



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

Stabilité des solutions pour un problème hyperbolique linéaire avec retard

Présenté par :

M^{elle} DJIDEL Bochra

Soutenu publiquement le : 19/06/2022.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r NOUIRI</i> Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
Encadreur :	<i>M^r BENABDERRAHMANE</i> Benyattou	Prof,	Université de M'sila
Examineur :	<i>M^r GAGUI</i> Bachir	M.C.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2021/2022

Remerciements

Je remercie d'abord ALLAH qui m'a donné la volonté de réaliser de ce modeste mémoire.

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadrante, Pr : **Benyattou Benabderrahmane** pour avoir accepté de m'encadrer sur mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et ses encouragements.*

*Je tiens également à remercier Dr : **Limam Abdelaziz**, qui m'a aidé à réaliser ce mémoire*

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur ce travail.

Aussi mes remerciements à tout les enseignants de département de mathématiques, en particulier mes professeurs de la spécialité.

Equations aux dérivées partielles et applications.

Enfin, je ne veux pas oublier de remercier tous ceux qui m'ont aidé à faire ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail,

A mes chers parents, source de vie, d'amour et de d'affection.

A ceux que j'aime beaucoup mes frères et mes soeurs qui m'ont soutenue tout au long de mon projet.

A tous mes amies et à tous ceux que j'aime,

A toute ma famille du département de mathématiques.

Bohra

Table des matières

Introduction générale	6
1 Rappel sur la théorie des opérateurs linéaires	8
1.1 Opérateurs linéaires	8
1.2 Semi-groupe uniformément continue	9
1.3 Semi-groupe fortement continue	10
1.4 Espace de Sobolev	11
1.4.1 Définition, Propriétés	11
1.4.2 Quelques inégalités utiles	12
1.4.3 Théorèmes	13
2 Existence globale et unicité de la solution d'un problème hyperbolique linéaire avec retard	14
2.1 Position du problème	14
2.2 Existence globale et unicité de la solution	14
3 la stabilité exponentielle de la solution d'un problème hyperbolique linéaire avec retard	24
3.1 Décroissance exponentielle	24
3.2 Cas d'instabilité	31
Bibliographie	38

Introduction générale

Les équations différentielles en retard surviennent dans certains modèles dont l'état à un instant donné, est une fonction qui dépend de son passé. On peut rencontrer ces équations dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie . . . etc. En effet, dans certains phénomènes, on s'est aperçu que la connaissance de la solution en un point ne suffit pas pour décrire l'évolution sur un intervalle de temps donné.

Dans [8], Nicaise and Cristina ont considéré le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{du}{dn}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 u_t(x, t - \tau), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \text{dans } \Gamma_N \times (0, \tau). \end{array} \right.$$

Où Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2 . On suppose que Γ est divisé en deux parties disjointes Γ_D et Γ_N , c'est-à-dire $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$ et $(\Gamma_D) \neq \emptyset$, où $\nu(x)$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur au point $x \in \Gamma$ et $\frac{du}{dn}$ est la dérivée normale. De plus, $\tau > 0$ représente le temps de retard, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ sont les coefficients de retard, et les condition initiales (u_0, u_1, f_0) appartient à un espace convonable.

Le retard est une source d'instabilité, et un retard peut déstabiliser un système qui est asymptotiquement stable en l'absence de retard (voir [2]).

Dans ce travail, on s'intéresse au travail présenté par Nicaise. Plus précisément, nous allons

considérer le même problème dans [8] pour lequel nous allons suivre les différentes étapes considérées avec quelques détails complémentaires qui nous permettent, d'un coté d'apprendre les différentes techniques utilisées et d'autre coté de savoir utiliser la théorie de semi-groupes pour d'autres problèmes similaires. Ce mémoire est composé de trois chapitres précédés d'une introduction générale.

Dans le première chapitre, nous allons donner quelques rappelés sur la théorie des opérateurs ainsi que les principaux théorèmes d'existence et d'unicité basant sur la théorie de semi-groupes.

Dans le seconde chapitre, on considère un problème hyperbolique linéaire avec retard pour les équations des ondes. Sous certaines conditions sur les données, on montre l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant la théorie de semi-groupe, en particulier le théorème de Lumer-Phillips (voir [9]).

Dans le dernier chapitre, on considère le même problème considéré dans le chapitre précédent. Sous certaines conditions supplémentaires sur les données, on établit la stabilité exponentielle en se utilisant la méthode d'énergie. De plus, on donne un exemple pour le cas d'un problème où la stabilité n'est pas obtenue à l'aide de la fonctionnelle de Lyapunov.

RAPPEL SUR LA THÉORIE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES

Dans ce chapitre nous présentons quelques rappels sur la théorie des opérateurs linéaires et les espaces de Sobolev. On commence par donner les notions principales sur les opérateurs linéaires et les théorèmes essentiels basant sur la théorie des semi-groupes. On termine par rappels sur les espaces de Sobolev et les inégalités les plus importantes utilisées dans les deux derniers chapitres.

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1. Un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X$ à valeurs dans X , où $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ s'appelle le domaine de l'opérateur \mathcal{A} .

Définition 1.2 ([1]). Un opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, linéaire (non borné) dans \mathcal{H} , est dissipatif si

$$\forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \Re \langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq 0.$$

Définition 1.3 ([1]). Un opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, linéaire (non borné) dans \mathcal{H} , est m -dissipatif si

1. \mathcal{A} est dissipatif.
2. $\forall f \in \mathcal{H}, \forall \lambda > 0, \exists v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que

$$(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})v = f.$$

Corollaire 1.1 ([1]). Si \mathcal{A} est un opérateur m -dissipatif alors \mathcal{A} est fermé et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans \mathcal{H} .

