ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

# Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

## Thème

Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant le deuxième polynôme de Chebyshev

Présentée par :
LESBAT Hadil
Soutenu publiquement le : juin 2023

Devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| DJAIDJA Noui | M.C.B | Université de M'sila | Président |
| NADIR Mostefa | Prof | Université de M'sila | Encadreur |
| GAGUI Bachir | M.C.A | Université de M'sila | Examinateur |

Année universitaire 2022/2023

# Remerciements

*Je remercie* **ALLAH** *,qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur* **Mostefa NADIR** *je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire*

*J'adresse mes sincères remerciements à le professeur* **DJAIDJA Noui** *et* **KHIRANI Amina** *qui m'a aidé dans ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à monsieurs les professeurs* **GAGUI Bachir** *et* **DJAIDJA Noui** *qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.*

*Enfin, je remercie tous mes amis de prés ou de loin, et les étudiants de ma promotion xde spécialité* **Analyse Mathématique et Numérique**

# Dédicace

*Je dédie mon travail à mes chers parents :* **LESBAT SAAD** *et* **BENDADA Yamina** pour leurs amour ,leurs vigilance et leurs sacrifices pour le bien de mon éducation et m'avoir conduit au plus haut niveau.Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi.

*A mes chers frères.*

&

*La promotion de mathématiques 2023*

*A toutes les personnes que j'aime.*

# Table des matières

## 0.1 Introduction

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. avec l'avantage des machines de calcul numérique,notamment les ordinateurs,ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles,à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Notre travail est divisé en trois chapitres.

Le Premier chapitre est essentiellement un rappels d'analyse fonctionnelle et numérique telles que la théorie des opérateurs continue et bornés,compacts et intégraux,et quelques théorème de point fixe.

Le Deuxième chapitre est une introduction à la terminologie et à la classifcation des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale.et quelques définitions du polynôme de Chebyshev utilisé pour résoudre cette équation.On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales du types Volterra-Fredholm.

Le Troisième chapitre est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra-Fredholm en utilisant la méthodes collocation avec la deuxième polynôme de Chebyshev tout en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

# Chapitre 1

# Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

## 1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Opérateurs continue

#### Linéarité des opérateurs

Soient $E$ et $F$ deux espaces normés, un opérateur $A$ défini sur $E$ dans $F$ est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E,\ \text{on a}\ \ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in K = (\mathbb{R}\ \text{ou}\ \mathbb{C}),\ \text{on a}\ \ A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

#### Continuité des opérateurs linéaires

Soient $E$ et $F$ deux espaces normés,un opérateur linéaire $A$ défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans $F$ est dit continu au point $x_0$ de $G$ si,on a la propriété suivante Pour toute suite $x_n$ de $G$ converge vers $x_0$, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

**Remarque 1.1.1** *L'opérateur linéaire $A$ est dit continu sur $G$,s'il est continu en chaque point de l'ensemble $G$.*

**Théorème 1.1.1** *Soient $E$ et $F$ deux espaces normés, un opérateur linéaire $A$ défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans $F$, est dit continu partout sur $G$ s'il est continu en point $x_0$ de $G$.*

### 1.1.2 Opérateurs bornés

**Définition 1.1.1** *Un opérateur linéaire $A$ défini sur $E$ dans $F$ est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \;\; \forall\, x \in E.$$

**Proposition 1.1.1** *La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu*

**Théorème 1.1.2** *Un opérateur linéaire $A$ est continu, si et seulement si,il est borné*

#### Espaces isomorphes

**Définition 1.1.2** *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $E$ et $F$ sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe $A$ défini sur $E$ dans $F$, c'est à dire*

*$A$ est bijectif sur $E$ dans $F$.*

*$A$ est $A^{-1}$ sont des opérateur continus .*

#### Espaces isométriques

**Définition 1.1.3** *Les espaces $E$ et $F$ sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie $A$ appliquant $E$ dans $F$, c'est à dire*

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \;\; \textit{pour tout} \;\; x \in E$$

**Remarque 1.1.2** *la notation d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.*

#### Normes équivalentes

**Définition 1.1.4** *Soit $E$ un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$,ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives $\alpha$ et $\beta$,telles que*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall \ x \in E.$$

*Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de $E$ dans $E$ soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$.*

**Théorème 1.1.3** *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie,toutes les normes sont équivalents*

### 1.1.3 Opérateurs compact

**Définition 1.1.5** *Soit $A$ un opérateur linéaire d'un espace normé $E$ dans un espace normé $F$,on dit que $A$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné $G$ dans $E$ à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans $F$. Autrement dit,la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

**Ensembles relativement compacts**

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de $G$, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans $F$.

