a} \right)^5 \quad (4.23)$$

Alors de l'équation (4.21) nous avons

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{c}{4\pi\hbar^2} \left[ \frac{B_4}{4!} G^{(3)}(0) + \frac{B_{2m}}{6!} G^{(5)}(0) \right]. \quad (4.24)$$

En évaluant les dérivées à  $\nu = 0$  et utilisant  $B_4 = \frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{691}{2730}$ , nous obtenons

$$\Delta \mathcal{E} = \hbar c \left\{ \frac{\pi^2}{720a^3} - \beta \frac{691}{284275} \frac{\hbar^2 \pi^4}{a^5} \right\}. \quad (4.25)$$

La force par unité de surface  $\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{E}$  générée par cette énergie est donnée par

$$\mathcal{F} = -\hbar c \left\{ \frac{\pi^2}{240a^4} - \beta \frac{691}{36855} \frac{\hbar^2 \pi^4}{a^6} \right\}. \quad (4.26)$$

De ce résultat, on remarque que la force de Casimir en présence des longueurs minimales peut être attractive ou répulsive selon la valeur de la longueur minimale  $(\Delta x)_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$ .

Le premier terme de l'équation (4.26) représente la force Casimir attractive standard [31]. En effet, le système de deux plaques peut s'effondrer en un système à une plaque. Le deuxième terme qui est la correction apportée par la présence de la longueur minimale est de nature répulsive et donc Fournit la stabilité désirée au système de deux plaques. Ceci est important pour la construction de Théories de Kaluza-Klein. Les mêmes résultats ont été obtenus par [32] pour l'effet de Casimir dans la théorie  $\kappa$ -déformé.

La condition quantique pour la stabilité de système des deux plaques donne la contrainte suivante

$$\frac{(\Delta x)_{min}}{a} \sim 0.15 \quad (4.27)$$

En utilisant les distance expérimentalement accessibles entre les deux plaques, qui est d'ordre  $100 \text{ nm}$  [34], on obtient

$$\hbar\sqrt{\beta} \sim 15 \text{ nm} \quad (4.28)$$

Cependant pour que la force reste attractive, comme on l'observe habituellement, on a la condition  $\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a} \lesssim 0.15$ .

La figure 3.2 illustre la variation de la force de Casimir pour différentes valeurs de la longueur minimale. C'est clair que cette force devient répulsive pour  $\frac{(\Delta x)_{min}}{a} > 0.15$ . D'abord il faut noter que  $a$  est toujours supérieur à  $(\Delta X)_{min}$

# Chapitre 5

## Conclusion

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'effet Casimir en présence des distances minimales.

Dans le deuxième chapitre nous avons donné un rappel sur la mécanique quantique basée sur l'incertitude généralisée au premier ordre en  $\beta$ . Ce principe stipule d'utiliser une relation de dispersion modifiée ce qui conduit à une relation de commutation et une relation d'incertitude modifiée. Comme résultat de cette modification, on a obtenu une longueur minimale  $(\Delta x)_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$ .

Dans le troisième chapitre nous avons étudié l'effet Casimir dans le cas standard. On a donné d'abord un rappel sur la quantification de champ de Maxwell ou on a trouvé la solution de champ de Maxwell. Puis on a calculé l'énergie du vide entre deux plaques séparées par une distance  $a$  et aussi la force de Casimir qui est de nature attractive. Cela peut déstabiliser le système de deux plaques et peut s'effondrer ce système de deux plaques en un système à une plaque.

Dans le quatrième chapitre nous avons étudié l'effet Casimir en présence des distances minimales. Nous avons montré que la longueur minimale joue le rôle d'un cut-off naturelle. On a trouvé aussi que la présence des distances minimales apporte des corrections à l'énergie et la force de Casimir ou on a trouvé un terme de nature répulsive additionnel dans l'expression de la force de Casimir. Ce terme donne la stabilité au système des deux plaques.