Définition 1.4 ([1]). L'ensemble résolvante $\rho(\mathcal{A})$ d'un opérateur \mathcal{A} est

$$\rho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{ed} - \mathcal{A} \text{ est inversible} \},$$

si $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, on définit la résolvant $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} au point $\rho(\mathcal{A})$ par

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = (\lambda I_{ed} - \mathcal{A})^{-1}.$$

Définition 1.5 ([1]). Soit \mathcal{A} un opérateur, le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est le complément de l'ensemble résolvant, i.e.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{ed} - \mathcal{A} \text{ n'est pas inversible}\}.$$

1.2 Semi-groupe uniformément continue

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupe, qui sont nécessaires dans la suite de ce travail.

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée $\|\cdot\|_X$.

Définition 1.6 ([9]). Une famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe fortement continu sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1. $T(0) = I_{ed}$ (I_{ed} l'opérateur identité dans X).
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s, t \geq 0$.

Définition 1.7 ([9]). On dit qu'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est uniformément continu sur X , s'il vérifie

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I_{ed}\| = 0.$$

Définition 1.8 ([9]). On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur \mathcal{A} , défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

et

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Théorème 1.1 ([9]). Un opérateur linéaire \mathcal{A} est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur X , si et seulement si \mathcal{A} est un opérateur linéaire borné sur X .

Théorème 1.2 ([9]). Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés, si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I_{ed}}{t} = \mathcal{A} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I_{ed}}{t},$$

alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.

1.3 Semi-groupe fortement continue

Définition 1.9 ([9]). Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu sur X est appelé semi groupe de classe C_0 ou C_0 -semi groupe.

Théorème 1.3 ([9]). Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe sur X , alors ils existent des constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$, telles que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Corollaire 1.2 ([9]). Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe et \mathcal{A} son générateur infinitésimal continu d'opérateurs linéaires bornés, alors

1. Il existe une constante $w \geq 0$ telle que : $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.
2. Il existe un opérateur linéaire borné \mathcal{A} tel que un semi group défini par $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ de sorte que \mathcal{A} est son générateur.
3. L'application $t \rightarrow T(t)$ est différentiable, et on a

$$\frac{d}{dt}T(t) = T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}T(t)$$

Proposition 1.1. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe sur X . Alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \rightarrow T(t)x$ est continue de \mathbb{R}^+ dans X .

Théorème 1.4 ([9]). Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe sur X et \mathcal{A} son générateur infinitésimal , alors

1. Pour $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

2. Pour $x \in X$, alors $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a

$$\mathcal{A} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0.$$

3. Pour $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et on a

$$\frac{dT(t)x}{dt} = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x, \quad \forall t \geq 0.$$

4. Pour $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}x \, d\tau = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)x \, d\tau.$$

Proposition 1.2. Si \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X , alors

1. Le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X .
2. \mathcal{A} est un opérateur linéaire fermé.

Théorème 1.5. (Théorème de Hille-Yosida)[9] Un opérateur linéaire non borné (\mathcal{A} , $\mathcal{D}(\mathcal{A})$) dans un espace de Banach X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. \mathcal{A} est fermé.
2. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X .
3. L'ensemble $\rho(\mathcal{A})$ contient \mathbb{R}_*^+ et pour tout $\lambda > 0$, on a $\|\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Théorème 1.6. (Théorème Lumer-Phillips)[9] Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dense dans X .

1. Si \mathcal{A} est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathcal{I}m(\lambda_0 I_{ed} - \mathcal{A}) = X$, alors \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contractions sur X .
2. Si \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contractions sur X , alors $\mathcal{I}m(\lambda_0 I_{ed} - \mathcal{A}) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et \mathcal{A} est un opérateur dissipatif. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et tout $x^* \in F(x)$ on a $\mathcal{R}e \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0$.

1.4 Espace de Sobolev

1.4.1 Définition, Propriétés

Définition 1.10 ([1]). Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $m \geq 2$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Où $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

On remarque

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Et l'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $u, v \in H^m(\Omega)$.

Propriétés 1.1.

1. Pour $m = 1$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), Du \in L^p(\Omega)\},$$

où Du désigne la dérivée partielle d'ordre 1 de u au sens de distributions.

On pose $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$, telle que $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions.

2. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on denote par $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ (resp $H_0^1(\Omega)$ si $p = 2$),

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Théorème 1.7. (Formule de Green) Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$-\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale sur Γ .

1.4.2 Quelques inégalités utiles

Dans ce paragraphe nous allons donner quelques inégalités essentielles qui seront d'une grande utilité dans la suite de ce mémoire

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note q l'exposant conjugué

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Théorème 1.8. (Inégalité de Hölder) Supposons que $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $u, v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Corollaire 1.3. (Inégalité de Cauchy-Schwartz) Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière régulière Γ .

Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$(u, v) \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.9. (Inégalité de Young) Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $\delta > 0$,

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

Théorème 1.10. (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.4.3 Théorèmes

Théorème 1.11 ([1]). (Théorème de Lax-Milgram) Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert réel et $a(., .)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur \mathcal{H} . Alors, il existe $u \in \mathcal{H}$ solution unique du problème.

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

où L est une forme linéaire continue sur H .

Théorème 1.12 ([7]). (Unicité de Holmgren) Soit $T > 2d(\Omega, T_0)$. Alors toute solution faible φ du problème

$$\varphi'' - \Delta\varphi = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[,$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[,$$

telle que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[,$$

vérifie $\varphi = 0$.

EXISTENCE GLOBALE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME HYPERBOLIQUE LINÉAIRE AVEC RETARD

Dans ce chapitre, un problème aux limites hyperbolique linéaire avec retard a été considéré. Sous certaines hypothèses sur les données, on démontre l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant la théorie de semi-groupes.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2 , on suppose que Γ est divisé en deux parties disjointes Γ_D et Γ_N , c'est-à-dire $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$ et $\Gamma_D \neq \emptyset$.

