

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE MÉCANIQUE



Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Énergétique

Thème :

**Simulations numériques d'écoulements de
fluides non-Newtoniens dans des conduites
axisymétriques à rétrécissement.
Application : Domaine de la biomécanique**

Proposé et dirigé par :

Mr. CHINE Adel

Présenté par :

ROAISSAT Yahia

KHODJA Imad Eddine

Soutenues devant le jury composé de :

Président	Mr.BERKACHE Amar	MCB
Rapporteur	Mr.BELKHIRI Khellaf	MAA
Examineur	Mme.IHADDADENE Nabila	MCA
Encadreur	Mr.CHINE Adel	MCA

N° d'ordre : GM //2019

Année Universitaire 2018–2019

Dédicaces

*A la mémoire de nos grand-mères,
A nos parents,
A nos frères et, nos sœurs
A Nos amis,
Toute la promotion sortante 2019.*

Remerciements

Nous remercions DIEU tout puissant qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

*Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à mon promoteur le docteur **A. CHINE**, qui nous a donné l'occasion de travailler sur un sujet passionnant, et pour ses conseils judicieux et son aide précieuse.*

Nous tenons aussi à remercier nos enseignants de Génie mécanique qui n'ont pas manqué de fournir tous leurs efforts à fin de transmettre leurs savoir-faire.

Nous remercions également l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'examiner notre travail. Nous remercions nos parents pour la confiance qu'ils nous ont accordés tout au long de nôtres études.

Nous remercions enfin tous nos amies.

Résumé

ملخص

يمثل العمل الحالي نتائج عددية، تم الحصول عليها عن طريق المحاكاة العددية للتدفقات متساوية الحرارة، لسائل غير نيوتوني، من خلال أنبوب متناظر المحور مع انكماش مشابه لشريان مسدود. الخواص الفيزيائية لقانون السلوك الريولوجي هي تلك الخاصة بالدم عند درجة حرارة 37 درجة مئوية. يتم حل المشكلة الميكانيكية من خلال طريقة الفرق المحدود، المرتبطة بطريقة أنبوب التيار "MTC"، في مجال محول Ω^* من المجال الحقيقي Ω ، حيث خطوط التيار هي خطوط مستقيمة موازية لاتجاه التدفق. النتائج الأولية، للسلوك النيوتوني للدم، والتي تبين تأثير الحركة على السلوك الديناميكي للتدفق، وخاصة في المنطقة الضيقة.

الكلمات المفتاحية: تدفق متساوي الحرارة، دم، أنبوب محوري، تضيق، طريقة الفروق المحدودة.

Résumé

Le présent travail représente des résultats numériques, obtenus par la simulation numérique d'écoulements isothermes, de fluide non-Newtonien, à travers une conduite axisymétrique à rétrécissement assimilée à une artère sténosée. Les propriétés physiques de la loi de comportement rhéologique sont celles du sang à la température 37 °C. Le problème mécanique est résolu par la méthode des différences finis, associés à la Méthode des Tubes de Courant 'MTC', dans un domaine transformé Ω^* du domaine réel Ω , où les lignes de courant sont des droites parallèles au sens d'écoulement. Des résultats préliminaires, pour un comportement rhéologique newtonien du sang, montrant l'influence de la cinématique sur le comportement dynamique de l'écoulement, notamment dans la zone de rétrécissement.

Mots clés : Ecoulement isotherme, Sang, conduite axisymétrique, Sténose, méthode Différences finis, MTC.

Abstract

The present work represents numerical results, obtained by the numerical simulation of isothermal flows, of non-Newtonian fluid, through an axisymmetric pipe with shrinkage assimilated to a stenosed artery. The physical properties of the rheological law of behavior are those of the blood at the temperature 37 ° C. The mechanical problem is solved by the finite difference method, associated with the 'MTC' Current Tube Method, in a transformed domain Ω^* of the real domain Ω , where the current lines are straight lines parallel to the direction of flow. Preliminary results, for a Newtonian rheological behavior of the blood, showing the influence of the kinematics on the dynamic behavior of the flow, especially in the narrowing zone.

Keywords: Isothermal Flow, Blood, Axisymmetric pipe, Stenosis, Finite Differences method, TCM.

Table des matières

Table des matières	i
Liste des Figures	iii
Liste des Tableaux	v
Nomenclature	vii
Introduction générale	2
I.1 Pathologies cardiaques.....	7
I.1.1 La maladie coronarienne (cardiopathie)	7
I.1.1.1 Symptômes	7
I.1.1.2 L'arythmie	8
I.1.2 Pathologies vasculaires	9
I.1.2.1 Pathologies artérielles	9
I.1.2.2 Pathologies veineuses	13
I.1.2.3 Pathologies aortiques	13
II.1 Introduction	17
II.2 Composition du sang	17
II.2.1 Les Globules rouges (Erythrocytes)	18
II.2.2 Les Globules Blancs (Leucocytes)	20
II.2.3 Les Plaquettes Sanguines (Thrombocytes)	21
II.2.4 Plasma.....	21
II.3 Densité du Sang	21
II.4 Rhéologie du sang (comportement non-Newtonien).....	21
II.5 Viscosité du Sang	22
II.5.1 Modèle de Casson (1959)	24
II.5.2 Loi de Puissance (Power Law).....	25
II.5.3 Modèle de Quemada (1976).....	25
II.5.4 Modèle de Carreau	26
III.1 Introduction	29
III.2 Méthode des tubes de courant (MTC)	29
III.2.1 Définitions :(lignes de courant, tubes de courant).....	29
III.2.2 Ecoulements bidimensionnels	30
III.2.3 Transformation du domaine en MTC	30
III.3 Operateurs cinématiques	32
III.4 Formulation du problème bidimensionnelles par la méthode des tubes de courant	33
III.4.1 Lois de conservation.....	33
III.4.1.1 Domaine réel Ω	33
III.4.1.2 Domaine transformé Ω^*	35
III.5 Contraintes et déformations dans un fluide.....	35
III.5.1 Tenseur des contraintes.....	35
III.5.1.1 Tenseur des contraintes visqueux τ	36
III.5.1.2 Tenseur des taux de déformation D	37
III.6 Conditions aux limites	38
III.6.1 Conditions aux limites essentielles.....	39
III.6.1.1 Partie amont.....	39
III.6.1.2 Axe de symétrie.....	39

III.6.1.3	Paroi de la conduite.....	39
III.6.1.4	Partie aval.....	40
III.6.2	Conditions aux limites naturelles	40
III.6.2.1	Partie amont.....	40
III.6.2.2	Axe de la symétrie	40
III.6.2.3	Paroi de la conduite.....	41
III.6.2.4	Partie aval.....	41
III.7	Modèles Rhéologiques.....	41
III.7.1	Modèle newtonien	41
III.7.2	Modèle non-Newtonien visqueux pur	42
III.7.2.1	Loi de puissance	42
III.7.2.2	Loi de carreau.....	43
III.8	Conclusion.....	44
IV.1	Introduction	47
IV.2	Formulations primaire et mixte	47
IV.3	Discrétisation des équations et des inconnues.....	48
IV.3.1	Consistance et stabilité	48
IV.4	Discrétisation en Méthode des Tubes de Courant	49
IV.4.1	Discrétisations par différences finies.....	49
IV.4.1.1	Dérivées premières suivant la direction R.....	49
IV.4.1.2	Dérivées premières suivant la direction Z.....	50
IV.5	Algorithme et résolution du problème Mécanique	51
IV.6	Algorithme de Newton–Raphson	52
IV.7	Optimisation de la méthode de Newton- Raphson (coefficient de descente)	54
IV.8	Conclusion.....	54
V.1	Introduction	57
V.2	Géométrie du domaine d'étude et conditions aux limites.....	57
V.2.1	Domaine réel Ω	58
V.2.2	Domaine transformé Ω^*	58
V.2.3	Conditions aux limites	59
V.3	Maillage et algorithme de résolution	60
V.4	Résultats et discussion	62
V.4.1	Résultats pour différentes amplitudes relatives Π	62
V.4.2	Résultats pour différentes débits d'écoulements Q.....	64
V.5	Conclusion.....	68
Conclusion générale		70
Références bibliographiques.....		72

Liste des Figures

Figure I.1– Exemple de coronarographie anormale avec de multiples rétrécissements sur l'artère coronaire gauche et sur une branche de l'artère coronaire droite (flèches), [2].	7
Figure I.2– L'angine de poitrine, [2].	8
Figure I.3– L'artériosclérose [4].	9
Figure I.4– La thrombose artérielle [5].	11
Figure I.5– Anévrisme cérébral [6].	12
Figure I.6– La dissection aortique [7].	15
Figure II.1– Principaux composants du sang [9].	17
Figure II.2– Structure des Erythrocytes [9].	18
Figure II.3– Forme des Leucocytes, [9].	20
Figure II.4– Variation de la viscosité en fonction de la température et de taux de cisaillement [10].	22
Figure II.5– Variation de la viscosité en fonction du cisaillement [10].	23
Figure II.6– Fluide de Casson [10].	24
Figure III.1– Schéma d'un tube de courant [11].	29
Figure III.2– Transformation dans le Ω^* de lignes de courant du domaine	31
Figure IV.1– Exemple de grille de discrétisation dans le domaine transformé Ω^*	49
Figure IV.2– Interprétation géométrique de la méthode itérative de Newton-Raphson.	53
Figure V.1– Géométrie du domaine d'étude retenu pour le calcul des écoulements axisymétriques isothermes.	58
Figure V.2– Géométrie du domaine d'étude transformé pour le calcul des écoulements axisymétriques. sothermes.	58
Figure V.3– Vue globale du maillage : a) Demi domaine transformé b) Demi domaine réel, c) domaine réel complet ($R_0 = 0,0025$ m).	61
Figure V.4– Exemple de maillage testé pour le calcul d'un écoulement isotherme axisymétrique à travers une conduite avec rétrécissement. (a) Domaine complet, (b) Zoom à l'échelle au niveau de la section de striction ($Z/R_0 = 6$).	61
Figure V.5– Isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (c) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).	62
Figure V.6– Isovaleurs de la de la pression effective p pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).	63
Figure V.7– Isovaleurs de la de contrainte de cisaillement τ_{rz} pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).	63
Figure V.8– Isovaleurs de la de contrainte d'élongation τ_{zz} pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).	64

Figure V.9– Isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).	65
Figure V.10– Isovaleurs de la de la pression effective p pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).	66
Figure V.11– Isovaleurs de la de la contrainte de cisaillement τ_{rz} pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).	67
Figure V.12– Isovaleurs de la de contrainte d'élongation τ_{zz} pour différentes valeurs de débit. . (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).	68

Liste des Tableaux

Tableau II.1 – Nombre de globules rouges en millions par mm ³ [10].....	19
Tableau II.2 – Taux d'hématocrite en % [10].....	19
Tableau II.3 – Masse d'hémoglobine normale pour 100ml de sang [10].	20

Nomenclature

τ	Contrainte de cisaillement	Pa
τ_y	Contrainte de rupture	Pa
$\dot{\gamma}$	Taux de déformation	s^{-1}
μ_0	Viscosité du plasma	Pa.s
μ_e	Viscosité apparente du sang	Pa.s
μ_r	Viscosité relative du sang	Pa.s
μ_p	Viscosité du plasma	-
μ_∞	Viscosité dynamique du sang aux contraintes de cisaillement élevées	Pa.s
ρ	Représente la densité du sang	kg/m^3
$\sigma_{i,j}$	Composantes du tenseur de contrainte	-
s	Coefficient expérimental	$(Pa.s)^{1/2}$
k_0^2	Contrainte de rupture	N/m^2
H	Hématocrite	%
$D_{i,j}$	Le taux du tenseur de déformation	-
K	Constante de Walburn	$Pa.s^n$
\mathbf{V}	Vecteur de vitesse	-
∇	L'opérateur divergence	-
σ	Tenseur de la contrainte totale	-
I	La matrice identité	-
μ	Viscosité dynamique du sang	Pa.s
Π_D	Représente le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation D	-
\mathfrak{R}	Condition aux limites	-

Introduction générale

Introduction générale

Le système cardiovasculaire d'un corps vivant a pour mission principale l'approvisionnement des différents organes, tissus et cellules du corps en oxygène et différents éléments nutritifs et les en débarrasser des déchets (CO_2 et autres déchets solides, liquides et gazeux) qui en découlent de leur consommation.

Cette mission est accomplie grâce à un liquide complexe (le sang) pulsé par un organe particulier, en l'occurrence le cœur, qui joue le rôle d'une double pompe à 4 cavités, et d'un réseau à bifurcations, fermé et très compliqué, de vaisseaux sanguins de différents types et calibres (artères et veines) dont l'ensemble forme ce qu'on appelle le système circulatoire.

Le sang en tant que liquide biologique, le cœur et les vaisseaux en tant que matériaux solides biologiques, possèdent des propriétés mécaniques et rhéologiques assez particulières et bien adaptées pour accomplir cette mission.

Ces propriétés ont fait l'objet d'une foultitude de travaux à caractère théorique, expérimental, de simulation et de modélisation, surtout ces cinquante dernières années avec les derniers progrès technologiques et le développement de techniques nouvelles telles que la vélocimétrie (échographie) Doppler pulsée à ultrasons, et des logiciels de simulation tels que : MATLAB, Fluent, ANSYS-ICEM-CFX, Flow3D, Cosmos, Castem, etc...

Concernant l'étude de l'écoulement du sang, les lois de la Mécanique des Fluides peuvent être appliquées. Il en ressort globalement que, l'écoulement artériel normal est pratiquement laminaire, essentiellement dans les grosses artères. Cependant, cet écoulement change au niveau des courbes et des branches issues des bifurcations. Ainsi, de l'aorte jusqu'aux capillaires, on assiste à des écoulements de différents types allant du laminaire au turbulent en passant par le rampant, selon les différentes valeurs que peuvent prendre les nombres de Reynolds, de Womersley et de Strouhal présents dans l'équation de Navier-Stokes adimensionnelle.

En effet, ces considérations qui mettent en relief des paramètres sans dimension qui caractérisent l'écoulement du fluide dans les différentes parties du système artériel, ne doivent donc pas être ignorées quand on veut étudier les caractéristiques de la circulation artérielle sur des modèles physiques en similitude.

Elles prennent en compte le caractère instationnaire de l'écoulement mais supposent les conduits rigides. Une approche plus réaliste devrait mettre en évidence une condition aux limites différente, faisant apparaître le caractère déformable des conduits, ce qui introduirait de nouveaux nombres sans dimension où interviendrait la célérité des ondes de pression dans les conduits.

Concernant le sang comme fluide particulier de composition assez complexe (**suspension d'éléments globulaires dans une solution aqueuse appelée le plasma, de viscosité et de densité variable**), on admet en général qu'il possède un comportement sensiblement Newtonien quand il s'écoule dans les gros vaisseaux, mais qu'il n'en est plus de même dans les parties distales ou périphériques du réseau. Dans certains cas, le sang peut avoir un comportement biphasique notamment quand il s'écoule dans les très petits vaisseaux.

Concernant les vaisseaux (conduits sanguins : artères et veines), ils sont des organes vivants de structure assez particulière, qui leur permet de s'adapter et de changer en fonction des différentes conditions hémodynamiques. En particulier, on a remarqué que les artères possèdent une propriété de distensibilité et les veines une propriété de grande déformabilité (phénomène de collabage). Ceci relève de ce qui est communément appelé l'hémorhéologie.

Lors de son écoulement, le sang exerce une force (une contrainte), dite de cisaillement, sur les parois vasculaires internes. A ce niveau, on est donc appelé à prendre en compte les différents aspects de cette interaction fluide-structure.

Dans certains cas, des conditions hémodynamiques inhabituelles créent une réponse biologique anormale, notamment au niveau des courbes et des bifurcations. La maladie d'athérosclérose tend à être localisée dans ces sites et résulte du resserrement interne des artères (Sténose). Cette sténose peut causer de la turbulence et réduit le flux sanguin par le biais d'un changement de la viscosité et de l'étranglement de l'écoulement. Ainsi, un très grand cisaillement aux abords de la sténose peut créer une thrombose qui peut bloquer complètement l'écoulement du sang vers le cœur ou le cerveau, débouchant ainsi sur un accident cardiovasculaire.

Au vu de la difficulté, ou disant de l'impossibilité, de mener des recherches expérimentales *in vivo* concernant l'étude de la dynamique vasculaire et de l'écoulement sanguin, dû essentiellement aux tailles très réduites des vaisseaux dans les systèmes vivants, on remarque

que la littérature scientifique contient actuellement de nombreux articles de chercheurs ayant réalisé des simulations numériques d'écoulements sanguins dans différents types de vaisseaux sanguins (en particulier, les artères) de tailles et de géométries spatiales variables. En effet, les modèles théoriques-mathématiques et les simulations numériques ont permis de mieux comprendre les phénomènes liés à ces aspects.

Le but de ce mémoire est d'étudier les effets d'un rétrécissement dans l'écoulement sanguin au niveau des artères coronaires. A cet effet, nous avons réalisé une simulation numérique en utilisant le Logiciel MATLAB et en considérant une géométrie spatiale adaptée très proche du réel, un maillage assez fin pour nous permettre de mieux apprécier nos résultats et en se basant sur des conditions aux extrémités très proches des données réelles.

Néanmoins, on a considéré les approximations suivantes. D'abord, on a considéré le sang comme un fluide non-Newtonien, ce qui est justifiable, vu qu'il s'agit de l'artère, endroit du système circulatoire où le sang se comporte pratiquement comme tel. Ensuite, on a considéré notre tube courbe comme étant rigide. Par palier à ce problème, on a choisi des conditions aux extrémités et non des conditions pariétales, ce qui nous évite de faire appel à l'interaction fluide-structure, qui nous aurait obligé de prendre en compte les propriétés rhéologiques des parois. Enfin, on a considéré que l'écoulement est stationnaire, ce qui aussi justifiable si on se limite à la phase systolique du débit cardiaque durant laquelle est éjecté à travers la valve aortique vers l'artère.

Notre but est d'étudier le comportement rhéologique dans ce cas. Evidemment, en présence de sténose, le comportement rhéologique va être amplifié et un accident cardiovasculaire devient certain. Nos résultats représenteront donc une indication sur les endroits à surveiller de près lors d'un examen d'ECG pour prévenir des risques éventuels d'accidents cardiovasculaires.

