

PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND
SCIENTIFIC RESEARCH



MOHAMED BOUDIAF UNIVERSITY
-M'SILA

Faculty of Mathematics and Computer Science
Department of Mathematics



Master's degree in Mathematics

Domain : Mathematics and Informatics

Speciality : Mathematics

Option : Analysis Fouctinnal

Subject

*A Comparative Study of Classical Lebesgue Spaces and Variable Exponent
Lebesgue Spaces with Their Applications*

Presented by :

Abdelkader DRAI

Jury members:

Dr. Hella ABDELAZIZ	M.C.B,	University of M'sila	President
Dr. Nouredine DECHOUCHA	M.C.B,	University of M'sila	Supervisor
Dr.Khaled HAMIDI	M.C.A,	University of M'sila	Examiner

University year: 2025/2026

Contents

Notation	3
1 Préliminaires et outils de base	6
1.1 Functional Spaces	6
1.1.1 Définition des espaces $L^p(\Omega)$	6
1.1.2 Premières propriétés	7
1.1.3 Propriétés fondamentales de la norme	8
1.2 L'inégalité de Hölder	8
1.2.1 énoncé et interprétation	8
1.2.2 Cas particuliers	9
1.2.3 Inégalité de Minkowski	9
1.3 Dualité	9
1.3.1 Théorème de représentation de Riesz	10
1.3.2 Cas limites	10
1.3.3 Réflexivité	10
1.4 Complétude	11
1.5 Introduction aux espaces de Lebesgue faibles (espaces de Marcinkiewicz) $L^{p,\infty}(\Omega)$	11
1.5.1 Définition et motivation	11
1.5.2 Propriétés essentielles	12
2 Les Espaces de Lebesgue à Exposant Variable	14
2.1 Fonctions d'exposant	14
2.1.1 Notation	15
2.1.2 Conditions de régularité	15
2.2 La modularité et la norme de Luxemburg	16
2.2.1 Norme de Luxemburg	17
2.2.2 Relation entre modularité et norme	18
2.2.3 Propriétés fondamentales de la norme	18
2.3 L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	20
2.3.1 Cas particuliers de l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	21
2.4 Inégalité de Hölder, norme associée et dualité	23
2.4.1 Inégalité de Hölder généralisée	23
2.4.2 Norme associée et équivalence	23
2.4.3 Conséquences et applications	24
2.5 Plongements et comparaison avec le cas classique	24
2.5.1 Plongement de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	24
2.5.2 Plongement $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$	25

2.5.3	Cas particulier : $ \Omega < \infty$	25
2.6	Complétude, densité et séparabilité	25
2.6.1	Complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	25
2.6.2	Sous-ensembles denses	26
3	The Applications of Classical Lebesgue Spaces and Variable Exponent Lebesgue Spaces	28
3.1	The Applications of Classical Lebesgue Spaces	28
3.1.1	Problème de Dirichlete	28
3.1.2	Probleme	31
3.2	The Applications of Variable Exponent Lebesgue Spaces	35
3.2.1	probleme	35

Notation

We introduce the necessary notations and definition which are used in the sequel..

H	Hilbert space.
E	Banach space.
X'	Topological dual X .
Ω	Open set of $\mathbb{R}$.
$\partial\Omega$	Border of Ω .
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable} : \int_{\Omega} u ^p dx \leq \infty \text{ with } 1 \leq p < \infty. \right\}$
$\ u\ _{L^p}$	$= \left(\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^{\infty}(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable and } \exists C : u(x) \leq C \text{ a.e in } \Omega \}$.
$\ u\ _{L^{\infty}}$	$= \inf \{ C : u(x) \leq C \text{ a.e in } \Omega \}$.
$C(\Omega)$	Continuous function space in Ω .
$D(A)$	Domain of definition of a bounded operator A .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Define a scalar product.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Set of continuous linear applications.
a.e.	Almost everywhere.
$\mathbb{R}^N$	Euclidean space of dimension N , where N is a nonzero natural number.
x	Vector in $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$.
dx	Lebesgue measure in N -dimensional space.
$\partial\Omega = \Gamma$	boundary of Ω .
$ E $	Or $mes(E)$ measure of the set E .
$D(A)$	Domain of definition of a bounded operator A .
$ \cdot $	Hilbert norm .
χ_E	Characteristic function of set E .
$\frac{\partial u}{\partial t}$	Outward normal derivative.
$f_n \rightarrow f$	Denotes that the sequence $\{f_n\}$ converge to f .
$f_n \rightharpoonup f$	Denotes that the sequence $\{f_n\}$ converge weakly to f .
$\text{Supp } u$	Support of the function u .
$\int_{\Omega} f(x) dx$	Integral of f in Ω with respect to the Lebesgue measure .
$ u _p$	$= [\int_{\Omega} u(x) ^p dx]^{1/p} = \ u\ _{L^p}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Space of infinitely differentiable functions on Ω with compact support in Ω .

Introduction

Les espaces de Lebesgue constituent l'un des piliers fondamentaux de l'analyse fonctionnelle moderne et jouent un rôle essentiel dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Introduits dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue, ils généralisent naturellement les espaces de fonctions intégrables au sens classique et offrent un cadre analytique particulièrement adapté à l'étude de phénomènes présentant des singularités ou des irrégularités locales.

L'idée centrale des espaces de Lebesgue repose sur la notion d'intégrabilité des fonctions. Contrairement à l'approche classique fondée principalement sur la continuité, la théorie de Lebesgue privilégie une description globale du comportement des fonctions à travers leurs propriétés intégrales. Cette approche permet d'élargir considérablement la classe des fonctions admissibles tout en conservant des outils analytiques puissants.

Pour tout exposant réel $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ regroupent les fonctions dont la puissance $|f|^p$ est intégrable sur le domaine Ω . Ces espaces interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées, notamment l'analyse harmonique, la théorie du potentiel, la mécanique des fluides, le calcul des variations et l'étude des équations aux dérivées partielles.

Par ailleurs, les espaces de Lebesgue possèdent une structure géométrique et topologique riche. Munis de leur norme naturelle, ils forment des espaces de Banach complets. Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, doté d'un produit scalaire qui lui confère des propriétés remarquables et en fait un outil privilégié dans de nombreuses applications mathématiques et physiques.