On considère un problème d'équation d'onde avec retard sur la frontière

$$(P) : \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{du}{d\nu}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 u_t(x, t - \tau), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \text{dans } \Gamma_N \times (0, \tau), \end{cases}$$

où $\nu(x)$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur au point $x \in \Gamma$ et $\frac{du}{d\nu}$ est la dérivée normale. De plus, $\tau > 0$ représente le temps de retard, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ sont les coefficients de retard, et les conditions initiales (u_0, u_1, f_0) appartient à des espaces convenables qu'on précisera ultérieurement.

2.2 Existence globale et unicité de la solution

Dans cette section, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) , en utilisant le théorème de Lumer-Phillips.

Nous introduisons une nouvelle variable suivante :

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in \Gamma_N, \rho \in (0, 1), t > 0.$$

Comme les dérivées sont données par

$$\frac{dz}{dt}(x, \rho, t) = \frac{du}{dy},$$

et

$$\frac{dz}{d\rho}(x, \rho, t) = -\tau \frac{du}{dy}.$$

Donc

$$\frac{dz}{d\rho}(x, \rho, t) = -\tau \frac{dz}{dt}(x, \rho, t),$$

alors, nous trouvons l'équation

$$\tau \frac{dz}{dt}(x, \rho, t) + \frac{dz}{d\rho}(x, \rho, t) = 0, \quad x \in \Gamma_N, \rho \in (0, 1), t > 0.$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} z(x, 0, t) = u_t(x, t), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\tau\rho), & \text{dans } \Gamma_N \times (0, 1). \end{cases}$$

Par conséquent, le problème (P) est équivalent à

$$(P_1) : \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tau \frac{dz}{dt}(x, \rho, t) + \frac{dz}{d\rho}(x, \rho, t) = 0, & \text{dans } \Gamma_N \times (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{du}{dn}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 z(x, 1, t), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ z(x, 0, t) = u_t(x, t), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\tau\rho), & \text{dans } \Gamma_N \times (0, 1). \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{H} l'espace de Hilbert, où

$$\mathcal{H} = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_N \times (0, 1)).$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_1) , nous supposons que

$$\mu_2 \leq \mu_1,$$

et ξ une constante positive telle que

$$\tau\mu_1 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2). \quad (2.1)$$

Définissons sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u(x) \nabla \tilde{u}(x) + v(x) \tilde{v}(x)) dx + \xi \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z(x, \rho) \tilde{z}(x, \rho) d\rho d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $U = (u, v, z)$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ et ξ est une constante positive.

Maintenant, on réécrit le système (P_1) sous forme d'un problème de Cauchy. On définit la fonction vectorielle $U = (u, v, z)^T \in \mathcal{H}$ et on pose $v = u_t$ donc le problème (P_1) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = (u_0, u_1, f_0(\cdot, -\tau))^T. \end{cases}$$

L'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$ est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ -\tau^{-1} z_\rho \end{pmatrix},$$

avec le domaine de \mathcal{A} , est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \left\{ (u, v, z)^T \in (E(\Delta, L^2(\Omega)) \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma_N; H^1(0, 1)) : \right. \\ &\quad \left. \frac{du}{dv} = -\mu_1 v - \mu_2 z(\cdot, 1) \text{ sur } \Gamma_N; v = z(\cdot, 0) \text{ sur } \Gamma_N \right\}, \end{aligned}$$

tel que

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \},$$

et

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}.$$

Rappelons que pour une fonction $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\frac{du}{dv}$ appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et la formule de Green suivante est valable [10]

$$\int_{\Omega} \Delta u w dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx + \left\langle \frac{du}{d\nu}, w \right\rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_N}$ est le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$.

Notez que pour $(u, v, z)^T \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\frac{du}{d\nu} \in L^2(\Gamma_N)$ puis que $z(\cdot, 1) \in L^2(\Gamma_N)$.

Remarque 2.1. on a $\mathcal{D}(A)$ est dense en \mathcal{H} .

Pour prouver l'existence et l'unicité, nous utilisons le théorème de Lumer-Phillips, c'est-à-dire, nous montrons que l'opérateur \mathcal{A} génère un C_0 -semi groupe sur \mathcal{H} . Donc, on a besoin le lemme suivant :

Lemme 2.1. Pour tout $U = (u, v, z)^T \in \mathcal{D}(A)$, \mathcal{A} est déssipatif et $(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})$ est surjectif avec $\lambda > 0$.

Démonstration. Pour prouver le lemme proposé, on passe par deux étapes.

Étape 1 : L'opérateur \mathcal{A} est déssipatif.

Pour tout $U = (u, v, z) \in \mathcal{D}(A)$ et en utilisant le produit scalaire (2.2).

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ -\tau^{-1}z_{\rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v(x) \nabla u(x) + \Delta u(x) v(x)) dx - \xi \tau^{-1} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho d\Gamma. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle = \int_{\Gamma_N} \frac{du}{d\nu}(x) v(x) d\Gamma - \xi \tau^{-1} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho d\Gamma. \quad (2.3)$$

A l'aide d'intégration par parties et les conditions aux limites, on obtient

$$\int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho d\Gamma = - \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho d\Gamma + \int_{\Gamma_N} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) d\Gamma,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) d\Gamma. \quad (2.4)$$

Donc, par (2.3) et (2.4)

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x) \, d\Gamma - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} (z^2(x,1) - z^2(x,0)) \, d\Gamma \\
&= - \int_{\Gamma_N} (\mu_1 v^2(x) + \mu_2 z(x,1)v(x)) \, d\Gamma - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} (z^2(x,1) - v^2(x)) \, d\Gamma \\
&= -\mu_1 \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1)v(x) \, d\Gamma \\
&\quad - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) \, d\Gamma + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

On pose

$$I = -\mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1)v(x) \, d\Gamma.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
I &\leq \mu_2 \|z(x,1)\|_2 \|v(x)\|_2 \\
&\leq \frac{\mu_2}{2} (\|z(x,1)\|_2^2 + \|v(x)\|_2^2).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle &\leq -\mu_1 \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) \, d\Gamma + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma \\
&\quad - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) \, d\Gamma + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma \\
&\leq \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \right) \int_{\Gamma_N} v^2(x) \, d\Gamma + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \right) \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

D'après (2.2), on a

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \leq 0,$$

et

$$\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \leq 0.$$

Donc

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle \leq 0.$$

Alors, \mathcal{A} est dissipatif.