Notre mémoire est organisé comme suit. Le premier chapitre est consacré à une revue sur le Système et les Pathologies Cardiovasculaires et de l'étude de l'écoulement sanguin dans les différents types de vaisseaux, en particulier les artères. En particulier, on discute la présence d'une sténose lors d'un écoulement. Le deuxième chapitre est quant à lui consacré à la description du sang et les modèles qui traduire son comportement rhéologique. Dans le troisième chapitre, nous discuterons la méthode des tubes de courant. Méthode permettant la transformation du domaine réel d'étude à un domaine transformé de géométrie plus simple.

Dans le quatrième chapitre, Dans ce chapitre nous allons parler des formulations primaires et mixtes en fonction des inconnues du problème (f, p) , il détermine les valeurs des différentes grandeurs physiques aux nœuds du maillage qui coïncident avec les lignes de courant. Enfin, dans le cinquième chapitre, on présente notre simulation numérique et les résultats obtenus. On clos ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre I. Pathologies Cardiovasculaires

I.1 Pathologies cardiaques

Les maladies cardiaques désignent l'ensemble des maladies relatives au cœur. Elles sont liées à un dysfonctionnement du cœur ou des vaisseaux qui l'alimentent en sang.

Les maladies cardiaques les plus fréquentes sont : La maladie coronarienne, l'arythmie et l'insuffisance cardiaque, [1].

I.1.1 La maladie coronarienne (cardiopathie)

La maladie coronarienne est la maladie cardiaque la plus courante, elle correspond à la présence de plaque au niveau de l'intima des artères qui irriguent le cœur (les artères coronaires), [2], (Figure I-1).

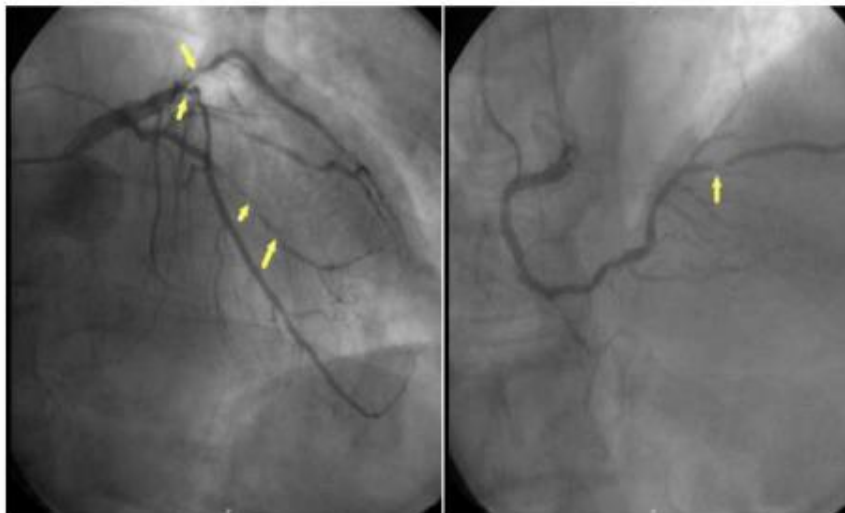


Figure I.1– Exemple de coronarographie anormale avec de multiples rétrécissements sur l'artère coronaire gauche et sur une branche de l'artère coronaire droite (flèches), [2].

I.1.1.1 Symptômes

I.1.1.1.1 L'angine de poitrine

Est un symptôme témoin d'une maladie de cœur, il désigne une douleur profonde située au milieu du thorax avec une sensation de serrement intense et angoissante, (Figure I-2).

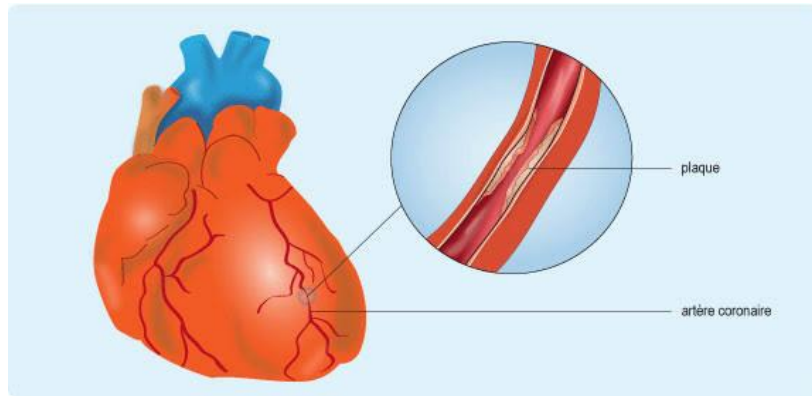


Figure I.2– L'angine de poitrine, [2].

I.1.1.1.2 L'infarctus du myocarde

L'infarctus du myocarde survient lorsque l'artère coronaire est complètement bloquée, une partie plus ou moins étendue du muscle cardiaque est privée de l'oxygène et c'est la crise cardiaque.

I.1.1.2 L'arythmie

L'arythmie cardiaque se caractérise par un trouble du rythme cardiaque, un battement irrégulier qui peut être trop lent ou trop rapide. Il existe différentes sortes d'arythmie, [3] :

I.1.1.2.1 Bradycardie

Elle correspond à une diminution brutale et passagère du rythme cardiaque qui passe à moins de 60 pulsations par minute.

I.1.1.2.2 Tachycardie

Il s'agit d'une augmentation du rythme cardiaque à plus de 100 pulsations par minute.

I.1.1.2.3 Extrasystoles auriculaires

Elles se caractérisent par une petite variation du rythme cardiaque, deux battements rapides puis le cœur fait une pause avant de reprendre des battements normaux.

I.1.1.2.4 Fibrillation auriculaire

Elle se traduit par la contraction anarchique des oreillettes qui entraîne une contraction rapide et irrégulière de ventricules.

I.1.1.2.5 Fibrillation ventriculaire

Elle correspond à la contraction des ventricules sans pomper le sang entraînant dans la plupart des cas un arrêt cardiaque et une mort subite.

I.1.2 Pathologies vasculaires

I.1.2.1 Pathologies artérielles

I.1.2.1.1 Artériosclérose

C'est la maladie artérielle qui désigne un épaississement et un durcissement de la paroi des artères. Elle se présente sous trois formes, [4-5], (Figure I-3) :

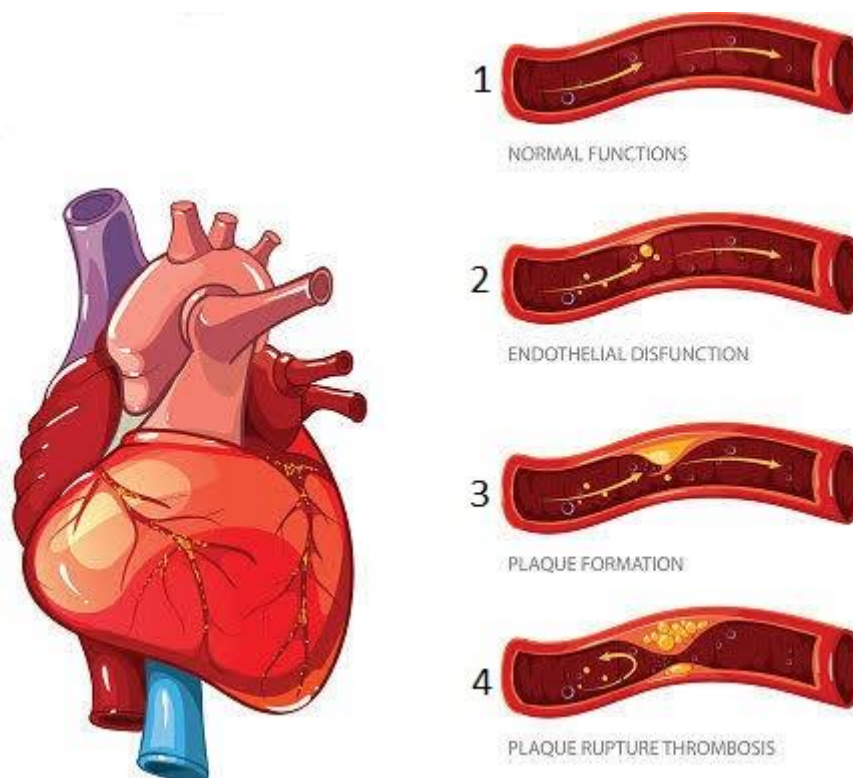


Figure I.3– L'artériosclérose [4].

I.1.2.1.1.1 L'artériosclérose de l'intima ou athérosclérose

Des plaques graisseuses dites d'athérome se déposent dans la partie la plus interne des vaisseaux sanguins.

I.1.2.1.1.2 La sclérose de Monckeberg

Elle se caractérise par une dégénérescence de la structure des parois des artères associée à une calcification (dépôt minéral) des fibres musculaires composant ces parois et touchant tout particulièrement la tunique moyenne (média).

I.1.2.1.1.3 La sclérose artériolaire

C'est la sclérose des artéioles.

I.1.2.1.2 La thrombo—angéite oblitérant (maladie de Buerger)

La maladie de Buerger est une affection inflammatoire occlusive observée principalement dans les artères des avant-bras (en dessous des coudes) et des jambes (en dessous des genoux). L'inflammation peut aussi toucher les veines superficielles des jambes, [4].

I.1.2.1.3 Occlusions artérielles

I.1.2.1.3.1 La thrombose artérielle

C'est la formation de caillots sanguins dans une artère suite à un traumatisme, un anévrisme, une sténose ou à un pontage. Le traitement de la thrombose consiste à essayer de retirer le caillot grâce à une sonde à ballonnet introduite par ponction, puis à fluidifier le sang avec des anticoagulants, [5], (Figure I-4).

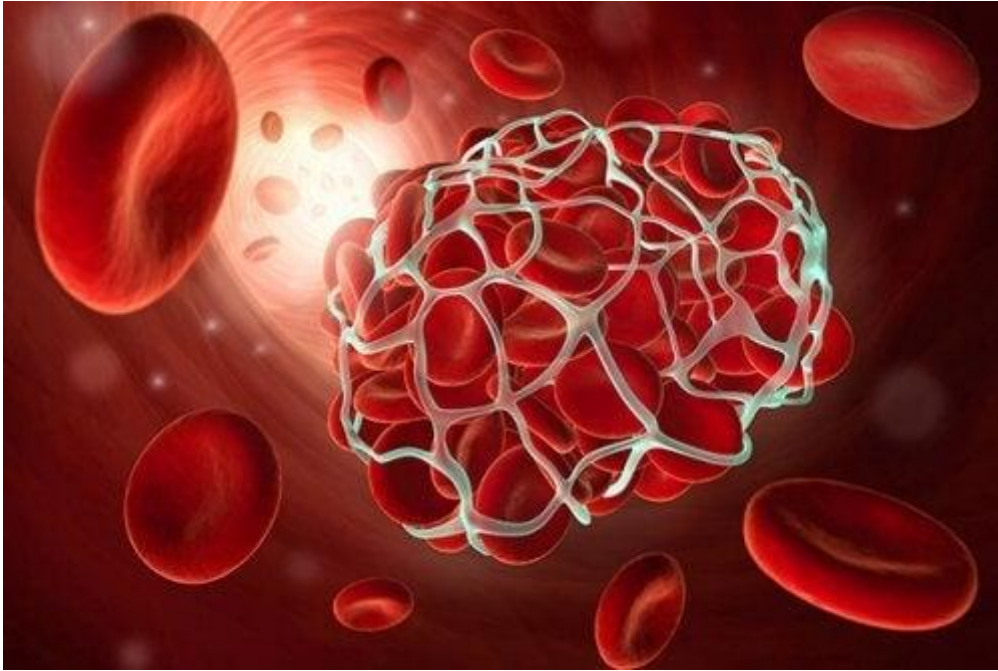


Figure I.4– La thrombose artérielle [5].

I.1.2.1.3.2 L'embolie artérielle

Correspond à une occlusion due à la migration d'un embolie (athérome, caillot) dans le flux sanguin. Les embolies artérielles touchent le plus souvent le cerveau (embolie cérébrale) ou les membres inférieurs.

I.1.2.1.4 Les anévrismes

Un anévrisme désigne la dilatation pathologique permanente d'un vaisseau sanguin. Un anévrisme vrai intéresse les trois couches de la paroi artérielle. Un pseudo-anévrisme n'est entouré que par l'adventice car la média et l'intima ont été rompues. Les anévrismes peuvent se former à différents endroits :(anévrisme abdominal, cérébral, [6], (Figure I-5), thoracique, etc...)

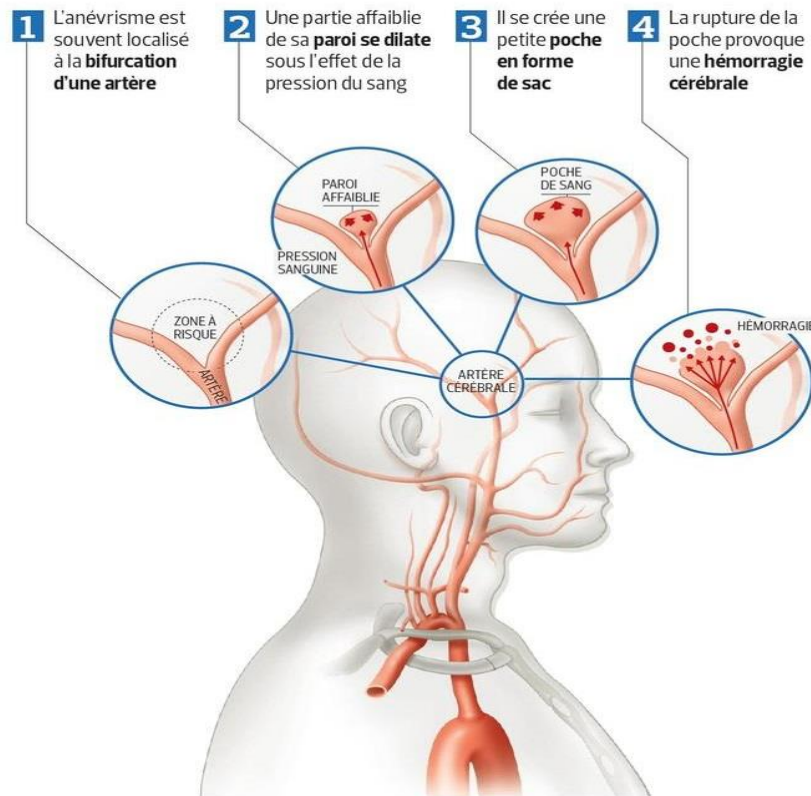


Figure I.5– Anévrisme cérébral [6].

I.1.2.1.5 L'hypertension artérielle

L'hypertension artérielle est généralement liée à des problèmes artériels. En effet, l'hypertension artérielle peut être dû à une diminution de perfusion rénale par sténose de l'artère rénale.

D'autre part, l'hypertension artérielle entraîne des lésions des artéioles rénales avec un risque de perte de la fonction rénale.

En général, l'hypertension artérielle ne donne aucun symptôme. Elle est fréquemment découverte fortuitement lors d'un examen médical. Toutefois, certains signes font suspecter une hypertension artérielle, on peut citer entre autres : des étourdissements, des troubles visuels, des saignements de nez, des crampes musculaires et la fatigue.

I.1.2.2 Pathologies veineuses

I.1.2.2.1 La thrombophlébite

Il s'agit d'une thrombose formée par un caillot qui adhère à la paroi d'une veine et est accompagnée d'une réaction inflammatoire. Elle se trouve généralement dans un mollet ou une cuisse et parfois dans un bras. La thrombophlébite peut entraîner des douleurs et le gonflement d'un membre, le traitement fait appel aux anticoagulants.

I.1.2.2.2 L'embolie pulmonaire

Des caillots sanguins issus des territoires drainés par la veine cave inférieure peuvent provoquer l'obturation de l'artère pulmonaire. Les signes les plus fréquents sont : Difficulté respiratoire ou une douleur plus au moins vive à la base du thorax. Le cas d'embolie importante peut conduire à une perte de connaissance et plus rarement un arrêt cardiaque.

I.1.2.2.3 Les varices

L'obésité ou la distension de l'utérus pendant la grossesse compriment les vaisseaux au niveau de l'aîne et réduisent le retour veineux. Le sang stagne dans les membres inférieurs, les valvules s'affaiblissent et les parois des veines se distendent surtout au niveau des veines superficielles.

Les varices des veines anales sont appelées hémorroïdes. Elles résultent souvent d'une élévation de la pression abdominale qui maintient le sang dans le canal anal. Cette élévation de pression peut s'observer par exemple lors des efforts pendant l'accouchement ou lors de la défécation.

I.1.2.3 Pathologies aortiques

I.1.2.3.1 Coarctation aortique

La coarctation de l'aorte est une malformation congénitale. C'est un rétrécissement situé au début de l'aorte thoracique (après l'embranchement de l'artère sous-clavière gauche), [7].

La coarctation aortique est une des maladies cardiaques les plus courantes qui sont présentes à la naissance. Les symptômes peuvent inclure des maux de tête, des douleurs thoraciques, des extrémités froides, la fatigue et la claudication intermittente.

I.1.2.3.2 Anévrisme de l'aorte abdominale

Les anévrismes de l'aorte abdominale sont les plus fréquents. Il s'agit d'une dilatation localisée de la portion abdominale de l'aorte, située le plus souvent entre les artères rénales et la bifurcation aortique.

Les douleurs sont un symptôme fréquent, il s'agit de douleurs sourdes, abdominales, siégeant à gauche et au milieu du ventre.

La complication essentielle de l'anévrisme est la rupture. Le risque de rupture augmente avec le diamètre de l'anévrisme et l'augmentation de la pression artérielle. Les facteurs de risque : L'âge (plus de 60ans), le tabagisme, les antécédents familiaux d'anévrismes de l'aorte et d'hypertension artérielle.

I.1.2.3.3 La dissection aortique

La dissection aortique est une rupture de la paroi interne de l'aorte. En effet, la déchirure se produit au niveau de l'intima et provoque une porte d'entrée. Le sang va cliver la média et crée ainsi un faux chenal.