**Théorème 1.1.4** *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\varphi_n$ de $E$, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans $F$.

**Preuve.** Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. ■

**Théorème 1.1.5** *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

**Théorème 1.1.6** *Le produit $AB$ de deux opérateurs bornés $A$ et $B$ est compact si l'un des opérateurs $A$ ou $B$ est compact.*

**Preuve.** Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de $E$, alors si $B$ est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur $A$ il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que $AB$ est compact.

D'autres part si $B$ est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur $A$ car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que $AB$ est compact. ■

**Théorème 1.1.7** *Soit $E$ un espace normé et $F$ un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de $E$ dans $F$, convergente en norme vers l'opérateur linéaire $A$ de $E$ dans $F$*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors $A$ et compact.

**Corollaire 1.1.1** *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

**Théorème 1.1.8** *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

**Théorème 1.1.9** *L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

**Noyau faiblement singulier**

**Définition 1.1.6** *On appelle noyau faiblement singulier la fonction $K$ continue sur $G \times G \subset R^n \times R^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que:*

$$\forall x, y \in G,\ x \neq y,\ \exists M > 0,\ |K(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

**Théorème 1.1.10** *L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

### 1.1.4 Equations aux Opérateurs compacts:

**Equations de second espèce**

**Définition 1.1.7** *Soit $A$ un opérateur compact d'un espace normé $X$ dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'equation de second espèce donné par*

$$\varphi - A\varphi = f; \ \varphi, f \in X$$

*où $f$ est un fonction donnée et $\varphi$ la fonction inconnue*

**Théorème 1.1.11** *Le noyau de l'opérateur $T$ défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\}$$

*est un sous espace fermé et de dimension finie*

**Théorème 1.1.12** *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N\left(T^2\right), ..., N(T^n), ...$$

*est une suite croissante stationnaire. Autrement dit,elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts,c'est à dire il existe un entier $p \in N$ tel que*

$$\{0\} \subset N(T), N\left(T^2\right) \subset .... \subset N(T^p) = N\left(T^{p+1}\right) = .....$$

Le nombre $p$ est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact $A$ pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

**Théorème 1.1.13** *L'image de l'opérateur $T$ défini par*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \textit{telle que} \ \ \varphi \in X\}$$

*est un sous espace fermé*

**Lemme 1.1.1** *Le nombre de Riez $p$ pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez $q$ pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit*

$$p = q$$

**Théorème 1.1.14** *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

**Lemme 1.1.2** *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si,$T^r$ est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

**Lemme 1.1.3** *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si $T^r$ est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

**Théorème 1.1.15** *soit $A$ un opérateur compact d'un espace normé $X$ dans lui même alors l'opérateur$T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif,de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

**Théorème 1.1.16** *soit $A$ un opérateur compact d'un espace normé $X$ dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

*admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$,il faut et il suffit que l'équation homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

*admette la solution triviale $\varphi = 0$.*

## 1.2 Théorèmes de point fixe

Les preuves des divers théorèmes d'existence et d'unicité présentés dans ce texte sont basées sur des théorèmes classiques affirmant l'existence ou l'unicité des points fixes.

**Théorème 1.2.1** *(Banach)*

*Soit $(U, d)$ un espace métrique complet non vide et soit l'application $A : U \to U$ satisfaite l'inégalité suivante*

$$d(Au, Av) \leq \alpha d(u, v) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

*pour tout $u, v \in U$ alors $A$ a un point fixe déterminé de manière unique $u_*$*

**Théorème 1.2.2** *(Schauder)*

*Soit $(E, d)$ un espace métrique complet, soit $U$ un sous-ensemble convexe fermé de $E$,et soit $A : U \to U$ une application*

*tel que l'ensemble $\{Au : u \in U\}$ est relativement compact dans $E$ alors $A$ possède au moins un point fixe.*

**Définition 1.2.1** *Soient $(E, d)$ un espace métrique et $F \subseteq E$. L'ensemble $F$ est dit relativement compact dans $E$ si la fermeture de $F$ est un sous-ensemble compact de $E$.*