Etape 2 : $(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})$ est surjectif avec $\lambda > 0$.

Pour $\lambda > 0$, on montre que l'opérateur $(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})$ est surjectif. Soit $F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$, nous montrons qu'il existe $U \in \mathcal{D}(A)$ tel que

$$(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})U = F.$$

C'est-à-dire

$$(\lambda I_{ed} - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix},$$

équivalent à dire

$$\begin{cases} \lambda u - v = f, \\ \lambda v - \Delta u = g, \\ \lambda z + \tau^{-1} z_\rho = h. \end{cases} \quad (2.5)$$

D'après la première équation de (2.5), on obtient

$$v = \lambda u - f. \quad (2.6)$$

A partir de la troisième équation de (2.5), on a

$$z_\rho(x, \rho) = -\lambda \tau z(x, \rho) + \tau h(x, \rho), \quad x \in \Gamma_N, \rho \in (0, 1),$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

On utilise la méthode de variation de la constante, on obtient

$$z(x, \rho) = \left(\tau \int_0^\rho h(x, \delta) e^{\lambda \tau \delta} d\delta + k \right) e^{-\lambda \tau \rho}, \quad x \in \Gamma_N, \rho \in (0, 1),$$

où k est une constante.

D'après les conditions aux limites du (P_1) , on a

$$z(x, 0) = v(x) = k, \quad x \in \Gamma_N.$$

Alors

$$z(x, \rho) = v(x) e^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho h(x, \delta) e^{\lambda \tau \delta} d\delta, \quad x \in \Gamma_N, \rho \in (0, 1).$$

Donc, à partir de (2.6)

$$z(x, \rho) = \lambda u(x)e^{-\lambda\rho} - f(x)e^{-\lambda\rho} + \tau e^{-\lambda\rho} \int_0^\rho h(x, \delta)e^{\lambda\tau\delta} d\delta, \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, 1).$$

En particulier

$$z(x, 1) = \lambda u(x)e^{-\lambda\tau} + z_0(x), \quad x \in \Gamma_N. \quad (2.7)$$

Avec $z_0 \in L^2(\Gamma_N)$ défini par

$$z_0(x) = -f(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 h(x, \delta)e^{\lambda\tau\delta} d\delta, \quad x \in \Gamma_N.$$

D'après la première et la deuxième equations de (2.5), satisfait

$$\lambda(\lambda u - f) - \Delta u = g,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 u - \Delta u = g + \lambda f. \quad (2.8)$$

En multipliant l'équation (2.8) par une fonction $w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} (\lambda^2 u - \Delta u)w \, dx = \int_{\Omega} (g + \lambda f)w \, dx, \quad \forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (2.9)$$

D'après la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda^2 u - \Delta u)w \, dx &= \int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) \, dx - \int_{\Gamma_N} \frac{du}{d\nu} w d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) \, dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 v + \mu_2 z(x, 1))w \, d\Gamma. \end{aligned}$$

On utilise (2.6) et (2.7), on obtient

$$\int_{\Omega} (\lambda^2 u - \Delta u) w dx = \int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) \, dx + \int_{\Gamma_N} \mu_1(\lambda u - f) + \mu_2(\lambda u e^{-\lambda\tau} + z_0 w) \, d\Gamma.$$

Donc, (2.9) peut être réécrit comme

$$\int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u w d\Gamma = \int_{\Omega} (g + \lambda f) w dx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} f w d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w d\Gamma. \quad (2.10)$$

Pour u et w , on définit sur $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et une forme linéaire $L(\cdot)$ par

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u w d\Gamma,$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega} (g + \lambda f) w dx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} f w d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w d\Gamma.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ pour la forme bilinéaire $a(u, w)$ et la forme linéaire $L(w)$.

1. La continuité de a : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| \int_{\Omega} (\lambda^2 u w + \nabla u \nabla w) dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u w d\Gamma \right| \\ &\leq \lambda^2 \|u\|_2 \|w\|_2 + \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \|u\|_2 \|w\|_2 \\ &\leq (\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau})) \|u\|_2 \|w\|_2 + \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2 \\ &\leq \max(\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}), 1) (\|u\|_2 \|w\|_2 + \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2) \\ &\leq k_1 (\|u\|_2 + \|\nabla u\|_2) (\|w\|_2 + \|\nabla w\|_2) \\ &\leq k_1 \|u\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)} \|w\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

avec $k_1 = \max(\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}), 1)$.

Donc, $a(u, w)$ est continue.

2. La coercivité de a : pour $u = w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (\lambda^2 u^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u^2 d\Gamma \\ &\geq \int_{\Omega} (\lambda^2 u^2 + |\nabla u|^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda^2 \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \\
&\geq \min(\lambda^2, 1)(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2) \\
&\geq \alpha \|u\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

avec $\alpha = \min(\lambda^2, 1)$.

Donc, $a(u, w)$ est coercive

3. La continuité de L : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|L(w)| &= \left| \int_{\Omega} (g + \lambda f)w \, dx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} f w \, d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w \, d\Gamma \right| \\
&\leq \|(g + \lambda f)\|_2 \|w\|_2 + \mu_1 \|f\|_2 \|w\|_2 + \mu_2 \|z_0\|_2 \|w\|_2 \\
&\leq C \|w\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

avec $C = (\|(g + \lambda f)\|_2 + \mu_1 \|f\|_2 + \mu_2 \|z_0\|_2)$.

Donc, $L(w)$ est continue.

Par conséquent, $a(u, w)$ est bilinéaire continue et coercive sur $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ et $L(w)$ linéaire continue sur $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ de l'équation (2.10), telle que

$$a(u, w) = L(w), \quad \forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega).$$

Cela signifie que $u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ et $v = \lambda u - f \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, donc $u, v \in H^1(\Omega)$.