Cependant, bien que les espaces L^p classiques aient démontré leur efficacité dans de nombreux contextes, certaines applications modernes nécessitent un cadre fonctionnel plus flexible. En effet, dans plusieurs modèles issus de la physique, de l'ingénierie ou du traitement d'images, les propriétés du milieu étudié varient localement dans l'espace. Il devient alors insuffisant de

caractériser l'intégrabilité des fonctions à l'aide d'un exposant constant.

Afin d'illustrer cette limitation, considérons la fonction $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \in (0, 1]$. Son appartenance à un espace $L^p(0, 1)$ dépend fortement de la valeur de l'exposant p . Plus précisément, $f \in L^p(0, 1) \iff \alpha p < 1$. Ainsi, une même fonction peut appartenir à certains espaces L^p tout en étant exclue d'autres. Néanmoins, dans ce cadre classique, l'exposant p demeure constant sur tout le domaine et ne permet pas de tenir compte d'éventuelles variations locales des propriétés du milieu.

Cette observation a conduit au développement des espaces à exposant variable, dans lesquels la constante p est remplacée par une fonction mesurable $p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty)$. Ces espaces, notés $L^{p(x)}(\Omega)$, permettent de modéliser des phénomènes dont le comportement dépend de la position. Ils apparaissent notamment dans l'étude des fluides électrorhéologiques, dont la viscosité varie sous l'effet d'un champ électrique, ainsi que dans plusieurs modèles de traitement d'images où la régularisation doit être adaptée aux caractéristiques locales de l'image.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les principaux résultats relatifs aux espaces de Lebesgue classiques qui serviront de base à l'étude des espaces à exposant variable. Nous présenterons en particulier la définition et les propriétés fondamentales des espaces L^p , les inégalités de Hölder et de Minkowski, la dualité des espaces de Lebesgue ainsi que leur complétude. Ces outils constitueront le cadre théorique indispensable pour l'étude des espaces $L^{p(x)}(\Omega)$ développée dans les chapitres suivants.

Préliminaires et outils de base

1.1 Functional Spaces

1.1.1 Définition des espaces $L^p(\Omega)$

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ and let p be a real number greater than or equal to 1. The Lebesgue space $L^p(\Omega)$ is defined as:

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ is measurable and } \int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty\}$$

We equip it with the following norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

By $L^\infty(\Omega)$ we denote the set

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ measurable, } \exists M > 0 \quad |u(x)| \leq M \quad a.e\}$$

Quelques remarques importantes méritent d'être précisées :

- **Notion de mesurabilité :** Une fonction f est dite mesurable au sens de Lebesgue si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ensemble mesurable. Cette propriété permet de définir rigoureusement l'intégrale de Lebesgue.
- **égalité presque partout :** Deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle possèdent les mêmes propriétés intégrales. Les éléments de $L^p(\Omega)$ sont donc considérés modulo cette relation d'équivalence.

- **Cas limite $p = \infty$:** L'espace $L^\infty(\Omega)$ nécessite une définition particulière.

Remark 1.1. L'espace $L^p(\Omega)$ peut être interprété comme une mesure de la « taille » d'une fonction. Plus l'exposant p est grand, plus les grandes valeurs de $|f|$ sont pénalisées. L'espace $L^\infty(\Omega)$ mesure essentiellement la borne supérieure de $|f|$ presque partout.

Example 1.1. Considérons la fonction $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \in (0, 1]$, où $\alpha > 0$. Nous cherchons à déterminer pour quelles valeurs de $p \geq 1$ la fonction f appartient à l'espace $L^p(0, 1)$. Par définition,

$$f \in L^p(0, 1) \iff \int_0^1 |f(x)|^p, dx < +\infty.$$

Or, $\int_0^1 |f(x)|^p, dx = \int_0^1 x^{-\alpha p}, dx$. On sait que $\int_0^1 x^{-\beta}, dx$ converge si et seulement si $\beta < 1$. En posant $\beta = \alpha p$, on obtient

$$\int_0^1 x^{-\alpha p}, dx < +\infty \iff \alpha p < 1.$$

Ainsi,

$$f \in L^p(0, 1) \iff p < \frac{1}{\alpha}.$$

Par exemple, si $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, et l'on a $f \in L^1(0, 1)$, car $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}, dx = 2$, tandis que $f \notin L^2(0, 1)$, puisque $\int_0^1 \frac{1}{x}, dx = +\infty$.

Cet exemple illustre que l'appartenance d'une fonction à un espace L^p dépend fortement de l'exposant p . Une même fonction peut appartenir à certains espaces L^p tout en n'appartenant pas à d'autres.

1.1.2 Premières propriétés

Proposition 1.1. Si $|\Omega| < \infty$ et si $q > p$, alors

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Autrement dit, sur un domaine de mesure finie, toute fonction appartenant à $L^q(\Omega)$ appartient également à $L^p(\Omega)$ dès que $q > p$.

1.1.3 Propriétés fondamentales de la norme

Theorem 1.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'application $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $L^p(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. Séparation :

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ presque partout.}$$

2. Homogénéité :

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Inégalité triangulaire :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Exemple 1.2. *Considérons la fonction*

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1].$$

Calculons sa norme dans l'espace $L^2(0, 1)$.

Par définition, ce qui confirme la propriété d'homogénéité de la norme.

La démonstration de l'inégalité triangulaire repose essentiellement sur l'inégalité de Hölder.

1.2 L'inégalité de Hölder

1.2.1 énoncé et interprétation

Theorem 1.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $p, p' \in [1, \infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si

$$f \in L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad g \in L^{p'}(\Omega),$$

alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Cette inégalité possède une interprétation géométrique importante : l'intégrale du produit de deux fonctions est contrôlée par leurs normes respectives. L'exposant conjugué p' est précisément choisi afin d'obtenir une estimation optimale.

