

Remerciements

Je remercie tout d'abord **mon Dieu** qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon promoteur : **Prof. M. MOUSSAI** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet ses encouragements et sa patience.

Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de jury ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans ce retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci.

Notations

- Tous les espaces dans cette Thèse sont définis sur \mathbb{R}^n .
- $B(a, r)$. est la boule ouverte de centre a et de rayon r .
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\partial^\alpha f$ est la dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$
- $T_f(g) := f \circ g$ est l'opérateur de composition.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur \mathbb{R}^n muni de la norme :
 - $P_N(\varphi) = \sup(1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \varphi(x)|$, $N = 1, 2, \dots, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: l'espace des distributions tempérées.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx$.
et sa transformée inverse est $\mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi) f(\xi) d\xi$.
- Pour une distribution f définie sur \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$. L'opérateur de translation est donnée par :
$$\tau_a f(x) = f(x - a), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
- Le symbole \hookrightarrow désigne l'inclusion avec continuité de l'injection canonique.
- Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la convolution de f par g est la fonction : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.
- $C^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions telles que : $C^m = \{f, f^{(\alpha)} \mid |\alpha| \leq m \text{ continue}\}$.
- Le support d'une fonction f est l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ est appelé support compact.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ appelé espace de distributions.

-
- Si $0 < q \leq \infty$, alors l^q est l'espace de tout suites $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ telle que : $\|b_k\|_{l^q} = (\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$.
 - Si $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup |x_i - a_i| \leq r\}$. est le cube de centre $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et de rayon $r > 0$.

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques résultats préliminaires	2
1.1 Théorie de Littlewood-Paley	2
1.1.1 Décomposition de Littlewood-Paley	2
1.1.2 Décomposition du produit $f.g$	4
1.2 Quelques inégalités	5
1.3 Espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	7
1.3.1 Définitions et propriétés	7
1.4 Rappel sur les espaces de Sobolev	12
2 Localisation de certains espaces fonctionnels	14
2.1 Généralités	14
2.2 Localisation des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$	16
2.2.1 Localisation de L^p en norme l^p	16
2.3 Localisation des espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	18
2.3.1 Localisation de Besov en norme l^p	18
2.3.2 Le problème des multiplicateurs	19
2.3.3 Localisation- uniforme	21
2.4 Localisation des espaces de Sobolev	22
2.4.1 Localisation de Sobolev en norme l^p	22
2.5 Quelques exemples	23

3 Applications	24
3.1 Préparation	24
3.2 Enoncé des résultats principales	25
3.2.1 Application sur les $L^p(\mathbb{R}^n)$	25
3.2.2 Application sur la composition	26
Conclusion	28
Bibliographie	29

Introduction

Depuis les années 1970, plusieurs auteurs ont étudié la localisation des espaces fonctionnels comme les espaces de Lebesgue L^p , Sobolev W_p^m ($m \in \mathbb{N}$), Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s$, potentiels de Bessel H^s ($s > 0$), et Besov $B_{p,q}^s$ par la norme l^r .

Dans le but d'élucider certains problèmes comme la composition, qui représente la continuité d'un opérateur non-linéaire.

Car cette propriété permet d'approcher une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par une suite $f_k(x) = \omega(x - k)f(x)$ telle que : $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \omega(x - k) = 1 \quad \forall K$ compact de \mathbb{R}^n .

Ce mémoire est proposé comme suit :

Dans le premier chapitre : nous allons rappeler des notions de base sur les espaces de Besov, et les espaces de Sobolev, de plus quelques propriétés principales.

Dans le deuxième chapitre : on va étudier la localisation des espaces de : $L^p(\mathbb{R}^n)$, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, et $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{N}$) en norme l^p , et en va prendre le problème des multiplicateurs ainsi que la localisation- uniforme.

Dans le troisième chapitre : on va étudier la composition dans les espaces précédent et ses propriétés.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la décomposition en séries de Littlewood-Paley, des notions de base pour les espaces de Besov, un rappel sur les espaces de Sobolev et quelques inégalités que nous les utiliserons dans la suite.

1.1 Théorie de Littlewood-Paley

1.1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Soit ρ une fonction continue et paire dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$0 \leq \rho(\xi) \leq 1, \rho(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 1 \text{ et } \rho(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq \frac{3}{2}.$$

On pose :

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et satisfait :

$$\text{supp} \gamma \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2} \right\} \text{ et } \gamma(\xi) \geq 0.$$

Il vient alors la partition de l'unité homogène suivante :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} .$$

et la partition de l'unité non homogène suivante :

$$\rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.1)$$

Nous définissons les opérateurs de convolutions $(R_j)_j$ par :

$$R_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (j \geq 0)$$

et les opérateurs $(Q_k)_k$ par :

$$Q_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (k \geq 1)$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a alors :

$$(R_j f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-j}\cdot)) * f)(x) \quad \forall (j \geq 0)$$

$$(Q_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k}\cdot)) * f)(x) \quad \forall (k \geq 1)$$

et on a :

$$\widehat{R_j f}(\xi) = \rho(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi)$$

$$\widehat{Q_k f}(\xi) = \gamma(2^{-k}\xi) \widehat{f}(\xi)$$

avec la notation : $Q_0 = R_0$.

