



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Mokhtari Ouafa

THEME

Régularisation des intégrales de Feynman

Soutenu le : 19/06/2014

Devant le jury composé de :

S. Youcef

M. A. A Univ. de M'sila

Président

M. Dabebi

M. A. A Univ. de M'sila

Rapporteur

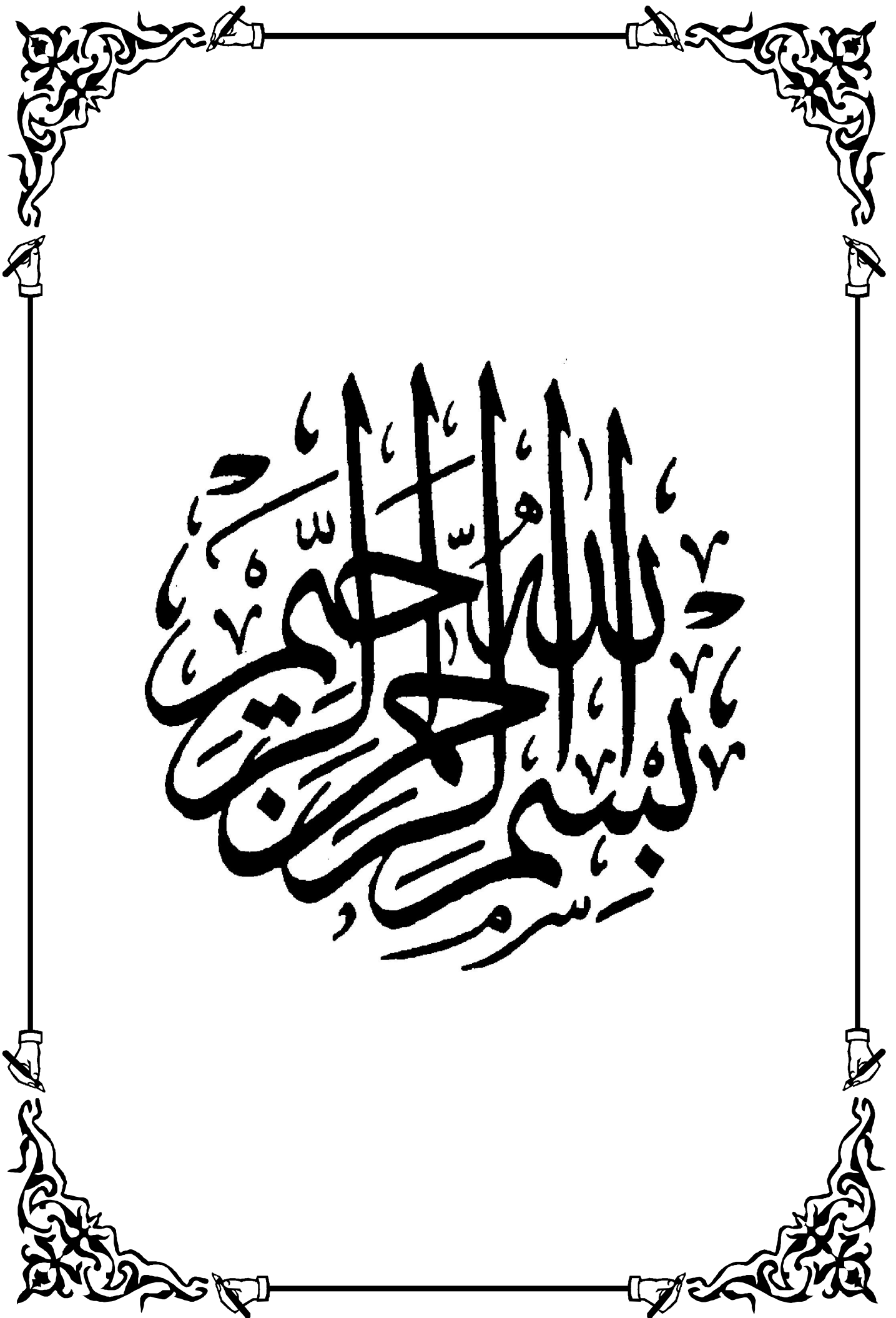
N. Guesmia

M. A. B Univ. de M'sila

Examineur

Promotion Juin 2014

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REMERCIEMENTS

En premier lieu je tiens à remercier notre Dieu le tout-puissant la volonté, la santé et la patience qu'Il m'a accordée tout au long de mes études.

*Je remercie mon encadreur **Mr Debabi Mourad**, qui m'a proposé ce sujet, aussi pour ces conseils pertinents, pour ces suggestions qui ont grandement facilité ce travail et pour son aide dans la rédaction du mémoire.*

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury qui ont bien voulu consacrer de leur temps à lire ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de physique.



Dédicace

*Je dédie ce mémoire à mes chers parents, surtout
Ma mère pour leur amour, leur soutien
et leur encourage tout au
long de mes études.
A ma sœur chérie
Nada et mes chers frères
Mohamed et Samir et ma grand-mère
A tous mes collègues de promotion 2014, A tous
ceux que j'aime.*

OUAFA

Table des matières

Chapitre I : Introduction Générale	1
Introduction Générale	2
Chapitre II : Théorie des champs commutative	8
2-1 Introduction.....	9
2-2 L'action et les formules de lagrangien	10
2-3 La théorie des champs scalaires	11
2-4 Les fonctions de Green	11
2.5 La fonctionnelle $\Gamma[\phi]$	13
2.6 Les règles de Feynman.....	13
2.7 Les diagrammes de Feynman.....	14
2.8 Le problème de la divergence	16
Chapitre III : Les méthodes de la régularisation et renormalisation	17
3-1 Introduction.....	18
3-2 La fonction gamma.....	19
3-2-1 propriétés	19
3-3 La régularisation.....	20
3-4 La régularisation de coupure « cut off ».....	20
3-4-1 Les types de la régularisation coupure	20

a) Coupure violent (Sharp Cutoff)	20
b) Coupure gaussienne	21
3 - 4 -2 Exemples des intégrales de Feynman dans la théorie ϕ^4 à quatre dimensions..	22
c) La fonction Γ à deux points	22
d) La fonction Γ à quatre points	23
3-5 La régularisation de Pauli – Villars	24
3-6 La régularisation analytique.....	24
3-7 La régularisation dimensionnelle.....	25
3-8 Les diagramme de Feynman par la régularisation dimensionnelle	29
3-8-1 Les diagrammes d'une boucle	29
3-8-2 les diagrammes à deux boucles.....	31
3-9 La renormalisation.....	32
3-10 La formalisme de Lagrangien	32
3-11 Le propagateur	33
3-12 Les fonctions de Green	34
3-13 Les règles de Feynman	34
3 -13 Les fonctions du vertex dans la renormalisation.....	35
3-13-1 la fonction à deux point	35
Conclusion	36
Bibliographie.....	37

Chapitre I

Introduction Générale

Introduction générale

1 Introduction générale :

La conception du début de la physique du vingtième siècle s'occupe donc de deux types d'objets. Les champs aux ondes qui définissent les forces dans l'espace et les particules qui décrivent des trajectoires soumises à ces forces. Les relations entre ces deux posent un certain nombre de problèmes. Le but est de donner le mieux possible de comprendre les causes et les lois qui gouvernent les processus naturels.