1.2.2 Cas particuliers

- Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy–Schwarz.
- Lorsque $p = 1$ et $p' = \infty$, on obtient

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Corollary 1.1 (Inégalité de Young). *Pour tous $a, b \geq 0$ et pour tout couple d'exposants conjugués (p, p') , on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

1.2.3 Inégalité de Minkowski

Theorem 1.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour tout $p \geq 1$ et pour toutes fonctions $f, g \in L^p(\Omega)$,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Cette inégalité correspond à l'inégalité triangulaire associée à la norme de $L^p(\Omega)$.

1.3 Dualité

La dualité constitue un concept fondamental de l'analyse fonctionnelle. Elle permet de caractériser les formes linéaires continues et d'étudier la structure géométrique des espaces fonctionnels.

1.3.1 Théorème de représentation de Riesz

Theorem 1.4 (Théorème de Riesz). *Soit $1 < p < \infty$. Le dual topologique de $L^p(\Omega)$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$. Plus précisément, pour toute forme linéaire continue*

$$\Phi \in \left(L^p(\Omega)\right)^*,$$

il existe une unique fonction

$$g \in L^{p'}(\Omega)$$

telle que

$$\Phi(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Ce résultat montre que toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ peut être représentée sous la forme d'une intégrale contre une fonction de $L^{p'}(\Omega)$.

1.3.2 Cas limites

- Pour $p = 1$,

$$\left(L^1(\Omega)\right)^* \cong L^\infty(\Omega).$$

- Pour $p = \infty$, le dual de $L^\infty(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$:

$$\left(L^\infty(\Omega)\right)^* \supsetneq L^1(\Omega).$$

1.3.3 Réflexivité

Corollary 1.2. *L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour tout*

$$1 < p < \infty.$$

Cette propriété implique notamment que toute suite bornée de $L^p(\Omega)$ admet une sous-suite faiblement convergente.

1.4 Complétude

La complétude garantit que toute suite de Cauchy converge dans l'espace considéré.

Theorem 1.5 (Théorème de Fischer–Riesz). *Pour tout*

$$1 \leq p \leq \infty,$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est complet.

Corollary 1.3. *Pour tout*

$$1 \leq p \leq \infty,$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.5 Introduction aux espaces de Lebesgue faibles

(espaces de Marcinkiewicz) $L^{p,\infty}(\Omega)$

1.5.1 Définition et motivation

Les espaces de Lebesgue faibles, également appelés espaces de Marcinkiewicz, constituent une généralisation des espaces L^p classiques.

Pour une fonction mesurable f définie sur Ω et pour $p \in [1, \infty)$, la fonction de distribution de f est définie par

$$d_f(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega ; |f(x)| > \lambda\}), \quad \forall \lambda > 0.$$

L'espace $L^{p,\infty}(\Omega)$ est alors défini par

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable} ; \|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} = \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda d_f(\lambda)^{1/p} \right).$$

1.5.2 Propriétés essentielles

- **Structure de Banach :** L'espace $L^{p,\infty}(\Omega)$ n'est pas un espace de Banach lorsqu'il est muni de la semi-norme précédente. Toutefois, il peut être muni d'une norme équivalente.
- **Inclusion :** Pour tout $p \in [1, \infty)$,

$$L^p(\Omega) \subset L^{p,\infty}(\Omega).$$

L'inclusion réciproque est fausse en général. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

définie sur $(0, 1)$ appartient à $L^{1,\infty}((0, 1))$ mais n'appartient pas à $L^1((0, 1))$.

- **Dualité :** La structure duale des espaces $L^{p,\infty}(\Omega)$ est plus complexe que celle des espaces $L^p(\Omega)$.

Exemple 1.3 (Inclusion de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p,\infty}(\Omega)$). *Considérons l'espace $\Omega = (0, 1)$ et la fonction constante $f(x) = 1$.*

On a clairement $f \in L^p(0, 1)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, puisque $\int_0^1 |f(x)|^p dx; \int_0^1 1 dx = 1 < \infty$. Par conséquent, $f \in L^{p,\infty}(0, 1)$, ce qui illustre l'inclusion

$$L^p(\Omega) \subset L^{p,\infty}(\Omega).$$

Exemple 1.4 (Inclusion stricte). *Considérons la fonction $f(x) = 1_{\frac{1}{\lambda} < x < 1}$.*

Pour tout $\lambda > 0$,

$$\mu\left(x \in (0, 1) : |f(x)| > \lambda\right)$$

$$\mu\left(\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)\right) \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, $\lambda, \mu\left(x : |f(x)| > \lambda\right)1$, ce qui montre que $f \in L^{1,\infty}(0, 1)$.

En revanche, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$, d'où $f \notin L^1(0, 1)$.

Cet exemple montre que l'inclusion $L^1(0, 1) \subsetneq L^{1,\infty}(0, 1)$ est stricte.

Exemple 1.5 (Complexité de la dualité). Dans les espaces classiques $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, on sait que

$$(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Par exemple, pour $p = 2$, le dual de $L^2(\Omega)$ est encore $L^2(\Omega)$.

En revanche, pour les espaces de Lorentz faibles $L^{p,\infty}(\Omega)$, il n'existe pas en général une identification aussi simple du dual. Celui-ci fait intervenir des espaces plus raffinés, tels que certains espaces de Lorentz $L^{p',1}(\Omega)$. Cela illustre la complexité de la structure duale des espaces faibles.

Exemple 1.6 (Absence de norme naturelle). Considérons les fonctions $f_n(x) = n, \chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$, $x \in (0, 1)$.

On vérifie que

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda, \mu(|f_n| > \lambda) = 1,$$

pour tout $n \geq 1$.

Ainsi, toutes les fonctions f_n ont la même quasi-norme dans $L^{1,\infty}(0, 1)$ malgré des comportements très différents. Ce phénomène explique pourquoi la quantité définissant $L^{p,\infty}$ n'est pas une norme au sens strict et pourquoi il est nécessaire d'introduire une norme équivalente pour obtenir une structure de Banach.

Les Espaces de Lebesgue à Exposant Variable

2.1 Fonctions d'exposant

Dans ce qui suit, Ω désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de mesure positive. On supposera parfois Ω ouvert et connexe.