Le faux chenal s'étend d'une façon antérograde au niveau de l'aorte avec un mouvement hélicoïdal et parfois se développe de façon rétrograde et intéresse les coronaires.

Le facteur favorisant la maladie est la fragilité anormale de la média. Celle-ci peut être favorisée par l'hypertension et l'âge ou par une dégénérescence kystique de la média chez les patients présentant une anomalie du collagène, type maladie de Marfan ou d'Ehlers-Danlos.

Classification de Stanford, (Figure I-6) :

- Type A : la dissection concerne l'aorte ascendante.
- Type B : la dissection concerne l'aorte après l'artère sous Clavière gauche

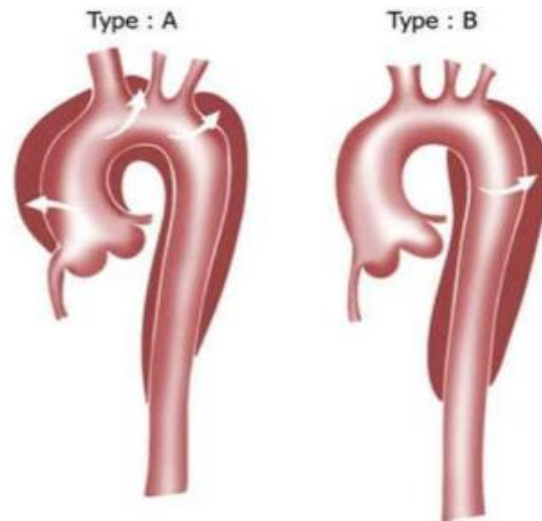


Figure I.6– La dissection aortique [7].

Chapitre II. Le Sang

II.1 Introduction

Le sang est un tissu conjonctif spécialisé où des cellules vivantes, les éléments figurés, sont en suspension dans une matrice extracellulaire liquide appelée plasma. Bien qu'il semble épais et homogène, il contient des éléments solides et des éléments liquides visibles au microscope [8].

II.2 Composition du sang

Le sang est une suspension de cellules dans un liquide complexe appelé le plasma, est une suspension très concentrée, il contient environ 5000 particules par mm^3 , ce qui représente 40 à 45 % de concentration en volume. Ces particules consistent en différentes sorte de cellules baignent dans une solution aqueuse qui est le plasma [8-9].

Si on centrifuge un échantillon de sang, les éléments figurés se déposent au fond de l'éprouvette tandis que le plasma, moins dense, flotte à la surface Figure II.1.

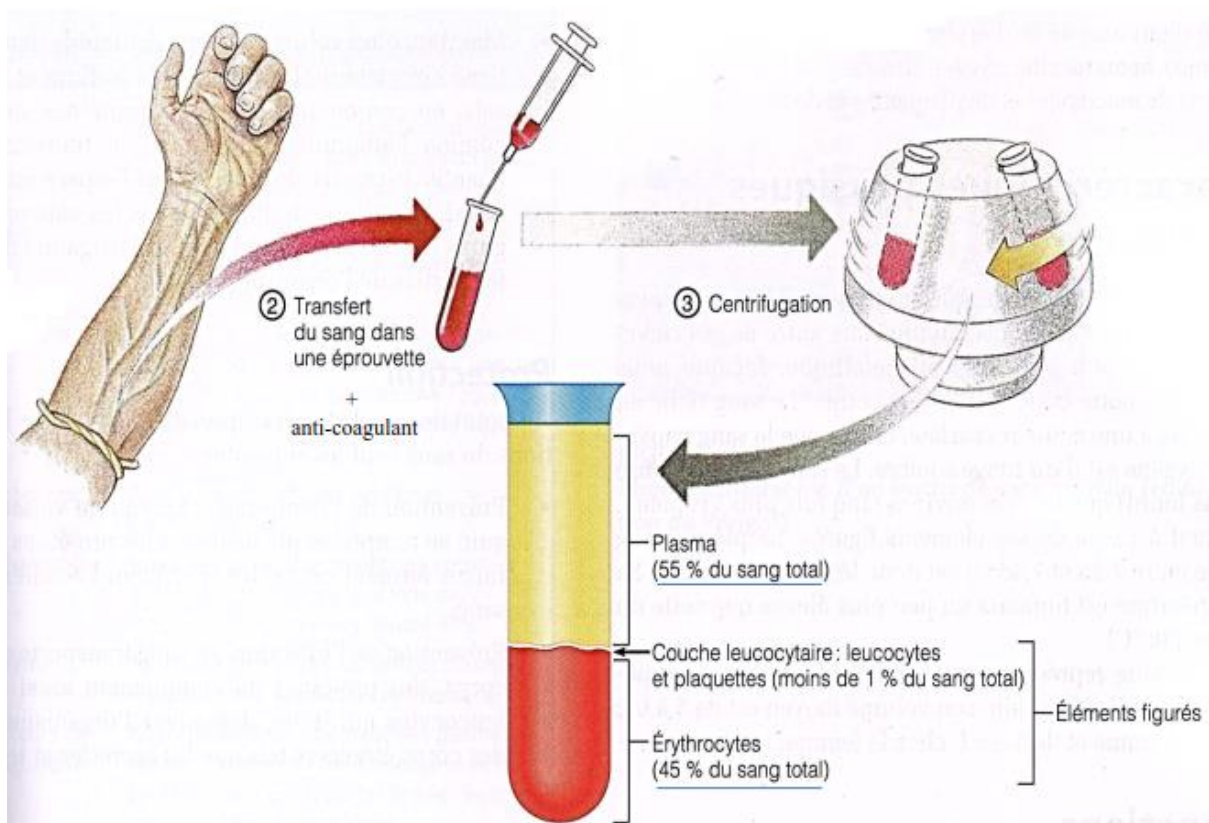


Figure II.1– Principaux composants du sang [9].

La majeure partie de la masse rougeâtre accumulée au fond de l'éprouvette est composée des globules rouges (Erythrocytes), dont la fonction est de transporter l'oxygène. Une mince couche blanchâtre, se forme à la surface de séparation d'érythrocytes, et du plasma. Cette couche comprend les globules blancs (Leucocytes), qui constituent un des moyens de défense de l'organisme, et les plaquettes, des fragments de cellules qui interviennent dans la coagulation.

Le volume d'un échantillon de sang est composé d'environ 45 % d'érythrocytes, appelé hématoците, de moins de 1% de leucocytes et de plaquettes et de 55% de plasma [8].

II.2.1 Les Globules rouges (Erythrocytes)

Avec leur diamètre d'environ 7,5 μm , les érythrocytes sont de petites cellules. Ils ont les formes de disques biconcaves Figure II.2.

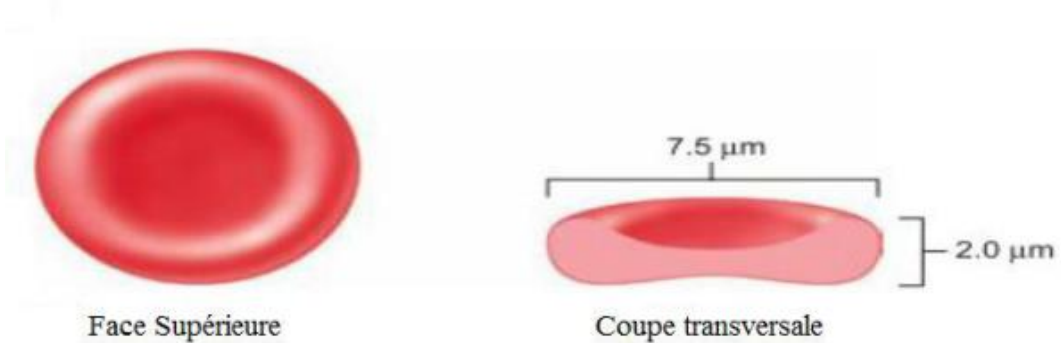
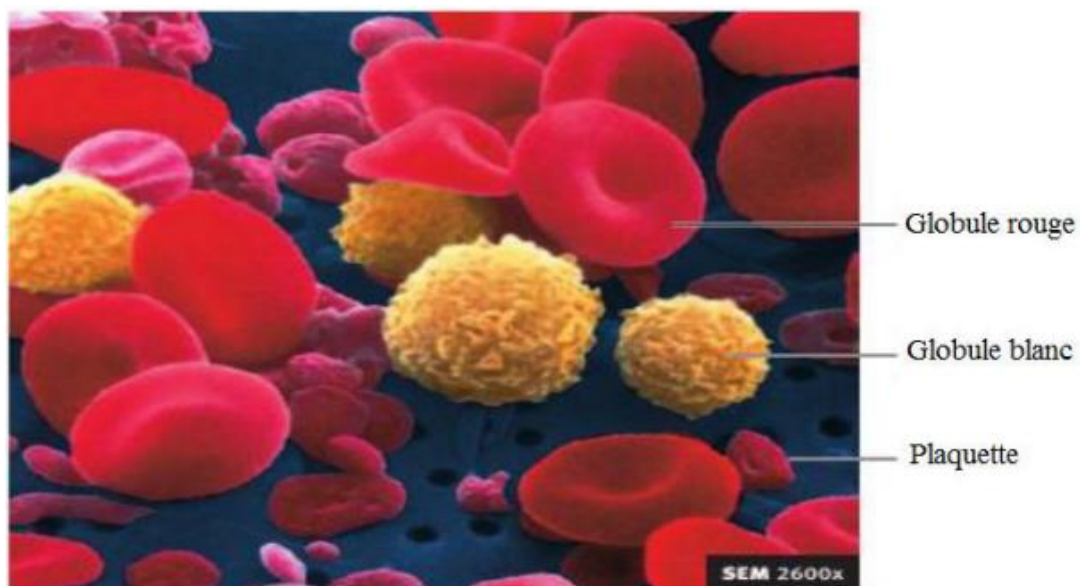


Figure II.2– Structure des Erythrocytes [9].

Les mesures quantitatives des globules rouges présents dans un échantillon de sang peuvent être appréciées par : soit par le nombre des globules rouges, soit par l'hématocrite ou par le taux d'hémoglobine. Les compteurs électroniques modernes effectuent simultanément ces trois mesures, [9].

En effet, concernant le premier type de mesure, le tableau II.1 indique les résultats normaux en millions par mm^3 , [10] :

homme	4.5 à 6.2
Femme et enfant jusqu'à la puberté	4 à 5.4
Enfant (1 an)	3.6 à 5
Nouveau- né	5 à 6

Tableau II.1 – Nombre de globules rouges en millions par mm^3 [10].

L'hématocrite est défini comme étant le rapport du volume occupé par les globules rouges au volume occupé par le sang dans un échantillon sanguin.

La centrifugation d'un petit volume de sang dans un tube gradué permet la lecture directe des volumes relatifs du plasma et des globules rouges (les autres cellules forment une mince couche négligeable à la surface des globules rouges). La mesure se fait dans des micro tubes centrifugés à haute vitesse. Le tableau II.2 indique l'hématocrite normal en (%) :

homme	40 à 54
Femme et enfant jusqu'à la puberté	35 à 47
Enfant (1 an)	36 à 44
Nouveau- né	44 à 62

Tableau II.2 – Taux d'hématocrite en % [10].

Enfin, concernant le troisième type de mesure, on dose l'hémoglobine dans un échantillon de sang par la méthode de la cyanméthoglobine, dans laquelle l'hémoglobine et tous ses dérivés sont transformés par un réactif à base d'acide cyanhydrique en cyanméthé laquelle est dosé sur un spectrophotomètre. Le tableau II.3 montre la masse d'hémoglobine normale pour 100 ml de sang [10].

homme	13 à 18g
Femme	12 à 16g
Enfant > 2 ans	12 à 16g
Nouveau- né	14 à 20g

Tableau II.3 – Masse d'hémoglobine normale pour 100ml de sang [10].

II.2.2 Les Globules Blancs (Leucocytes)

Les leucocytes sont les seuls éléments figurés du sang à posséder un noyau et les organites habituels. Les leucocytes sont beaucoup moins nombreux que les globules rouges. En moyenne, ils sont au nombre de 4 à 11 x 10⁹ par litre de sang et représentent moins de 1% du volume sanguin, leur forme est indiquée sur la Figure II.3, [9].

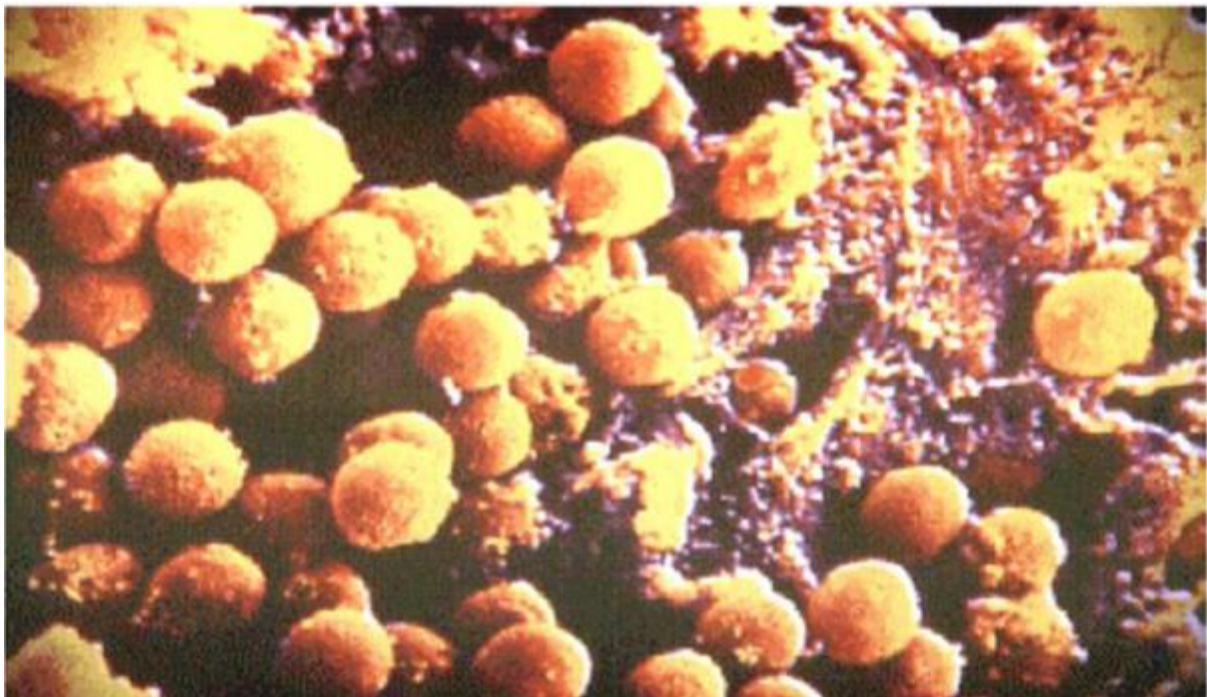


Figure II.3– Forme des Leucocytes, [9].

Les leucocytes jouent un rôle crucial quand nous combattons une maladie. On peut les comparer à une armée sur le pied de guerre ; en effet, ils protègent l'organisme contre les bactéries, les virus, les parasites, les toxines et les cellules tumorales [9].

II.2.3 Les Plaquettes Sanguines (Thrombocytes)

Les plaquettes ne sont pas des cellules à proprement parler. Ce sont des fragments cytoplasmiques de cellules extraordinairement grosses (mesurant jusqu'à 60 μm de diamètre) appelées mégacaryocytes. Elles sont appelées thrombocytes, car elles jouent un rôle essentiel dans la coagulation qui prend place dans le plasma à la suite d'une lésion vasculaire [9].

II.2.4 Plasma

Le plasma sanguin est un liquide visqueux de couleur jaunâtre. Composé à 90% d'eau, le plasma contient plus de 100 solutés, dont des nutriments, des gaz, des hormones, divers produits et déchets de l'activité cellulaire, des ions et des protéines [9].

II.3 Densité du Sang

D'après Chmiel et Walitza (1980), la masse volumique du sang est prise égale à 1056 kg/m^3 [9].

II.4 Rhéologie du sang (comportement non-Newtonien)

Le comportement rhéologique du sang présente, sous certaines conditions d'écoulement, un aspect non-Newtonien. Il se manifeste par l'existence de deux plateaux newtoniens, l'un à faible vitesse de cisaillement et l'autre à forte vitesse de cisaillement et un comportement rhéofluidifiant entre ces deux plateaux, [10].

Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire correctement ce comportement. En effet, ce comportement est donné par la loi représentant la contrainte de cisaillement τ en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$, avec τ_c représentant une contrainte seuil en deçà de laquelle l'écoulement n'a pas lieu ($\tau_c = 0 \Rightarrow$ Pas de contrainte seuil).

II.5 Viscosité du Sang

La viscosité sanguine dépend des trois facteurs suivants :

1. L'hématocrite ;
2. La température ;
3. Protéines, fibrinogène, albumines...etc.

La Figure II.4 montre la variation de la viscosité sanguine μ en fonction de la température et de taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$). On constate que la viscosité diminue avec l'augmentation de taux de cisaillement et la température, [10] :

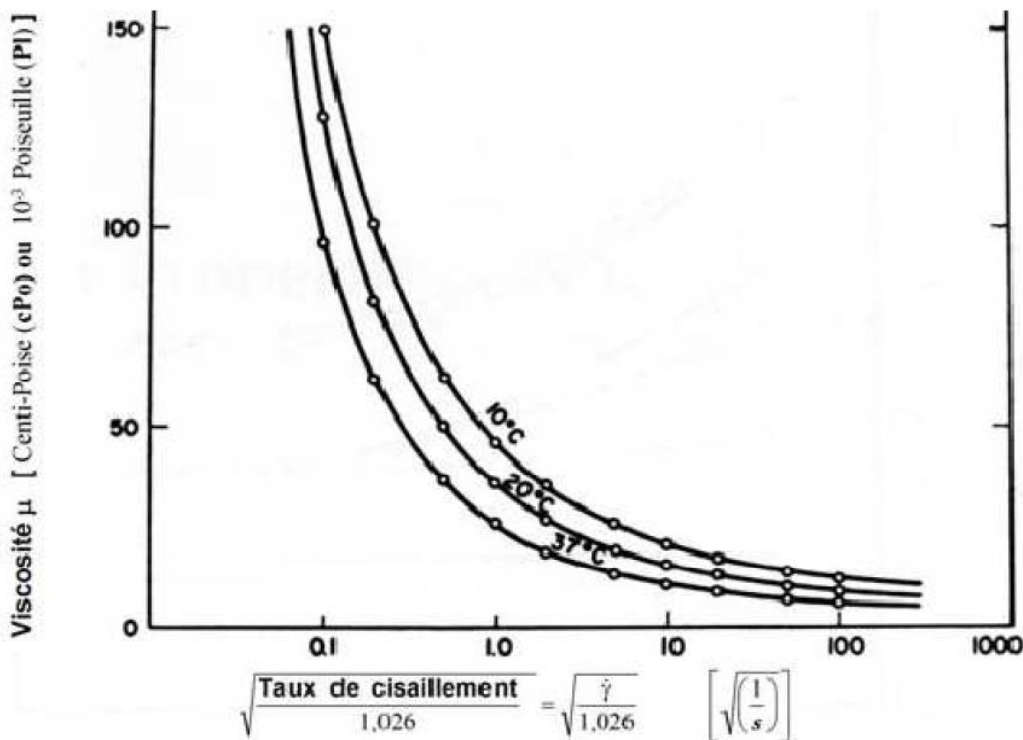


Figure II.4– Variation de la viscosité en fonction de la température et de taux de cisaillement [10].