**Théorème 1.2.3** *Soit $(D, d)$ un espace métrique complet, soit $U$ un sous-ensemble convexe fermé de $D$ et soit l'application $T$:$U \to U$ telle que l'ensemble $Tu : u \in U$ soit relativement compact dans $D$ alors l'opérateur $T$ il a au moins un point fixe $u^* \in U$*

$$Tu^* = u^*$$

**Théorème 1.2.4** *(Arzelà_ Ascoli) Soit $F \subseteq C[a, b]$ pour tout $a < b$, et supposons que les ensembles soient munis de la norme de Chebyshev alors, $F$ est relativement compacte dans $C[a, b]$ si $F$ est équicontinu (i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et tout $x$,$x^* \in [a, b]$ avec $|x - x^*| < \delta$ on a $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$) et uniformément borné (i.e il existe une constant $C > 0$ telle que telle que $\|f\|_\infty \leq C$ pour tout $f \in F$).*

# Chapitre 2

# Equations intégrales et leurs classification

## 2.1 Classification des équations intégrales

### 2.1.1 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau $k$ est tel que $k(x,t) = 0$ pour $x < t$

**Définition 2.1.1** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme:*

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

**Définition 2.1.2** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

### 2.1.2 Equations intégrales de Fredholm

**Définition 2.1.3** *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi$ est la fonction inconnue, $f$ et $k$ sont des fonctions connues,les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm.

**Définition 2.1.4** *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue ,$k(x,y)$ et $f(x)$des fonctions donnés, $\lambda$ est un facteur inconnu

### 2.1.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale.

**Définition 2.1.5** *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , x \in [a,b] \tag{2.1.1}$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dtds$$

où les fonctions $k_1$, $k_2$ et $f$ sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

**Exemple 2.1.1**

$$\varphi(x) = 6(x) + 3x^2 + 2 + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^1 t\varphi(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

$$\varphi(x) = x + \frac{17}{2}x^2 - \int_0^x \int_0^1 (r-t)\varphi(t)dtdr$$

## 2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.1)

**Définition 2.2.1** *Soit $X$ un espace normé et $T : X \to X$ un opérateur,$T$ est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que*

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \, et \lim_{n\to\infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \; pour \; tout \; \varphi \; de \; X$$

**Théorème 2.2.1** *(principe de contraction).Soit $X$ un espace normé.Si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique $\varphi$,alors $T$ est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \;\; pour \; tout \; n \in \mathbb{N}$$

**Théorèmes d'existence et d'unicité :**

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \, x \in [a,b] \tag{2.2.1}$$

où

1. $f \in C\,[a,b]\,,\; k_1(x,t) \in C(D_1)$,avec $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C\,[a,b]\,,\; k_2(x;t) \in C(D_2)$,avec $D_2 = [a,b] \times [a,b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t)\in D_2} |k_2(x,t)|$

**Théorème 2.2.2** *Dans les conditions de continuité ci-dessus,supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que:*

$$\frac{1}{c}\left[M_1 + M_2 \exp(c(b-a))\right] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C\,[a,b]$ ,et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive,à partir de $\varphi_0 \in C\,[a,b]$

**Preuve.** Soit l'opérateur integral $T : C[a,b] \to C[a,b]$ ,défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x,t)\left(\varphi(t) - \psi(t)\right) dt + \int_a^b k_2(x,t)\left(\varphi(t) - \psi(t)\right) dt \right| \\
&\leq \int_a^x |k_1(x,t)| \left|\left(\varphi(t) - \psi(t)\right)\right| dt + \int_a^b |k_2(x,t)| \left|\left(\varphi(t) - \psi(t)\right)\right| dt \\
&\leq M_1 \int_a^x \left|\left(\varphi(t) - \psi(t)\right)\right| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\, dt + \\
&\quad M_2 \int_a^b \left|\left(\varphi(t) - \psi(t)\right)\right| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\, dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\left(\exp(c(x-a) - 1\right) + \frac{M_2}{c}\left(\exp(c(b-a) - 1\right)\right] \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\exp(c(x-a) + \frac{M_2}{c}\exp c(x-a+b-x)\right] \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\left(M_1 + M_2\exp(c(b-x)\right) \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\left(M_1 + M_2\exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2\exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|, \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2\exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur $A$ est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2\exp(c(b-a)\right)$

La condition supposée garantit que $A$ est une contraction. Alors on applique principe de contraction ■

## 2.3 polynome de chebyshev

En mathématiques,un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de Moivre. Les polynômes de

Tchebychev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev.