Definition 2.1. *Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ comme un ensemble mesurable ayant une mesure positive. On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables*

$$p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty].$$

On appelle fonctions d'exposant ou simplement exposants les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour faire la différence entre les exposants variables et constants, nous utiliserons toujours la notation $p(\cdot)$ pour les fonctions d'exposant.

Pour une meilleure compréhension de cette définition, illustrons-la avec quelques exemples pratiques sur $\Omega = \mathbb{R}$:

- **Exposant fixe** : $p(x) = p$ avec $1 \leq p \leq \infty$.
- **Fonction à exposant variable borné** : $p(x) = 2 + \sin(x)$.
- **Exposant non borné** : $p(x) = x$ sur $(1, \infty)$ ou $p(x) = 1/x$ sur $(0, 1)$.

Les deux derniers exemples seront particulièrement pertinents pour mettre en évidence les différences essentielles entre les exposants bornés et non bornés.

2.1.1 Notation

Pour exprimer toutes les valeurs possibles d'une fonction d'exposant, nous présentons les quantités suivantes. On définit pour $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $E \subset \Omega$,

$$p_-(E) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x), \quad p_+(E) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x).$$

Si le domaine est clair, nous écrirons simplement $p_- = p_-(\Omega)$, $p_+ = p_+(\Omega)$. Nous définissons trois sous-ensembles canoniques de Ω :

$$\Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}, \quad \Omega_1^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}, \quad \Omega_*^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}.$$

Nous omettrons l'exposant $p(\cdot)$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

étant donné $p(\cdot)$, nous définissons la fonction d'exposant conjuguée $p'(\cdot)$ par la formule

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \quad x \in \Omega,$$

avec la convention mathématique $1/\infty = 0$.

La relation entre les bornes de l'exposant conjugué et de l'exposant original est la suivante :

$$(p'(\cdot))_+ = (p_-)', \quad (p'(\cdot))_- = (p_+)',$$

où $(p_-)'$ désigne le conjugué de la constante p_- .

2.1.2 Conditions de régularité

Definition 2.2. *Étant donné Ω et une fonction $p(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $p(\cdot)$ est localement log-Höldérienne, et on note ceci par $p(\cdot) \in LH_0(\Omega)$, s'il existe une constante C_0 telle que pour tous $x, y \in \Omega$ avec $|x - y| < 1/2$,*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log(|x - y|)}.$$

On dit que $p(\cdot)$ est log-Höldérienne à l'infini, et on note ceci par $p(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, s'il existe des constantes C_∞ et p_∞ telles que, pour tout $x \in \Omega$,

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}.$$

Si $p(\cdot)$ est log-Höldérienne localement et à l'infini, nous noterons ceci par $p(\cdot) \in LH(\Omega)$. Ainsi,

$$LH(\Omega) = LH_0(\Omega) \cap LH_\infty(\Omega).$$

Remark 2.1. Sharapudinov [1] a introduit la condition de continuité log-Hölder locale dans ses recherches liées aux espaces de Lebesgue variables. Par la suite, Cruz-Urbe, Fiorenza et Neugebauer [2] ont introduit la condition à l'infini, apportant ainsi une touche finale au cadre de régularité requis pour l'analyse harmonique.

Lemma 2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $p(\cdot) \in LH(\Omega)$. Alors il existe une fonction $\tilde{p}(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

1. $\tilde{p} \in LH(\mathbb{R}^n)$;
2. $\tilde{p}(x) = p(x)$ pour tout $x \in \Omega$;
3. $\tilde{p}_- = p_-$ et $\tilde{p}_+ = p_+$.

2.2 La modularité et la norme de Luxemburg

Definition 2.3. Soient Ω , $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et f une fonction mesurable. On définit la fonctionnelle de modularité (ou simplement la modularité) associée à $p(\cdot)$ par

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons simplement $\rho(f)$.

Remark 2.2. Lorsque l'ensemble $\Omega_\infty = \{x : p(x) = \infty\}$ possède une mesure positive, la modularité incorpore un élément L^∞ pour cette section du domaine. Si la fonction f n'est pas bornée sur Ω_∞ ,

ou si l'intégrale sur $\Omega \setminus \Omega_\infty$ ne converge pas, on définit $\rho(f) = +\infty$. Si $|\Omega_\infty| = 0$ (par exemple lorsque $p_+ < \infty$), le second terme s'efface et l'on obtient simplement $\rho(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx$.

Proposition 2.1. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors :

1. **Positivité** : $\rho(f) \geq 0$ et $\rho(|f|) = \rho(f)$.
2. **Annihilation** : $\rho(f) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.
3. **Finitude** : Si $\rho(f) < \infty$, alors $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$.
4. **Convexité** : ρ est convexe : étant donnés $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$,

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \rho(f) + \beta \rho(g).$$

5. **Préservation de l'ordre** : si $|f(x)| \geq |g(x)|$ p.p., alors $\rho(f) \geq \rho(g)$.
6. **Continuité** : si pour un certain $\Lambda > 0$, $\rho(f/\Lambda) < \infty$, alors la fonction $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur $[\Lambda, \infty)$. De plus, $\rho(f/\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Remark 2.3 (Inégalité triangulaire modulaire). La fonction modulaire ne respecte pas la propriété de triangulation classique. Cependant, si $p_+ < \infty$, on a l'estimation suivante :

$$\rho(f + g) \leq 2^{p_+ - 1} (\rho(f) + \rho(g)).$$

2.2.1 Norme de Luxemburg

Definition 2.4. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si f est une fonction mesurable, on définit

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot), \Omega}(f/\lambda) \leq 1 \right\}.$$

Si le membre de droite est vide, on définit alors $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \infty$.

Lorsque $p(\cdot) = p$ est constant, cette définition coïncide avec la norme classique $\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

2.2.2 Relation entre modularité et norme

Proposition 2.2. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$, alors $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leq 1$. De plus, $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$ pour toute f non triviale dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si et seulement si $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$.

Corollary 2.1. Fixons Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$;
- si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, alors $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.

Corollary 2.2. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, et supposons $|\Omega_\infty| = 0$.