La physique théorique est la branche de la physique qui étudie l'aspect théorique des lois physiques et en développe le formalisme mathématique qui essaie de décrire le monde en réalisant des modèles de la réalité, utilisés afin de rationaliser, d'expliquer et de prédire des phénomènes physiques [1].

Pendant le dernier siècle, la physique fondamentale a vécu deux révolutions qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique newtonienne décrivant les lois de la nature qui est une théorie générale du mouvement des objets macroscopiques et aussi est un cas limite de la mécanique quantique. La physique classique est complètement incapable d'expliquer le comportement de la matière étant donné ses constituants et les forces entre ces constituants.

La naissance de la physique quantique date d'un siècle et cette description des phénomènes physiques, qui a transformé notre vision du monde, n'est toujours pas remise en cause, ce qui est exceptionnel pour une théorie scientifique. Ses prédictions ont toujours été vérifiées par l'expérience avec une précision impressionnante [2].

La mécanique quantique se constitue en 1925, avec les contributions de De Broglie, Schrödinger, Heisenberg et Born. Encore, Pauli propose son principe d'exclusion et Uhlenbeck et Goudsmit introduisent la notion de spin. Elle peut être définie comme l'ensemble des lois physiques s'appliquant à l'échelle de l'infiniment petit, le père de la mécanique quantique est le physicien Max Planck qui introduit la célèbre constante $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ cette constante est le fondement de la réalité physique [3].

Introduction générale

Parmi les principes les plus importants en mécanique quantique, le principe d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurées en même temps avec une très grande précision. En fait, ce principe est une conséquence immédiate des relations de commutations canoniques entre les variables x_μ, p_μ . Avec $\mu = \overline{1,3}$ qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert ($x_\mu \rightarrow \hat{x}_\mu$ et $p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu$) et forment une algèbre non-commutative $[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\hbar\delta^{\mu\nu}$ [4].

La combinaison entre la mécanique quantique ordinaire et relativité restreinte a induit la mécanique quantique relativiste où les énergies des systèmes sont haut énergie, mais la mécanique quantique non relativiste trouve une large application dans beaucoup de problèmes de physique atomique où les énergies des systèmes ne sont pas trop élevées. Pour les systèmes non stationnaires en interaction, on s'intéresse essentiellement à la détermination de leurs fonctions d'onde qui caractérisent toute l'information sur leurs états quantiques. Dans un système à n degré de liberté, gouverné par un Hamiltonien H , la détermination de la fonction d'onde $\Psi(x; t)$ relève de la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps [5] :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x; t) = H\Psi(x; t) \quad (1.1)$$

Le problème apparaît à la frontière de ces domaines. Une interaction entre systèmes quantiques ne ressemble pas à ce qui se passe lors d'une mesure, où le système de mesure a un effet drastique sur le système mesuré mais un appareil de mesure n'est présument qu'une agrégation de systèmes quantiques [6].

En 1905 Einstein publie la théorie de la relativité, dans laquelle l'invariance de la vitesse de la lumière. La relativité générale est la théorie qui décrit l'infiniment grand (les planètes, les galaxies,.....). Ses fondements ont été établies par Albert Einstein en 1916. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme Formalisme mathématique.

Introduction générale

Malgré cela, les physiciens théoriciens aspirent vers une théorie unifiée, qui pourra traiter les systèmes physiques microscopiques et macroscopiques sur le même pied d'égalité.

Certains d'entre eux pensent que la voie vers l'unification passe forcément par le développement des outils mathématiques utilisés en physique. C'est dans cet état d'esprit que des théories, comme la supersymétrie (SUSY) et les supercordes (Superstrings) ont vu le jour. Celles-ci ajoutent de nouvelles symétries (symétrie boson-fermion) à la nature. Le bilan final de tout ceci est que les physiciens ont échoué (pour le moment) à unifier les quatre interactions de la nature [7].

Le principe de relativité générale qui est à la base de la théorie de relativité générale postule que tous les systèmes de références inertiels et non inertiels sont complètement équivalents vis-à-vis des lois physiques de la nature, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que les équations fondamentales de la physique doivent être covariantes sous le groupe des transformations des coordonnées générales.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) \quad (1.2)$$

La théorie de la relativité restreinte en 1905 et la théorie de la relativité générale en 1915 sonnent définitivement le glas de la vision classique du temps absolu en mécanique. Non seulement il convient désormais de parler d'espace-temps (le temps devient une variable dépendant du choix du repère au même titre que les coordonnées d'espace) mais on abandonne aussi la notion de gravitation en tant que force. La gravitation ne résulte désormais que de la déformation de l'espace, déformation due à la présence de matière.

Introduction générale

Le principe de relativité restreinte postule que tous les systèmes inertiels sont complètement équivalents vis-à-vis des lois physiques de la nature, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que les équations fondamentales de la physique doivent être covariantes sous le groupe des transformations de Lorentz [3]:

$$x^a \rightarrow x'^a = \Lambda^a_b x^b \quad (1.3)$$

La théorie quantique des champs, qui est la mécanique quantique rendue compatible avec la relativité restreinte.

La théorie quantique des champs est une généralisation relativiste et quantique de la mécanique et de l'électromagnétisme classique. De plus la théorie quantique des champs est l'outil le plus puissant que les physiciens aient à leur disposition pour étudier le comportement de toute une classe de systèmes où des degrés de liberté nombre très grand fluctuent et sont fortement couplés, les fluctuations pouvant être de nature quantique ou statistique [8].

La mécanique quantique et plus généralement, la théorie quantique des champs, mettent fin à la notion de particule ponctuelle de la mécanique classique. La dualité onde-corpuscule, la notion de fonction d'onde et de probabilité de présence ont modifié la perception intuitive des phénomènes physiques, l'exemple le plus célèbre étant vraisemblablement le chat de Schrödinger.

À la fin des années quarante une telle théorie de champs quantiques en interaction avait pu être élaborée et appliquée avec un succès surprenant à l'interaction électromagnétique, l'électrodynamique quantique (QED).

Introduction générale

En 1948 en effet, Feynman avait reformulé la mécanique quantique au moyen de l'intégrale de chemins, qui est une intégrale fonctionnelle (c'est-à-dire une intégrale sur une infinité de variables d'intégration) sur tous les chemins que peut emprunter virtuellement une particule quantique. Grâce au principe de superposition des amplitudes de probabilité, Feynman interprétait ainsi la fonction d'onde de la mécanique quantique comme une amplitude de champ évaluée à partir du principe de Huygens. Comme il est relativement facile d'imposer l'invariance relativiste de Lorentz, le formalisme de l'intégrale de chemins est très bien adapté au passage de la mécanique quantique à la théorie quantique des champs [8].

La théorie quantique obtenue en remplaçant les champs classiques par des champs d'opérateur dans le lagrangien, le hamiltonien, équation Euler Lagrange, ...

En théorie quantique des champs il y a symétrie entre les deux signes de la charge, ceci implique l'existence des particules de même masse, spin, ... etc. et de charge opposée : ce sont les antiparticules, l'existence des antiparticules est en fait également nécessaire pour assurer la causalité de la théorie [9.10].