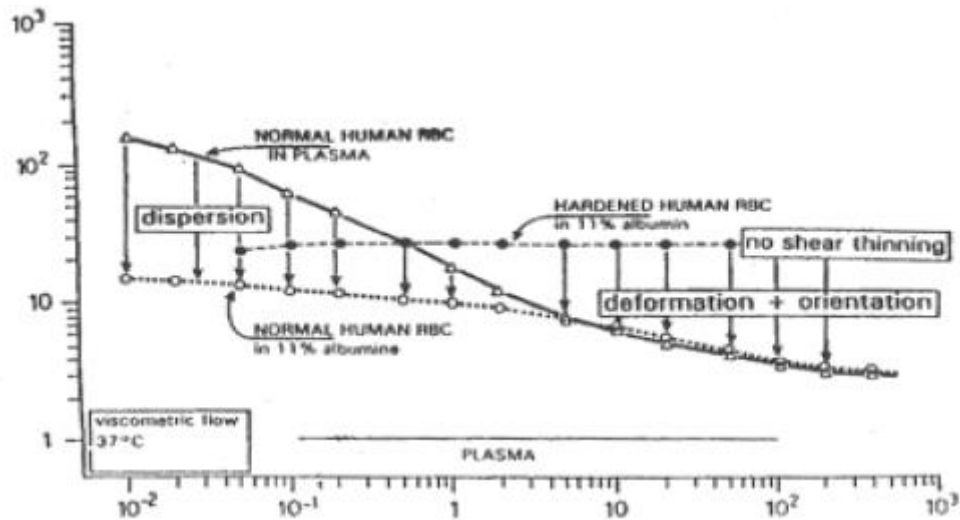


Figure II.5– Variation de la viscosité en fonction du cisaillement [10].

Dans la Figure II.5, les triangles blancs représentent la courbe normale, avec les globules rouges en suspension dans le plasma (Sang normal). La courbe désignée par les ronds blancs représente les globules rouges normaux en suspension dans une solution d'albumine.

On remarque qu'avec de fortes valeurs de γ on ne voit pas de différence avec la courbe normale et pour les faibles valeurs de γ l'accroissement de μ n'est pas très important car il n'y a pas d'agrégation de globules rouges car les protéines plasmatiques nécessaires à cette agrégation sont absentes.

Quant à la courbe désignée par des ronds noirs, on ne prend pas des globules rouges normaux mais des globules rouges durcis par le glutaraldehyde. Ces globules ne sont pas déformables et les empilements sont maintenant impossibles. Ces globules sont dans l'albumine.

Pour des faibles valeurs de γ , il n'y a pas d'augmentation de μ . Pour de forts γ , il n'y a pas de diminution de μ car aux fortes valeurs de γ les globules rouges changent leur forme (c'est une orientation de la circulation). Ce changement est inhibé dans ce cas pour le glutaraldehyde.

Plusieurs chercheurs ont proposé plusieurs modèles rhéologiques pour la description de la viscosité du sang, les modèles suivants sont examinés.

II.5.1 Modèle de Casson (1959)

Le comportement non-Newtonien du sang est décrit par la relation de Casson suivante [9] :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + s\sqrt{\dot{\gamma}} \quad (\text{II. 1})$$

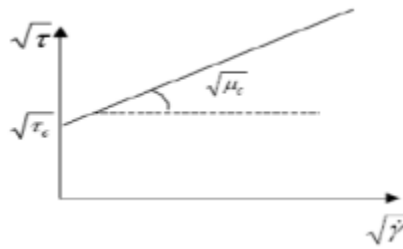


Figure II.6– Fluide de Casson [10].

Où :

τ : Contrainte de cisaillement (Pa) ;

τ_y : Contrainte de rupture (Pa) ;

$\dot{\gamma}$: Taux de déformation (s^{-1}) ;

L'équation de Casson (II.6) peut s'écrire sous la forme [9] :

$$\sqrt{\tau} = k_0 + k_1\sqrt{\dot{\gamma}} \quad (\text{II. 2})$$

Où : k_0 et k_1 sont donnés par :

$$k_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{(1-H)^{a\alpha-1}}} \quad (\text{II. 3})$$

$$k_0 = \frac{\alpha\beta}{(a\alpha-1)} \left[\frac{k_1}{\sqrt{\mu_0}-1} \right] \quad (\text{II. 4})$$

Où :

k_0^2 : Représente la contrainte de rupture ;

μ_0 : Viscosité du plasma ;

H : hématocrite.

a, α , β sont des constantes expérimentales.

II.5.2 Loi de Puissance (Power Law)

Pour la prédiction de la viscosité du sang, Walburn et Schneck (1976) ont présenté le modèle suivant [9] :

$$\sqrt{\tau} = k\dot{\gamma}^n \quad (\text{II. 5})$$

Où :

τ : Contrainte de cisaillement (Pa) ;

k : Constante de Walburn (Pa.sn) ;

n : Constante ;

$\dot{\gamma}$: Taux de déformation.

Alors la viscosité sanguine sera :

$$\tau = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (\text{II. 6})$$

II.5.3 Modèle de Quemada (1976)

Pour l'analyse de la viscosité sanguine, Quemada (1976) a proposé le modèle suivant [9] :

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_p} = \left[1 - \frac{1}{200KH} \right] \quad (\text{II. 7})$$

$$K = \frac{\mu_0 + \mu_0 \mu_0 \sqrt{\dot{\gamma}}}{\left(\frac{\alpha_0 \sqrt{\dot{\gamma}}}{1000} \right) + 10^{-3}} \quad (\text{II. 8})$$

Où :

μ_a : Viscosité apparente du sang ;

μ_r : Viscosité relative du sang ;

μ_p : Viscosité du plasma = $1.26 \cdot 10^{-3}$ Pa.s ;

$\mu_\infty = 1.84 \times 10^{-3}$ Pa.s;

$\mu_0 = 4.6510^{-3}$;

$\alpha_0 = 0.67 \text{ s}^{1/2}$.

Les résultats obtenus par le modèle de Quemada sont en accord avec l'expérience de Merrill (1963).

II.5.4 Modèle de Carreau

Le modèle de Carreau peut être utilisé pour décrire le comportement non-Newtonien du sang, lié à la structure microscopique de ce dernier (agrégation et déformation des globules rouges). La viscosité sanguine selon le modèle de Carreau est donnée par [9] :

$$\frac{\mu_a - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = [1 + (K\dot{\gamma})^a]^{\frac{(n-1)}{a}} \quad (\text{II. 9})$$

Où :

μ_a : Viscosité dynamique apparente du sang [Pa.s] ;

μ_∞ : Viscosité dynamique du sang aux contraintes de cisaillement élevées :

$\mu_\infty = 2.2 \times 10^{-3}$ Pa.s

μ_0 : Viscosité dynamique du sang à zéro contrainte de cisaillement :

K, n, a : constantes

$K = 0.11 \text{ s}$

$a = 0.644$

$n = 0.392$

$$\mu_0 = 22 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$\dot{\gamma}$: Représente le tenseur de déformation.

Dans cette étude, le sang est considéré comme fluide non-Newtonien de viscosité variable approximée par le model de Carreau précédent.

Chapitre III. Formulations mathématiques

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous aborderons la présentation mathématique des équations gouvernant l'écoulement stationnaire isotherme de sang (Newtonien et non-Newtonien visqueux pur), à travers une conduite axisymétrique à rétrécissement. Un tel écoulement est très connu dans le domaine de mise en forme de sang, notamment l'extrusion. Vu la complexité du domaine d'étude nous avons utilisé la méthode des tubes de courant 'MTC', méthode permettant la transformation de la géométrie du domaine physique, généralement complexe, vers une géométrie plus simple, où la solution sera déterminé.

III.2 Méthode des tubes de courant (MTC)

III.2.1 Définitions :(lignes de courant, tubes de courant)

Dans le cas général la représentation graphique des écoulements se fait souvent à l'aide des lignes de courant. Les lignes de courant sont tangentes en tous points au champ de vitesse. Si u , v , w sont les trois composantes de vitesse en coordonnées cartésiennes, l'équation différentielle de toute ligne de courant s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (\text{III. 1})$$

Un tube de courant est la surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée C dont aucun tronçon ne coïncide avec une ligne de courant.

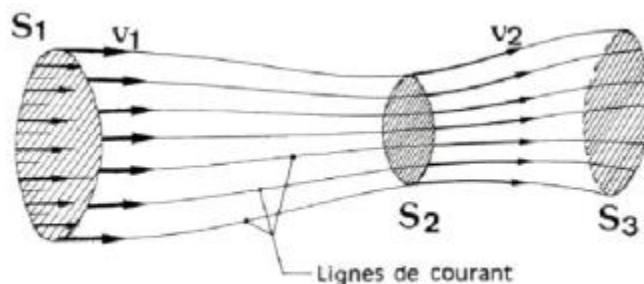


Figure III.1– Schéma d'un tube de courant [11].

III.2.2 Ecoulements bidimensionnels

La méthode des tubes de courant est bien adaptée à la simulation numérique des écoulements de fluides visqueux purs, notamment les fluides décrits par des lois de comportement représentatif de sang ou en solutions. L'hypothèse fondamentale est de poser comme inconnue l'existence d'une fonction de transformation k (pour le cas plan) ou f (pour le cas axisymétrique), qui fait passer le domaine physique Ω à un domaine transformé Ω^* de géométrie simple où les lignes de courant sont rectilignes et parallèles.

III.2.3 Transformation du domaine en MTC

Les fonctions de transformation permettent de transformer le domaine physique Ω , qui représente le domaine réel d'étude, à un domaine plus simple nommé le domaine transformé Ω^* , tel que les images des ligne de courant soient des droites parallèles a une direction moyenne de l'écoulement(direction OZ), avec des variables (x, z) pour le cas plan et (r, z) pour le cas axisymétrique, comme on l'avait dit précédemment que les deux fonctions de transformation utilisés sont k pour (le cas plan) et f pour (le cas axisymétrique) [11]:

$$\begin{cases} x = K(X, Z) \\ z = Z \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 2})$$

$$\begin{cases} r = f(R, Z) \\ z = Z \end{cases} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 3})$$

La forme de la section de ce dernier est semblable a celui du cas plan, et les domaines Ω et Ω^* sont limités respectivement par les sections amont et aval ' z_p, Z_p ' et ' z_2, Z_2 '

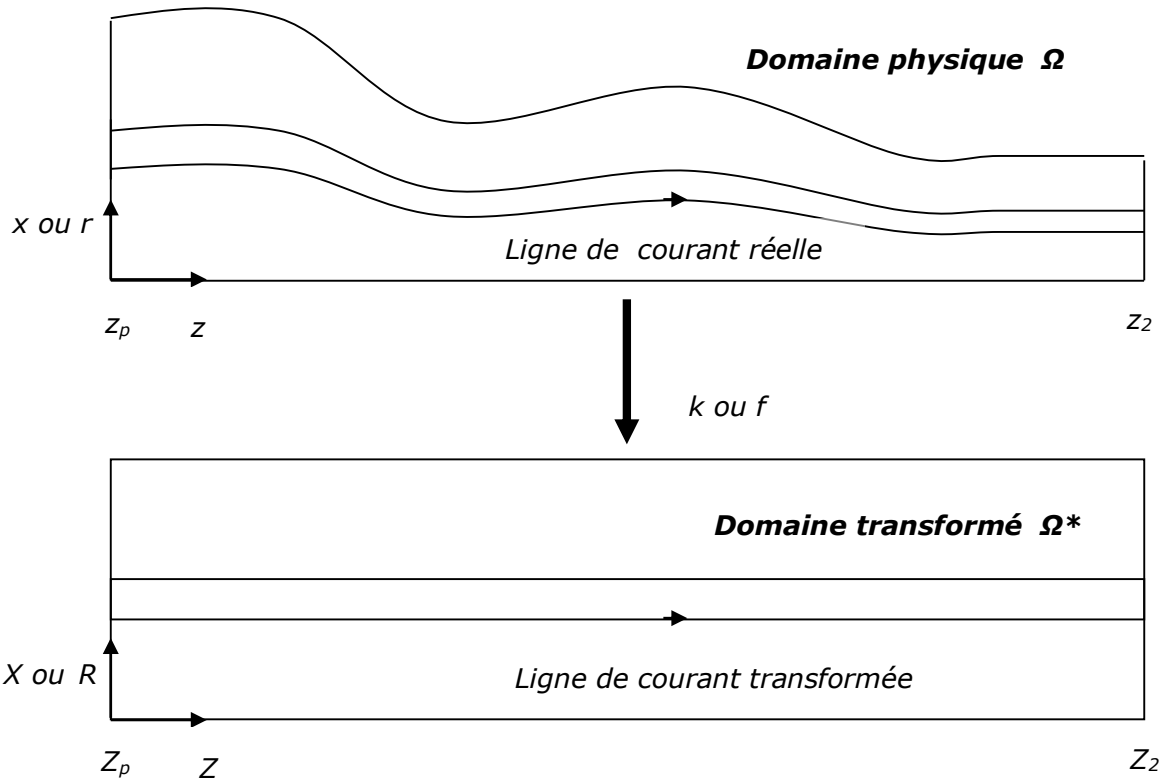


Figure III.2– Transformation dans le Ω^* de lignes de courant du domaine .

Le but de cette méthode est de simplifier l'étude de l'écoulement des fluides qui sont généralement difficiles grâce à la géométrie du domaine réel.

Respectivement dans les cas plan et axisymétrique, les expressions k'_x et f'_R désignent le jacobien Δ de la transformation $T : e \Omega^* \rightarrow \Omega$, donné par :

$$\Delta = \left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(X, Z)} \right| \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 4})$$

$$\Delta = \left| \frac{\partial(r, z)}{\partial(R, Z)} \right| \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 5})$$

Qui doit être non nul partout pour qu'existe la transformation. Les calculs effectués précédemment en MTC ont confirmé, par des comparaisons avec des résultats issus de formulation classiques (prenant un exemple avec les logiciels gambit et fluent) ou d'étude de La littérature que les configurations d'écoulements conduisant à une divergence de l'algorithme de résolution MTC correspondaient justement à l'apparition d'écoulements secondaires, [11].

III.3 Opérateurs cinématiques

Les opérateurs de dérivation s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{K'_x} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{K'_z}{K'_x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Z} \end{array} \right. \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{f'_r} \frac{\partial}{\partial R} \\ \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{f'_z}{f'_r} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial Z} \end{array} \right. \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 7})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} K'_x = \frac{\partial K}{\partial X} \\ K'_z = \frac{\partial K}{\partial Z} \end{array} \right. \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_r = \frac{\partial f}{\partial R} \\ f'_z = \frac{\partial f}{\partial Z} \end{array} \right. \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 9})$$

A partir de l'hypothèse d'une composante de vitesse w_p connue à la section amont z_p (par exemple écoulement de poiseuille), on obtient les relations des composantes de vitesses exprimées en fonction de w_p et de la fonction de transformation respectivement pour les deux cas plans et axisymétriques [12] :

Avec :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{K'_x} w_p \quad \text{avec } K'_x \neq 0 & (\text{III. 10}) \\ U &= K'_x w \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \frac{R}{f f'_R} w_p \quad \text{pour } f \neq 0 \\ W = \frac{1}{(f'_R)^2} w_p \quad \text{pour } f = 0 \\ U = K'_z W \end{array} \right. \quad (\text{III. 11})$$

A partir des relations (III.7) et (III.8), on peut facilement montrer que l'équation de conservation de la masse est vérifiée automatiquement par la formulation.

III.4 Formulation du problème bidimensionnelles par la méthode des tubes de courant

Dans le cas bidimensionnel et dans le repère orthonormé (o, x, z) (cas plan), ou (o, r, z) (cas axisymétrique) on peut simplifier l'étude du problème physique sur la base des hypothèses suivantes :

1. Ecoulement permanent bidimensionnel.
2. Ecoulement isotherme.
3. Fluide incompressible : non-Newtonien.

III.4.1 Lois de conservation

III.4.1.1 Domaine réel Ω

A la sortie d'un rétrécissement les hypothèses précédentes peuvent nous conduire à écrire le système d'équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide non-Newtonien comme suit [13] :

A. Conservation de la masse

Pour un fluide de masse volumique ρ , la conservation de la masse pour un écoulement stationnaire est donnée par :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{III. 12})$$

Avec :

\mathbf{V} : Vecteur de vitesse ;

∇ : L'opérateur divergence.