Il reste à montrer que $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\frac{du}{dv} = -\mu_1 v - \mu_2 z(\cdot, 1)$, $z \in L^2(\Gamma_N; H^1(0, 1))$ et $z(x, 0) = v(x)$.

D'après (2.8), on a

$$\Delta u = \lambda^2 u - g - \lambda f \in L^2(\Omega),$$

car $g \in L^2(\Omega)$ et $u, f \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. Donc

$$u \in E(\Delta, L^2(\Omega)).$$

On utilise la formule de Green dans (2.10)

$$\int_{\Omega} (\lambda^2 u - \Delta u)w \, dx + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u w \, d\Gamma = \int_{\Omega} (g + \lambda f)w \, dx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} f w \, d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w \, d\Gamma,$$

par conséquent

$$\lambda^2 u - \Delta u + \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda u = g + \lambda f + \mu_1 f - \mu_2 z_0.$$

Pour (2.6) et (2.9), on a

$$\frac{du}{d\nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(\cdot, 1).$$

Finalement, à partir de (2.6) et (2.7), on obtient

$$z(x, 0) = v(x), \quad \text{et } z \in L^2(\Gamma_N; H^1(0, 1)).$$

Alors, il existe une unique solution $U \in \mathcal{D}(A)$ satisfait le problème (2.5). Donc l'opérateur $(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})$ est surjectif avec $\lambda > 0$. \square

Maintenant, nous démontrons le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.1. *Pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$, le problème (P_1) admet une solution unique*

$$u \in C([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

De plus, si $u \in \mathcal{D}(A)$ alors la solution de (P_1) satisfait

$$u \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1, l'opérateur \mathcal{A} est déssipatif et l'opérateur $(\lambda I_{ed} - \mathcal{A})$ est surjectif avec $\lambda > 0$. Alors le résultat cité dans le Théorème 2.1 est vérifié (d'après le théorème de Lumer-Phillips). Par conséquent, le problème de Cauchy admet une unique solution. \square

LA STABILITÉ EXPONENTIELLE DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME HYPERBOLIQUE LINÉAIRE AVEC RETARD

Dans ce chapitre, sous certaines conditions sur les données en se basant sur la méthode d'énergie, nous allons démontrer la stabilité de la solution d'un problème aux limites pour les équations d'ondes avec retard. Puis, on donne un exemple d'un problème aux limites avec retard pour lequel la stabilité est perdue.

3.1 Décroissance exponentielle

Dans cette section, nous allons analyser la question de la décroissance exponentielle de l'énergie associée au problème considéré.

Soit u la solution du problème (P) , on définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (P) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) - |\Delta u(x, t)|^2) dx + \frac{\xi}{2} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t^2(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma, \quad (3.1)$$

où ξ est une constant positive vérifie

$$\tau\mu_1 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2), \quad \text{avec } \mu_2 \leq \mu_1. \quad (3.2)$$

Pour prouver la décroissance exponentielle de l'énergie du problème (P) , nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.1. La fonctionnelle d'énergie E définie par (3.1) vérifiée

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -c \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma,$$

où c est une constante positive.

Démonstration. Différenciant la fonction d'énergie (3.1), on trouve

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{\Omega} (u_t(x, t)u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t)\Delta u_t(x, t)) dx + \xi \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t(x, t - \tau\rho)u_{tt}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma.$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{\Gamma_N} \left(\frac{du}{dt}(x, t)u_t(x, t) \right) d\Gamma + \xi \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t(x, t - \tau\rho)u_{tt}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma.$$

On pose

$$u_t(x, t - \tau\rho) = -\tau^{-1}u_\rho(x, t - \tau\rho).$$

Comme les dérivées sont données par

$$u_{tt}(x, t - \tau\rho) = -\tau^{-1}u_{t\rho}(x, t - \tau\rho),$$

et

$$u_{\rho t}(x, t - \tau\rho) = -\tau^{-1}u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho).$$

Donc, on trouve

$$u_{tt}(x, t - \tau\rho) = \tau^{-2}u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho).$$

Alors

$$\int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t(x, t - \tau\rho)u_{tt}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma = -\tau^{-3} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_\rho(x, t - \tau\rho)u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma.$$

Par l'intégration par parties, on obtient

$$\int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_\rho(x, t - \tau\rho)u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma = - \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_\rho(x, t - \tau\rho)u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma + \int_{\Gamma_N} u_\rho^2(x, t - \tau) - u_\rho^2(x, t) d\Gamma,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_\rho(x, t - \tau\rho) u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} u_\rho^2(x, t - \tau) - u_\rho^2(x, t) d\Gamma.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t(x, t - \tau\rho) u_{tt}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma &= -\tau^{-3} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_\rho(x, t - \tau\rho) u_{\rho\rho}(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma \\ &= \frac{\tau^{-3}}{2} \int_{\Gamma_N} u_\rho^2(x, t) - u_\rho^2(x, t - \tau) d\Gamma \\ &= \frac{\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) - u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Alors, en utilisant (3.3) et la troisième équation du problème (P) on a

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu_1 \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} u_t(x, t - \tau) u_t(x, t) d\Gamma + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma.$$

On pose

$$I_1 = -\mu_2 \int_{\Gamma_N} u_t(x, t - \tau) u_t(x, t) d\Gamma.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \mu_2 \|u_t(x, t - \tau)\| \|u_t(x, t)\| \\ &\leq \frac{\mu_2}{2} (\|u_t(x, t - \tau)\|^2 + \|u_t(x, t)\|^2) \\ &\leq \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma + \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -\mu_1 \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma + \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma \\ &\quad + \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma - \frac{\xi\tau^{-1}}{2} \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\leq \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi\tau^{-1}}{2}\right) \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) d\Gamma + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi\tau^{-1}}{2}\right) \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -c \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma. \quad (3.4)$$

Avec $c = \min\left(\left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi\tau^{-1}}{2}\right), \left(-\frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi\tau^{-1}}{2}\right)\right)$. Pour ξ est choisi comme (3.2) de sorte que la constante c est positive. \square

Maintenant, nous pouvons prouver une estimation d'observabilité aux limites pour le problème (P).