Ecrivons la relation (1.1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors :

$$\rho(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) = 1$$

en multipliant par $\mathcal{F}f(\xi)$, on obtient :

$$\rho(2^{-j}\xi) \mathcal{F}f(\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$$

en appliquant la transformation de Fourier inverse, on obtient :

$$\mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-j}\cdot)) * f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k}\cdot)) * f = f$$

on obtient encore :

$$R_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k f = f, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Pour $j = 0$, on trouve :

$$f = R_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k f$$

On a donc la définition suivante :

Définition 1.1.1

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

$$f = R_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k f. \quad (1.1.2)$$

Proposition 1.1.1

$$(1.1.2)$$

- (1) $f = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$
 (2) $R_j f = \sum_{k=0}^j Q_k f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$

1.1.2 Décomposition du produit $f.g$

Soit f et g deux distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit $f.g$ par :

$$\begin{aligned} f.g &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f \left(R_j g + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k g \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f . R_j g + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_j f . Q_k g \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f . R_j g + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k g \sum_{j=0}^{k-1} Q_j f. \end{aligned}$$

donc

$$f.g = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f . R_j g + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k g . R_{k-1} f.$$

Définition 1.1.2

$$f \quad g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad fg$$

$$f.g := \lim_{j \rightarrow +\infty} R_j f . R_j g$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.1.1

1.2 Quelques inégalités

Le théorème d'interpolation est un outil très efficace, il permet d'obtenir la continuité de certains opérateurs linéaires.

Théorème 1.2.1

$$\begin{array}{ccc} (X, \mu) & (Y, \nu) & p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty] \quad p_0 \neq p_1 \\ q_0 \neq q_1 & T & L^{p_0}(X, \mu) \quad L^{q_0}(Y, \nu) \\ L^{p_1}(X, \mu) & L^{q_1}(Y, \nu) & f \in L^{p_i} \quad (i = 0, 1) \end{array}$$

$$\|Tf\|_{q_i} \leq C_i \|f\|_{p_i} \quad (i = 0, 1)$$

$$T \quad [L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p \quad [L^{q_0}, L^{q_1}]_\theta = L^q \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\|Tf\|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|f\|_p.$$

Théorème 1.2.2 (Inégalité de Young)

$$p, q, r \in [1, \infty] \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve.

On fixe $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur : $Tf = f * g$

$$\text{on a : } \|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\begin{aligned} \text{car : } \|Tf\|_q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_q dy \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_q. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|Tf(x)\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_{q'} \quad , \text{ tel que : } \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + 1,$$

et encore

$$\|Tf(x)\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.$$

Alors on applique le théorème de l'interpolation de Riesz-Thorin

$$\begin{aligned} T : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \\ &L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{avec } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

ce qui termine la preuve. ■

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Bernstein)

$$\begin{aligned} 1 \leq p \leq q \leq \infty. \quad c > 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall R > 0 \\ \text{supp } \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\}, \end{aligned}$$

$$\|f\|_q \leq c R^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p,$$

$$c \quad f, \quad R.$$

Corollaire 1.2.1

$$\begin{aligned} 1 \leq p \leq q \leq \infty \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad c > 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall R > 0 \\ \text{supp } \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\}, \end{aligned}$$

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p,$$

$$c \quad f \quad R.$$

Preuve.

Soit $\rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$.

On pose : $\rho_R(\xi) = \rho\left(\frac{\xi}{R}\right)$, pour $R > 0$.

On a :

$$\widehat{f} = \rho_R \widehat{f}.$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)} &= (\mathcal{F}^{-1} \rho_R) * f^{(\alpha)} \\ &= R^n \mathcal{F}^{-1} \rho(R \cdot) * f^{(\alpha)} = R^{n+|\alpha|} \mathcal{F}^{-1} \rho^{(\alpha)}(R \cdot) * f. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|(\mathcal{F}^{-1} \rho_R)^{(\alpha)}\|_r \|f\|_p.$$

pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(\mathcal{F}^{-1} \rho_R)^{(\alpha)}(x) = R^n (\mathcal{F}^{-1} \rho_R)^{(\alpha)}(Rx).$$