- Si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, alors $\rho(f)^{1/p_+} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{1/p_-}$.
- Si $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\rho(f)^{1/p_-} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{1/p_+}$.

Exemple 2.1 (Cas $p_+ < \infty$). Soit $\Omega = (1, \infty)$ et $p(x) = 2$. Pour $f(x) = e^{-x}$, on a

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \left(\int_1^\infty e^{-2x} dx \right)^{1/2} < \infty,$$

et $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$.

Exemple 2.2 (Cas $p_+ = \infty$). Soit $\Omega = (1, \infty)$ et $p(x) = x$. Il existe une fonction f telle que $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$ mais $\rho(f) < 1$. Ainsi $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) < 1$.

2.2.3 Propriétés fondamentales de la norme

Theorem 2.1. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. La fonction $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ définit une norme sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Cette norme possède les propriétés suivantes (Cruz-Uribe & Fiorenza, 2013, Chapitre 2, Section 2.3, Théorème 2.17) :

- **Séparation** : $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ si et seulement si $f \equiv 0$;
- **Homogénéité** : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)}$;
- **Inégalité triangulaire** : $\|f + g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}$;

- **Conservation de l'ordre** : si $|f| \leq |g|$ presque partout, alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|g\|_{p(\cdot)}$;
- **Homogénéité par rapport à l'exposant** : si $|\Omega_\infty| = 0$ et $s \geq 1/p_-$, alors $\||f|^s\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{sp(\cdot)}^s$.

Exemple 2.3 (Positivité). Soit $\Omega = (0, 1)$ et $f(x) = x$. Alors

$$\rho(f) = \int_0^1 |x|^{p(x)}, dx \geq 0.$$

De plus,

$$\rho(|f|) = \int_0^1 ||x||^{p(x)}, dx = \rho(f).$$

Exemple 2.4 (Annihilation). Considérons la fonction nulle $f(x) = 0$ p.p. sur Ω . On a alors

$$\rho(f) = \int_\Omega 0^{p(x)}, dx = 0.$$

Réciproquement, si $\rho(f) = 0$, alors nécessairement

$$|f(x)|^{p(x)} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega,$$

d'où $f(x) = 0$ p.p. sur Ω .

Exemple 2.5 (Finitude). Soit $\Omega = (0, 1)$, $p(x) \equiv 2$, $f(x) = x$. Alors

$$\rho(f) = \int_0^1 x^2, dx \frac{1}{3} < \infty.$$

Ainsi, $f(x)$ est finie pour presque tout $x \in \Omega$.

Exemple 2.6 (Convexité). Soient $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, et supposons $p(x) \equiv 2$.

La convexité de la fonction $t \mapsto t^2$ donne

$$\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) \leq \frac{1}{2}, \rho(f) + \frac{1}{2}, \rho(g).$$

Ainsi, le modular ρ est une fonction convexe.

Exemple 2.7 (Préservation de l'ordre). Soient $f(x) = 2$, $g(x) = 1$, sur $\Omega = (0, 1)$. On a $|f(x)| \geq |g(x)| \quad \forall x \in \Omega$.

Si $p(x) \equiv 2$, alors $\rho(f) = \int_0^1 4, dx = 4$, et $\rho(g) = \int_0^1 1, dx = 1$. Par conséquent, $\rho(f) \geq \rho(g)$.

Exemple 2.8 (Continuité). Soit $\Omega = (0, 1)$, $p(x) \equiv 2$, $f(x) = 1$.

Pour tout $\lambda > 0$,

$$\rho! \left(\frac{f}{\lambda} \right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La fonction

$$\lambda \mapsto \rho! \left(\frac{f}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

est continue et décroissante sur $(0, +\infty)$.

De plus,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \rho! \left(\frac{f}{\lambda} \right)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2} = 0.$$

2.3 L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Definition 2.5. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Définissons $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions Lebesgue-mesurables f telles que $\rho(f/\lambda) < \infty$ pour un certain $\lambda > 0$. Définissons $L_{loc}^{p(\cdot)}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $f \in L^{p(\cdot)}(K)$ pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$.

Remark 2.4. D'après la Proposition 2.7(3), $\rho(f) < \infty \implies f$ finie p.p. On ne définit pas $L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f : \rho(f) < \infty\}$ afin d'obtenir un espace vectoriel lorsque $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) = \infty$ (cf. [3], pp. 18).

Exemple 2.9. Soit $\Omega = (1, \infty)$, $p(x) = x$, et $f(x) = 1$. Alors $\rho(f) = \infty$, mais pour tout $\lambda > 1$,

$$\rho(f/\lambda) = \int_1^\infty \lambda^{-x} dx = \frac{1}{\lambda \log \lambda} < \infty.$$

De même, si nous prenons $\Omega = (0, 1)$ et $p(x) = 1/x$, et de nouveau $f(x) = 1$, alors $\rho(f) < \infty$, mais $\rho(f/\lambda) = \infty$ pour tout $\lambda < 1$. Cette subtilité n'est nécessaire que si $p(\cdot)$ est non borné.

Exemple 2.10 (Exposant borné). Soit $\Omega = (0, 1)$ et $p(x) = 2 + \sin(2\pi x)$. Alors

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \iff \int_0^1 |f(x)|^{2+\sin(2\pi x)} dx < \infty.$$

Exemple 2.11 (Exposant non borné). Soit $\Omega = (1, \infty)$ et $p(x) = x$. Pour $f(x) = 1$, on a $\rho(f) = \infty$ mais $\rho(f/2) = \int_1^\infty 2^{-x} dx < \infty$, donc $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Pour $f(x) = 1/x$, on a $\rho(f) = \int_1^\infty x^{-x} dx < \infty$, donc $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et même $\rho(f) < \infty$.