Lemme 3.2. *Il existe un temps $\bar{T} > 0$ tel que pour tout temps $T > \bar{T}$, il existe une constante positive c_0 pour laquelle*

$$E(0) \leq c_0 \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt, \quad (3.5)$$

est satisfaite

Démonstration. Nous écrivons la fonction d'énergie comme suit

$$E(t) = \varepsilon(t) + E_N(t),$$

où

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) - |\Delta u(x, t)|^2) dx,$$

et

$$E_N(t) = \frac{\xi}{2} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 u_t^2(x, t - \tau\rho) d\rho d\Gamma.$$

On pose

$$t - \tau\rho = s.$$

Alors, $E_N(t)$ peut être réécrit comme suit :

$$E_N(t) = \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} \int_{t-\tau}^t u_t^2(x, s) ds d\Gamma. \quad (3.6)$$

Pour $T \gg T_0$ et tout $\epsilon > 0$, d'après l'estimation de Carlemen [11], on a

$$\varepsilon(0) \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_t^2 + (\frac{du}{dt})^2) d\Gamma dt + c \|u\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0,T))}.$$

Pour la troisième équation du (P), on trouve

$$\varepsilon(0) \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_t^2(x,t) - u_t^2(x,t-\tau)) d\Gamma dt + c \|u\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0,T))}. \quad (3.7)$$

Depuis (3.6) on a

$$E_N(0) = \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} \int_{-\tau}^0 u_t^2(x,s) ds d\Gamma.$$

On pose

$$s = t - \tau,$$

et depuis $T \geq \tau$ on a

$$E_N(0) = \frac{\xi}{2\tau} \int_0^T \int_{\Gamma_N} u_t^2(x,t-\tau) d\Gamma dt. \quad (3.8)$$

Notons $\bar{T} = \max\{\tau, T_0\}$. Alors, d'après (3.7) et (3.8) pour tout $T > \bar{T}$ on a

$$\begin{aligned} E(0) &= \varepsilon(0) + E_N(0) \\ &\leq c \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_t^2(x,t) + u_t^2(x,t-\tau)) d\Gamma dt + c \|u\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0,T))}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec $c > 0$.

Pour obtenir (3.5), il faut absorber le terme $\|u\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0,T))}$. Pour ce faire, nous argumentons par contradiction. Supposons que (3.5) n'est pas vraie.

Par conséquent, il existe une suite $\{u_n\}_n$ de solutions du problème (P) telles que

$$E^n(0) > n \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_{nt}^2(x,t) + u_{nt}^2(x,t-\tau)) d\Gamma dt. \quad (3.10)$$

Notons $E^n(0)$ l'énergie E par retard en temps 0. De (3.9) on a

$$E^n(0) \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_{nt}^2(x, t) + u_{nt}^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt + c \|u_n\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))}. \quad (3.11)$$

Alors, de (3.10) et (3.11) nous avons

$$n \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_{nt}^2(x, t) + u_{nt}^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt < c \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_{nt}^2(x, t) + u_{nt}^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt + c \|u_n\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))},$$

c'est-à-dire

$$(n - c) \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_{nt}^2(x, t) + u_{nt}^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt < c \|u_n\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))}.$$

On obtient une suite $\{w_n\}_n$ de solutions du problème (P) vérifiant

$$\|w_n\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))} = 1. \quad (3.12)$$

Alors

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N} (w_{nt}^2(x, t) + w_{nt}^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt < \frac{c}{n - c}. \quad (3.13)$$

De (3.12), (3.13) et (3.11), il s'ensuit que la suite $\{w_n\}_n$ est bornée dans $H^1(\Omega \times (0, T))$. Puisque $H^1(\Omega \times (0, T))$ est compacte dans $H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))$, il existe une sous-suite pour simplifier la notation, nous notons encore $\{w_n\}_n$ telle que

$$w_n \longrightarrow w \text{ fortement dans } H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T)).$$

Alors, de (3.12)

$$\|w\|_{H^{\frac{1}{2+\epsilon}}(\Omega \times (0, T))} = 1. \quad (3.14)$$

De plus, d'après (3.13)

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N} (w_t^2(x, t) + w_t^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt = 0.$$

Par conséquent, nous avons que

$$w_t = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T),$$

et

$$\frac{dw}{d\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T).$$

On pose $v = w_t$, v est une solution à un sens de distribution, qui vérifie

$$v'' - \Delta v = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

Avec

$$\begin{aligned} v &= 0, & \text{sur } \Gamma \times (0, T), \\ \frac{dv}{d\nu} &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \times (0, T). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème (1.12)

$$v \equiv 0.$$

Alors, w est une constante ne depend pas de temps, c'est-à-dire

$$w(x, t) = w(x).$$

Donc, w vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{dw}{d\nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Alors $w \equiv 0$.

Le résultat obtenu est contradiction avec (3.14), et par conséquent l'inégalité (3.6) est prouvée. \square

Théorème 3.1. *Supposons que $\mu_2 < \mu_1$ est vérifié. Alors il existe des constantes positives c_1, c_2 telles que, pour toute solution du problème (P) on a*

$$E(t) \leq c_1 E(0) e^{-c_2 t}.$$

Démonstration. En intégrant (3.4) sur $[0, T]$, nous obtenons

$$E(T) - E(0) \leq -c \int_0^T \int_{\Gamma_N} u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau) d\Gamma dt.$$

Alors

$$c^{-1}(E(0) - E(T)) \geq \int_0^T \int_{\Gamma_N} \{u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau)\} d\Gamma dt. \quad (3.15)$$

Par (3.16) et (3.6), on obtient

$$E(0) \leq c_0 \int_0^T \int_{\Gamma_N} (u_t^2(x, t) + u_t^2(x, t - \tau)) d\Gamma dt \leq c_0 c^{-1} (E(0) - E(T)).$$

Alors

$$E(T) \leq \tilde{c}E(0),$$

avec $\tilde{c} = -\frac{c_0 c^{-1} + 1}{c_0 c^{-1}} < 1$. Alors l'énergie $E(t)$ est décroissante. □

Donc la stabilité exponentielle de la solution du problème (P) est vérifiée.