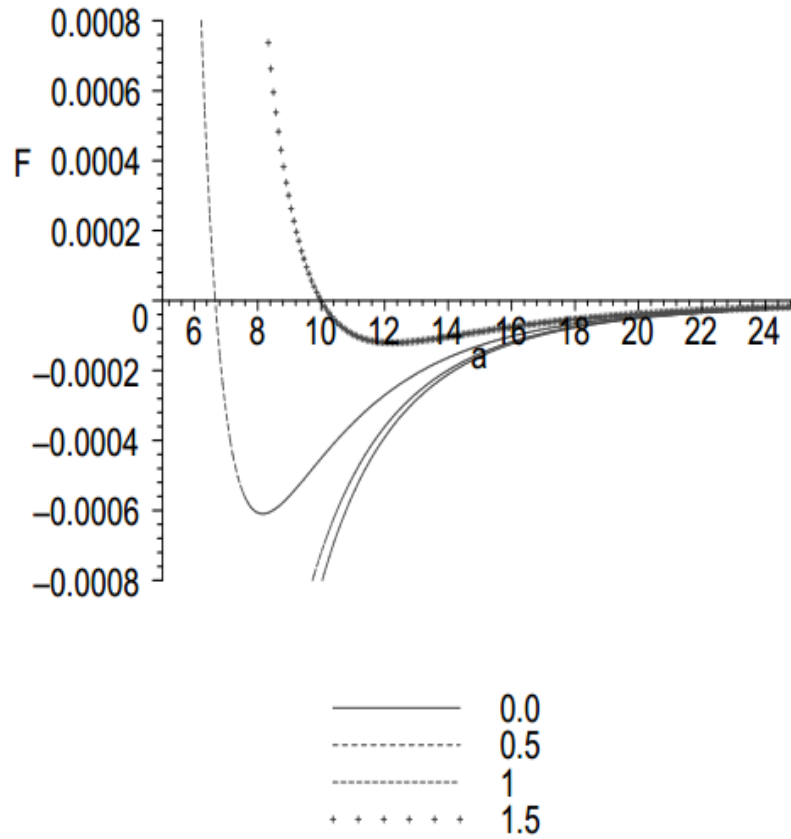


FIGURE 5.1 – Force de Casimir  $\mathcal{F}$  [ $eV/nm^3$ ] par rapport à la séparation des plaques  $a$  [ $nm$ ] pour différentes valeurs de la longueur minimale.

# Bibliographie

- [1] H. B. G. Casimir. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, 10 :261-263, 1948. [Kon.Ned.Akad.Wetensch.Proc.51 :793-795,1948].
- [2] R. L. Jaffe. Casimir effect and the quantum vacuum. *Phys. Rev. D*, 72 :021301, Jul 2005.
- [3] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. New developments in the Casimir effect. *Phys. Rep.*, 353 :1-205, October 2001
- [4] Kimball A. Milton. *The Casimir Effect*. World Scientific Pub Co Inc, 1st edition, 10 2001.
- [5] D. E. Krause, R. S. Decca, D. Lopez, and E. Fischbach. Experimental investigation of the casimir force beyond the proximity-force approximation. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :050403, Jan 2007.
- [6] Ulrich Harbach and Sabine Hossenfelder. The Casimir effect in the presence of a minimal length. *Phys. Lett.*, B632 :379-383, 2006.
- [7] K. Nouicer. Casimir effect in the presence of minimal lengths. *Journal of Physics A Mathematical General*, 38 :10027-10035, November 2005.
- [8] Katja Poppenhaefer, Sabine Hossenfelder, Stefan Hofmann, and Marcus Bleicher. The Casimir effect in the presence of compactified universal extra dimensions. *Phys. Lett.*, B582 :1-5, 2004.
- [9] R. Casadio, A. Gruppuso, B. Harms, and O. Micu. Boundaries and the casimir effect in non commutative space-time. *Phys. Rev. D*, 76 :025016, Jul 2007.
- [10] Paul K. Townsend. Small-scale structure of spacetime as the origin of the gravitational constant. *Phys. Rev. D*, 15 :2795-2801, May 1977.
- [11] Michele Maggiore. The algebraic structure of the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, 319(1-3) :83-86, 1993.