2.3.1 Cas particuliers de l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Exposant constant

Lorsque $p(x) = p$ p.p. $x \in \Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ coïncide avec l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$. Dans ce cas, la norme de Luxemburg se réduit à la norme usuelle :

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

et pour $p = \infty$, $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Exposant en escalier

Soit $\Omega = E \cup F$ une partition mesurable, et définissons

$$p(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x \in E, \\ p_2 & \text{si } x \in F, \end{cases}$$

avec $p_1, p_2 \in [1, \infty]$. Alors

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \iff \int_E |f(x)|^{p_1} dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_F |f(x)|^{p_2} dx < \infty.$$

Exposant non borné ($p_+ = \infty$)

Si $p_+ = \infty$, l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ présente des propriétés radicalement différentes :

- Il peut contenir $L^\infty(\Omega)$ comme sous-espace ;
- Il n'est pas séparable ;
- Les fonctions bornées à support compact n'y sont pas denses en général.

Un exemple typique est donné par $\Omega = \mathbb{R}$ et $p(x) = 1 + |x|$.

Rôle de l'ensemble Ω_∞

On définit $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$. La modularité associée à $p(\cdot)$ s'écrit

$$\rho_{p(\cdot), \Omega}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

Ainsi, lorsque $|\Omega_\infty| > 0$, une partie de la norme est contrôlée par le terme L^∞ sur Ω_∞ .

Exposant proche de 1 ($p_- = 1$)

Si $p_- = 1$, l'opérateur maximal de Hardy–Littlewood M n'est pas borné sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. On ne peut pas espérer d'inégalité forte $\|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}$, mais on dispose encore d'inégalités de type faible ou d'inégalités modulaires avec des termes correctifs, souvent liées aux espaces $L \log L$.

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ comme cas particulier de structures plus larges

L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ s'inscrit dans deux cadres généraux :

- **Espaces de Musielak–Orlicz** : ils sont définis par une modularité $\Phi(x, t)$. Le cas $\Phi(x, t) = t^{p(x)}$ redonne exactement $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
- **Espaces de Banach de fonctions** : $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vérifie les axiomes d'un espace de Banach de fonctions, avec une norme de Luxemburg.

2.4 Inégalité de Hölder, norme associée et dualité

Après avoir défini la structure métrique de l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ via la modularité et la norme de Luxemburg, il est essentiel d'établir des outils permettant de manipuler les produits de fonctions et de caractériser son espace dual.

2.4.1 Inégalité de Hölder généralisée

Theorem 2.2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Pour toutes fonctions $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, le produit fg appartient à $L^1(\Omega)$ et l'on a

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)},$$

où la constante $K_{p(\cdot)}$ est définie par

$$K_{p(\cdot)} = \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1 \right) \|\chi_{\Omega_*}\|_{\infty} + \|\chi_{\Omega_1}\|_{\infty} + \|\chi_{\Omega_{\infty}}\|_{\infty}.$$

Remark 2.5 (Cas particuliers). • Dans le cas constant $p(\cdot) = p$, on a $K_p = 1$ et l'on retrouve l'inégalité classique.

- Lorsque $p(\cdot)$ n'est pas constant, on a $1 < K_{p(\cdot)} \leq 4$.
- Si $p(x) = q(x) = 2$ p.p., cette inégalité se réduit à une variante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.4.2 Norme associée et équivalence

Definition 2.6. Pour toute fonction mesurable f , on définit la norme associée (ou norme duale) par

$$\|f\|'_{p(\cdot)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx : g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega), \|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1 \right\}.$$

Theorem 2.3 (équivalence des normes). Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Pour toute fonction mesurable f , on a $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si et seulement si $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$. De plus, il existe des constantes $k_{p(\cdot)}$ et $K_{p(\cdot)}$

telles que

$$k_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|'_{p(\cdot)} \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)},$$

avec

$$\frac{1}{k_{p(\cdot)}} = \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty, \quad k_{p(\cdot)} \geq \frac{1}{3}.$$

2.4.3 Conséquences et applications

Corollary 2.3 (Généralisation à trois fonctions). *Soient $r(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $p(\cdot)$ défini par $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$. Alors il existe une constante K telle que pour toutes fonctions $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$, on a $fg \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\|fg\|_{p(\cdot)} \leq K \|f\|_{q(\cdot)} \|g\|_{r(\cdot)}$.*

Corollary 2.4 (Inégalité intégrale de Minkowski). *Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, et $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour presque tout $y \in \Omega$, $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Alors*

$$\left\| \int_{\Omega} f(\cdot, y) dy \right\|_{p(\cdot)} \leq k_{p(\cdot)}^{-1} K_{p(\cdot)} \int_{\Omega} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} dy.$$

Theorem 2.4 (Dualité et réflexivité). *Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $p_+ < \infty$, alors l'application $g \mapsto \Phi_g$ est un isomorphisme : étant donnée n'importe quelle fonctionnelle linéaire continue $\Phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^*$, il existe une unique $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ telle que $\Phi = \Phi_g$ et $\|g\|_{p'(\cdot)} \approx \|\Phi\|$. De plus, si $p_- > 1$, alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est réflexif.*

2.5 Plongements et comparaison avec le cas classique

2.5.1 Plongement de $L^\infty(\Omega)$ dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Proposition 2.3. *Soit Ω un ensemble et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a l'inclusion $L^\infty(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si et seulement si $1 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, ce qui est vrai si et seulement s'il existe $\lambda > 1$ tel que*

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{-p(x)} dx < \infty.$$

En particulier, l'inclusion est vérifiée si $|\Omega| < \infty$ ou si $1/p(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ et $p(x) \rightarrow \infty$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

2.5.2 Plongement $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Theorem 2.5. Soient $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a une inclusion continue $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si et seulement si :

1. $p(x) \leq q(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$;
2. Il existe $\lambda > 1$ tel que $\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty$, où $D = \{x \in \Omega : p(x) < q(x)\}$ et $r(\cdot)$ est l'exposant de défaut défini par $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$.

2.5.3 Cas particulier : $|\Omega| < \infty$

Corollary 2.5. Soient Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Supposons $|\Omega| < \infty$. Alors il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|f\|_{p^-} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq c_2 \|f\|_{p^+}.$$

Ainsi, sur un domaine borné, la norme variable est équivalente à une norme classique L^{p^-} ou L^{p^+} selon la taille de la fonction.

2.6 Complétude, densité et séparabilité

2.6.1 Complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Theorem 2.6. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ muni de la norme de Luxemburg est un espace de Banach ; c'est-à-dire qu'il est complet : toute suite de Cauchy dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge en norme.