Il existe deux suites de polynômes de Tchebychev,l'une nommée polynômes de Tchebychev de première espèce et notée $T_n$ et l'autre nommée polynômes de Tchebychev de seconde espèce et notée $U_n$(dans les deux cas,l'entier naturel $n$ correspond au degré).

**Le polynôme de seconde espèce** $U_n$

**Définition 2.3.1** *Le polynôme de Chebyshev $U_n(x)$ de seconde espèce est un polynôme de degré $n$ en $x$ défini par:*

$$U_n(x) = \sin(n+1)\theta / \sin\theta \quad \text{où } x = \cos\theta$$

*les formules élémentaires donnent par:*

$$\sin 1\theta = \sin\theta, \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1), \sin 4\theta = \sin\theta(8\cos^3\theta - 4\cos\theta), ...$$

*La suite de polynômes de Tchebychev $U_n$ peut être définie par la relation de récurrence:*

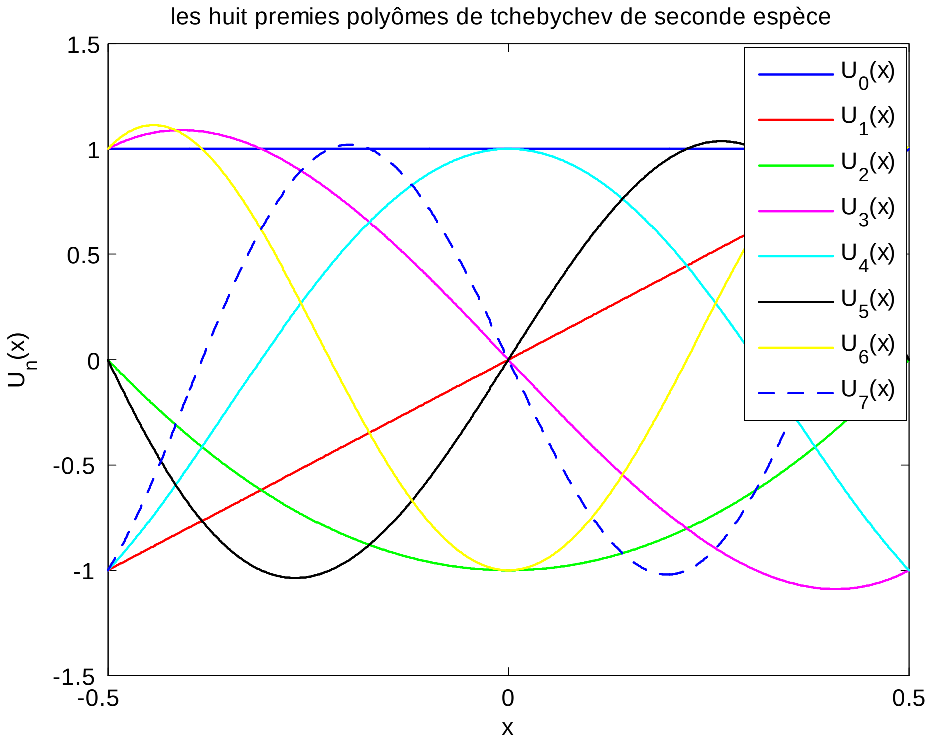
$$U_n(x) = 2xU_{n-1} - U_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3...$$

*avec les conditions initiales:*

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$$

*alors on trouve:*

$$\begin{aligned}
U_2 &= 4x^2 - 1 \\
U_3 &= 8x^3 - 4x \\
U_4 &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
U_5 &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\
U_6 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\
U_7 &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x
\end{aligned}$$


les huit premies polyômes de tchebychev de seconde espèce
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.5
0
0.5
x
U_n(x)
U_0(x)
U_1(x)
U_2(x)
U_3(x)
U_4(x)
U_5(x)
U_6(x)
U_7(x)

# Chapitre 3

# Résolution numériques des équations intégrales de volterra-fredholm

## 3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredhlolm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Chebychev.