Le titre de mémoire de master en physique théorique option à haut énergie est Régularisation des intégrales de Feynman. J'ai divisé mon travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les étapes essentielles de la physique moderne.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les différentes formules caractérisées de la théorie des champs comme l'action, lagrangienne, la fonction de Green, ..., En suite le problème de la divergence ultra-violet (UV) de la théorie quantique des champs.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié les méthodes de la régularisation qui éliminent le problème de divergence UV comme la régularisation coupure et les différents de type ensuite La méthode de Pauli-Villars, la régularisation analytique, la régularisation dimensionnelle et dernièrement, nous avons étudié une autre méthode appelée la renormalisation.

Introduction générale

On termine cette mémoire par une conclusion générale.

Chapitre II

Théorie des champs

commutative

Théorie des champs commutative

2-1 Introduction

Dans ce chapitre on a étudié les différentes formules de la théorie des champs ordinaire et les problèmes qu'apparu.

La notion du champ a commencé d'être modifiée fondamentalement avec l'introduction par Albert Einstein du concept de photon, le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des symétries [1].

Dans la théorie quantique des champs Chaque particule est d'écrite par un champ, alors que ce dernier est une distribution à valeurs dans les opérateurs sur un espace de Hilbert et aussi est une fonction de l'espace-temps dans la théorie relativiste des champs [2].

La théorie quantique des champs fut élaborée dans le début des années 1970 mais, même maintenant c'est encore un sujet actif de recherches théorique [3]. la théorie des champs classique est une étape vers de cette théorie. Le passage de la théorie classique à la théorie quantique des champs est appelée seconde quantification. On quantifie le champ en remplaçant les variables décrivant le champ par des opérateurs.

La théorie quantique des champs est l'application des concepts de la physique quantique aux champs qui est considérée généralement comme la seule façon correcte de combiner les règles de la mécanique quantique avec celles de la relativité restreinte et aussi c'est la base de la description des interactions des particules élémentaires peuvent être formulées à partir d'un principe d'action qui est une simple généralisation de la situation rencontrée en mécanique classique. La théorie quantique des champs est un outil nécessaire qui étudier le comportement de toute systèmes où des degrés de liberté en nombre très grand.

Les équations dynamiques (les équations d'Euler-Lagrange) qui découlent de l'action comme point de départ du formalisme de la théorie des champs. Le formalisme de la théorie quantique des champs permet avant tout d'extraire de l'action, traitée dans le cadre de la mécanique quantique relativiste [4]

Théorie des champs commutative

2-2 L'action et les formules de lagrangien

L'action dans la théorie c'est l'intégrale de lagrangien sur le temps et fonctionnelle de \mathbf{q} est donner par [5] :

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_2}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.1)$$

Où L est la fonction de Lagrange qui joue un rôle central en théorie quantique des champs.

En mécanique classique, les équations du mouvement d'un système de particules ponctuelles sont obtenues à partir d'une action, on appelle ces équations par les équations d'Euler –Lagrange, elles déterminent son évolution temporelle :

$$\frac{\partial}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \quad (2.2)$$

Pour chaque degré de liberté, il existe une équation d'Euler – Lagrange qui d'écrit l'évolution du système.

Mais, l'action n'est pas covariante, pour ce dernier contient la densité lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ qui produit comme suit :

$$L = \int_D d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.3)$$

Une théorie des champs en quatre dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action.

$$S[\phi] = \int_D d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.4)$$

Alors, dans les équations d'Euler –Lagrange qui obtenir selon le principe de moindre action, on remplace les termes $\frac{\partial}{\partial q_i(t)}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)}$ aussi $\frac{d}{dt}$ par les termes covariante $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$ et ∂_μ respectivement.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \quad (2.5)$$

Théorie des champs commutative

2-3 La théorie des champs scalaires

N'importe quel champ quantique est caractérisé par une densité lagrangien, ce qui est représenté comme somme d'une partie de champ libre \mathcal{L}_0 et d'une interaction \mathcal{L}_I comme suit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (2.6)$$

Et

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m^2}{2} (\Phi)^2 \quad (2.7)$$

Dans cette théorie la densité lagrangienne \mathcal{L}_I est donnée :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} (\Phi)^4 \quad (2.8)$$

Alors, la densité totale est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m^2}{2} (\Phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\Phi)^4 \quad (2.9)$$

m est la masse d'un champ scalaire libre

L'action est donnée par :

$$S[\Phi] = \int_D d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{m^2}{2} (\Phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\Phi)^4 \right] \quad (2.10)$$

2-4 Les fonctions de Green

Les fonctions de Green sont des valeurs moyennes d'opérateurs dans le vide Ces valeurs moyennes sont définies à partir de l'intégrale de chemin [6].

La fonction de Green est :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle \quad (2.11)$$

T est le produit chronologique

$|0\rangle$ est l'état de vide (où état fondamentale).

Théorie des champs commutative

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \Pi_{\vec{x}} D\phi(\vec{x}, t) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \Pi_{\vec{x}} D\phi(\vec{x}, t) e^{iS[\phi]}} \quad (2.12)$$

Toutes les fonctions de Green est nulle pour n impair et les fonctions de Green peuvent s'obtenir comme dérivées fonctionnelles par rapport à la source J

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{i^n Z_0[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \\ &= \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n i w[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où $Z[J]$ et $w[J]$ sont des fonctionnelles génératrices très importantes Pour le champ en interaction.

$$Z[J] = \int (D\phi) e^{[s(\phi) + \int d^4x J(x)\phi(x)]} \quad (2.14)$$

Et avec

$$i w[J] = \log \frac{Z[J]}{Z[0]} \quad (2.15)$$

J est un élément du dual de l'espace linéaire des champs classiques ϕ

Pour le champ scalaire réel la densité lagrangien est :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} (\phi)^2 \quad (2.16)$$

Donc, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green libres donner :

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= Z_0[0] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} \\ \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} &= e^{i W_0[J]} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Telle que

$$W_0[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \quad (2.18)$$

$\Delta_F(x-y)$ est le propagateur du champ scalaire

Théorie des champs commutative

Les fonctions de Green libres est :

$$\begin{aligned}
 G_2^0(x-y) &= i\Delta_F(x-y) \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\epsilon} \\
 &= -\frac{1}{z[0]} \frac{\partial^2 z[J]}{\partial J(x_1) \partial J(x_2)} \Big|_{J=0}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.5 La fonctionnelle $\Gamma[\phi]$

Cette fonctionnelle appelée action effective qui donne par :

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi(x) \tag{2.17}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\phi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} \phi(y) - J(x) \\
 &= \int d^4y \frac{\delta W[y]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - J(x) \\
 \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= -J(x)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Son développement en puissance de ϕ se présent comme suit

$$\Gamma[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) \tag{2.19}$$


Où les coefficients Γ_n sont les valeurs propres

$$\Gamma_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)} \Big|_{\phi=0} \tag{2.20}$$

2.6 Les règles de Feynman

Les règles du Feynman sont un ensemble de prescriptions qui nous permettent d'associer à un diagramme de Feynman, Pour la théorie du champ scalaire libre avec l'interaction dans la théorie ϕ^4 on pose ces règles :

Théorie des champs commutative

- ❖ à chaque vertex on associe une constante de couplage $-i\lambda$
- ❖ pour chaque ligne $x \text{ ————— } y$ du diagramme deux points x et y on associe un propagateur $-iG_i(x - y) = \frac{1}{k^2 - m^2}$
- ❖ Pour une boucle  on associe l'intégrale $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- ❖ Chaque diagramme est finalement divisé par son facteur de symétrie

$$S = \frac{(4!)^P P!}{\text{multiplicite}} \quad \text{Où } P \text{ est le nombre de vertex.}$$

2.7 Les diagrammes de Feynman

Les diagrammes de Feynman sont un outil extraordinairement puissant pour organiser les opérations de la théorie quantique des champs.