3.2 Cas d'instabilité

Dans cette section nous allons montrer l'instabilité dans le cas contraire : $\mu_2 \geq \mu_1$.

On considère le problème suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{du}{dv}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 u_t(x, t - \tau), & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty). \end{cases}$$

L'objectif de cet exemple est de trouver une solution (P_2) sous la forme

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors, $\varphi(x)$ doit être une solution du problème aux valeurs propres

$$(P_3) : \begin{cases} -\Delta \varphi + \lambda^2 \varphi = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{d\varphi}{dv} = -(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda \varphi, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

En multipliant la première équation de (P_3) par une fonction $\bar{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω , on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta \varphi \bar{v} dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi \bar{v} dx = 0.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \bar{v} dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi \bar{v} dx + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda \int_{\Gamma_N} \varphi \bar{v} d\Gamma = 0. \quad (3.16)$$

On veut trouver une solution pour $\lambda = ib$, avec $b \in \mathbb{R}$. Alors, le problème (3.16) peut être réécrit comme

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \bar{v} dx - b^2 \int_{\Omega} \varphi \bar{v} dx + (\mu_1 + \mu_2 e^{-ib\tau}) ib \int_{\Gamma_N} \varphi \bar{v} d\Gamma = 0, \quad \forall \bar{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (3.17)$$

Suppose que

$$\cos(b\tau) = -\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Pour le cas $\mu_2 \geq \mu_1$ on a

$$\mu_2 \sin(b\tau) = \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2}.$$

A partir des ces hypothèses, on trouve

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2 e^{-ib\tau}) ib &= \mu_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + e^{-ib\tau} \right) ib \\ &= \mu_2 (-\cos(b\tau) + \cos(b\tau) - i \sin(b\tau)) ib \\ &= \mu_2 \sin(b\tau) b \\ &= b \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \end{aligned}$$

Alors, (3.17) peut être réécrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \bar{v} dx - b^2 \int_{\Omega} \varphi \bar{v} dx + b \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} \int_{\Gamma_N} \varphi \bar{v} d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (3.18)$$

En particulier, pour $\bar{v} = \varphi$, (3.18) donne

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - b^2 \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx + b \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} \int_{\Gamma_N} |\varphi|^2 d\Gamma = 0, \quad (3.19)$$

on peut supposer

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx = 1.$$

Alors, nous écrivons (3.19) sous la forme

$$b^2 - b\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2}q_0(\varphi) - q_1(\varphi) = 0, \quad (3.20)$$

tel que

$$q_0(\varphi) = \int_{\Gamma_N} |\varphi|^2 d\Gamma \text{ et } q_1(\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx.$$

Théorème 3.2. *Si $\mu_2 < \mu_1$ n'est pas vérifié, il existe une suite de retards et solutions du problème (P) correspondant à ces retards, sachant que l'énergie est constant.*

Démonstration. Pour prouver le théorème proposé, on passe par deux cas.

Cas(a) $\mu_2 = \mu_1$:

Dans ce cas, sous nos hypothèses, (3.20) devient

$$b^2 = q_1(\varphi),$$

satisfaisant

$$b^2 = \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w). \quad (3.21)$$

Nous prouvons (3.21) comme suit

1. On va montrer $q_1(\varphi) > \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w)$.

On a

$$q_1(w) > \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w),$$

et

$$q_1(w) = b^2.$$

Alors

$$b^2 > \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w) \dots\dots\dots(1).$$

2. D'autre part, nous prouvons $q_1(\varphi) \leq \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w)$.

On pose $w = \varphi$ tel que

$$\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \text{ et } \|\varphi\|_2 = 1.$$

Alors

$$b^2 = \min_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_2=1}} q_1(\varphi),$$

on a

$$b^2 = q_1(\varphi),$$

et

$$b^2 = \min b^2.$$

Donc

$$\min_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_2=1}} q_1(\varphi) \geq b^2 \dots\dots\dots(2).$$

Donc, de (1) et (2) on obtient

$$b^2 = \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w).$$

Si

$$q_1(\varphi) = \min_{\substack{w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} q_1(w).$$

Alors φ est solution de (3.17) avec b comme dans (3.21).

Donc, Φ vérifie (P_3) et $u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x)$ est une solution du problème (P_2) .

Maintenant nous prouvons que l'énergie est constante

on a

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{\Omega} (|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (|e^{2ibt}| |\nabla \varphi|^2 + b^2 |e^{2ibt}| |\varphi|^2) dx \\ &= 2b^2 > 0, \end{aligned}$$

car

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = b^2 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx = 1.$$

Alors, l'énergie est constante.

Notons que par hypothèse ($\lambda = ib$, $\cos(b\tau) = -1$, $\sin(b\tau) = 0$), le problème (P_3) devient le problème classique aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace avec une condition aux limites de Dirichlet-Neumann, qui sont définies comme

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = -\lambda^2 \varphi, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{d\varphi}{d\nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre la suite $\{b_n\}_n$ de valeurs positives définie par

$$b_n^2 = \Lambda_n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Où $\Lambda_n^2, n \in \mathbb{N}$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Laplace.

Alors, on pose

$$b_n \tau = (2l + 1)\pi, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Donc, on obtient une suite de retards

$$\tau_{n,l} = \frac{(2l + 1)\pi}{b_n}, \quad l, n \in \mathbb{N},$$

qui devient petit (ou grand) selon les options appropriées pour les indices $n, l \in \mathbb{N}$.