- [12] Luis J. Garay. Quantum gravity and minimum length. *Int.J.Mod.Phys.*, A10 :145-166, 1995.
- [13] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D*, 52 :1108, 1995.
- [14] G. Dorsch and J. Alexandre Nogueira. Minimal Length in Quantum Mechanics via Modified Heisenberg Algebra. *ArXiv e-prints*, June 2011
- [15] O. Panella. Casimir-polder intermolecular forces in minimal length theories. *Phys. Rev. D*, 76(4) :045012, Aug 2007.
- [16] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, *Phys. Rev. D* 52,1108 (1995).
- [17] H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* 37(1996) 2121-2137.
- [18] Sabine Hossenfelder, *Class. Quantum Grav.* 23,1815 (2006).
- [19] M. Maggiore, *Phys. Lett. B* 319, 83 (1993).
- [20] Achim. Kempf, *Phys. Rev. D* 55,7909 (1997).
- [21] R. Akhoury and Y.-P. Yao, *Phys. Lett. B* 572,37-42 (2003).
- [22] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002).
- [23] Kh. Nouicer, *J. Phys. A :Math.Gen.* 39, 5125 (2006).
- [24] U. Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher and H. Stoecker, *Proceedings of the Nuclear Physics, Winter Meeting 2004, Bormio, Italy*; e-print *arXiv :hep-ph/0404205*.
- [25] Achim. Kempf, *J. Math. Phys.* 35,4483 (1994).
- [26] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition : Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)*. Butterworth-Heinemann, 4 edition, 1 1980.
- [27] K. Poppenhaefer, S. Hossenfelder, S. Hofmann and M. Bleicher, *Phys. Lett. B* 582, 1, (2004).
- [28] S. Bachmann and A. Kempf, *arXiv :gr-qc/0504076 v1*.
- [29] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1980.
- [30] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special functions*, (World Scientific, 1989).
- [31] H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.* 51, 793 (1948).

- [32] S. Nam, H. Park and Y. Seo, J. Korean Phys. Soc. 42, 467 (2003).
- [33] U. Urbach and S. Hossenfelder, arXiv :hep-th/ 0502142 v2.
- [34] U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. 81, 4549 (1998). F. Chen, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, arXiv :quant-ph/0401153 v1.
- [35] S. Hossenfelder, Phys. Lett. B 632,2727 (2006).
- [36] S. Hossenfelder, Mod. Phys. Lett. A 37,379-383 (2004).

## Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une étude théorique sur l'effet de Casimir dans la géométrie classique de deux plaques métalliques parallèles, séparées par une distance  $a$ , en raison de la présence d'une longueur minimale ( $\hbar\sqrt{\beta}$ ) découlant de modèle mécanique quantique basé sur un principe d'incertitude généralisée ( $GUP$ ). L'approche pour la quantification du champ électromagnétique est basée sur la projection sur les états maximalelement localisés de modèle spécifique de GUP et a déjà été développée pour étudier l'étude Casimir-Polder . Pour ce modèle, nous calculons la correction de l'ordre le plus bas dans la longueur minimale à l'énergie de Casimir et que la balance de la distance entre les plaques  $a^{-5}$  par rapport au résultat QED bien connu qui varie selon  $a^{-3}$  et, contrairement à la précédente Nous affirmons que c'est toujours attractant.

## Abstract

In this work, we presented a theoretical study on the effect of Casimir in the classical geometry of two parallel metal plates, separated by a distance  $a$ , due to the presence of a minimum length ( $\hbar\sqrt{\beta}$ ) derived from a quantum mechanical model based on a generalized uncertainty principle ( $GUP$ ). The approach for the quantification of the electromagnetic field is based on the projection on the maximally localized states of specific model of GUP and has already been developed to study the Casimir-Polder study. For this model, we calculate the correction of the lowest order in the minimum length of Casimir's energy and that the balance of the distance between the plates  $a^{-5}$  with respect to the well-known QED result which varies According to  $a^{-3}$  and, contrary to the previous We affirm that it is always attractive.

## ملخص

في هذا العمل، قدمنا دراسة نظرية حول تأثير كازيمير في الهندسة الكلاسيكية لصفحتين معدنيتين متوازيتين تفصل بينها مسافة  $a$  في وجود حد أدنى لطول ( $\hbar\sqrt{\beta}$ ) الناشئ عن نموذج الميكانيك الكمي الذي يستند على مبدأ عدم اليقين المعمم ( $GUP$ ) ومن اجل هذا النموذج، نحسب تصحيح أدنى ترتيب في الحد الأدنى للطول لطاقة كازيمير ،