La fonction de Green à deux points est :

$$\begin{aligned}
 i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= i(p^2 - m^2) \\
 &+ \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &+ \frac{1}{4}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &+ \frac{1}{6}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \left[\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \left[\frac{i}{(p-k-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Chaque terme de la fonction $i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ représente par un diagramme

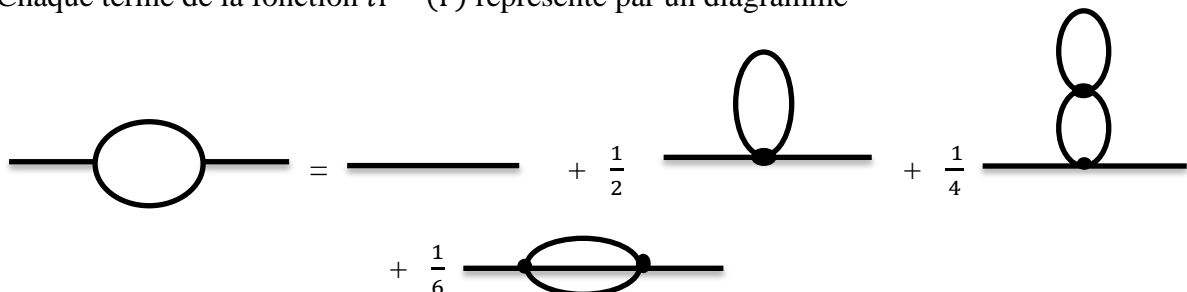


Figure 2.1 : La fonction à deux points

Théorie des champs commutative

On obtient de même façon, La fonction de vertex à quatre points :

$$\begin{aligned}
 i\tilde{\Gamma}^{(4)}(P_1, P_2, P_3, P_4) &= (-i\lambda) \\
 &+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_3 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_4 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Aussi chaque terme de la fonction $i\tilde{\Gamma}^{(4)}(P)$ représente par un diagramme comme suit :

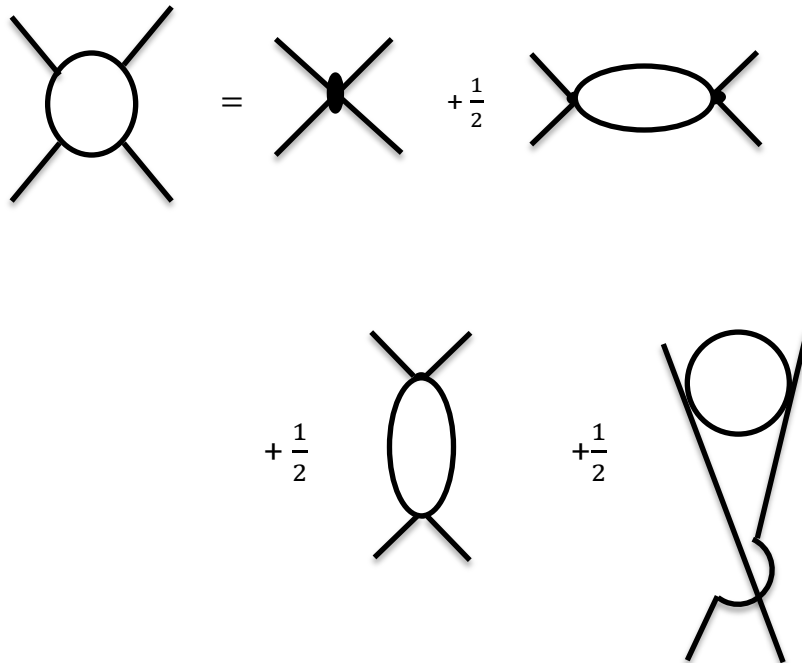


Figure 2.2 : La fonction à quatre points

Théorie des champs commutative

2.8 Le problème de la divergence

En théorie quantique des champs, les intégrales de Feynman à l'ordre d'une boucle souffrent des divergences qui sont logarithmique, linéaire, quadratique ...etc. selon le degré de divergence qui égale 0, 1, 2 ... respectivement.

Par exemple, l'intégrale de Feynman d'une boucle est :

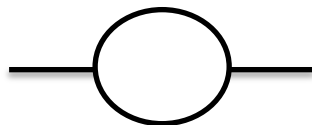

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{(p+k)^2+m^2}$$

Figure 2.3 : diagramme d'une boucle

Cette intégrale ne satisfait pas la condition de convergence, Lorsque le résultat devient infini quand k tend vers zéro on dit que le diagramme est divergent infrarouge. De même lorsqu'il devient infini pour k tendant vers l'infini, on dit que le diagramme est divergent ultraviolet [3].

Pour éliminer cette divergence on utilise la technique de régularisation, il y a Plusieurs méthodes comme :

- ❖ régularisation de coupure.
- ❖ régularisation de Pauli – Villars.
- ❖ régularisation analytique.
- ❖ régularisation dimensionnelle.

Et aussi il y a autre technique appelé la renormalisation.

Chapitre **III**

*Les méthodes de la
régularisation et
renormalisation*

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-1 Introduction

Dans ce chapitre on a traité les différentes formules mathématiques des méthodes de la régularisation et aussi la renormalisation dans l'espace commutatif.

Naturellement toutes les quantités physiques sont finies, mais le problème de la divergence dans la théorie quantique des champs qui apparue avec les calculs des intégrales du diagramme de Feynman à l'ordre des boucles qui donne ainsi les quantités infini, Évidemment nous avons besoin de méthode pour éliminer cette divergence et extraire une quantité finis, cette méthode appelé la régularisation.

La régularisation a été inventée par Hooft et Veltmann [1], est une théorie qui remplacer les expressions classique par les expressions alternative dans les divergences des diagrammes de Feynman pour rendues finies. Il existe plusieurs techniques de la régularisation comme la régularisation de coupure, analytique, Pauli -Villars et dimensionnelle.

Mais, le problème de la divergence ne disparue pas avec ces méthodes, pour cela on utilise une autre méthode appelons la renormalisation.