Aussi pour les fluides incompressibles l'équation se réduit par l'écriture suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{III. 13})$$

Dans le cas plan la projection de l'équation (III.13) dans le repère cartésien donne :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (\text{III. 14})$$

Pour un repère cylindrique, la projection de l'équation (III.12) s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (\text{III. 15})$$

B. Conservation des quantités de mouvement

L'équation de quantité de mouvement peut être écrit par :

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla \cdot \sigma \quad (\text{III. 16})$$

et

$$\sigma = -pI + \tau \quad (\text{III. 17})$$

Avec :

σ : Tenseur de la contrainte totale

ρ : Masse volumique

τ : Tenseur des contraintes

I : La matrice identité

Par projection de (III.12) sur le plan (o, x, z), on obtient :

$$\begin{cases} \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial Z} \\ \rho \left(U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right) = \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial Z} \end{cases} \quad (\text{III. 18})$$

Avec :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix}; I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 19})$$

De même manière, la projection de l'équation (III.12) sur le plan (o, r, z) donne :

$$\rho \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \quad (\text{III. 20})$$

III.4.1.2 Domaine transformé Ω^*

A. Conservation de la masse :

D'après les équations (III.3) et (III.4) on peut confirmer que l'équation de conservation de masse est toujours vérifiée par la Méthode des Tubes de Courant (MTC).

B. Conservation des quantités de mouvement

Dans le domaine transformé la MTC nous permet de mettre les équations des quantités de mouvement comme suit [13] :

a. Cas plan

$$\begin{cases} \rho K'_x W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial X} + K'_x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial Z} - K'_z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} \\ \rho K'_x W \frac{\partial U}{\partial Z} = K'_z \frac{\partial P}{\partial X} - K'_x \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + K'_z \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial Z} - K'_z \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial X} \end{cases} \quad (\text{III. 21})$$

b. Cas axisymétrique

$$\begin{cases} \rho f'_r W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial R} + \frac{f'_r}{f} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + f'_r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial Z} - f'_z \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial R} \\ \rho f'_r W \frac{\partial W}{\partial Z} = f'_z \frac{\partial P}{\partial R} - f'_r \frac{\partial P}{\partial Z} + f'_z \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial R} + \frac{f'_r}{f} \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial R} \end{cases} \quad (\text{III. 22})$$

III.5 Contraintes et déformations dans un fluide

III.5.1 Tenseur des contraintes

Dans un fluide en mouvement il apparait en plus de la contrainte normale (pression hydrostatique) et des contraintes tangentielles, le tenseur des contraintes fait apparaitre d'autres types de contraintes engendrées par les forces de compression et d'élongation. C'est-à-dire non seulement les contraintes tangentielles à l'origine des cisaillements mais également les contraintes à l'origine des compressions et des élongations du fluide, reflétant l'interaction entre les couches du fluide glissant les unes par rapport aux autres [14].

Le tenseur des contraintes peut se décomposer sous la forme :

$$\sigma = \tau - p\delta \quad (\text{III. 23})$$

Où

τ : Tenseur des contraintes visqueux

p : Pression hydrostatique

δ : Le tenseur de Kronecker

III.5.1.1 Tenseur des contraintes visqueux τ

Dans le domaine physique Ω les composantes du tenseur des contraintes visqueuses sont :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial X} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial W}{\partial Z} = -\tau_{xx} \\ \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \right) \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 24})$$

$$\begin{cases} \tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial W}{\partial Z} \\ \tau_{rz} = 2\mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \\ \tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{U}{r} \end{cases} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 25})$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueux dans le domaine transformé deviennent :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \frac{2\mu}{K'_x} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{K'_z}{K'_x} \frac{\partial W}{\partial X} \right) = -\tau_{xx} \\ \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{K'_z}{K'_x} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{K'_x} \frac{\partial W}{\partial X} \right) \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{rr} = 2\mu \frac{1}{f'_R} \frac{\partial U}{\partial R} \\ \tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{f'_z}{f'_R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) \\ \tau_{rz} = 2\mu \left(\frac{1}{f'_R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{f'_z}{f'_R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \\ \tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{U}{R} \end{array} \right. \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 27})$$

III.5.1.2 Tenseur des taux de déformation D

Le tenseur des taux de déformation interprète la variation spatiale du champ de vitesse. Ce tenseur peut s'écrire comme suit, [14] :

$$D = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad (\text{III. 28})$$

Avec :

D : Tenseurs des déformations.

$\nabla \mathbf{V}^T$: Tenseur gradient de vitesse.

μ : Viscosité dynamique du fluide.

Noter bien que :

$$\nabla \mathbf{V}^T = \frac{\partial V_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & 0 & \frac{\partial U}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X} & 0 & \frac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix}, ((i = 1,3), j = 1,3) \text{ Cas plan} \quad (\text{III. 29})$$

$$\nabla \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial U_r}{\partial Z} \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial U_z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 30})$$

Dans le domaine réel les composantes du tenseur des taux des déformations peuvent donner par :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \right) & 0 & \frac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix} \text{ Cas plan} \quad (\text{III. 31})$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \\ 0 & \frac{U}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) & 0 & \frac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix} \text{ Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 32})$$

Les différents éléments de ces matrices doivent être exprimés en termes de la fonction de transformation et de ses dérivées. Tenant compte des relations (III.6) et (III.7), on obtient ainsi les formes analytiques suivantes, qui font intervenir la composante de la vitesse connue à l'amont, ainsi que ses dérivées :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{W'_{px}}{K'_x} - \frac{K''_{xx} W_p}{(K'_x)^2} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{K''_{xz} W_p}{(K'_x)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial X} = K'_z \frac{\partial W}{\partial X} + K''_{xz} W \\ \frac{\partial U}{\partial Z} = K'_z \frac{\partial W}{\partial Z} + K''_{zz} W \end{cases} \text{ Cas plan} \quad (\text{III. 33})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial R} = \frac{R W'_{pR} + W_p}{f f'_R} - \frac{R((f'_R)^2 + f f''_{RR}) W_p}{(f f'_R)^2} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{R(f'_R f'_Z + f''_{RZ}) W_p}{(f f'_R)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial R} = f'_z \frac{\partial W}{\partial R} + f''_{RZ} W \\ \frac{\partial U}{\partial Z} = f'_z \frac{\partial W}{\partial Z} + f''_{zz} W \end{cases} \text{ Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 34})$$

III.6 Conditions aux limites

Pour résoudre le problème de rétrécissement on distingue deux types de conditions aux limites, le premier type c'est les conditions aux limites naturelles (doivent vérifiées par la

solution finale) et le deuxième sont les conditions aux limites Essentielles (considérés comme hypothèses de calcul) [15].

III.6.1 Conditions aux limites essentielles

Pour avoir des bons résultats, plus exacte on doit imposer des conditions tout d'abord au début du problème tel que les conditions aux limites essentielles qui vont nous expliquer la nature physique de notre problème [15].

III.6.1.1 Partie amont

$$\begin{cases} \frac{\partial K(X, 0)}{\partial Z} = 0 \\ w(X, 0) = W_{poiseuille}(X) \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 35})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(R, 0)}{\partial Z} = 0 \\ w(R, 0) = W_{poiseuille}(R) \end{cases} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 36})$$

III.6.1.2 Axe de symétrie

Sur l'axe de symétrie, on a la condition aux limites suivantes :

$$K(0, Z) = 0 \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 37})$$

$$f(0, Z) = 0 \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 38})$$

III.6.1.3 Paroi de la conduite

La présence de la singularité cinématique à la paroi ce traduit mathématiquement par :

$$K_{paroi} = K(X_0, Z) \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 39})$$

$$f_{paroi} = f(R_0, Z) \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 40})$$

III.6.1.4 Partie aval

L'écoulement à l'aval de la conduite axisymétrique est supposé établi, et des conditions aux limites de type Neumann sont imposées, afin d'éviter les possibles oscillations qui viennent du mauvais choix de la longueur de la partie aval de la conduite.

$$\begin{cases} \frac{\partial K(X, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 \\ \frac{\partial W(X, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 41})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(R, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 \\ \frac{\partial W(R, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 42})$$

III.6.2 Conditions aux limites naturelles

Au cours de la résolution du phénomène, l'algorithme de Newton-Raphson cherche la solution optimale qui doit vérifier ces conditions [15].

III.6.2.1 Partie amont

Pour les deux cas plan et axisymétrique on a :

$$\frac{\partial P(0, Z)}{\partial Z} = h \quad (\text{III. 43})$$

Ici, h représente la perte de charge linéaire à l'amont de la conduite axisymétrique.

III.6.2.2 Axe de la symétrie

$$\frac{\partial P(0, Z)}{\partial X} = 0 \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III. 44})$$

$$\frac{\partial P(0, Z)}{\partial R} = 0 \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III. 45})$$

III.6.2.3 Paroi de la conduite

$$\begin{cases} W(X_0, Z) = 0 \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III.46})$$

$$\begin{cases} W(R_0, Z) = 0 \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III.47})$$

III.6.2.4 Partie aval

L'écoulement à l'aval de la conduite axisymétrique est supposé établi, et des conditions aux limites de type Neumann sont imposées, afin d'éviter les possibles oscillations qui viennent du mauvais choix de la longueur de la partie aval de la conduite [15].

$$\frac{\partial \tau_{rz}(X, Z)}{\partial Z} = 0 \quad \text{Cas plan} \quad (\text{III.48})$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}(R, Z)}{\partial Z} = 0 \quad \text{Cas axisymétrique} \quad (\text{III.49})$$

III.7 Modèles Rhéologiques

Le comportement rhéologique des fluides peut être décrit par plusieurs modèles. Ces modèles décrivent les comportements en mouvement des fluides complexes à l'aide des relations mathématiques traduisant la relation entre les deux fonctions \mathbf{D} , $\boldsymbol{\tau}$. Pour les comportements anélastiques (visqueux et visqueux purs) les modèles les plus couramment utilisés sont [16] :

III.7.1 Modèle newtonien

En termes plus simplifiés, le comportement d'un fluide newtonien est caractérisé par une dépendance linéaire entre les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ et ceux du tenseur des taux déformations \mathbf{D} . Le coefficient de proportionnalité étant la viscosité dynamique, celle-ci est par ailleurs indépendante du taux de cisaillement et constante en fonction du temps, L'équation constitutive est [16] :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} \quad (\text{III.50})$$

Avec :

μ : Viscosité dynamique du fluide.

D : Tenseurs des déformations.

III.7.2 Modèle non-Newtonien visqueux pur

Dans la famille des fluides purement visqueux, on rencontre plusieurs types de comportements qui dépend uniquement de la contrainte appliquée (ou le gradient de vitesse), dont les principaux sont : loi de Carreau, loi de puissance etc.... La viscosité μ n'est plus indépendante du tenseur des contraintes et elle peut se varier en fonction des tenseurs des taux de déformation. Le comportement de tel fluide peut s'écrire comme suit :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\mathbf{D})\mathbf{D} \quad (\text{III. 51})$$

Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de déformation, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement rhéologique du fluide. Dans ce qui suit nous présenterons certains modèles empiriques [16].

III.7.2.1 Loi de puissance

Une des lois empiriques simple fréquemment utilisée en rhéologie pour les fluides visqueux incompressibles est alors la loi d'Oswald-DeWaëlle, appelée aussi "loi de puissance" ou loi "pseudo-plastique", qui s'écrit :

$$\mu(\gamma) = K|\gamma|^{(n-1)} \quad (\text{III. 52})$$

Avec :

K : la consistance du fluide Pa.sⁿ

γ : Le taux de déformation généralisé s⁻¹

n : L'indice de la loi de puissance.

Le taux de déformation généralisé γ est donné par :

$$\gamma = [4\mathbf{D}]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 53})$$

Où :

Π_D Représente le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation D exprimé par :

$$\Pi_D = \frac{1}{2} \left[(tr(D))^2 - tr(D^2) \right] \quad (\text{III. 54})$$

III.7.2.2 Loi de carreau

Le model de la loi de puissance s'applique sur une plage limitée de la courbe de viscosité. En réalité à des faibles taux de cisaillement le sang a un comportement newtonien, c'est-à-dire que la viscosité est indépendante du taux de cisaillement. Carreau a développé un modèle qui représente complètement la courbe de viscosité et qui prend en charge ce plateau, son model s'écrit :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu(\infty) + \frac{\mu(0) - \mu(\infty)}{(1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{(1-n)}{2}}} \quad (\text{III. 55})$$

Avec :

$\mu(0)$: Viscosité dynamique a vitesse cisaillement nulle

$\mu(\infty)$: Viscosité dynamique a vitesse de cisaillement infinie

n : Indice de la loi de puissance

λ : Temps constant

Pour des valeurs très élevées de $\dot{\gamma}$, la loi de carreau se réduit en loi de puissance avec :

$$\mu(0) = 0 \text{ et } K = \mu(0)\lambda^{n-1}$$

Pour les fluides incompressibles, on a $tr(D) = 0$, donc (II.54) devient :

$$\Pi_D = -\frac{1}{2} (tr(D^2)) \quad (\text{III. 56})$$

Après les calculs, la valeur du taux de cisaillement généralisée dans Ω et Ω^* respectivement devient :

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right)^2 \right) + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 57})$$

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\left(\frac{1}{f'_x} \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{f'_z}{f'_x} \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right) + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{f'_z}{f'_x} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \left(\frac{1}{f'_x} \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III. 58})$$

III.8 Conclusion

Les méthodes des tubes de courant comportent dans leur formulation un certain nombre de propriétés intéressantes qu'il convient de mettre en évidence :

- La conservation de la masse est automatiquement vérifiée par la formulation ;
- Le maillage est construit dans un domaine simple sur les lignes de courant transformées, ce qui rend facile la définition de schéma de dérivation de type de différence finis ;
- Les conditions géométriques associées au domaine transformé permettant de prendre facilement en compte, pour un écoulement permanent, les lois de comportement héréditaire (modèles intégraux) ;
- Le domaine transformé Ω^* est constitué par des tubes de courant s'appuyant sur les images rectilignes des lignes de courant. Ces tubes de courant peuvent être utilisés pour une résolution numérique qui est possible en considérant un sous-domaine du domaine total.

D'autre part, l'écriture des équations gouvernantes en termes de variables du domaine transformé à l'aide des opérateurs de dérivation implique une augmentation du caractère non linéaire. La formulation fonction de transformation-pression met en évidence une forte sensibilité des équations gouvernantes aux variations de la fonction de transformation. Ainsi, il convient de choisir des opérateurs de dérivation précis pour la discrétisation des équations gouvernantes. De même, la résolution du système d'équations résultant nécessite l'utilisation robuste et efficace.

Il faut souligner qu'avec le mode de discrétisation utilisé ici, la méthode ne nous permet pas la prise en compte explicite des écoulements secondaires de type recirculations.

Finalement, la méthode des tubes de courant a été expliquée avec succès pour de nombreux travaux et a permis l'obtention des résultats numériques dans des situations d'écoulement permanent isotherme.

Chapitre IV. Formulations numériques

IV.1 Introduction

Comme il est précisé précédemment, les lois de conservation écrites en MTC, en particulier les équations des quantités de mouvement, conduisent à résoudre des équations non linéaires (équations (IV.21)-(IV.22)), même pour un fluide à loi de comportement non-Newtonien (relation non linéaire entre contraintes et déformations). La fonction de transformation étant liée directement à la forme des lignes de courant, les procédures de résolutions des équations de la MTC doivent être robustes puisque il faut prendre en compte le fait que de faibles variations des lignes de courant induisent des modifications importantes sur les contraintes, donc sur les équations gouvernantes. La non-linéarité des équations ne permet pas d'utiliser les outils actuellement disponibles de l'Analyse Numérique (consistance, convergence).

IV.2 Formulations primaire et mixte

Les recherches effectuées pour la résolution numérique des équations de la MTC se sont orientées vers des procédures efficaces permettant d'assurer la convergence dans un contexte de résolution itérative. Comme dans les approches classiques, deux formulations peuvent être associés aux problèmes MTC. Ainsi dans le cas bidimensionnel, nous pouvons définir :

1. La formulation primaire, dans laquelle interviennent, avec la pression, la fonction de transformation et ses dérivées, soit (k, p) ou (f, p) dans les cas plan et axisymétrique, respectivement. Cette formulation conduit à un système d'équations différentielles du troisième ordre ;
2. La formulation mixte, dans laquelle les composantes des contraintes sont également prises en inconnues, soit donc $(k, p, \tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$ ou $(f, p, \tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{rz})$ respectivement dans les cas plan et axisymétrique. Dans ces cas, la prise en compte d'une composante de contrainte conduit à écrire une équation supplémentaire. Cette formulation implique un plus grand nombre d'équations à discrétiser, mais réduit d'un degré l'ordre de différentiation [16].

IV.3 Discrétisation des équations et des inconnues

IV.3.1 Consistance et stabilité

Différentes approches ont été proposées dans le contexte de la MTC pour la discrétisation des équations et des inconnues, dans le but d'assurer la consistance et la stabilité de la procédure de résolution. Si, pour les problèmes linéaires, une condition nécessaire à la convergence d'un schéma numérique et sa consistance, il est également intéressant d'étudier les erreurs numériques pour des problèmes non-linéaires comme ceux de la méthode des tubes de courant : si l'on peut tirer de définitives sur la convergence du programme, il est utile d'explorer l'impact de ces approximations successives sur son comportement [16].

La consistance d'un schéma de discrétisation est la propriété suivant laquelle l'application de ce schéma a une solution connue d'un problème continu, la norme d'erreur tend vers zéro quand on raffine le maillage. Autrement dit, si l'on désigne par Δx la taille de la maille correspondante à la discrétisation dans le domaine de résolution des équations, on a la propriété suivante :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|Eq(Sol_{exacte}) - Eq(Sol_{calculée})\| = 0 \quad (IV.1)$$

La vérification de l'équation (IV.1) nécessite la considération d'un problème dont on connaît la solution exacte (analytique ou numérique), en étudiant un cas particulier d'écoulement, comme par exemple l'écoulement de poiseuille. On peut autrement écrire que la consistance du schéma est garantie, pour un problème où interviennent l'espace et le temps, lorsque l'erreur de troncature E_{tronc} tend vers zéro pour des pas de discrétisation d'espace et de temps tendant eux-mêmes vers zéro. Dans un problème aux dérivées partielles, cette erreur de troncature est définie par la relation :

$$E_{tronc} = L_{taylor} - L_{part} \quad (IV.2)$$

Où L_{Taylor} représente l'écriture du schéma discrétisé dont les termes de dérivation remplacés par leur développement en série de Taylor et L_{part} représente l'opération aux dérivées partielles. En pratique la condition de stabilité permet aux erreurs d'arrondi de ne pas simplifier au fur et à mesure de la progression du calcul.