### 3.1.1 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1.1}$$

Généralement,le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie,en exigeant que l'équation (3.1.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique,nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie,généralement des sous espaces de $C([a,b])$ ou de $L^2([a,b])$. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de $X_n$. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$,telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x), \quad x \in [a,b]$$

Pour déterminer les coefficients $(\alpha_j)$,on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$r_n(x) = \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi_n(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x) \ , \ \ x \in [a,b]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(t) - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\psi_j(t)dt \right\} - f(x) \quad , x \in [a,b]$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ ,(i.e, aux points de collocation) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt \right\} \alpha_j = f(x_i) \quad , i = 1, ..., n$$

qui s'écrit sous la forme $A\alpha = F$,où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt, \ i,j = 1, ..., n \\ \alpha &= (\alpha_i) \, , \ i = 1, ..., n \\ F &= f(x_i) \, , \ i = 1, ..., n \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$,ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

### 3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev

On considére l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \ x \in [a,b] \tag{3.1.2}$$

On définit les polynômes de Tchebyshev $U_i^*(x)$ de degré $i$ sur $[a,b]$ comme suit

$$U_i^*(x) = U_i\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

où $U_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré $i$ définit sur $[-1,1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approxmier la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.1.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(x) \tag{3.1.3}$$

où $U_i^*(x)$ sont les polynômes de Tchebyshev de degré $i$ définit sur $[a,b]$ et $\alpha_i$ des coeficiants à déterminier.

Substitant (3.1.3) dans (3.1.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(t)dt + \int_a^b k_2(x,t) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(t)dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t)U_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)U_i^*(t)dt\right] = f(x) \tag{3.1.4}$$

l'équation (3.1.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t)U_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)U_i^*(t)dt$$

Soit $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$, $i = 1, ..., n$ les points de chebychev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points $x_j$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, ...., n \tag{3.1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, ...., n \tag{3.1.6}$$

L'équation (3.1.5) représente un système linéaires de $(n)$ inconnue qui s'écrit sous la forme

$$A\alpha = F$$

où

$$\begin{aligned} A &= \psi_{ij}, i, j = 1, ..., n \\ \alpha &= (\alpha_1, ..., \alpha_n)^t \\ F &= (, f_1, ..., f_n)^t \\ \alpha &= A^{-1}F \end{aligned}$$

## 3.2 Exemples Numériques

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm de second espèce par la méthode de collocation-Tchebyshev

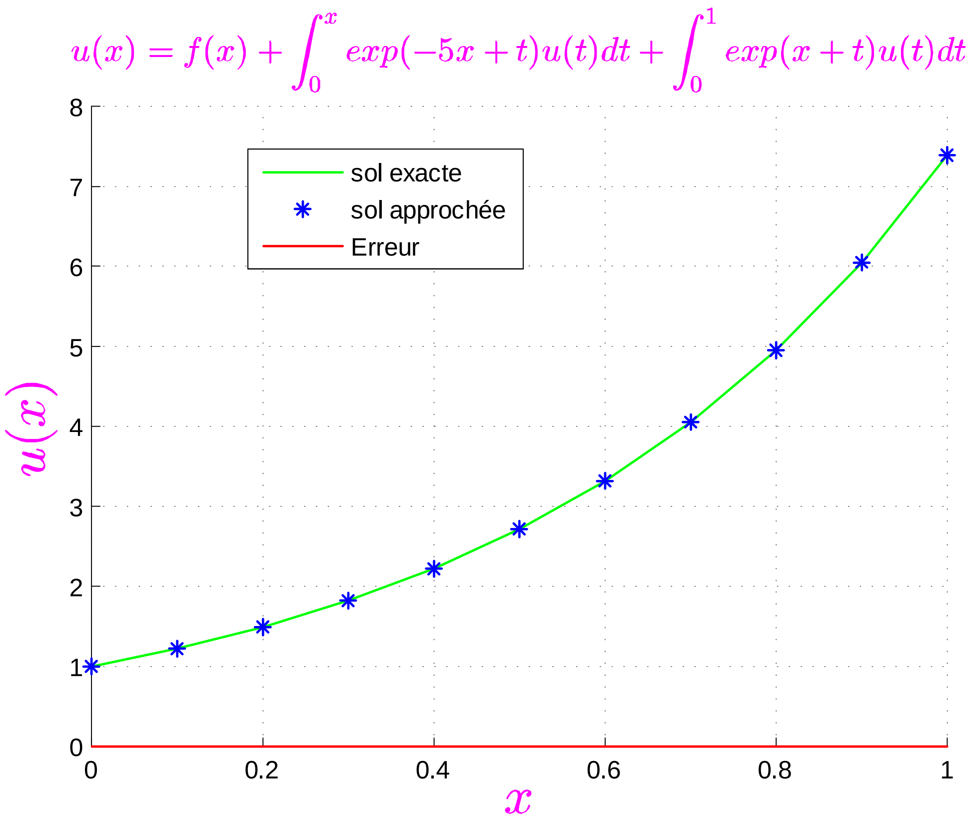
**Exemple 1** Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{(-5x+t)}\varphi(t)\,dt - \int_0^1 e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt = e^{2x} - e^{-x}(e^1 - 1) - \frac{1}{3}\left(e^{-2x} - e^{5x}\right)$$