Il vient :

$$\|(\mathcal{F}^{-1} \rho_R)^{(\alpha)}\|_q = R^{n+|\alpha|+\frac{n}{p}} \|(\mathcal{F}^{-1} \rho^{(\alpha)}(R \cdot))\|_q.$$

Alors :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c R^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

■

1.3 Espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.1

$$\begin{aligned} s \in \mathbb{R} \quad 1 \leq p, q \leq \infty, & \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \quad \left\{ 2^{sk} \|Q_k f\|_p \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N}) \\ \|f\|_{B_{p,q}^s} &= \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{sk} \|Q_k f\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{sk} \|Q_k f\|_p < +\infty & q = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1

$$f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad f^{(\alpha)} \in B_{p,q}^{s-|\alpha|}.$$

Preuve.

D'après l'inégalité de Bernstein on a :

$$\begin{aligned} Q_k(f^{(\alpha)}) &= \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-k}\cdot) f^{(\alpha)} \\ &= (\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-k}\cdot) f)^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

$$\text{car } f^{(\alpha)} * g = f * g^{(\alpha)} = (f * g)^{(\alpha)}.$$

Pour $r = p$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|Q_k(f^{(\alpha)})\|_p &\leq C2^{k|\alpha|} \|Q_k f\|_p \\ 2^{k(s-|\alpha|)} \|Q_k(f^{(\alpha)})\|_p &\leq C2^{sk} \|Q_k f\|_p \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(s-|\alpha|)kq} \|Q_k f^{(\alpha)}\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{skq} \|Q_k f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Alors

$$\|f^{(\alpha)}\|_{B_{p,q}^{s-|\alpha|}} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

■

Proposition 1.3.1

$$s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty \quad 1 < q < \infty, \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

$$s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty, \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

Preuve.

voir [6] ■

Définition 1.3.2

On dit que E est une algèbre s'il existe une constante $c > 0$, telle que:

$$\|f \cdot g\|_E \leq c \|f\|_E \|g\|_E$$

pour tout f et g appartiennent à E .

Injections de Besov :

- 1) $B_{p,q_1}^s \hookrightarrow B_{p,q_2}^s$ si $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$.
- 2) $B_{p_1,q}^s \hookrightarrow B_{p_2,q}^t$ si $s > t$, $p_1 \leq p_2$ et $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$.
- 3) $B_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,q}^{s-|\alpha|}$.
- 4) $1 \leq p \leq r \leq \infty$, $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r} \Rightarrow B_{p,q}^s \hookrightarrow L^r$.

Preuve.

voir [5] ou [6] ■

Théorème 1.3.2

- () $B_{p,q}^s$
- () $B_{p,q}^s \hookrightarrow L^\infty$.
- () $s \geq \frac{n}{p}$ $q = 1$.

Pour la démonstration on a besoin de savoir le théorème de Nikol'skii :

Théorème 1.3.3

$$\begin{aligned}
 & a > 0, s > 0, 1 \leq p, q \leq \infty \quad \{f_j\} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
 * & \text{supp } \widehat{f}_j \subset \{\xi : |\xi| \leq a \cdot 2^j\} \\
 * & A := \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sjq} \|f_j\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \\
 \Rightarrow & \sum_j f_j \quad \mathcal{S}' \quad \left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{B_{p,q}^s} \leq cA.
 \end{aligned}$$

Preuve.

Pour $s \geq \frac{n}{p}$, soient $g \in B_{p,q}^s$, $f \in B_{p,q}^s$

On a :

$$\begin{aligned}
 f \cdot g &= \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f \cdot R_j g + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k g \cdot R_{k-1} f. \\
 \mathcal{F}(Q_j f \cdot R_j g)(\xi) &= \widehat{Q_j f} * \widehat{R_j g}(\xi) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{Q_j f}(y) \widehat{R_j g}(\xi - y) dy
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} 2^k &\leq |y| \leq \frac{3}{2} 2^k \\
 \frac{1}{2} 2^k &\leq |\xi - y| \leq \frac{3}{2} 2^k
 \end{aligned}$$

$$0 \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^k$$

Alors : $\text{supp } \widehat{Q_j f \cdot R_j g} \subset \{\xi : |\xi| \leq 3 \cdot 2^k\}$.