L'idée de la méthode de renormalisation remonte au siècle dernier, on a aperçu dans le contexte hydrodynamique ensuite elle est apparue plus généralement dans les théories quantiques de champs pour fréquence élevé [2], dans les années 1950 R. Feynman, J. Schwinger, S. Tomonaga et F.J. Dyson utilisèrent les techniques de renormalisation afin de venir à bout des divergences ultraviolettes en électrodynamique [3]

Elle est sans doute l'un des procédés les plus élaborés et apparue comme un outil rigoureux et indispensable pour la physique théorique moderne qui aussi peut avoir une interprétation physique, aussi absorbe tous les infinis et travaille bien avec les trois forces : la force électromagnétique, nucléaire faible et forte mais n'avance pas avec la force gravitationnelle [4].

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-2 la fonction gamma

La fonction gamma $\Gamma(\alpha)$ joue un rôle important dans les calculs de boucle qu'on utilisant la méthode de régularisation dimensionnelle, est une fonction méromorphe de la variable complexe α qui possède des pôles simples en $\alpha = 0, -1, -2, \dots, -n$ Avec $n \in \mathbb{N}$

La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante [5] :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (3.1)$$

Quand la partie réelle de α est strictement positive $Re(\alpha) > 0$

3-2-1 Propriétés

Pour tout nombre complexe α on pose :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha! \quad (3.2)$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad (3.3)$$

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \quad (3.4)$$

Nous utiliserons également les deux limites suivantes :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \gamma + O(\alpha) \quad (3.5)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha)A^\alpha = \frac{1}{\alpha} - \gamma + \ln A + O(\alpha) \quad (3.6)$$

Et avec γ : est la constante d'Euler ; $\gamma = 0,577215$.

Par le changement de variable $t=DU$ dans (3.4), on trouve pour $Re(\alpha) > 0$ et $D > 0$

$$\frac{1}{(D)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-DU} U^{\alpha-1} dU \quad (3.7)$$

D est le dénominateur de propagateur

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-3 La Régularisation

La procédure de la régularisation est réglée les intégrales divergents et aussi consiste à rendre l'intégrale de boucle converge par l'introduisant des paramètres supplémentaires pour identifier les causes des divergences. Puis, par un passage à la limite, nous éliminons ces paramètres.

Il existe différentes procédures de régularisation pour isoler les divergences.

3-4 La Régularisation de coupure « cut off »

Cette régularisation plus primitive est réalisée en présentant simplement des coupures pour les limites intégrales.

Elle consiste à introduire un paramètre arbitraire de coupure Λ comme borne supérieure à l'intégrale, ce paramètre appelé « cut off » qui sert à couper l'intégration sur le moment de la boucle, tous les intégrales de moment sont limitées à une région $|k| < \Lambda$, Pour cette régularisation on remplace la borne ∞ par la coupure Λ dans l'intégrale.

Le problème de cette régularisation ne permet pas donner à cette coupure une valeur physique, elle n'est pas invariante de transformation de Lorentz et brise la symétrie de Jauge aussi n'est pas utilisé en pratique [6].

3-4-1 Les types de la régularisation coupure

Il y a deux types de coupure sont [7] :

a) Coupure violent (Sharp Cutoff)

Considérer l'intégrale d'un-boucle en théorie ϕ^4 à deux dimensions.

$$I = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (3.8)$$

L'intégrale est limiter simplement jusqu'à $p^2 = \Lambda^2$. Nous trouvons :

$$I = \int_0^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{4\pi} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

$$= \frac{1}{4\pi} [\ln(p^2 + m^2)]_0^{\Lambda^2}$$

$$I = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \quad (3.9)$$

Ce type brise explicitement l'invariance de la translation dans l'espace de moment $p \rightarrow p + k$ et aussi est de maintenir l'invariance de jauge

b) Coupure gaussienne

Considérer l'intégrale comme suit :

$$I = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}}}{p^2 + m^2} \quad (3.10)$$

Donc, Nous trouvons

$$I = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} dt e^{-t(p^2 + m^2)} e^{\frac{m^2}{\Lambda^2}}$$

$$= \frac{e^{\frac{m^2}{\Lambda^2}}}{4\pi} \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-tm^2} \quad (3.11)$$

On pose $\hat{t} = tm^2$, alors

$$I = \frac{e^{\frac{m^2}{\Lambda^2}}}{4\pi} \int_{\frac{m^2}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{d\hat{t}}{\hat{t}} e^{-\hat{t}}$$

$$= -\frac{e^{\frac{m^2}{\Lambda^2}}}{4\pi} Ei\left(-\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.12)$$

Ici, $Ei\left(-\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)$ est la fonction intégrale exponentielle

Avec
$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (3.13)$$

On utilise l'expansion de Taylor pour Λ grand, donc on trouve :

$$I = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2} - \gamma \right) + \frac{m^2}{\Lambda^2} \left(2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 + \gamma \right) + O\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^2 \right] \quad (3.14)$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

Cette régularisation peut être réalisée en application par le terme cinétique modifiée dans le lagrangien :

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi e^{\frac{\square}{\Lambda^2}} \partial_\mu \phi$$

Le propagateur souffre toujours du manque d'invariance de translation dans l'espace de moment.

3- 4 -2 Exemples des intégrales de Feynman dans la théorie ϕ^4 à quatre dimensions

c) La fonction Γ à deux points

$$\frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.15)$$

Figure 3.3 : une boucle à la fonction de deux points

On pose
$$I = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Pour le déplacement de l'espace Minkowski à espace Euclidien on multiplie le résultat par $-i$, on utilise l'espace Euclidien pour éviter le facteur imaginaire [8].

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{i d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{i}{-(k_E)^2 - m^2 + i0} \\ &= \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^4} \int d^4k_E \frac{1}{k_E^2 + m^2} \\ &= \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty k_E^3 dk_E \frac{1}{(k_E)^2 + m^2} \\ &= \frac{-i\lambda}{2(2\pi)^4} 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{2} dk_E^2 \frac{k_E^2}{k_E^2 + m^2} \\ &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{y + m^2 - m^2}{y + m^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \int_0^\infty dy \left(1 - \frac{m^2}{y+m^2}\right) \\
 &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\int_0^{\Lambda^2} dy - m^2 \int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y+m^2} \right] \\
 &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln(y+m^2) \Big|_0^{\Lambda^2} \right] \\
 &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}\right) \right] \\
 I &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

On remarque, l'intégrale est divergent quand $\Lambda \rightarrow \infty$

d) La fonction Γ à quatre points

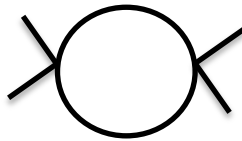
$$\frac{3}{2} \quad \text{---} \circ \text{---} \quad = \frac{3}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \tag{3.18}$$


Figure 3.4 : une boucle à la fonction de quatre points

On utilise la même méthode précédente.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{3(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \\
 &= \frac{3\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int i d^4k_E \left(\frac{1}{-k_E^2-m^2} \right)^2 \\
 &= \frac{3i\lambda^2}{2(2\pi)^4} (2\pi^2) \int_0^\infty k_E^3 dk_E \frac{1}{(k_E^2+m^2)^2} \\
 &= \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{y}{(y+m^2)^2} \\
 &= \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\int_0^{\Lambda^2} \frac{dy}{y+m^2} - m^2 \int_0^\infty \frac{dy}{(y+m^2)^2} \right] \\
 &= \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln(y+m^2) \Big|_0^{\Lambda^2} + \frac{m^2}{y+m^2} \Big|_0^\infty \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

$$I = \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (3.20)$$

Quand $\Lambda \rightarrow \infty$, l'intégrale est divergente et dans ce cas logarithmique.