admets la solution $\varphi_{ex}(x) = e^{2x}$

**Tableau 1:**Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$,de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev,en certains points de Tchebychev, l'erreur est calculée pour $n = 10$

| Point de x | Sol exacte $\varphi_{ex}$ | sol approchée $\varphi_{app}$ | Erreur |
|---|---|---|---|
| $0.000000e+000$ | $1.000000e+000$ | $1.000000e+000$ | $3.797141e-007$ |
| $1.000000e-001$ | $1.221403e+000$ | $1.221403e+000$ | $5.674145e-007$ |
| $2.000000e-001$ | $1.491825e+000$ | $1.491825e+000$ | $6.450359e-007$ |
| $3.000000e-001$ | $1.822119e+000$ | $1.822119e+000$ | $6.164978e-007$ |
| $4.000000e-001$ | $2.225541e+000$ | $2.225542e+000$ | $5.985893e-007$ |
| $5.000000e-001$ | $2.718282e+000$ | $2.718282e+000$ | $5.285743e-007$ |
| $6.000000e-001$ | $3.320117e+000$ | $3.320117e+000$ | $4.536987e-007$ |
| $7.000000e-001$ | $4.055200e+000$ | $4.055200e+000$ | $4.212682e-007$ |
| $8.000000e-001$ | $4.953032e+000$ | $4.953033e+000$ | $3.457187e-007$ |
| $9.000000e-001$ | $6.049647e+000$ | $6.049648e+000$ | $3.085252e-007$ |
| $1.000000e+000$ | $7.389056e+000$ | $7.389056e+000$ | $2.648393e-007$ |



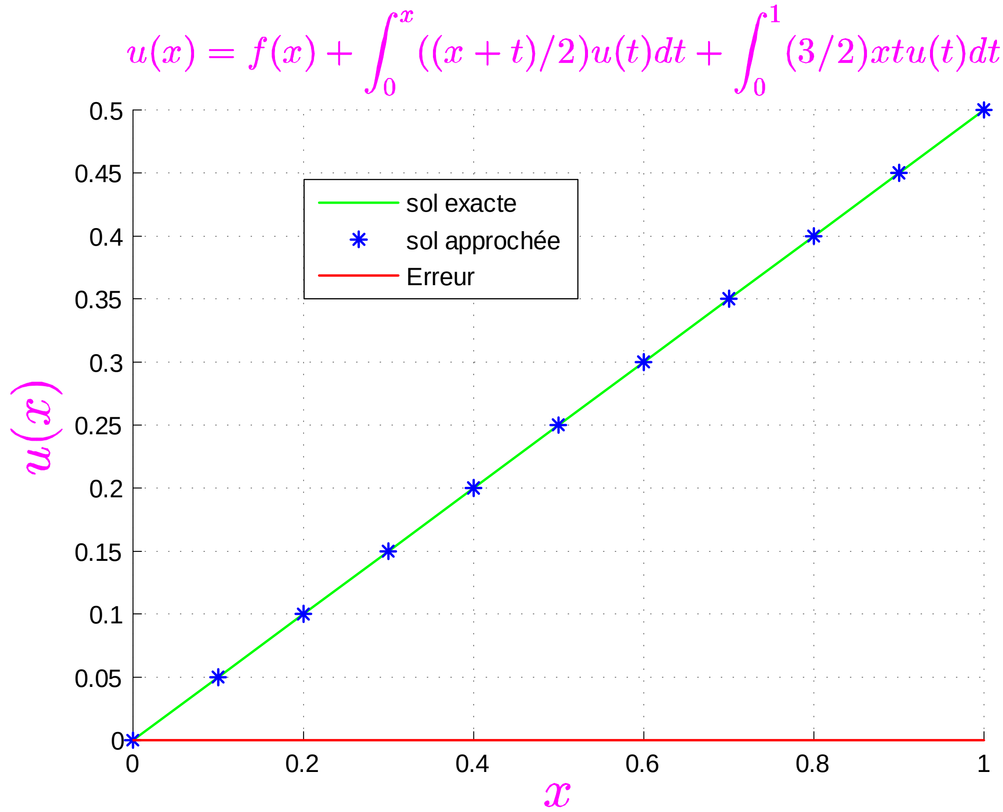
**Exemple 2** Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{(x+t)}{2}\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \frac{3}{2}xt\varphi(t)\,dt = (-5/24)x^3 + x/4$$