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f \cdot R_j g \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|Q_j f \cdot R_j g\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \dots (1)$$

De plus : $\|Q_j f \cdot R_j g\|_p \leq \|R_j g\|_{\infty} \|Q_j f\|_p$

avec $R_j g = \sum_{k=0}^j Q_k g$.

donc

$$\begin{aligned} \|R_j g\|_{\infty} &\leq \sum_{k=0}^j \|Q_k g\|_{\infty} &&\leq \sum_{k=0}^j 2^{(\frac{n}{p} - \frac{n}{\infty})k} \|Q_k g\|_p \\ &&&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{p} - s)k} 2^{sk} \|Q_k g\|_p \\ &&&\leq \|g\|_{B_{p,q}^s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{p} - s)k} < +\infty \\ &&&\leq c \|g\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} (1) &\leq c \|g\|_{B_{p,q}^s} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|g\|_{B_{p,q}^s} \cdot \|f\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Q_k g \cdot R_{k-1} f)(\xi) &= \widehat{Q_k g} * \widehat{R_{k-1} f}(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{Q_k g}(y) \cdot \widehat{R_{k-1} f}(\xi - y) dy\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}2^k &\leq |y| \leq \frac{3}{2}2^k \\ \frac{1}{4}2^k &\leq |\xi - y| \leq \frac{3}{4}2^k \\ 0 &\leq |\xi| \leq \frac{9}{4} \cdot 2^k\end{aligned}$$

Alors : $\text{supp} \widehat{Q_k g \cdot R_{k-1} f} \subset \{\xi : |\xi| \leq \frac{9}{4} \cdot 2^k\}$.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} Q_k g \cdot R_{k-1} f \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{skq} \|Q_k g \cdot R_{k-1} f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \dots (2)$$

et

$$\begin{aligned}\|Q_k g \cdot R_{k-1} f\|_p &\leq \|R_{k-1} f\|_{\infty} \|Q_k g\|_p \\ \|R_{k-1} f\|_{\infty} &\leq \sum_{k=0}^{j-1} \|Q_k f\|_{\infty} \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{p}-s)k} \cdot 2^{sk} \|Q_k f\|_p \\ &\leq c \|f\|_{B_{p,q}^s} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{p}-s)k}\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}(2) &\leq c \|f\|_{B_{p,q}^s} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{skq} \|Q_j g\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|f\|_{B_{p,q}^s} \cdot \|g\|_{B_{p,q}^s}\end{aligned}$$

Alors $B_{p,q}^s$ est une algèbre pour $s \geq \frac{n}{p}$. ■

Définition 1.3.3

$$\begin{array}{ccc} E & (E.B.D) & \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & & E (\\ M(E)) & & \end{array}$$

$$M(E) = \{g : g \cdot f \in E, \forall f \in E\}$$

$$g \quad c > 0$$

$$\|g \cdot f\|_E \leq c \|f\|_E \quad (\forall f \in \mathcal{D})$$

Proposition 1.3.2

$$M(E)$$

$$\|g\|_{M(E)} = \sup_{\|f\|_E \leq 1} \|gf\|_E.$$

Exemple 1.3.1

$$E = L^p, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$E \qquad \qquad \qquad L^\infty$$

$$M(E) = L^\infty.$$

Proposition 1.3.3

(i) $s > 0,$

$$B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)),$$

(ii) $t > 0,$

$$B_{p,\infty}^{t+(\frac{n}{p})}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B_{p,q}^0(\mathbb{R}^n)).$$

Preuve.

voir [7] ■

1.4 Rappel sur les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle important dans la théorie des équations aux dérivées partielles, pour cela on a fait un rappel sur ces espaces.

Définition 1.4.1

$$W_p^m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$W_p^m := \{f \in L^p(\Omega), \quad \alpha, \quad |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

$$\partial^\alpha$$

$$\|f\|_{W_p^m} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|f^{(j)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Théorème 1.4.1

$$I \qquad C$$

$$|I| \leq \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty$$

$$W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I) \qquad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(I)$$

$$I$$

$$(W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})) \qquad 1 < p \leq \infty.$$

$$(W^{1,1}(I) \subset L^q(I)) \qquad 1 \leq q < \infty.$$

Preuve.

pour la preuve voir [9] ■

Définition 1.4.2

$$s > 0, \qquad H^s(\mathbb{R}^n)$$

$$u \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \xi \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \qquad L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.4.1

$$H^s(\mathbb{R}^n) \qquad \|\cdot\|_{H^s}$$

$$\|u\|_{H^s} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Remarque 1.4.1

- (i) $H^s(\mathbb{R}^n) = B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.4.2

$$\frac{s}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \qquad r \geq 2$$

$$H^s \hookrightarrow L^r$$

Proposition 1.4.2

$$s > \frac{n}{2}, H^s$$

Chapitre 2

Localisation de certains espaces fonctionnels

Dans ce chapitre, on va étudier la localisation des espaces de L^p , $B_{p,q}^s$ et W_p^m ($m \in \mathbb{N}$) en norme l^p , nous allons également voir quelques problèmes des multiplicateurs, ainsi que la localisation uniforme.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1

$$E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

On fait sur E deux hypothèses supplémentaires :

1. Invariance par translation : si on note τ_x l'opérateur $\tau_x f(t) = f(t - x)$ alors τ_x est une isométrie de E , c-à-d :

$$\|\tau_x f\|_E = \|f\|_E, \forall f \in E$$

2. Invariance par localisation : pour tout $f \in E$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a : $\varphi f \in E$.