3-5 la régularisation de Pauli – Villars

Elle a été publiée en 1949 par Pauli et Villars, est une amélioration technique de la coupure primitive. Cette méthode consiste à rajouter des particules fictives de masse M à la théorie initiale ce qui modifie le propagateur initial comme suit [9] :

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - M^2} \quad (3.21)$$

M joue le rôle d'une coupure, elle est beaucoup plus grande que m et quand $M \rightarrow \infty$ on retourne à la méthode précédente.

Pour les diagrammes multi-boucle est compliqués il présente beaucoup de particules fictives et devient rapidement impraticable. D'autre part, la régularisation brise symétrie de jauge, elle est souvent inefficace aussi est moins utile que d'autres régularisations.

3-6 La régularisation analytique

La méthode de régularisation analytique diffère complètement de celle du Pauli et Villars dans celui-ci est des exploits pour la première fois le concept de la suite analytique dans un certain paramètre de complexe z .

Le propagateur est substitué comme $\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{(p^2 + m^2)^z}$ où z est un nombre complexe avec $\text{Re}(z)$ assez grand pour faire les intégrales convergentes. Le résultat est alors continué analytiquement à une région autour de la valeur physique $z = 1$.

Toutes les divergences se manifestent comme des pôles simples pour $z = 1$. Des quantités physiques finies pour $z = 1$ peuvent être définies en soustrayant les limites de pôle.

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-7 la régularisation dimensionnelle

Les divergences ultraviolettes dans les diagrammes de Feynman proviennent de l'intégrale sur l'impulsion dans un espace à quatre dimensions, alors on peut rendre les intégrales finies pour une autre méthode.

La plupart des travailleurs modernes n'utilisent pas généralement soit une régularisation de coupure ou Pauli-Villars, mais au lieu d'utiliser une autre méthode, connue sous le nom régularisation dimensionnelle.

Dans la régularisation dimensionnelle, nous évaluons formellement intégrales dans les dimensions D au lieu de 4 dimension, où D ne doit pas être un nombre entier, par exemple $[d]$.

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + m^2)^n} \quad (3.22)$$

L'intégrale est remplacé par une intégrale écrire comme suit :

$$\int \frac{d^D p}{(p^2 + m^2)^n} \quad (3.23)$$

Les intégrales dans D dimensions est obéir aux axiomes suivants:

1. Linéarité pour n'importe quels nombres complexes a et b on a :

$$\int d^D p [af(p) + bg(p)] = a \int d^D p f(p) + b \int d^D p g(p) \quad (3.24)$$

2. Graduation pour n'importe quel nombre complexe s on trouve :

$$\int d^D p f(sp) = s^{-D} \int d^D p f(p) \quad (3.25)$$

3. l'invariance de translation pour n'importe quel vecteur q

$$\int d^D p f(p + q) = \int d^D p f(p) \quad (3.26)$$

La régularisation dimensionnelle a été inventée par Hooft et Veltmann pour régulariser les théories de Jauge non abéliennes, était l'outil mathématique approprié pour de telles expansions. Il y a plusieurs dispositifs attrayants de régularisation dimensionnelle. D'abord, elle préserve toutes les symétries de la théorie, en particulier symétrie de Jauge et Lorentz.

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

Deuxièmement, elle permet une identification facile des divergences. Troisièmement, elle simplifie les calculs par la méthode de minimal de soustraction (MS), elle est devenue un outil essentiel pour calculer des théories des champs. Les intégrales de moment sont donc définies seulement pour des dimensions $D < 2$ et $D < 4$ respectivement.

L'idée est de calculer une intégrale de Feynman pour le nombre entier D doivent être extrapolées analytiquement au D complexe. Le concept d'une dimension continue a été présenté par Wilson et Fisher [10], qui quantités physiques d'abord calculées dans $D = 4$ dimensions avec le $\text{Re}(\epsilon) > 0$, et augmenté dans les puissances du ϵ de déviation de la dimension le concept $D = 4$.

Pour expliquer la méthode de régularisation dimensionnelle, considérer d'abord l'intégrale de Feynman la plus simple

$$I(D) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (3.27)$$

Nous pouvons séparer la partie angulaire de l'intégrale comme :

$$d^D p = p^{D-1} dp s_D \quad (3.28)$$

s_D est la surface d'une sphère d'unité dans les dimensions D .

$$s_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \quad (3.29)$$

Aussi pour les coordonnées polaires dans D -dimension est :

$$d^D p = p^{D-1} dp d\phi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{D-2} \theta_{D-2} d\theta_{D-2} \quad (3.30)$$

Donc l'intégrale est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} I(D) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^{D-2} \int_0^\pi \sin^k \theta_k d\theta_k \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{s_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{p^2 + m^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

On utilise le changement de variable $p^2 = y m^2$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{p^2+m^2} &= \int_0^\infty dy y^{\alpha-1} (1+y)^{-\alpha-\gamma} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \\ &= \beta(\alpha, \gamma) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma, la formule donnée dans la relation (3.4)

Donc, on trouve

$$\begin{aligned} I(D) &= \frac{s_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dp p^{D-1} \frac{1}{p^2+m^2} \\ &= \frac{s_D}{2(2\pi)^D} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \int_0^\infty dy y^{\frac{D}{2}-1} (1-y)^{-1} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(1-\frac{D}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pour l'intégrale qui écrire comme suit et on utilise la relation

$$\begin{aligned} I(D; q) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + 2pq + m^2} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2 - q^2} \\ &= \frac{(m^2 - q^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

On appelle $\frac{1}{p^2 + 2pq + m^2}$ paramètre de Schwinger, où

$$\frac{1}{p^2 + 2pq + m^2} = \int_0^\infty e^{-t(p^2 + 2pq + m^2)} dt \quad (3.35)$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

On obtient une formule pour les puissances entières arbitraires de tels propagateurs

$$\begin{aligned}
 I(D, \alpha; q) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + 2pq + m^2)^\alpha} \\
 &= \frac{(m^2 - q^2)^{\frac{D}{2} - 1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

On a

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\alpha+\beta}} \tag{3.37}$$

On appel x paramètre de Feynman.