admets la solution $\varphi_{ex}(x) = \dfrac{x}{2}$

**Tableau 2** Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$ , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebychev, l'erreur est calculée pour $n = 10$

| Point de x | Sol exacte $\varphi_{ex}$ | sol approchée $\varphi_{app}$ | Erreur |
|---|---|---|---|
| $0.000000e+000$ | $0.000000e+000$ | $1.474511e-017$ | $1.474511e-017$ |
| $1.000000e-001$ | $5.000000e-002$ | $5.000000e-002$ | $1.387779e-017$ |
| $2.000000e-001$ | $1.000000e-001$ | $1.000000e-001$ | $2.775558e-017$ |
| $3.000000e-001$ | $1.500000e-001$ | $1.500000e-001$ | $0.000000e+000$ |
| $4.000000e-001$ | $2.000000e-001$ | $2.000000e-001$ | $0.000000e+000$ |
| $5.000000e-001$ | $2.500000e-001$ | $2.500000e-001$ | $1.110223e-016$ |
| $6.000000e-001$ | $3.000000e-001$ | $3.000000e-001$ | $0.000000e+000$ |
| $7.000000e-001$ | $3.500000e-001$ | $3.500000e-001$ | $5.551115e-017$ |
| $8.000000e-001$ | $4.000000e-001$ | $4.000000e-001$ | $5.551115e-017$ |
| $9.000000e-001$ | $4.500000e-001$ | $4.500000e-001$ | $5.551115e-017$ |
| $1.000000e+000$ | $5.000000e-001$ | $5.000000e-001$ | $0.000000e+000$ |



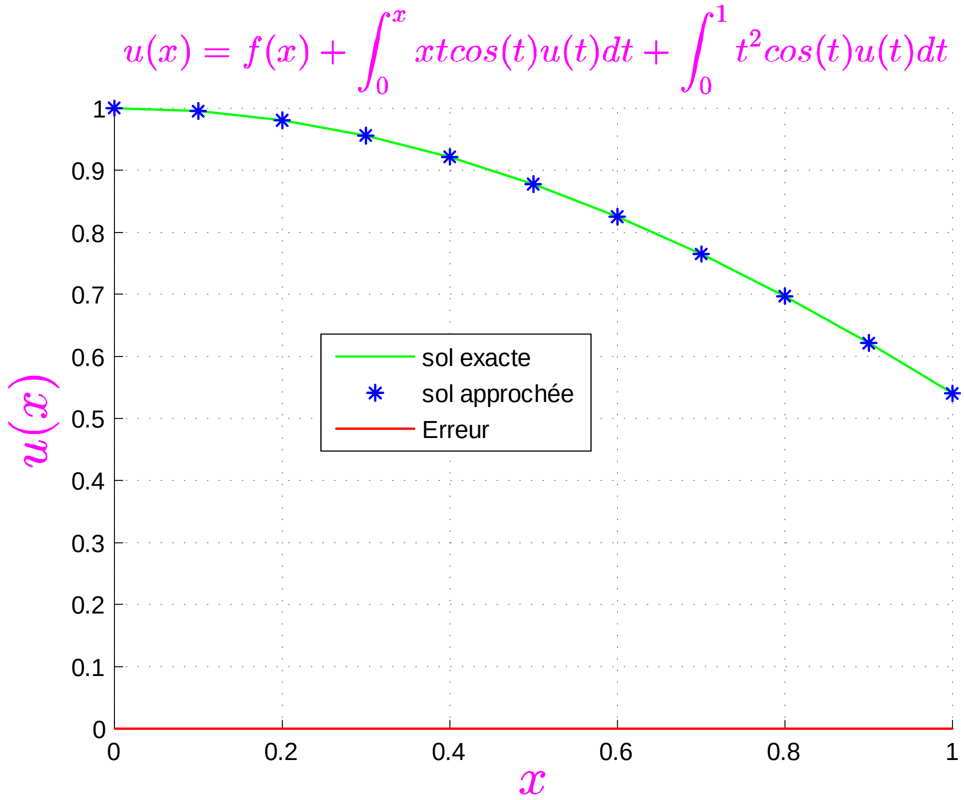

**Exemple 3** Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 2\cos(1) + \sin(1) + \cos(x) - x^2\sin(x) - 2x(\cos(x)(1/2) - 1/2)) \\ &\quad + \int_0^x xt\cos(t)\varphi(t)dt + \int_0^1 t^2\cos(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