Soit ψ une fonction de classe C^∞ , avec $\text{supp}\psi \subset B(0, R)$ ($R > \sqrt{n}$), telle que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(x - k) = 1, (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Pour la construction de ψ , on choisit $\phi \in \mathcal{D}(B(0, R))$ telle que $\phi(x) \geq 0$ si $x \in B(0, R)$

On pose : $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x-k)}$, puisque $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x-k) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Alors : $\psi \in \mathcal{D}(B(0, R))$ et on a :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = 1$$

Définition 2.1.2

$$\begin{aligned} E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad (E, B, D) & \quad (E)_{l^r} \quad 1 \leq r \leq \infty \\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

$$\|f\|_{(E)_{l^r}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|(\tau_k \psi) f\|_E^r \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty.$$

$$(E)_{l^r} \quad 1 \leq r \leq \infty$$

$$0 < r < 1$$

Lemme 2.1.1

$$s \in \mathbb{R} \quad 1 \leq p, q \leq \infty \quad 1 \leq r \leq \infty \quad (f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

$$B(k, R)$$

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \right\|_{(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^r}} \leq C R^n \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Preuve.

pour $k, k' \in \mathbb{Z}^n$, on a :

$$B(k, R) \cap B(k', R') = \emptyset \text{ pour } |k - k'| \geq R + R'$$

Posons $m = 2[R + R'] + 1$, il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k'} \psi f_k = \sum_{k \in B(k', m)} \tau_{k'} \psi f_k$$

puisque $\sum_{k \in B(k', m)} 1 \leq cR^n$, en appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k'} \psi f_k \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq cR^{\frac{n}{r'}} \left(\sum_{k \in B(k', m)} \|\tau_{k'} \psi f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Il vient alors par la proposition (1.3.3)

$$\sup_{k' \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_{k'} \psi f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

où la constante c varie suivant la valeur de s comme suit :

Si $s \geq 0$: $C = c_1 \|\psi\|_{B_{\infty,q}^s}$.

Si $s = 0$: $C = c_2 (\|\psi\|_{\infty} + \|\psi\|_{B_{p,\infty}^{1+(\frac{n}{p})}})$.

Si $s \leq 0$: $C = c_3 \|\psi\|_{B_{\infty,q}^{-s}}$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \right\|_{(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^r}} &\leq c_4 R^{\frac{n}{r'}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k' \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_{k'} \psi f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^r \sum_{k \in B(k',m)} 1 \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq c_5 R^n \|\psi\|_{M(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

■

Définition 2.1.3

$$E \qquad \qquad \qquad l^p \quad (1 \leq p \leq \infty) \qquad \qquad c \geq 1$$

$$c^{-1} \|f\|_E \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \psi \cdot f\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_E.$$

2.2 Localisation des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Localisation de L^p en norme l^p

Théorème 2.2.1 (Théorème de Bourdoud)

$$p \in [1, \infty], \qquad L^p = (L^p)_{l^p}.$$

Preuve.

Il s'agit de montrer que l'opérateur $T_\psi : f \rightarrow (\tau_k \psi \cdot f)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est isomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur un sous-espace fermé de $(L^p)_{l^p}$.

Pour cela on introduit l'opérateur :

$$S_\psi \left((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(\cdot - k) \cdot f_k.$$

Qui pour un choix convenable de $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sera un inverse de T_φ .

Puisque φ est à support compact alors, il existe $c = c(\varphi) > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\varphi(x - k)| \leq C.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f\|_{(L^1)_{l^1}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x - k)| |f(x)| dx ; \\ &\leq c \|f\|_1. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f\|_{(L^\infty)_{l^\infty}} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x - k) f(x)| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

D'après (2.2.2), (2.2.1) et le théorème de Riesz-thorin entraine alors la continuité de T_φ de L^p dans $(L^p)_{l^p}$, autrement dit :

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi(\cdot - k) \cdot f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_p \quad (2.2.3)$$

De la même manière, on obtient la continuité de :

$$S_\psi : (L^p)_{l^p} \rightarrow L^p$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|S_\psi((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n})\|_1 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \psi \cdot f_k\| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_1 \\ &= \|\psi\|_\infty \|(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{(L^1)_{l^1}}. \end{aligned}$$

et

$$\|S_\psi((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n})\|_\infty \leq \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f_k\|_\infty \right) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(x - k)| \right).$$