Exemple 2.12 (Illustration de la complétude dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$). Soit $\Omega = (0, 1)$ et considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, \quad x \in (0, 1).$$

On remarque que :

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = 1 \quad \text{presque partout sur } \Omega.$$

Supposons que $p(x) \equiv p$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors, pour tout $x \in (0, 1)$,

$$|f_n(x) - 1| = |x^{1/n} - 1| \longrightarrow 0.$$

De plus, on peut montrer que la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ (et donc dans $L^p(\Omega)$ dans ce cas particulier).

Par le théorème de complétude, il existe une fonction $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ telle que :

$$\|f_n - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Ici, la limite est précisément la fonction constante : $f(x) = 1$. Cet exemple illustre concrètement que toute suite de Cauchy dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge vers une fonction appartenant encore à l'espace, ce qui confirme sa complétude.

2.6.2 Sous-ensembles denses

Fonctions bornées à support compact

Theorem 2.7. Soit Ω un ouvert et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Supposons que $p_+ < \infty$. Alors l'ensemble des fonctions bornées à support compact avec $(f) \subset \Omega$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Conséquences : $C_c(\Omega)$ et fonctions simples

Corollary 2.6. Soit Ω un ouvert et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Supposons $p_+ < \infty$. Alors les ensembles $C_c(\Omega)$ et $S_0(\Omega)$ sont denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Remark 2.6. La condition $p_+ < \infty$ est essentielle : si $p_+ = \infty$, ces ensembles ne sont plus denses.

Séparabilité

Theorem 2.8. Soient Ω un ouvert et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable si et seulement si $p_+ < \infty$.

Example 2.13 (Illustration de la séparabilité). Soit $\Omega = (0, 1)$ et considérons l'exposant constant $p(x) \equiv p$, $1 \leq p < \infty$. On sait que $L^p(0, 1)$ est séparable. Une partie dense dénombrable est donnée par l'ensemble des fonctions simples à valeurs rationnelles :

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^n q_k \chi_{A_k}; ; q_k \in \mathbb{Q}; ; A_k \text{ intervalles à bornes rationnelles}.$$

Cet ensemble est dénombrable et dense dans $L^p(0, 1)$.

Ainsi, toute fonction $f \in L^p(0, 1)$ peut être approchée dans la norme L^p par une suite de fonctions de $\mathcal{D}$.

Cela illustre le fait que lorsque $p_+ < \infty$, l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable.

En revanche, si $p_+ = \infty$, il n'existe plus de sous-ensemble dénombrable dense, ce qui entraîne la non-séparabilité de l'espace.

The Applications of Classical Lebesgue Spaces and Variable Exponent Lebesgue Spaces

3.1 The Applications of Classical Lebesgue Spaces

3.1.1 Problème de Dirichlete

Considérons le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Résolution par la méthode de Fourier. Soit $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres du Laplacien :

$$-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k \in H_0^1(\Omega),$$

avec

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty.$$

Comme $\{\varphi_k\}$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$, on développe f sous la forme :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad a_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2}.$$

On cherche la solution sous la forme :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k.$$

En appliquant l'opérateur $-\Delta$, on obtient :

$$-\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k \varphi_k.$$

Puisque $-\Delta u = f$, on identifie les coefficients :

$$b_k \lambda_k = a_k,$$

d'où

$$b_k = \frac{a_k}{\lambda_k}.$$

Ainsi,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Existence de la solution

On vérifie que

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k}.$$

Comme $\lambda_k \geq \lambda_1 > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Or, par l'identité de Parseval,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Donc

$$\|\nabla u\|_{L^2} < \infty,$$

ce qui implique

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi, la solution existe.

Vérification de l'équation

Chaque fonction propre vérifie :

$$-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k.$$

Alors

$$-\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} (-\Delta\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k = f.$$

De plus, comme $\varphi_k = 0$ sur $\partial\Omega$, on a aussi

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Unicité de la solution

Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 . Posons

$$w = u_1 - u_2.$$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En multipliant par w et en intégrant :

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 0.$$

Donc

$$\nabla w = 0,$$

ce qui montre que w est constante. Comme $w = 0$ sur le bord, on obtient

$$w = 0.$$

Ainsi,

$$u_1 = u_2.$$

La solution est donc unique.

Conclusion

Le problème de Dirichlet admet une unique solution :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

avec

$$a_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{L^2}.$$

La méthode de Fourier consiste à développer le second membre f sur la base des fonctions propres du Laplacien, puis à résoudre l'équation coefficient par coefficient.

□

3.1.2 Probleme

Résoudre le problème non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$1 < p < N, \quad p < q < p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Résolution variationnelle. On considère la fonctionnelle d'énergie définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ par

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx.$$

Le but est de montrer que cette fonctionnelle admet un minimiseur, qui sera une solution faible du problème.

1. Coercivité de la fonctionnelle

D'après l'inégalité de Sobolev,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

car $q < p^*$.

Ainsi,

$$E(u) \geq \frac{1}{p} \|\nabla u\|_{L^p}^p - \frac{C}{q} \|\nabla u\|_{L^p}^q.$$

Comme $q > p$, le terme principal reste contrôlé et

$$E(u) \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } \|u\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \infty.$$

Donc E est coercive.

2. Semi-continuité faible inférieure

Le terme

$$u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

est convexe et faiblement semi-continu inférieur.

De plus, comme $q < p^*$, l'injection

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compacte. Ainsi, si

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega),$$

alors

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^q(\Omega).$$

On obtient donc

$$\int_{\Omega} |u_n|^q dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^q dx.$$

Par conséquent, E est faiblement semi-continue inférieurement.

3. Existence d'un minimiseur

Soit $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite minimisante :

$$E(u_n) \rightarrow \inf E.$$

La coercivité montre que (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme cet espace est réflexif, il existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par semi-continuité faible inférieure,

$$E(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n).$$

Donc

$$E(u_0) = \inf E.$$

Ainsi, u_0 réalise le minimum de E .