IV.4 Discrétisation en Méthode des Tubes de Courant

Différentes approches d'interpolation ont été définies pour la fonction de transformation, suivant le type de formulation (primaire, mixte) adaptée au problème et à la configuration d'écoulement. Ces discrétisations sont définies dans le cadre de différences finies et de discrétisation du domaine de calcul en éléments, associés ou non à une formulation faible d'un contexte d'éléments finis. Nous résumons ici différentes procédures déjà développées en MTC pour la discrétisation des équations et inconnues, ainsi que l'approche par différences finies que nous avons mises en œuvre dans nos simulations [16].

IV.4.1 Discrétisations par différences finies

Ces discrétisations correspondent à l'approche que nous avons développée dans ce mémoire. Pour résoudre le problème mécanique (lois de conservation et loi de comportement, en conditions isothermes) nous considérons, dans ce travail une discrétisation par différences finies pour les équations et inconnues. Nous adoptons une formulation primaire (f, p) (géométrie axisymétrique), ce qui conduit à évaluer les vitesses à partir de la fonction de transformation, que nous avons calculées dans un programme écrit en MATLAB.

La discrétisation par différences finies est mise en œuvre sur des grilles du type de celles représentées en (Figure IV.1), dans le domaine transformé Ω^* . Les différents tests numériques nous ont amené à retenir un maillage régulier en R , la grille en Z pouvant être raffinée dans certaines zones du domaine transformé, en rapport avec la forme du domaine physique et la prévision de gradient élevé (maillage irrégulier).

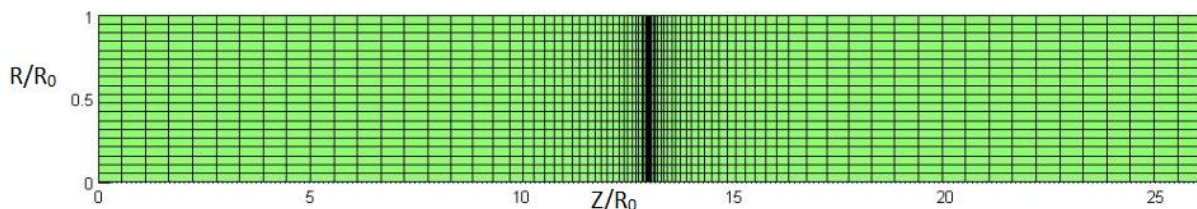


Figure IV.1– Exemple de grille de discrétisation dans le domaine transformé Ω^* .

IV.4.1.1 Dérivées premières suivante la direction R

Les points d'abscisse R étant espacés de ΔR . Pour un point à l'intérieur du domaine, la dérivée première de la fonction f s'écrit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_{R=R(i)} = \frac{1}{2\Delta R} [-f_{i-1} + f_{i+1}] \quad (\text{IV. 3})$$

Pour les points de l'axe et de la paroi, nous avons utilisé une formule de Lagrange a trois points :

A. Pour les points de l'axe

$$\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_{R=R(0)} = \frac{1}{2\Delta R} [-3f_0 + 4f_1 - f_2] \quad (\text{IV. 4})$$

B. Pour les points de la paroi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)_{R=R(i)} = \frac{1}{2\Delta R} [f_{n-2} - 4f_{n-1} + 3f_n] \quad (\text{IV. 5})$$

Il est important de noter que, les équations (IV.3. IV.5) sont aussi utilisées pour le calcul des dérivées, suivant la direction R, du reste des grandeurs intervenant dans les équations gouvernantes (la vitesse, la pression et les contraintes).

IV.4.1.2 Dérivées premières suivant la direction Z

Suivant la direction Z, on a utilisé un maillage irrégulier à cause de la présence des singularités cinématiques et géométriques. Comme nous l'avons signalé précédemment, une faible variation sur la valeur de f peut influencer fortement sur la convergence de la solution. Pour cette raison et après plusieurs tests de convergence, on a choisi pour la dérivée première de toutes les variables intervenant dans les équations à résoudre un schéma d'ordre un, obtenu par la sommation des deux schémas décentrés, amont et aval. Ce schéma est donné par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{z=z(j)} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{dz} f_{i-1} + \frac{dz(j+1) - dz(j)}{dz(j+1)dz(j)} f_i + \frac{1}{dz(j+1)} f_{i+1} \right] \quad (\text{IV. 6})$$

Avec :

$$dz(j+1) = dZ(j+1) - dZ(j) \quad (\text{IV. 7})$$

$$dz(j) = dZ(j) - dZ(j-1) \quad (\text{IV. 8})$$

Il faut souligner que, pour les points en amont et en aval du domaine d'étude on a utilisé la formule de Lagrange à trois points (schéma de dérivation d'ordre 2 : (IV.4), (IV.5), pour éviter les oscillations engendrées par les conditions aux limites imposées.

Dans nos simulations, l'utilisation du schéma d'ordre un (IV.3), n'a pas produit d'oscillations sur les inconnues calculées.

Il faut d'ailleurs préciser que, dans le cadre des différences finies utilisées dans ce travail, les quantités, $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial Z}$ concernant la dérivation des composantes de vitesse u et w sont calculées par différences finies à partir de leurs valeurs ponctuelles estimées et non pas avec les dérivées partielles secondes de la fonction de transformation.

IV.5 Algorithme et résolution du problème Mécanique

Cet algorithme a été utilisé pour la résolution du problème d'écoulement isotherme de fluides anélastiques dans différentes géométries (conduite avec : convergent et gonflement a la paroi).le traitement de chaque géométrie le changement des conditions aux limites. A cause du système d'équations algébrique non-linéaire des équations des quantités de mouvement obtenu par l'utilisation de la MTC, la solution de l'ensemble des équations discrètes, a été obtenue par une méthode itérative de Newton-Raphson. Les étapes de notre algorithme sont les suivantes :

1. lecture des données physiques et géométriques.
2. Construction du maillage.
3. Calcul de l'écoulement a l'amont (détermination des conditions aux limites à l'amont (écoulement de poiseuille)).
4. Initialisation de la pression et de fonction de transformation dans le reste du domaine.
5. Calcul des approximations et des dérivées des variables intervenant dans les équations à résoudre.
6. Procédure d'optimisation (résolution du système d'équations discrètes par l'algorithme itérative de Newton-Raphson).
7. Teste de convergence : la convergence de notre algorithme a été jugée par la norme des équations de la dynamique et quelques conditions aux limites qui doit être nul aux frontières du domaine d'étude (exemple : la vitesse à la paroi). Le calcul doit être arrêté si la valeur de cette norme est inférieure ou égale à un critère de convergence qui égale, dans notre cas, a $\epsilon = 10^{-10}$ d'après notre expérimentation numérique, au-delà de la

valeur de 10^{-10} , la solution reste inchangée. mathématiquement la norme des équations de la dynamique et des conditions aux limites s'écrit par :

$$\|R\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{R}_1^2} \quad (\text{IV. 9})$$

Dans cette équation :

$$\mathfrak{R} = \rho(V \cdot \nabla)V + \nabla(\rho) - \nabla \cdot \tau \quad (\text{IV. 10})$$

Ou bien

\mathfrak{R} = Condition aux limites

Et

$$\|R\| \leq \varepsilon$$

Si la convergence n'est pas vérifiée, le calcul doit se refaire a partir de l'étape 5 chaque fois la convergence n'est pas lieu, et cela jusqu'à la convergence ou le calcul doit être arrêté.

IV.6 Algorithme de Newton–Raphson

L'algorithme de Newton-Raphson est une méthode itérative conçu pour la résolution des équations au un système d'équations non linéaires de la forme $F(x) = 0$, en se basant sur le développement en série de Taylor de la fonction Soit x_i une valeur approchée de la solution inconnue. Posons : $x_{i+1} = x_i + h$, et cherchons l'accroissement qu'il faut donner a x_i de façon à ce que [17]:

$$F(x_{i+1}) = F(x_i + h) = 0 \quad (\text{IV. 11})$$

Le développement en série de Taylor d'ordre 2 de la fonction précédente s'écrit :

$$F(x_i + h) = F(x_i) + h \frac{\partial F}{\partial x} + O(h^2) = 0 \quad (\text{IV. 12})$$

Ou approximativement :

$$F(x_i) = hF'(x_i) = 0 \quad (\text{IV. 13})$$

De cette dernière équation, on peut tirer la valeur de l'accroissement :

$$h = \frac{-F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (\text{IV.14})$$

De manière générale, la solution de \mathbf{F} à l'itération i devient :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (\text{IV.15})$$

Si l'on veut une interprétation géométrique de la méthode, la valeur x_{i+1} représente l'abscisse du point d'intersection avec l'axe 'ox' de la tangente au graphe $y = F(x)$ en x_i

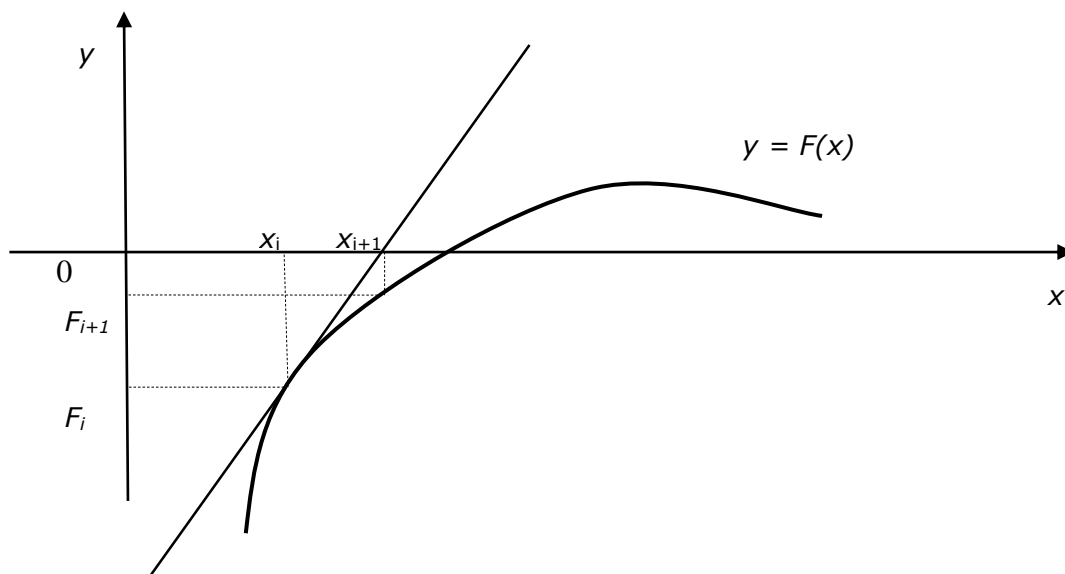


Figure IV.2– Interprétation géométrique de la méthode itérative de Newton-Raphson.

La convergence de l'algorithme vers le minimum global n'est toutefois pas garantie cependant elle est constaté le plus souvent si le choix de la solution initiale x_0 est judicieux. En pratique, on utilise cette méthode pour optimiser une solution approchée, suffisamment proche de la optimale

Par ailleurs la stabilité d'un tel processus ne peut être garantie théoriquement, surtout dans le cas où le nombre d'inconnues est grand. Plus le nombre de paramètre est important, plus cette stabilité n'est difficile à obtenir.

Dans notre problème, le vecteur inconnu $\vec{\mathfrak{X}}$ de dimension n est formé des valeurs de la fonction de transformation et de la pression aux différents nœuds du maillage, ou elles ne sont

pas données par une condition aux limites. Les n équations correspondantes sont les deux équations des quantités de mouvement correspondants à chacun des nœuds, ou une seule si l'autre est assurée par une condition aux des équations soient nuls sur tout le domaine.

A chaque itération, l'algorithme de Newton-Raphson nécessite le calcul de la matrice jacobéenne de \mathbf{F} en $\vec{\mathbf{x}}_i$, elle est construite par colonne en calculant numériquement :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{F(\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i) - F(\mathbf{x}_i)}{\Delta \mathbf{x}_i} \quad (\text{IV. 16})$$

La solution initiale utilisée pour le calcul de l'écoulement est telle que les lignes de courant sont équidistantes tout le long de la conduite, et la pression est constante suivant \mathbf{r} et donnée selon \mathbf{z} par le gradient de pression local calculé, en se basant sur le principe de conservation de la masse.

IV.7 Optimisation de la méthode de Newton-Raphson (coefficient de descente)

Pour des écoulements extrême ou la solution initiale est trop éloignée de l'écoulement réel, ou pour un nombre trop important de nœuds de maillage, l'algorithme ne converge pas. Pour essayer d'éviter la divergence du programme ou le blocage de l'algorithme dans des « minima locaux », l'algorithme de Newton-Raphson est optimisé par l'ajout d'un 'coefficient de descente'. Ainsi, une fois la 'la direction de descente' déterminée par l'algorithme, on améliore la convergence et évite les blocages dus aux minima locaux en cherchant un minimum sur la droite donnée par cette direction au lieu de prendre la distance donnée par les résidus précédents.

Dans le cadre de notre travail, la recherche d'un minimum sur la droite de descente se fait regardant la valeur des résidus en un nombre fini de points successifs. Cette recherche pourrait être facilement améliorée en utilisant d'autre technique d'optimisation [17].

IV.8 Conclusion

Ce chapitre présente une synthèse des méthodes de discrétisations des équations de quantité de mouvement associé à la méthode des tubes de courant, pour la résolution du

problème mécanique. Notre stratégie de résolution est basée sur la discrétisation par différence finis, associée à la géométrie du domaine d'étude. Ce dernier formé par des lignes de courant qui sont des droites parallèles à la direction moyenne de l'écoulement. Le système d'équations discrètes ainsi obtenu, a été résolu par la méthode itérative de Newton-Raphson avec une procédure d'optimisation (la recherche de direction de descente).

Nous présentons dans le chapitre suivant des résultats relatifs aux problèmes d'écoulements isothermes de fluide visqueux et visqueux purs, dans une conduite axisymétrique à rétrécissement qui dans le cas axisymétrique peut correspondre à une artère sténosée.

Chapitre V. Résultats et discussions

V.1 Introduction

Ce chapitre a pour but la présentation et la discussion des résultats obtenus par les simulations numériques effectués dans ce travail.

Les écoulements dans des conduites à section de striction se rencontrent très souvent dans les problèmes liés à des artères sténosées, qui sont étudiés dans des situations stationnaires et instationnaires, en situation axisymétrique. Ces conduites à striction présentent des différences par rapport aux situations de convergents, pour lesquelles les coins saillant et rentrant peuvent constituer des singularités sur les caractéristiques d'écoulement. Dans le domaine de la biomécanique, plusieurs études ont été proposées pour l'écoulement sanguin dans des artères sténosées, en situations d'écoulement stationnaire et instationnaire, avec des méthodes d'éléments finis ou, très souvent, de différences finies.

Nous considérons dans ce chapitre de tels écoulements en situation stationnaire, avec des lois de comportement non-Newtoniennes, et en particulier un fluide représenté par la loi de carreau, dans un contexte plus général de lois de comportement du sang, dans le cadre de la Méthode des Tubes de Courant. Nous examinons également, sur les caractéristiques d'écoulement, les effets dus à des changements de conditions aux limites à la paroi, supposée ici non déformable.

V.2 Géométrie du domaine d'étude et conditions aux limites

La géométrie de la conduite à rétrécissement, qui dans le cas axisymétrique peut correspondre à une artère sténosée, est représentée sur la Fig. IV.1. La forme de la paroi est décrite par l'équation (IV.1) présentée plus loin. L'ensemble de la conduite peut être décomposé en trois zones désignées respectivement par L_{am} , L_{sing} et L_{av} correspondantes à des valeurs valant, respectivement, $10R_0$, $6R_0$ et $10R_0$, en conditions isothermes. L'écoulement à l'amont de la zone concernée, pour la situation isotherme, est de type Poiseuille, c'est-à-dire que le champ de vitesse est supposé connu. A l'aval de la conduite, l'écoulement est considéré comme établi cinématiquement : le champ de vitesse reste inchangé le long de la direction z . Le choix de la longueur de la partie L_{am} est tel qu'on évite que

l'écoulement, à la section limite amont, soit perturbé par la présence de la zone de rétrécissement.

V.2.1 Domaine réel Ω

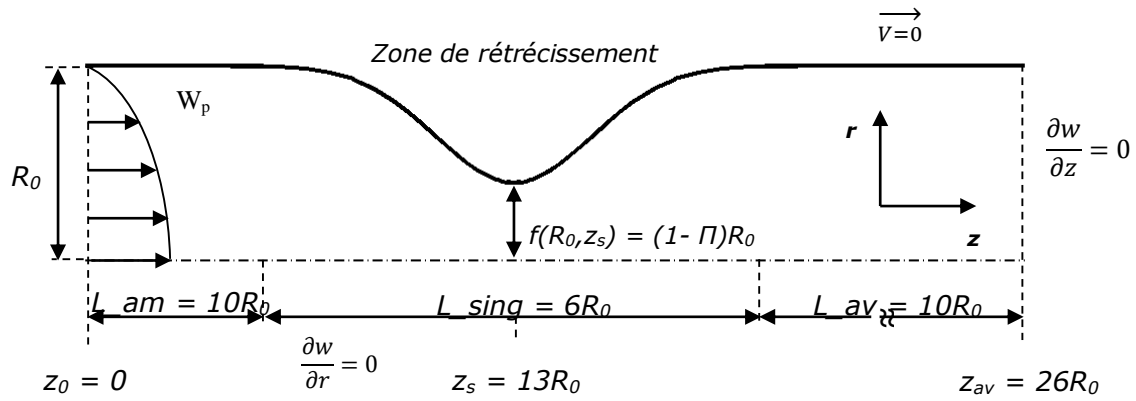


Figure V.1– Géométrie du domaine d'étude retenu pour le calcul des écoulements axisymétriques isothermes.

V.2.2 Domaine transformé Ω^*



Figure V.2– Géométrie du domaine d'étude transformé pour le calcul des écoulements axisymétriques.