On suppose maintenant que $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - k) = 1$, et on choisit ψ de façon que $\psi \equiv 1$ sur le support de φ . Alors :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - k) \cdot f \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \psi \cdot \tau_k \varphi \cdot f \\ &= S_\psi((\tau_k \varphi \cdot f)_{k \in \mathbb{Z}^n}). \end{aligned}$$

et la continuité de S_ψ dans L^p donne :

$$\|f\|_p \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.4)$$

Les inégalités (2.2.3) et (2.2.4) donnent la localisation de L^p en norme l^p . ■

2.3 Localisation des espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

2.3.1 Localisation de Besov en norme l^p

Théorème 2.3.1

$$B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n), \quad s \geq 0 \quad p \in [1, \infty] \quad l^p.$$

Preuve.

Cette énoncé est due à J. Peetre dans [7] ■

Proposition 2.3.1

$$1 \leq p \leq q \leq \infty \quad c > 0$$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_{B_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$1 \leq q \leq p \leq \infty, \quad c > 0$$

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_{B_{p,q}^s}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

$$(B_{p,q}^s)_{l^p} \subset B_{p,q}^s$$

$$B_{p,q}^s \subset (B_{p,q}^s)_{l^p}.$$

Preuve.

On peut arriver à ces résultats par interpolation :

Supposons d'abord $p \leq q$, on introduit l'opérateur :

$$S((f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k \psi \cdot f_k$$

où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifie : $\psi\omega = \omega$ ($\psi \equiv 1$ sur le support de ω)

Alors S envoie $l^p(B_{p,p}^s)$ dans $B_{p,p}^s$ et l'on a :

$$l^p(B_{p,q}^s) \subset [l^p(B_{p,p}^{s_0}), l^p(B_{p,p}^{s_1})]_{t,q}$$

Cela donne l'inclusion :

$$(B_{p,q}^s)_{l^p} \subset B_{p,q}^s$$

pour $q < p$, nous considérons l'opérateur :

$$T : f \rightarrow (\tau_k \omega \cdot f)_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

On sait que T envoie $B_{p,p}^s$ dans $l^p(B_{p,p}^s)$, on a donc aussi

$$T : [B_{p,p}^{s_0}, B_{p,p}^{s_1}]_{t,q} \rightarrow [l^p(B_{p,p}^{s_0}), l^p(B_{p,p}^{s_1})]_{t,q}$$

Où $0 \leq t \leq 1$, $s = (1-t)s_0 + ts_1$, $s_0 \leq s_1$ or, d'après (J, Peetre)

$$[B_{p,p}^{s_0}, B_{p,p}^{s_1}]_{t,q} = B_{p,q}^s$$

Et l'hypothèse $q \leq p$ entraîne :

$$[l^p(B_{p,p}^{s_0}), l^p(B_{p,p}^{s_1})]_{t,q} \subset l^p([B_{p,p}^{s_0}, B_{p,p}^{s_1}]_{t,q})$$

D'où l'inclusion :

$$B_{p,q}^s \subset (B_{p,q}^s)_{l^p}. \blacksquare$$

Remarque 2.3.1

$$p > q \quad q > p \quad (i) \quad (ii)$$

2.3.2 Le problème des multiplicateurs

Proposition 2.3.2

$$E \quad l^p, \quad M(E) \quad l^\infty.$$

$$E \subset M(E), \quad M(E) \quad (E)_{l^\infty}.$$

Preuve.

Notons que $M(E)$ est lui-même invariant isométriquement par translation, d'où :

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot g\|_{M(E)} \leq \|\varphi\|_{M(E)} \|g\|_{M(E)}$$

si $\eta \in \mathcal{D}$ est égal à 1 sur le support de φ , on a pour tout $f \in \mathcal{D}$;

$$\begin{aligned} \|gf\|_E &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot gf\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot g\|_{M(E)}^p \|\tau_k \eta \cdot f\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c' \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot g\|_{M(E)} \right) \|f\|_E ; \end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$$(M(E))_{l^\infty} = M(E).$$

on a, encore :

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot g\|_E \leq \|\varphi\|_E \|g\|_{M(E)}$$

d'où :

$$M(E) \subset (E)_{l^\infty}$$

Inversement, si $E \subset M(E)$ alors : $(E)_{l^\infty} \subset (M(E))_{l^\infty} = M(E)$ ■

Proposition 2.3.3

$$1 \leq q < p \leq \infty \quad s > 0,$$

$$M(B_{p,q}^s) \subset (M(B_{p,q}^s))_{l^\infty}.$$

Preuve.

voir [2] ■

2.3.3 Localisation- uniforme

Définition 2.3.1

- E (E.B.D), $f \in E_{loc-unif} (= E_{lu})$
- (i) $f \cdot \tau_k \varphi \in E, \forall y, \forall \varphi \in \mathcal{D}$
- (ii) $\|f \cdot \tau_k \varphi\|_E \leq c \|\varphi\|_E \quad \forall y$

Théorème 2.3.2

E

$$M(E) = E_{lu}$$

Preuve.