4. Vérification de l'équation

Comme u_0 est un minimiseur, on a

$$E'(u_0) = 0.$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\left. \frac{d}{dt} E(u_0 + tv) \right|_{t=0} = 0.$$

On obtient alors

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} |u_0|^{q-2} u_0 v \, dx.$$

C'est exactement la formulation faible de :

$$-\Delta_p u_0 = |u_0|^{q-2} u_0.$$

Donc u_0 est une solution faible du problème.

5. Unicité de la solution

En général, pour ce problème non linéaire, l'unicité n'est pas toujours garantie. Cependant, grâce à la monotonie stricte de l'opérateur p -Laplacien, la solution faible est unique dans certains cas particuliers.

Conclusion

Le problème admet au moins une solution faible

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

obtenue comme minimiseur de la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx.$$

La méthode variationnelle consiste à transformer l'équation différentielle en un problème de minimisation dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

3.2 The Applications of Variable Exponent Lebesgue Spaces

3.2.1 probleme

Résoudre le problème à exposant variable :

$$-\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $f \in L^{p'(x)}(\Omega)$.

Résolution (cadre variationnel et opérateur monotone). **1. Cadre fonctionnel**

On travaille dans l'espace de Sobolev à exposant variable

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

On définit l'opérateur non linéaire :

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Le problème devient :

$$A(u) = f \quad \text{dans } (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*.$$

2. Monotonie de l'opérateur

On utilise l'inégalité vectorielle :

$$\left(|\xi|^{p(x)-2} \xi - |\eta|^{p(x)-2} \eta \right) \cdot (\xi - \eta) \geq 0,$$

pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$.

En intégrant, on obtient :

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0,$$

donc A est monotone.

De plus, la monotonie est stricte, ce qui garantit l'unicité.

3. Coercivité

On a :

$$\langle A(u), u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

Donc

$$\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{W^{1,p(x)}}} \rightarrow +\infty \quad \text{quand } \|u\|_{W^{1,p(x)}} \rightarrow \infty.$$

Ainsi, A est coercif.

4. Hémicontinuité

Pour tout $u, v, w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, la fonction

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$$

est continue. Donc A est hémicontinu.

5. Existence (théorème de Minty–Browder)

L'opérateur A est :

- monotone,
- coercif,
- hémicontinu,
- défini sur un espace réflexif.

Par le théorème de Minty–Browder, A est surjectif, donc il existe $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que :

$$A(u) = f.$$

6. Unicité de la solution

Soient u_1, u_2 deux solutions. On pose $w = u_1 - u_2$.

Alors :

$$\langle A(u_1) - A(u_2), w \rangle = 0.$$

Par la monotonie stricte :

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq C \|u_1 - u_2\|^2 = 0,$$

d'où

$$u_1 = u_2.$$

Conclusion

Il existe une unique solution faible

$$u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

du problème :

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f,$$

obtenue via l'opérateur monotone A et le théorème de Minty–Browder.

□

Bibliography

- [1] Sharapudinov, I. I. (1986). *On the topology of the space $L^{p(x)}(0, 1)$* . Mathematical Notes, 39(1), 35-44.
- [2] Cruz-Urbe, D., Fiorenza, A., & Neugebauer, C. J. (2003). *The maximal function on variable Lebesgue spaces*. Annals of Mathematics, 173(2), 1-28.
- [3] Cruz-Urbe, D., & Fiorenza, A. (2013). *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Birkhäuser.
- [4] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., & Růžička, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Springer-Verlag.
- [5] Auteur(s) de l'article 2013. (2013). *Titre de l'article*. Nom de la revue, volume(numéro), pages.
(À compléter par la référence exacte)
- [6] Browder, F. E. (1968). *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 18(2), 1-308.
- [7] Lions, P. L. (1984). *The concentration-compactness principle in the calculus of variations*. Annales de l'Institut Henri Poincaré C, 1(4), 223-283.
- [8] Blanchard, D., & Murat, F. (1994). *Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data: existence and uniqueness*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 124(6), 1101-1136.

Abstract

Lebesgue spaces are fundamental in functional analysis and the theory of partial differential equations. They extend the classical notion of integrability based on Riemann integration by relying on measure theory. The spaces $L^p(\Omega)$ classify functions according to the integrability of $|f|^p$ and form Banach spaces, while $L^2(\Omega)$ is a Hilbert space.

However, constant-exponent L^p spaces are not suitable for modeling heterogeneous phenomena where properties vary locally. This limitation motivates the introduction of variable exponent spaces $L^{p(x)}(\Omega)$, where the exponent depends on the spatial position. These spaces are widely used in applications such as fluid mechanics and image processing.

Résumé

Les espaces de Lebesgue jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle et dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Ils permettent de généraliser la notion d'intégrabilité au sens de Riemann en adoptant une approche basée sur la mesure et l'intégration. Les espaces $L^p(\Omega)$ classifient les fonctions selon l'intégrabilité de $|f|^p$ et possèdent une structure de Banach, tandis que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Cependant, les espaces L^p à exposant constant ne permettent pas de modéliser des phénomènes hétérogènes où les propriétés varient localement. Cela a conduit à l'introduction des espaces à exposant variable $L^{p(x)}(\Omega)$, où l'exposant dépend de la position. Ces espaces sont essentiels dans de nombreux modèles appliqués, notamment en mécanique des fluides et en traitement d'images.

ملخص

تُعتبر فضاءات ليبيغ شديدة من أهم الأدوات في التحليل الدالي ونظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، حيث تعمم مفهوم التكامل الكلاسيكي المعتمد على ريمان باستخدام نظرية القياس. تصنف فضاءات $L^p(\Omega)$ الدوال حسب قابلية تكامل $|f|^p$ ، وهي فضاءات باناخ، بينما يشكل $L^2(\Omega)$ فضاء هيلبرت. غير أن فضاءات L^p ذات الأس الثابت لا تسمح بنمذجة الظواهر غير المتجانسة التي تتغير خصائصها محلياً. لذلك تم تطوير فضاءات الأس المتغير $L^{p(x)}(\Omega)$ ، حيث يعتمد الأس على الموضع. وتستخدم هذه الفضاءات في تطبيقات عديدة مثل ميكانيك الموائع ومعالجة الصور.