Les formules de Feynman est :

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1+\dots+x_n)}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)} \tag{3.38}$$

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \dots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1+\dots+x_n) x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1}}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}} \tag{3.39}$$

Alors, l'intégrale est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^\alpha [(p-k)^2 + m^2]^\beta} &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}}{[p^2 + m^2 - 2pkx + k^2 x]^\alpha} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}}{[m^2 + k^2 x(1-x)]^{\alpha+\beta - \frac{D}{2}}}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-8 Les diagramme de Feynman par la régularisation dimensionnelle

Nous calculerons maintenant certain des diagrammes en $\Gamma^{(2)}$ $\Gamma^{(4)}$ jusqu'à deux boucles :

$$\Gamma^{(2)} = k^2 + m^2 - \frac{1}{2} \text{ (diagramme à 1 boucle)} - \frac{1}{4} \text{ (diagramme à 2 boucles)} - \frac{1}{6} \text{ (diagramme à 2 boucles)} - \frac{1}{6} \text{ (diagramme à 2 boucles)}$$

Figure 3.5 : les diagrammes dans la fonction $\Gamma^{(2)}$

$$\Gamma^{(4)} = - \text{ (diagramme à 4 lignes)} - \frac{3}{2} \text{ (diagramme à 1 boucle)} - 3 \text{ (diagramme à 1 boucle)} - \frac{3}{4} \text{ (diagramme à 2 boucles)} - \frac{3}{2} \text{ (diagramme à 2 boucles)} - \frac{3}{2} \text{ (diagramme à 2 boucles)}$$

Figure 3.5 : les diagrammes dans la fonction $\Gamma^{(4)}$

Nous ferons également le calcul pour les diagrammes de vide. Les résultats seront donnée une série entière dans le ϵ , avec les divergences apparaissant comme terme de pole dans le ϵ .

3-8-1 Les diagrammes d'une boucle

L'intégrale de Feynman qui donner au-dessous est divergent pour $D \geq 2$

$$\text{ (diagramme à 1 boucle) } = -\lambda \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \tag{3.41}$$

On utilise la relation (3.33), donc

$$\text{ (diagramme à 1 boucle) } = -\lambda \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \tag{3.42}$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

Pour éliminer la divergence on pose $D = 4 - \varepsilon$ et introduire le constant de couplage g sans dimensions comme suit :

$$g = \lambda \mu^{D-4} = \lambda \mu^{-\varepsilon} \quad (3.43)$$

μ est un paramètre arbitraire de masse.

L'intégrale dépendant par les termes de g et μ

$$\text{Diagramme (boucle sur une ligne)} = -m^2 \frac{g}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.45)$$

On a

$$\Gamma(-n+1) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1) \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (3.46)$$

$\psi(n+1)$ représente la fonction d'Euler


$$\psi(n+1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \quad (3.47)$$

$$\text{Diagramme (boucle sur une ligne)} = m^2 \frac{g}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(2) + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (3.48)$$

$$\text{Diagramme (boucle avec deux lignes croisées)} = \lambda^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} \quad (3.49)$$

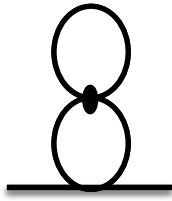
On utilise les paramètres de Feynman en l'intégrale précédente

Les méthodes de la régularisation et renormalisation



$$\begin{aligned}
 &= \lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\{p^2 + m^2(1-x) + [(p+k)^2 + m^2]x\}^2} & (3.50) \\
 &= \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 x(1-x) + m^2]^{2-\frac{D}{2}}} \\
 &= g\mu^\varepsilon \frac{g}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left[\frac{4\pi\mu^2}{k^2 x(1-x) + m^2} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
 &= g\mu^\varepsilon \frac{g}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(1) + O(\varepsilon) \right] \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dx \log \left[\frac{4\pi\mu^2}{k^2 x(1-x) + m^2} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \\
 &= g\mu^\varepsilon \frac{g}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \psi(1) + \int_0^1 dx \log \left[\frac{4\pi\mu^2}{k^2 x(1-x) + m^2} \right] + O(\varepsilon) \right\} & (3.51)
 \end{aligned}$$

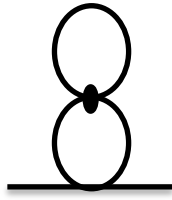
3-8-2 les diagrammes à deux boucles



$$= \lambda^2 \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{(p_2^2 + m^2)^2} \quad (3.52)$$

L'intégrale pour p_1 c'est le même dans la relation (3.41) et pour p_2 comme suivant :

$$\begin{aligned}
 \lambda \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p_2^2 + m^2)^2} &= \frac{g\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \\
 &= \frac{g}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
 &= \frac{g}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(1) + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + O(\varepsilon) \right] & (3.53)
 \end{aligned}$$



$$= - \frac{m^2 g^2}{(4\pi)^4} \left[\frac{4}{\varepsilon^2} + 2 \frac{\psi(1) + \psi(2)}{\varepsilon} - \frac{4}{\varepsilon} \log\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\varepsilon) \right] \quad (3.54)$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-9 La renormalisation

La renormalisation est habituellement une redéfinition des paramètres, comme les constantes de couplage et les masses de particules, tels que les divergences que nous avons obtenues à partir de l'étape précédente sont absorbées et la fonction de Green des nouveaux paramètres est finie.

3-10 La formalisme de Lagrangien

Dans cette méthode peut être éliminées ordre par ordre qu'ajoute un nombre fini de contre-termes au Lagrangien. Plus précisément, on redéfinit la normalisation des champs, des masses et de la constante de couplage du Lagrangien.

La première étape est décomposer le Lagrangien à deux forme comme suit [8] :

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

\mathcal{L}_T est appelé lagrangien totale ou lagrangien nues.

\mathcal{L} est appelé lagrangien originale

$\delta\mathcal{L}$ est appelé Lagrangien des contre-termes,

Lagrangien nues à la même forme que le lagrangien initial, les paramètres nues ne sont pas mesurables, sont reliées aux paramètres physiques, le procédé de renormalisation fonctionne parce que la structure des contre termes est identique que les termes de la densité lagrangien originale aussi et par :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{A}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{B}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}C\phi^4 \quad (3.55)$$

Et

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (3.56)$$

Nous pouvons maintenant combiner la contre terme avec le terme original

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2}(1+A)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2+B)\phi^2 - \frac{1}{4}(\lambda+C)\phi^4 \quad (3.57)$$

Et définir

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

$$\begin{aligned}\phi_0 &= (1 + A)^{\frac{1}{2}} \phi \\ &= Z^{\frac{1}{2}} \phi\end{aligned}\tag{3.58}$$

$$m_0^2 = (m^2 + B)(1 + A)^{-1}\tag{3.59}$$

$$\lambda_0 = (\lambda + c)(1 + A)^{-2}\tag{3.60}$$

Après cette redéfinition, la densité lagrangien

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4} \lambda_0 \phi_0^4\tag{3.61}$$

Avec

$$A = 0\tag{3.62}$$

$$B = \frac{-\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right]\tag{3.63}$$

$$C = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right]\tag{3.64}$$

Donc

$$\phi_0 = \phi\tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}m_0^2 &= (m^2 + B)(1 + A)^{-1} \\ &= \left[m^2 \left(1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right) - \frac{\lambda \Lambda^2}{32\pi^2} \right]\end{aligned}\tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= (\lambda + c)(1 + A)^{-2} \\ &= \lambda \left[1 + \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right]\end{aligned}\tag{3.67}$$

3-11 Le propagateur

Le propagateur de cette théorie est donné comme [11]

$$\begin{aligned}i\Delta_R(p^2) &= \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(0)] | 0 \rangle \\ &= Z_\phi^{-1} \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T[\phi_0(x)\phi_0(0)] | 0 \rangle \\ &= i Z_\phi^{-1} \Delta(p^2)\end{aligned}\tag{3.68}$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3-12 Les fonctions de Green