1- $M(E) \subset E_{lu}$

Soit $A \in M(E)$ alors $\forall f \in E, \|A \cdot f\|_E \leq c \|f\|_E$

$$\|A \cdot \varphi\|_E \leq c \|\varphi\|_E$$

Alors : $A \in E_{lu}$.

2- $E_{lu} \subset M(E)$

Soit $f \in E_{lu}$, et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ tel que : $\varphi \psi = \varphi$ ($\psi \equiv 1$ sur le support de φ)

$$\begin{aligned} \|f \cdot \varphi\|_E &= \|f \cdot \varphi \psi\|_E \leq \|f \cdot \psi\|_E \cdot \|\varphi\|_E \\ &\leq \|f \cdot \tau_k \varphi\|_E \cdot \|\varphi\|_E \\ &\leq c_\psi \|\varphi\|_E \end{aligned}$$

Alors : $f \in M(E)$ ■

Corollaire 2.3.1

$$s > \frac{n}{p},$$

$$B_{p,q}^s \hookrightarrow M(B_{p,q}^s) \hookrightarrow (B_{p,q}^s)_{lu}.$$

$$n(\frac{1}{p} - 1) < s < \frac{n}{p},$$

$$B_{\frac{n}{p},q}^s \cap L^\infty \hookrightarrow M(B_{p,q}^s) \hookrightarrow (B_{p,q}^s)_{lu}.$$

Preuve.

voir [5] ■

2.4 Localisation des espaces de Sobolev

2.4.1 Localisation de Sobolev en norme l^p

Théorème 2.4.1

$$W_p^m (m \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty]) \quad l^p.$$

Preuve.

la propriété de localisation en norme l^p s'obtient alors par récurrence sur m ,

Par définition on a :

$$\|f\|_{W_p^m} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|f^{(j)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

D'après l'hypothèse 2, on a :

$$\|f\|_{W_p^m} \approx \left(\sum_{|j| \leq m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f^{(j)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour ($m = 0$)

On a : $w_p^0 = L^p$

$$\text{et} \quad \|f\|_{W_p^0} \approx \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi \cdot f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p} \quad (1).$$

et puisque L^p est localisable en norme l^p alors (1) est vraie.

On suppose que la propriété est vraie pour m et nous allons prouver pour $m + 1$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_p^{m+1}} &\approx \left(\sum_{|j| \leq m+1} \sum_k \|\tau_k \varphi \cdot f^{(j)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\approx \left(\sum_{|l| \leq m} \sum_k \|\tau_k \varphi \cdot (f')^{(l)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f'\|_{W_p^m} \\ &\leq c \|f\|_{W_p^{m+1}} \end{aligned}$$

en déduit finalement que W_p^m est localisable en norme l^p . ■

2.5 Quelques exemples

Exemple 2.5.1 $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$p = 2 \quad n = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$f \quad g \quad L^2([-1, 1]).$$

Exemple 2.5.2 $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = vp\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$* \quad s = -\frac{1}{p'}, 1 \leq p \leq +\infty, q = \infty \text{ et } \|f\|_{B_{p,\infty}^{-\frac{1}{p'}}} = \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}j} \|Q_k f\|_p.$$

$$* \quad s < -\frac{1}{p'}, 1 \leq p, q \leq +\infty \text{ et } \|f\|_{B_{p,\infty}^s} < +\infty.$$

$$f = \delta$$

$$f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} s = -\frac{n}{p}, 1 \leq p \leq +\infty, q = +\infty. \\ s < -\frac{n}{p}, 1 \leq p, q \leq +\infty. \end{cases}$$

Exemple 2.5.3 $W_p^m(\mathbb{R}^n)$

$$m = 1, p = 2$$

$$h(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$h \in H^1([-1, 1]).$$

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème de la composition dans les espaces : $L^p(\mathbb{R}^n)$, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ avec quelques propriétés distingués.

3.1 Préparation

Définition 3.1.1

$$E \quad (E.B.D) \quad (E)_{l^\infty} \quad E_{lu}$$

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

$$\|f\|_{(E)_{l^\infty}} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\| \left(\sum \psi(\cdot - k) f \right) \right\|_E < +\infty$$

Proposition 3.1.1

$$E \quad (E.B.D) \quad E \quad 2$$

$$W^m(E)$$

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}) \tag{3.1.1}$$

Remarque 3.1.1

$$E_{lu} \quad \psi.$$

3.2 Enoncé des résultats principales

3.2.1 Application sur les $L^p(\mathbb{R}^n)$

Proposition 3.2.1 $p \in [1, +\infty[$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
 $(L^p(\mathbb{R}^n))_{lu}$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (3.2.1)$$

$B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|f\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))_{lu}}.$$

Preuve.