Dans ce chapitre vu la grande similitude des résultats obtenus avec ceux du cas axisymétrique, les dimensions en Z de la conduite retenues pour le calcul (plan) sont identiques à celles définies dans le cas axisymétrique, avec une taille de la demi-largeur H_0 égale au rayon R_0 . La géométrie de la paroi de rétrécissement est donnée par la relation :

$$\frac{f(R_0, Z)}{R_0} = 1 + \Pi \exp\left(-\varepsilon \left(\frac{Z - Z_s}{R_0}\right)\right) \quad (\text{V.1})$$

Dans cette équation, Π et ε désignent, respectivement, l'amplitude relative de la modification de la paroi par rapport à la paroi amont et le coefficient de variation de la modification de cette paroi. Ces deux coefficients permettent de définir la forme du rétrécissement.

Nous présentons dans ce qui suit les conditions aux limites utilisées dans le calcul de l'écoulement axisymétrique, dans le cas isotherme à travers la conduite avec rétrécissement schématisée en Figure V.2. Ces conditions, comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre III, sont de deux types : conditions aux limites essentielles qui sont supposées être vérifiées au début de calcul, et conditions aux limites naturelles, qui doivent être vérifiées lorsque l'algorithme de résolution a convergé vers la solution numérique optimale.

V.2.3 Conditions aux limites

A. Partie amont

A la section limite amont, la vitesse d'écoulement est supposée connue (écoulement de Poiseuille). Le profil de température est déterminé en se basant sur la section d'écoulement de Poiseuille. Mathématiquement, les conditions aux limites à l'amont, pour un écoulement non isotherme axisymétrique, peuvent être traduites par :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(R, 0)}{\partial Z} = 0 \\ w(R, 0) = W_{poiseuille}(R) \end{cases} \quad (\text{CLE}) \quad (\text{V.2})$$

Où, la notation (CLE) désigne la condition aux limites essentielle.

B. Axe de symétrie

Les gradients de pression et de température sur l'axe de symétrie sont nuls suivant le rayon, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} f(0, Z) = 0 & (\text{CLE}) \\ \frac{\partial P(0, Z)}{\partial X} = 0 & (\text{CLN}) \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Avec, la notation (CLN) désigne la condition aux limites naturelle.

A. Paroi de la conduite

La condition de non glissement à la paroi est utilisée comme condition naturelle, ce qui conduit à une vitesse nulle à la paroi quand la convergence des calculs vers la solution optimale est obtenue. On écrit :

$$\begin{cases} f(R_0, Z) = f_{paroi} & \text{(CLE)} \\ W(R_0, Z) = 0 & \text{(CLN)} \end{cases} \quad (\text{V. 4})$$

B. Partie aval

L'écoulement à l'aval de la conduite axisymétrique est supposé établi, et des conditions aux limites de type Neumann sont imposées, dans le but d'éviter de possibles oscillations provenant du choix d'une longueur L_{av} insuffisante.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(R, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 & \text{(CLE)} \\ \frac{\partial W(R, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 & \text{(CLE)} \\ \frac{\partial \tau_{rz}(R, Z_{avale})}{\partial Z} = 0 & \text{(CLN)} \end{cases} \quad (\text{V. 5})$$

Pour le cas plan non décrit ici, les conditions aux limites restent les mêmes que pour le cas axisymétrique. Elles doivent être écrites dans la base cartésienne 'XOZ'.

V.3 Maillage et algorithme de résolution

Sur la Figure V.2, nous présentons un exemple de maillage considéré pour le calcul d'un écoulement axisymétrique isotherme, à travers une conduite avec rétrécissement. Le maillage suivant la direction radiale est défini à pas fixe. En revanche, suivant la direction axiale, et à cause de la présence de la singularité correspondant à la zone de striction du domaine, il est défini à pas variable, avec des mailles de petites tailles au voisinage de la position Z_s . Le raffinement du maillage, à cette endroit, à pour but d'éviter l'accumulation des erreurs d'approximation liées aux calculs des gradients des inconnues susceptibles d'augmenter brusquement par la singularité provenant de la zone de striction.

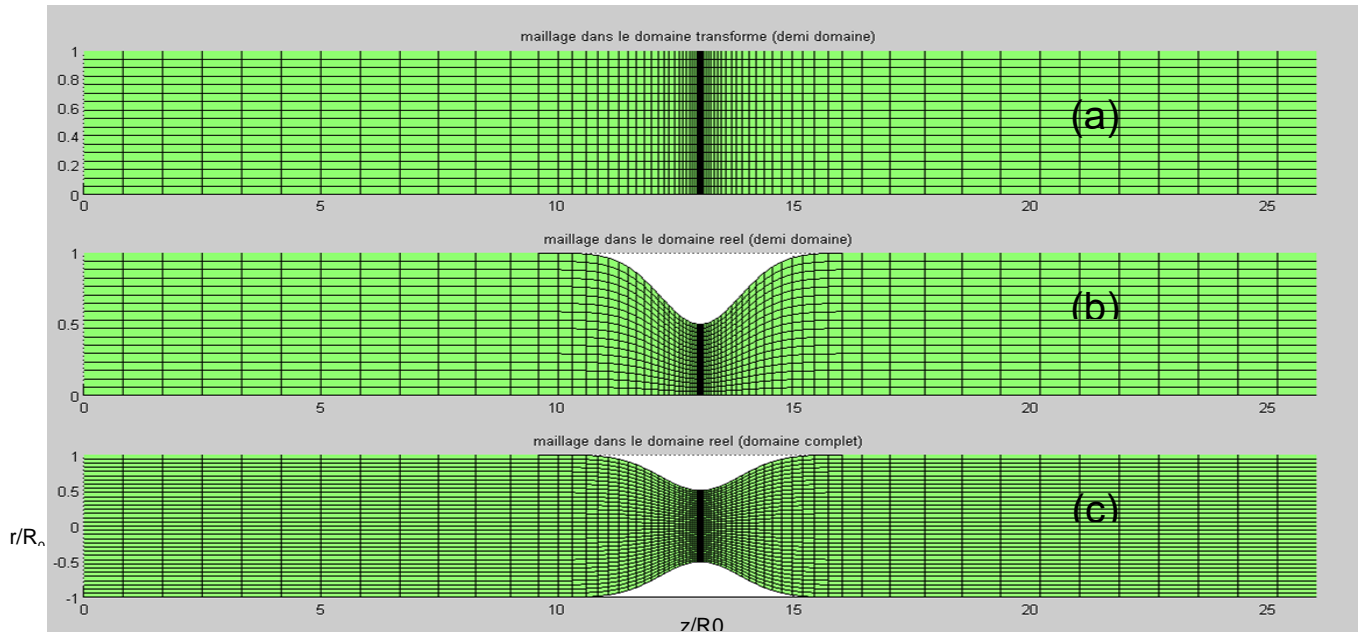


Figure V.3– Vue globale du maillage : a) Demi domaine transformé b) Demi domaine réel, c) domaine réel complet ($R_0 = 0,0025$ m).

Il importe de souligner que le maillage à été construit dans le domaine transformé Ω^* , et se rapporte à une conduite virtuelle axisymétrique de rayon constant R_0 , transformé du domaine réel Ω , qui, comporte la zone de striction.

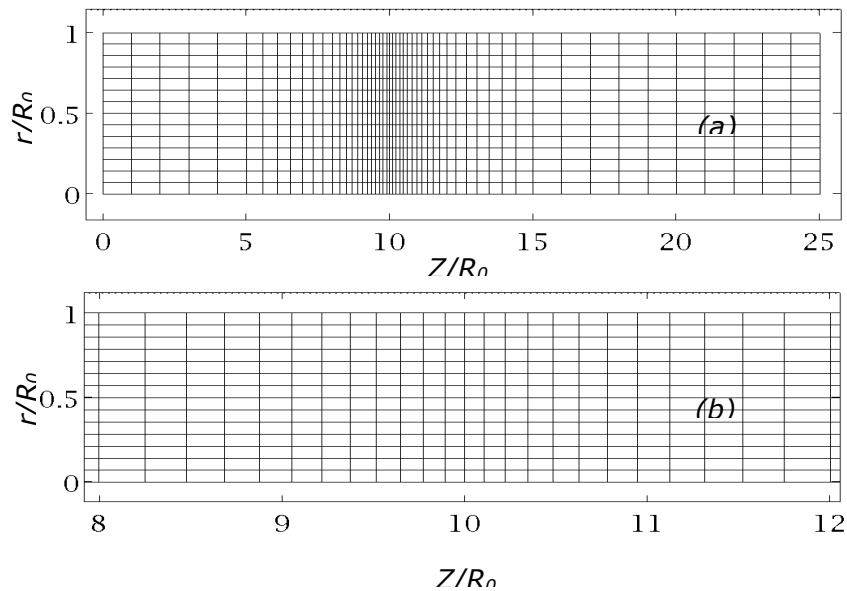


Figure V.4– Exemple de maillage testé pour le calcul d'un écoulement isotherme axisymétrique à travers une conduite avec rétrécissement. (a) Domaine complet, (b) Zoom à l'échelle au niveau de la section de striction ($Z/R_0 = 6$).

V.4 Résultats et discussion

V.4.1 Résultats pour différentes amplitudes relatives Π

Pour un débit d'écoulement fixe $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et plusieurs amplitudes relatives du changement de la taille de la paroi par rapport à sa taille à l'entrée ($\Pi = 0.33, 0.45$ et 0.5), nous présentons dans ce qui suit nos résultats numériques en relation avec le comportement dynamique du sang à travers la conduite schématisée en Figure IV.2. L'objectif de ces résultats est compréhension de l'effet de changement de Π sur le comportement dynamique du sang en écoulement.

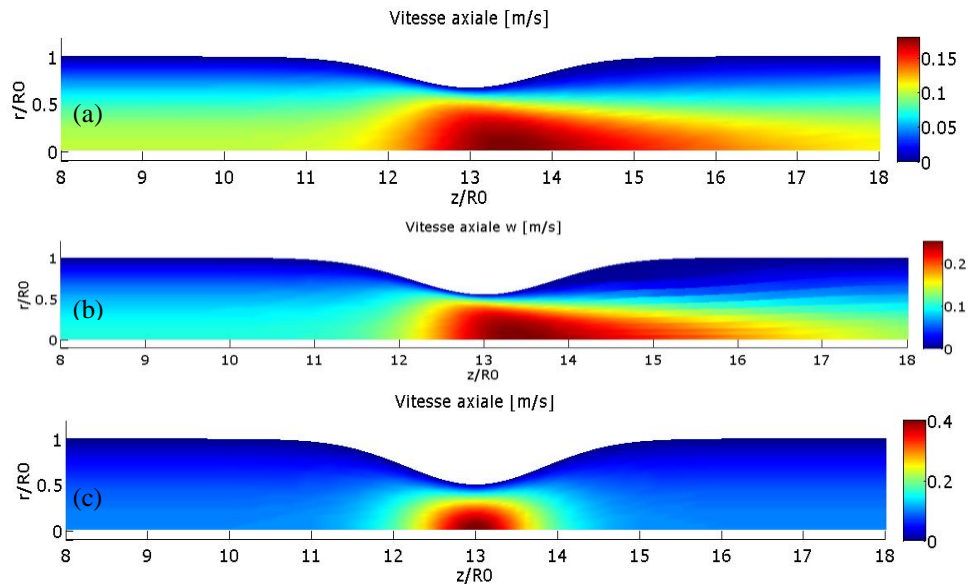


Figure V.5– Isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (c) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).

En Figure V.5, nous montrons pour différentes valeurs de Π les isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse le long de la conduite axisymétrique à rétrécissement (demi domaine). En examinant cette figure, nous remarquons que l'intensité du champ de vitesse est proportionnel à l'amplitude Π . Nous remarquons aussi que les valeurs maximales de la vitesse sont localisées au centre de la conduite dans le col du rétrécissement. Ces remarques sont probablement dues à la diminution de la taille de la conduite à cet endroit.

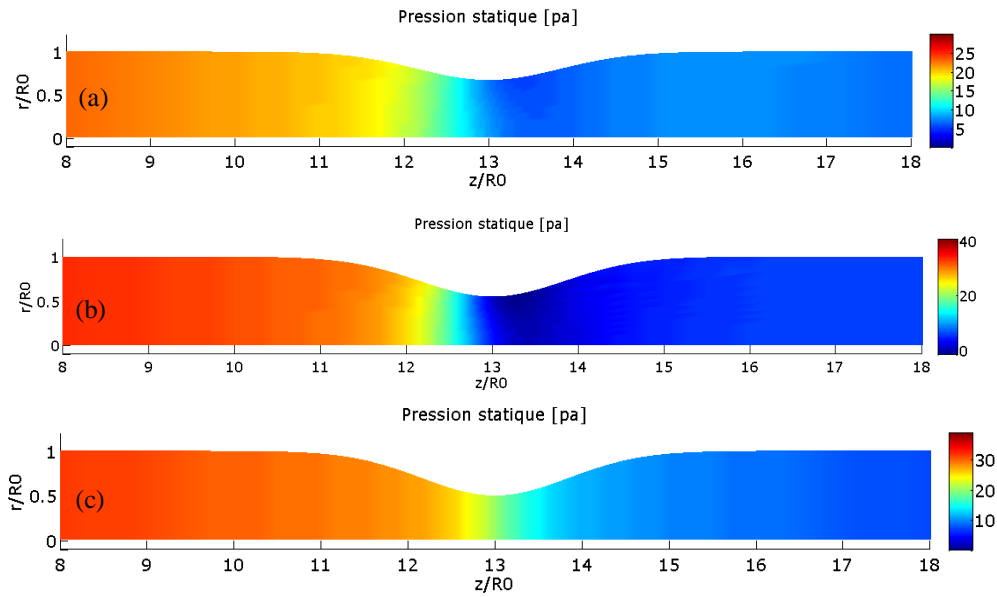


Figure V.6– Isovaleurs de la de la pression effective p pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).

La variation de la pression (les isovaleurs) le long de la conduite sténosée, pour différentes valeurs de Π , est présentée en Figure V.6. L’analyse de cette dernière, nous permettons de constater que la pression varier linéairement le long de la conduite pour toutes les valeurs de Π . Nous remarquons aussi que la présence des pertes de charge singulières, qui due au changement de la section de la conduite, accélère la diminution de la pression à cette endroit (zone de la sténose).

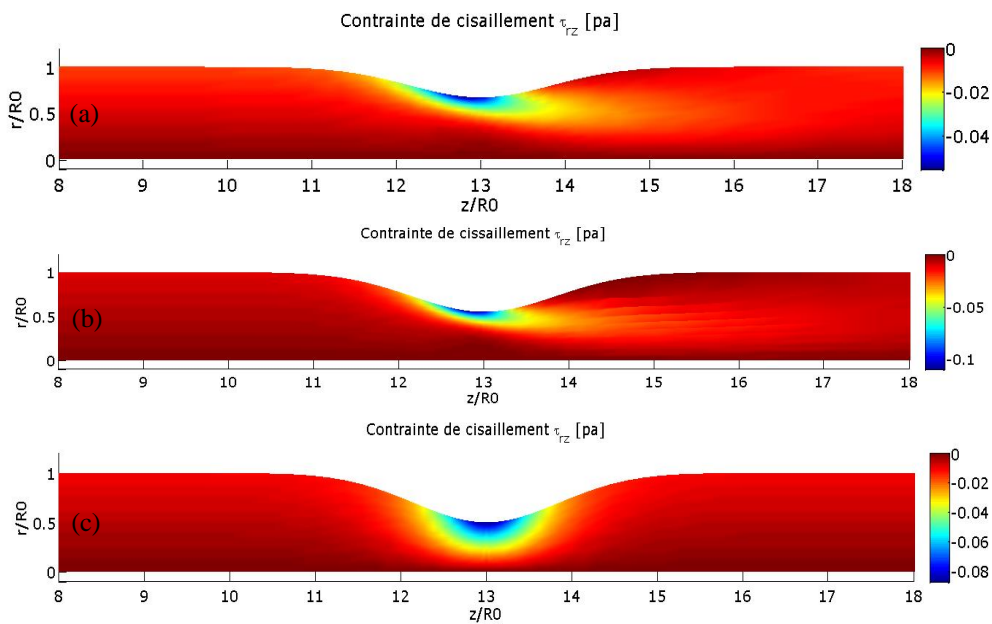


Figure V.7– Isovaleurs de la de contrainte de cisaillement τ_{rz} pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).

L'allure des isovaleurs de la contrainte de cisaillement τ_{rz} au sein de la conduite à rétrécissement, pour plusieurs valeurs de Π , est présente en Figure V.5. L'examen de cette dernière montre que, pour tous les valeurs Π , la valeur de cette contrainte est faible à l'amont et à l'aval du rétrécissement. De plus, au col de la rétrécissement et sur la paroi, la valeur de cette contrainte est maximale, et elle proportionnelle à l'amplitude Π . Ces résultats peut s'interprétés par l'augmentation brusque de la vitesse à cette zone.

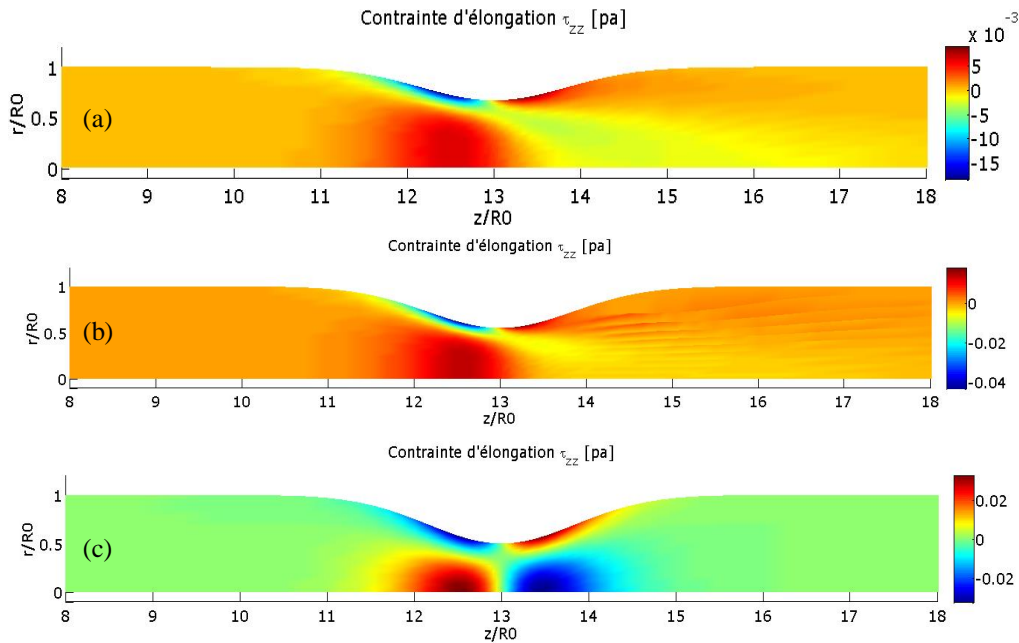


Figure V.8– Isovaleurs de la de contrainte d'élongation τ_{zz} pour différentes valeurs de Π . (a) $\Pi = -0.33$, (b) $\Pi = -0.45$, et (a) $\Pi = -0.5$ ($Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s]).