Les fonctions de Green deviennent

$$\begin{aligned} G_R^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | T[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] | 0 \rangle \\ &= Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \langle 0 | T[\phi_0(x_1), \dots, \phi_0(x_n)] | 0 \rangle \\ &= Z_\phi^{-\frac{n}{2}} G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.69)$$

3-13 Les règles de Feynman

Dans la théorie ϕ^4 on donne nouveaux règles de Feynman pour cet contre terme est :

$$\text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{X} = i\lambda$$

$$\text{---} \otimes \text{---} = i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

$$\text{X} \otimes \text{---} = -i\delta_\lambda$$

Les méthodes de la régularisation et renormalisation

3 -13 Les fonctions du vertex dans la renormalisation

3-13-1 la fonction à deux point

On a la fonction à deux points est donnée [12] :

$$\Gamma(p, -p) = -[m^2 + P^2 + \Sigma(P)] \quad (3.70)$$

$\Sigma(P)$ appelé self-énergie qui donner dans cette théorie comme

$$\Sigma(P) = \frac{3\lambda}{16\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \delta m^2 - \delta z p^2 + O(\lambda^2) \quad (3.71)$$

Donc

$$-\Gamma(p, -p) = m^2 - \delta m^2 + (1 - \delta z)P^2 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + O(\lambda^2) \quad (3.72)$$

Maintenant Les contre termes peuvent être choisis tels que la fonction $\Gamma(p, -p)$ est fini pour $\Lambda \rightarrow \infty$, ceci détermine de Λ dépendance de δm^2 et nous voyons que δz n'est pas nécessaire pour annuler les infinis dans cette étape, puisqu' il n'y a aucune terme p^2 divergente.

Nous choisissons maintenant les contre termes qui satisfaire les conditions de renormalisation comme

$$\delta m^2 = \frac{6\lambda}{32\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + O(\lambda^2) \quad (3.73)$$

$$\delta z = O(\lambda^2) \quad (3.74)$$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons procédé à l'étude détaillée de la théorie des champs avec la théorie ϕ^4 comme un exemple.

Dans le premier chapitre, nous avons étudié l'évolution de la physique jusqu' à la théorie des champs.

Dans le deuxième chapitre, nous avons trouvé que la théorie des champs dans l'espace ordinaire souffre d'un problème de la divergence UV dans les diagrammes de Feynman qu'on ne trouve pas une solution.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le problème de la divergence pour éliminer ce dernier on utilise les méthodes de régularisation (par coupure, pauli-villars, analytique et dimensionnelle) mais la divergence est resté par contre la méthode de la renormalisation est absorber la divergence, la première conclusion est quel que soit la forme de la régularisation la divergence est apparu, le deuxième conclusion est la régularisation de coupure et dimensionnelle sont des méthodes différents, mais arrivons au même résultat final.

Bibliographie

Chapitre I

[1] Source : [http:// histoire. Inf. online.fr/ univac. Html](http://histoire.inf.online.fr/univac.html)

[2] Michel le Bellac, Physique quantique, 2^E Edition, CNRS EDITION (2007).

[3] Khelili Farid, Aspects Mathématiques et physiques de la Géométrie non commutative

[4] P. Marage, Eléments d'histoire du développement de la physique nucléaire et des particules élémentaires en Belgique.

[5] Alaine Idir, résolution de l'équation de Dirac à (1+1)-dimensions pour quelques modèles de potentiels PT-symétriques et de masse dépendantes de l'espace, Mémoire Magister, Université Mentouri-Constantine.

[6] Alexandre Guay, Philosophie de la physique (2005).

[7] Nawel Rezaki, L'Atome d'Hydrogène dans le formalisme de la Géométrie Non Commutative, mémoire de Magister, Université de Montouri Constantine.

[8] Gilles Cohen-Tamoudji, Le fondamental, l'effectif et l'émergent, Laboratoire de Recherche sur Les Sciences de la Matière (LARSIM)

[9] Bertrand Delamotte, Introduction à la théorie quantique des champs, novembre 2005.

[10] Matthieu Lefrançois, Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif, Diplôme de Doctorat, LYCEN-T 2005-42.

Chapitre II

[1] Ferahtia Souad, Théorie non commutative des champs et renormalisation, Mémoire de master (2012), Université de M'sila.

[2] Alessandra Frabetti, Groupes des séries et renormalisation des champs quantiques, Université de Lyon 1.

[3] Alexandre Depire, la théorie des cordes (2004)

[4] Jean-Pierre Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001).

[5] Christiane Schomblond, Théorie quantique des champs QED, QCD, Université libre de Bruxelles.

[6] Vladimir A. Smirnov, Feynman integrale calculus (2006)

Chapitre III

[1] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B 44, 189 (1972).

[2] Annick Lesne, La Renormalisation.

[3] Abdelouahab Kenoufi, Groupe de Renormalisation et Théorie de la Fonctionnelle de Densité, Thèse de Doctorat.

- [4] Alain Connes, Renormalisation et ambiguïté galoisienne.
- [5] Jean-Pierre Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001).
- [6] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, Critical Properties of ϕ^4 -Theories (2011)
- [7] Hitoshi Murayama, Regularization (2007)
- [8] Ashok Das, Lectures on quantum field theory, University of Rochester, USA, World Scientific Publishing (2008).
- [9] Leo Wallin Sonesson, The Systematics of Radiative Corrections and A Proposed Approximative Evaluation Scheme.
- [10] M.E. Fisher and K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972); K.G. Wilson, Phys. Rev. D 7, 2911 (1973).
- [11] Jack Gunion, Class Notes on Renormalization
- [12] Jan Smit, Introduction to Relativistic Quantum Fields, University of Amsterdam, Lecture notes 2007

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المخلص في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة نظرية الحقول السلمية في الفضاء التبادلي حيث ظهر مشكل التباعد البنفسجي في مخططات فاينمان من رتبة الحلقات و حاولنا معالجته باستعمال طريقة تنظيم التكاملات ولكن هذا التباعد لم يختفي , لكن وبعد استعمال طريقة أخرى تدعى اعادة التنظيم التي امتصت هذا التباعد اصبح غير موجود .

الكلمات المفتاحية :

Abstract : نظرية الحقول،تنظيم التكاملات،اعادة التنظيم، التباعد البنفسجي ،التنظيم البعدي

~~In this memory we talked about the study of the scalar fields theory in a commutative space where he appeared the ultraviolet divergence problem in Feynman diagram step of loops and tried processed using the method of regularization integrals, but this divergence does not disappear, but after using the other method is called renormalization which absorbed the divergence became does not exist.~~

Keywords:

Field theory, regularization integrals, renormalization, ultraviolet divergence, dimensional regularization.

Résumé :

Dans cette mémoire, nous avons procédé à l'étude de la théorie des champs scalaires dans l'espace commutative où il est apparu le problème de divergence ultraviolet dans les diagrammes de Feynman à l'ordre des boucles et essayé traitées par utilisant la méthode de régularisation les intégrales, mais cette divergence ne disparaît pas, mais après avoir utilisé l'autre méthode est appelée la renormalisation qui a absorbé ce divergence est devenu n'existe pas.

: Mots-clés

Théorie des champs, régularisation les intégrales, renormalization, divergence ultraviolet,

La régularisation dimensionnelle.