Alors, dans le cas $\mu_1 = \mu_2$, le problème (P) est asymptotiquement instable.

Cas(b) $\mu_2 > \mu_1$:

Dans ce cas, on obtient

$$b^2 - b\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(\varphi) - q_1(\varphi)} = 0,$$

est une équation quadratique. Les solutions de cette équation sont

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(\varphi)} \pm \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\varphi) + 4q_1(\varphi)}).$$

On définit

$$b = \frac{1}{2} \min_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} (\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(w)} \pm \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(w) + 4q_1(w)}). \quad (3.22)$$

Nous prouvons maintenant que si

$$(\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(\varphi)} + \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\varphi) + 4q_1(\varphi)}) = \min_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} (\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(w)} + \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\Phi) + 4q_1(w)}).$$

Alors Φ est résolu avec b comme dans (3.22).

On pose

$$w = \varphi + \varepsilon v, \quad \text{avec } v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \text{ telque } \int_{\Omega} \varphi \bar{v} \, dx = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|w\|_2^2 &= \|\varphi\|_2^2 + \varepsilon^2 \|v\|_2^2 \\ &= 1 + \varepsilon^2 \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Si nous dénotons

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \|v\|_2^2} (\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(\varphi + \varepsilon v)} + \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\varphi + \varepsilon v) + 4q_1(\varphi + \varepsilon v)}),$$

nous remarquons que

$$g(\varepsilon) \geq \min_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \|w\|_2=1}} (\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(w)} + \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\Phi) + 4q_1(w)}).$$

Alors

$$g(\varepsilon) \geq g(0),$$

Où

$$g(0) = (\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0(\varphi)} + \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 q_0^2(\Phi) + 4q_1(\varphi)}).$$

En calculant la dérivée $\frac{dg}{d\varepsilon}$, on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \bar{v} \, dx + b \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} \int_{\Gamma_N} \varphi \bar{v} \, d\Gamma = 0, \quad (3.23)$$

et par conséquent

$$\frac{dg}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

De (3.23) et (3.20) nous obtenons que φ satisfait (3.19) avec b défini dans (3.22). Donc pour b positif

$$b\tau = \arccos\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Définit une série de délais dans lesquels le problème (P) est asymptotiquement instable. \square

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons examiné la question d'existence globale et l'unicité de la solution ainsi que la stabilité exponentielle de l'énergie associée pour un problème aux limites hyperbolique linéaire avec retard . Plus précisément, sous certaines conditions sur les données en se basant sur le théorème de Lummer-Philips nous avons obtenu l'existence globale et l'unicité de la solution. En suite, en utilisant la méthode d'énergie, nous avons montré la stabilité exponentielle de l'énergie associée. A la fin de ce mémoire, nous avons présenté un exemple pour lequel la stabilité exponentielle n'est pas satisfaite

Bibliographie

- [1] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*. Masson, Paris, 1983.
- [2] R. Datko. Polis, an example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations,. *SIAM J. Control Optim*, pages 152–156, 24 (1986).
- [3] R. Datko. Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks. *SIAM J. Control Optim*, pages 697–713, 26 (1988).
- [4] R. Datko. Two examples of ill-posedness with respect to time delays revisited. *IEEE Trans Automat, Control*, pages 511–515, 42 (1997).
- [5] R. Datko, J. Lagnese, and MP. Polis. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM J Control Optim*, pages 152–156, 24 (1986).
- [6] R. Triggiani I. Lasiecka and P. F. Yao. Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl*, pages 13–57, 235 (1999).
- [7] J. L. Lions. *Controlabilité Exacte, Stabilisation et Perturbations des Systèmes Distribués*. Vol. 1, Masson, Paris, 1988.
- [8] S. Nicaise and C. Pignotti. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim*, pages 1561–1585, 45 (2006).
- [9] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag. New York, Berlin, 1983.
- [10] V. Volterra. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. *J.de Mathématiques*, pages 249–298, 7 (1928).
- [11] P. F. Yao, I. Lasiecka, and R. Triggiani. Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl*, pages 13–57, 235 (1999).

ملخص: في هذه الأطروحة نعتبر مسألة حدودية مع حد التأخير. نبدأ بالبرهان على الوجود الإجمالي والوحدانية للحل وذلك بالاعتماد على نظرية نصف الزمرة وبخاصية نظرية لامر فيليبس. بعد ذلك، تحت شروط معينة على معادلات التأخير وبالاعتماد على طريقة الطاقة، نتحصل على الاستقرار الأسي للحل. في الأخير، نبين عدم استقرار الحلول في حالة عدم تحقق الشروط الخاصة بمعاملات التأخير.

كلمات مفتاحية: معادلة الموجة، الوجود الكلي، نصف الزمرة، الاستقرار الأسي.

Résumé : Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème aux limites avec terme du retard. Nous commençons par démontrer l'existence globale et l'unicité de la solution en se basant sur la théorie de semi-groupes, notamment le théorème de Lummer-Philips. Ensuite, sous certaines conditions sur les coefficients de retard en utilisant la méthode d'énergie, on établit la stabilité exponentielle de la solution. A la fin, on montre l'instabilité des solutions dans le cas où les conditions supposées sur les coefficients de retard ne sont pas vérifiées.

Mots-Clés : Equation d'onde, Existence globale, Méthode d'énergie, Semi-groupe, Stabilité exponentielle.

Abstract : In this work, we consider a boundary value problem with delay term, we start by showing the global existence and uniqueness of solution by using the semi-group theory, precisely Lummer-Philips theorem. Also, under some conditions on delay coefficients using the energy method, we establish the exponential stability of solutions. We finish by showing the lack of exponential decay of solutions where the supposed conditions on delay coefficients are not satisfied.

Keywords : Wave equation, Global existence, Energy method, Semi group, Exponential stability.