Les isovaleurs de la contrainte d'élongation τ_{zz} au sein de la conduite cylindrique et pour différentes valeur d'amplitude Π , sont schématisées en Figure V.8. D'après ces figures nous constatons que la contrainte τ_{zz} est inversement proportionnelle à Π .

V.4.2 Résultats pour différentes débits d'écoulements Q

Pour une amplitude relative fixe $\Pi = -0.5$, et plusieurs débits d'écoulements ($Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$, $1.66 \cdot 10^{-2}$ et $2.48 \cdot 10^{-2}$) [kg/s], nous présentons dans ce qui suit nos résultats numériques en relation avec le comportement dynamique du sang à travers la conduite schématisée en Figure IV.2. L'objection de ces résultats est compréhension de l'effet de changement de débit sur le comportement dynamique du sang en écoulement.

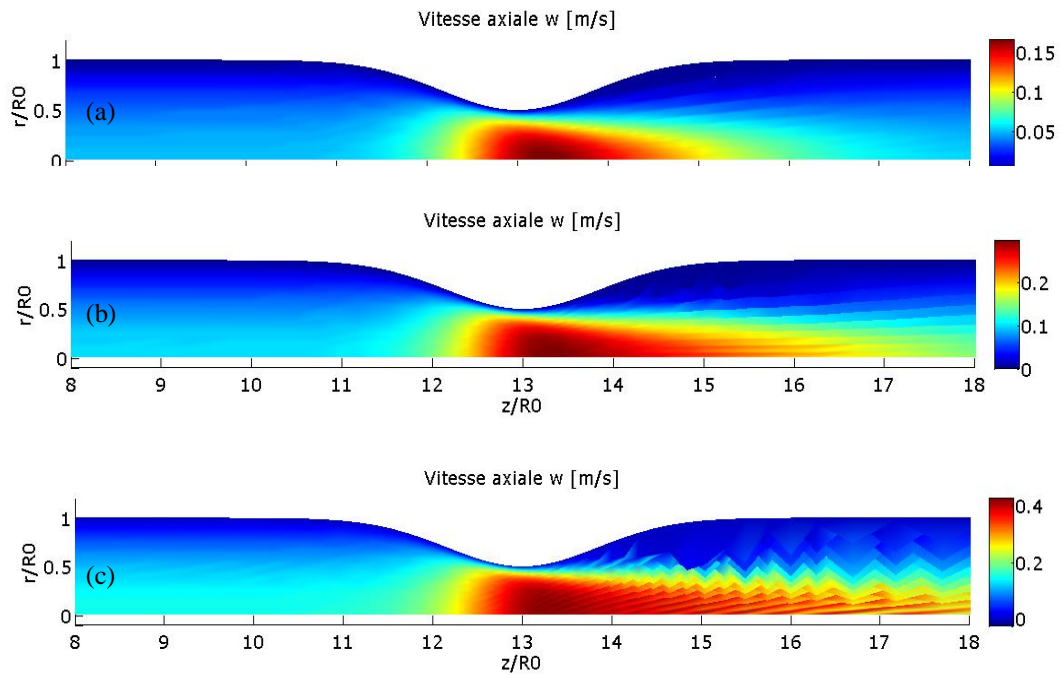


Figure V.9– Isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).

En Figure V.9, nous montrons pour différentes valeurs de débit les isovaleurs de la composante axiale w de la vitesse le long de la conduite axisymétrique à rétrécissement (demi domaine). En examinant cette figure, nous remarquons que l'intensité du champ de vitesse est proportionnel au débit d'écoulement. Nous remarquons aussi que les valeurs maximales de la vitesse sont localisées au centre de la conduite dans le col du rétrécissement. Ces remarques sont probablement dues à l'augmentation du débit.

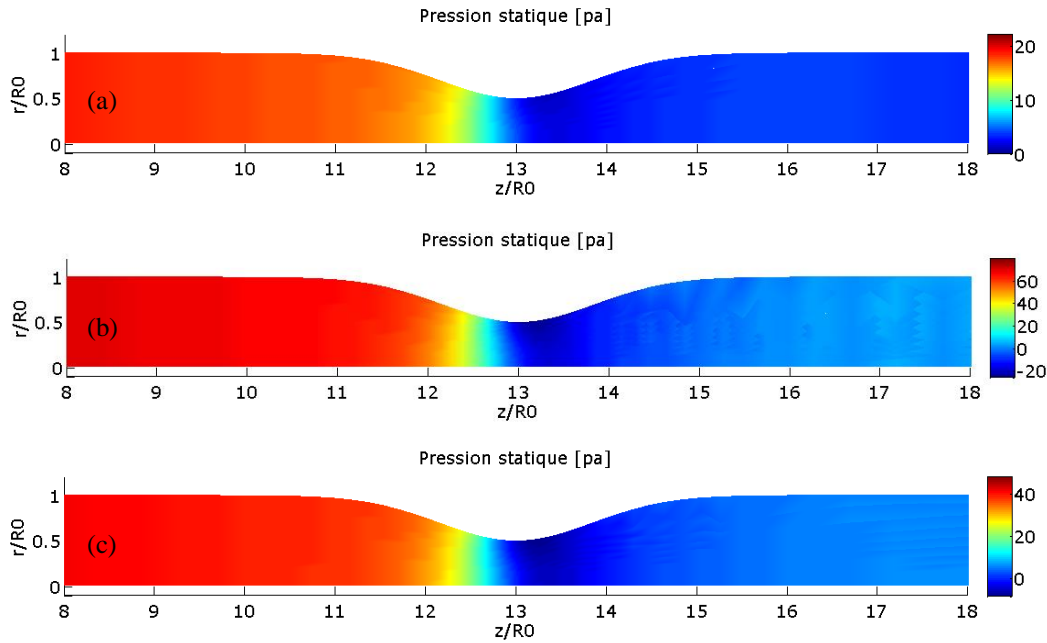


Figure V.10– Isovaleurs de la de la pression effective p pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).

La variation de la pression (les isovaleurs) le long de la conduite sténosée, pour différentes valeurs de débit, est présentée en figure V.10. L'analyse de cette dernière, nous permettons de constater que la pression varier linéairement le long de la conduite pour toutes les valeurs de débit. Nous remarquons aussi que l'absence des pertes de charge singulières, produire une diminution de la pression à cette endroit (zone de la sténose) presque constant pour les différentes valeurs du débit.

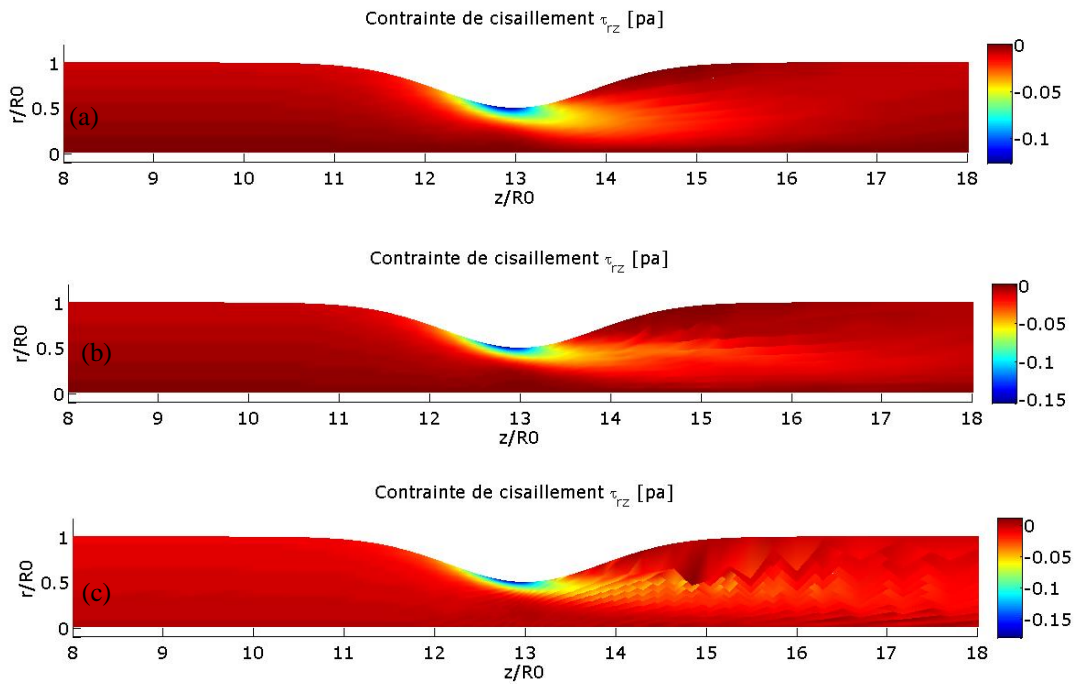


Figure V.11– Isovaleurs de la de la contrainte de cisaillement τ_{rz} pour différentes valeurs de débit. (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).

L'allure des isovaleurs de la contrainte de cisaillement τ_{rz} au sein de la conduite à rétrécissement, pour plusieurs valeurs de débit, est présente en figure V.11. L'examen de cette dernière montre que, pour toutes les valeurs du débit, la valeur de cette contrainte est faible à l'amont et à l'aval du rétrécissement. De plus, au col du rétrécissement et sur la paroi, la valeur de cette contrainte est maximale, et elle proportionnelle a le débit. Ces résultats peut s'interprétés par l'augmentation brusque de la vitesse à cette zone.

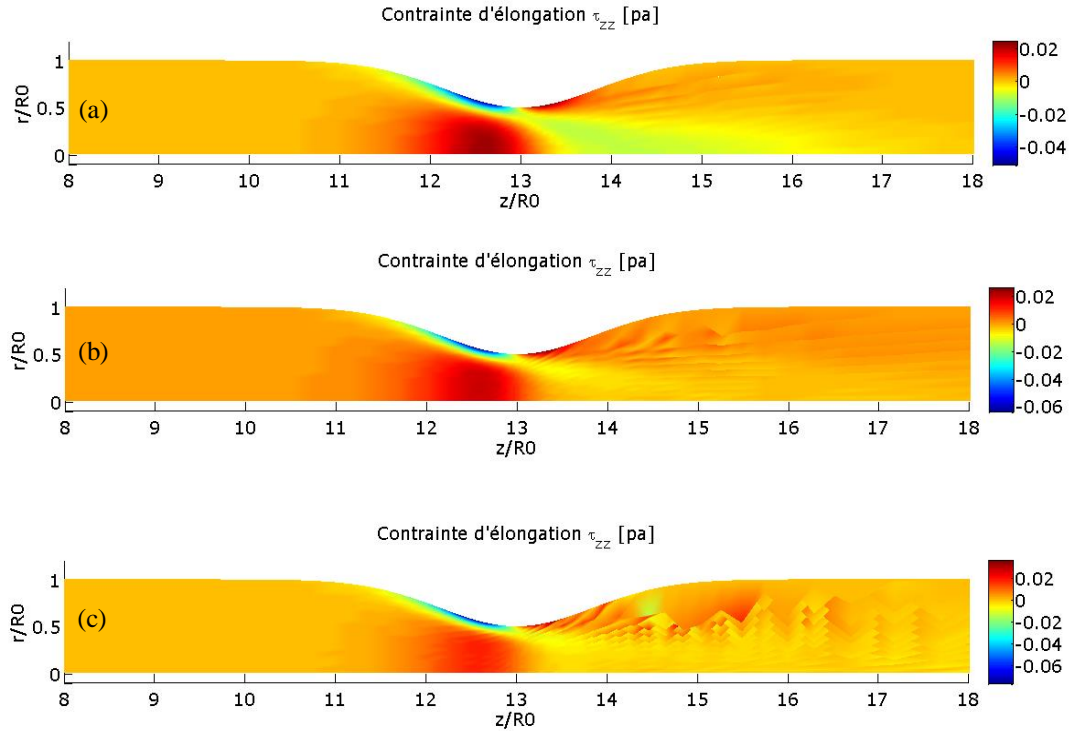


Figure V.12– Isovaleurs de la de contrainte d'élongation τ_{zz} pour différentes valeurs de débit. . (a) $Q = 8.28 \cdot 10^{-3}$ [kg/s], (b) $Q = 1.66 \cdot 10^{-2}$ [kg/s], et (c) $Q = 2.48 \cdot 10^{-2}$ [kg/s] ($\Pi = -0.5$).

Les isovaleurs de la contrainte d'élongation τ_{zz} au sein de la conduite cylindrique et pour différentes valeurs du débit sont schématisées en figure V.12. D'après ces figures nous constatons que la contrainte τ_{zz} est inversement proportionnelle au débit.

V.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats issus des simulations numérique, par la méthode des tubes de courant, d'écoulements de sang à travers des conduites cylindriques axisymétrique à rétrécissement, en relation avec le problème des artères sténosés. L'écoulement est laminaire stationnaire et la paroi de la conduite à géométrie indéformable durant l'écoulement. Selon les résultats obtenus, nous avons constaté que la présence des sténoses dans les veines sanguin, peut influent considérablement le comportement dynamique du sang (régime naturel du cycle sanguin) dans ces dernières.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le premier objectif de ce travail était de mettre en place une simulation numérique d'un écoulement sanguin à travers une artère sténosée (artériosclérose) dans artère coronaire et de caractériser l'évolution de l'écoulement du sang au voisinage d'obstacle (zone de striction).

Concernant le comportement rhéologique du sang, on a admis que le sang a un comportement non-Newtonien et sa viscosité peut être approximée par le modèle de Carreau.

Les hypothèses simplificatrices de l'étude du problème physique sur la base des hypothèses suivantes :

1. Ecoulement permanent bidimensionnel.
2. Ecoulement isotherme.
3. Fluide incompressible : non-Newtonien.

Les résultats des simulations isothermes de ce travail montrent le rôle du profil de rétrécissement et de la section de striction sur les caractéristiques d'écoulements. Leur influence est plus significative sur ces caractéristiques que celle du débit d'écoulement, autrement dit, la géométrie a un effet plus fort dans cette configuration que la cinématique, ceci avec les trois fluides considérés dans notre étude.

En conclusion, nous pouvons confirmer à travers cette étude l'influence directe du comportement non-Newtonien du sang sur la forme de l'écoulement à travers l'artère étudiées et l'effet de la forme géométrique des différents substituts sur la nature de l'écoulement et les performances hémodynamiques ainsi que l'évolution de la contrainte de cisaillement le long des parois solides. D'autre part, nous avons mis en évidence l'influence de la viscosité sanguine sur l'écoulement et la stagnation de la masse sanguine dans les artères sténosées en comparant le cas Newtonien (viscosité constante) avec le cas non-Newtonien (viscosité variable).

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] <http://Santecheznous.com> , les types de maladies cardiaques.
- [2] **P. Dervanian** : Les maladies des artères coronaires, ADETEC, (2014).
- [3] <http://www.universalis.fr/encyclopedie/arteriosclerose>.
- [4] <http://Snaté-médecine.journaldesfemmes.com>, Arythmie cardiaque-cause, symptômes et traitement.
- [5] **M. Lambert** : Maladie de Buerger, SNFMI, (2014).
- [6] Thrombose, www.futura-sciences.com/Sante.
- [7] Anévrisme cérébral, www.sciencesetavenir.fr
- [8] **G.Vaksmann, A. Richard** : Prise en charge d'une coarctation aortique chez l'adulte, revues générales, vasculaire, 2013.
- [9] Mémoire **BELHOUL Mohammed** /Simulation Numérique des Ecoulements Sanguins à Travers des Organes Artificiels.
- [10] Le sang, <http://www.unlin.fr/medecine>.
- [11] **K. Bekkour** : «Introduction à la rhéologie », cours présenté à L'EPASV-2008, univ.d'oran Es-Senia, 05-avril 2008.
- [12] **J.R. CLERMONT**. Analysis of incompressible three-dimensional flow using the concept of stream tubes in relation with a transformation of the physical domain.
- [13] **J.R. CLERMONT, M.E. DE LA LANDE, T.PHAM, DINH, A.YASSINE**. Numerical simulation of axisymmetric converging flows using the stream tube method and a trust region optimization algorithm. Engineering Optimization, vol 19, p.187-208 (1991).
- [14] **J.CLERMONT, D. RADU**. Numerical study flows of complex fluids between acentric cylinders using transformation functions. International Journal for the Numerical Methods in fluids, vol.40, n°5, 669-996 (2002).
- [15] **J.R.CLERMONT, M.NORMANDIN** et **D.RADU**. Some remarks on the concept of stream tubes for numerical simulations of complex fluid flows. Applications. Control and cybernetics, vol.29, n°2, 535-554 (2000).
- [16] **D.GRECOV RADU, M. NORMANDIN** et **J.R.CLERMONT**. A numerical approach for computing flows by local transformations and domain decomposition using an optimization algorithm. Compute. Method in applied Mechanics and Engineering, vol.191, n°39-40, p.4401- 4419 (2002).
- [17] **A.CHINE, A. AMMAR, M.NORMANDIN, J.R.CLERMONT**, «A numerical approach for polymer flow predictions in two-dimensional geometries, involving crystallization processes ». International journal of forming processes. Volume 10- N°4/2007, p.447-470.

Annexes

Annexe A : Algorithme de résolution associé à nos calculs

Dans cette partie nous montrons, sous forme graphique, l'algorithme lié à nos calculs d'écoulements axisymétriques isothermes, du sang, à travers une conduite à rétrécissement. Ces calculs ont été faits par la méthode des tubes de courant.