1- Supposons que f a la propriété 3.2.1, en choisissant la fonction ψ_0 appartient de E_{lu} , à support dans la boule B on obtient :

$$\|(\tau_k \psi_0) f\|_p \leq \|\psi_0\|_\infty \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Cela montre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

2- Supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, en choisissant la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de sorte que $\varphi(x) = 1$ sur B . On obtient :

$$\left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{B+a} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{k \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_k \varphi) f\|_p$$

■

Exemple

Lemme 3.2.1

$$0 < s \leq 1, \quad f' \in (B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}, \quad f \in (L^p(\mathbb{R}^n))_{l^\infty} \quad f \in (B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}.$$

Preuve.

1- Si $0 < s < 1$

Par le plongement $(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^\infty} \hookrightarrow (L^p(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$

Les hypothèses sur f implique $f \in W^1(L^p(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$, et compte tenu de la proposition 3.1.1 en trouve que $f \in (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$.

puisque on a : $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans le cas $s < 1$, on conclut que $f \in (B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$.

2- le cas $s = 1$

Par hypothèse sur f , on a $f' \in (B_{p,q}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$ et $f \in (L^p(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$. De (1) on obtient $f \in (B_{p,q}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$.

Finalement on conclut que $f \in (B_{p,q}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$. qui est un sous espace de $(B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n))_{l^\infty}$. ■

3.2.2 Application sur la composition

Lemme 3.2.2

$$T_f \quad \begin{array}{l} s > 0, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n). \end{array} \quad \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ M > 0, \quad \delta > 0 \end{array}$$

$$\|g\| \leq \delta \Rightarrow \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)} \leq M, \\ g \quad Q, \quad \|g\| \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 3.2.1

$$s = \frac{n}{p} \quad q > 1 \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad T_f \quad \begin{array}{l} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \\ (B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))_{l^\infty}. \end{array} \quad f'$$

Preuve.

voir [8] ■

La composition en dimension 1**Théorème 3.2.2**

$$\begin{array}{l}
 1 \leq p \leq q < +\infty \quad m + \frac{1}{p} < s < m + 1 \quad m \in \mathbb{N} \quad m \geq 1. \\
 f \quad \quad \quad f(0) = 0 \quad f' \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}) \\
 T_f \quad \quad \quad B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \quad \quad \quad c = c(s, p, q) > 0
 \end{array}$$

$$\|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} (1 + \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})})^{s-\frac{1}{p}}$$

$$g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

Preuve.

voir [11] ■

Conclusion

Finalement, nous avons montré que les espaces : $L^p(\mathbb{R}^n)$, $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ et $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{N}$) sont localisables en norme l^p , et $M(B_{p,q}^s) \subsetneq (M(B_{p,q}^s))_{l^\infty}$ pour $q < p$, de plus pour $s > \frac{n}{p}$ et toujours $q < p$, l'appartenance locale - uniforme à $B_{p,q}^s$ ne suffit pas à caractériser les multiplicateurs ponctuels de l'algèbre $B_{p,q}^s$. On arrive aussi à quelques résultats principales de la composition.

Bibliographie

- [1] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien. Pub. Math. Univ. Paris7. (1987).
- [2] G. Bourdaud. Localisations des espaces de Besov. Studia Math. Paris 153-163 (1988).
- [3] G. Bourdaud. La localisation dans les espaces de Besov. Orsay (1985).
- [4] G. Bourdaud. Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes. Manuscripta Math. 60,93-130 (1998).
- [5] T. Runst, W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytzkij operators and Non-linear Partial Differential Equations. Berlin 1996.
- [6] H. Triebel. Theory of function spaces, Basel. Boston. Stuttgart (1983).
- [7] J. Peetre. New thoughts on Besov spaces. Pub. Math. Univ. Duke U.S.A. (1976).
- [8] S. ALLAOUI, Thèse de doctorat, Univ. Batna. 2011.
- [9] Louis Fauchier, Boris Buffoni, Espaces de Sobolev. février (2006).
- [10] M. MOUSSAI, Cours de master, Université de M'sila 2015-2016.
- [11] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristofris, W. Sickel, superposition operators and functions of bounded p-variation. Rev mat Iberoamer. prépublication 362, institut de mathématiques de jussieu. unité mixte de recherche 7568 université Paris VI et Paris VII, CNRS. A paraitre Rev. MAT. Ibero americana.