admets la solution $\varphi_{ex}(x) = \cos(x)$

**Tableau 3** Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$ , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebychev, l'erreur est calculée pour $n = 10$

| Point de x | Sol exacte $\varphi_{ex}$ | sol approchée $\varphi_{app}$ | Erreur |
|---|---|---|---|
| $0.000000e+000$ | $1.0000e+000$ | $1.0000e+000$ | $1.6483e-010$ |
| $1.000000e-001$ | $9.9500e-001$ | $9.9500e-001$ | $2.0724e-010$ |
| $2.000000e-001$ | $9.8007e-001$ | $9.8007e-001$ | $2.4405e-010$ |
| $3.000000e-001$ | $9.5534e-001$ | $9.5534e-001$ | $2.4211e-010$ |
| $4.000000e-001$ | $9.2106e-001$ | $9.2106e-001$ | $1.9042e-010$ |
| $5.000000e-001$ | $8.7758e-001$ | $8.7758e-001$ | $8.3729e-011$ |
| $6.000000e-001$ | $8.2534e-001$ | $8.2534e-001$ | $8.0112e-011$ |
| $7.000000e-001$ | $7.6484e-001$ | $7.6484e-001$ | $3.1148e-010$ |
| $8.000000e-001$ | $6.9671e-001$ | $6.9671e-001$ | $6.5450e-010$ |
| $9.000000e-001$ | $6.2161e-001$ | $6.2161e-001$ | $1.2343e-009$ |
| $1.000000e+000$ | $5.4030e-001$ | $5.4030e-001$ | $2.3356e-009$ |



## Conclusion

Dans cette mémoire nous avons traité la méthode de collocation pour résoudre des équations intégrales de Volterra Fredholm.Le but de ce travail est de trouver des solution approchées à l'équations de volterra fredholm par des polynômes de chebychev de dégre deux.

La méthode de collocation consiste à discrétiser l'équation intégrale en un système d'équations algébriques en évaluant la fonction inconnue aux points de collocation appropriés.Les polynômes de Chebyshev de degré deux sont utilisés comme fonctions de base pour approximer la fonction inconnue sur un intervalle donné. Les polynômes de Chebyshev sont connus pour leur capacité à fournir une bonne approximation des fonctions continues et régulières

Les résultats numériques obtenus à partir de les exemples,démontrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode.

# Bibliographie


[1] K.Diethelm,The Analysis of Fractional Differential Equations.GNS Gesellschaft fur Numerische Simulation mbH Am GauBberg 2 38114 Braunschweig Germany,2004.

[2] J.Van Mill,Theory and Applications of Fractional Differential Equations,Faculteit der Exacte Wetenschappen Amsterdam The Netherlands,1992.

[3] K.E Atkinson ,The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,cambridge university Press,2009.

[4] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle,université de M'sila Algérie 2004.

[5] R.Agarwal,M.Meehan ,D.O'regan,Fixed Point Theory and Applications,cambridge university Press,2001.

[6] A. M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

[7] M,N,NADIR,Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra- Fredholm en utiisant les polynômes de Chebyshev,Master,université de M'sila 2022.

[8] J.C.Mason,David C.Handscomb,Chebyshev Polynomials,Boca Raton,Fla,2003

## الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني,و ذلك باستخدام كثير حدود شبيشيف من الدرجة الثانية و على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة .



## الكلمات المفتاحية :

المعادلات التكاملية لفولتيرا, المعادلات التكاملية لفريدهولم, كثير حدود شبيشيف , المعادلات التكاملية لفولتيرا – فريدهولم , طريقة التجميع .



## *Résumé* :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second espèce, en utilisant le polynôme de Chebychev de degré deux. De plus, de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée.



## *Mots clés* :

Equation intégrale de Volterra , Equation intégrale de Fredholm , polynôme de Chebychev , Equation intégrale de Volterra-Fredholm , Méthode de collocation.



## *Abstract* :

The purpose of this work is the numerical solution of the Volterra-Fredholm integral equation of the second kind using chebychev polynomial of the second-kind, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method.



## *Keywords* :

Volterra integral equation, Fredholm integral equation, Polynomial chebychev, Volterra-Fredholm integral equation, collocation method.