UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option :Analyse Fonctionnelle

Par

MAOUCHE Samiha

Sujet

Extention non linéaire des fonctionnels lipschitziens et ses applications dans les espaces de Banach

Soutenu le 04 juin 2017 devant le jury

Mr. Achour Dahmane	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Mezrag Lahcene	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Tallab Abdelhamid	M .C.B. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

En tous premier lieu, je remercie du fond du cœur Monsieur Lahcene MEZRAG pour avoir accepté de m'encadrer. Je tiens à témoigner ma gratitude à Mr D. Achour et Mr A. Tallab d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Un grand remerciement à mes camarades et mes amis qui m'ont soutenu moralement et à toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail. Au dela de tout, je remercie ma famille pour m'avoir toujours aidé durant mes études.

En fin, je reserve une mention de remerciments trés spéciale à mon mari Hamza qui m'a toujours encouragé en lui disant mille fois merci.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré au théorème de Hahn-Banach et ses applications dans le cas lipschitzien. Ce travail est basé sur un papier de Choe Ryong Gil en 2012.intitulé : an extension theorem of nonlinear Lipschitz functional and its application in Banach spaces. Il a étendu par analogie les applications du cas linéaire au cas lipschitzien. Il a utilisé le cas classique bien connu dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach cas lipschitzien. On utilisera une démonstration directe plus simple du a Assaf Naor (Metric Embeddings and Lipschitz Extensions, Lecture Notes) sans passer par le lemme de Zorn. L'objet de notre mémoire et d'étendre le théorème de Hahn-Banach et ses applications au cas lipschitzien.

Le théorème de Hahn-Banach est l'un des deux plus importants et fondamentaux théorèmes en analyse fonctionnelle. L'autre théorème est celui de Baire et ses "applications " (le Théorème de Banach-Steinhauss, le théorème du graphe fermé, etc,...). Sans le théorème de Hahn-Banach, l'analyse fonctionnelle serait très différente de la structure qu'on connait maintenant. Hahn et Banach ont montré indépendamment le théorème pour le cas réel dans les années 1920s voir (S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires, Studia Mathematica* 1 (1929), 211-216, et H. Hahn, *Ober linearer Gleichungssysteme in lincarer Rfiumcn*, J. Reina Angew. Math. 157 (1927), 214-229). Puis il y'avait eu l'extension de Murray dans le cas complexe. Est-ce que tout opérateur linéaire continu peut s'étendre en un opérateur linéaire continu sur tout l'espace si on remplace R ou C par un espace de Banach quelconque ? Banach et Mazur ont déjà montré que ce n'est pas le cas en 1933. Mais ce n'est qu'en 1950 que le résultat de Nachbin a répondu définitivement à la question et ainsi mettre fin à cette question. Pour plus d'informations on pourra consulter (L. Narici, E. Beckenstein, *The Hahn-Banach theorem : the life and times*, Topology and its Applications 77 (23) (1997), 193-211).

Pour l'histoire, le théorème de Hahn-Banach a été montré en premier en 1912 par le mathématicien autrichien Eduard Helly (1884-1943). Il a été découvert indépendamment dans les années 1920s par le mathematician autrichien Hans Hahn (1879-1934) in 1927 et le mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945) en 1929.

Dans le premier chapitre, on donnera quelques préliminaires et propriétés concernant les espaces métriques et les applications lipschitziennes.

La démonstration du théorème de Hahn-Banach est basée sur le lemme de Zorn. Ses applications sont multiples. On va rappeler quelques unes dans le second chapitre. On s'intéresse au théorème de Hahn-Banach dans le cas lipschitzien. On donnera une démonstration très simple de ce théorème et quelques applications inspirées du cas linéaires.

Dans le troisième et dernier chapitre, On essaie de détailler la notion du dual de Lipschitz et inversibilité des opérateurs lipschitziens entre espaces de Banach. Cette notion a été introduite par J.-G. Peng et Z.-B. Xu (*A novel dual notion of a non linear Lipschitz operator : Lipschitz dual operator,* Acta Mathematica Sinica, 45(3) , (2002), 469-480).

On termine ce mémoire par une conclusion et la bibliographie. On aurait pu approfondir notre travail dans le troisième chapitre mais malheureusement toute la bibliographie et en chinois.

Notations

$L(X;Y)$	Espace des applications linéaires.
X^*	Espace dual de X.
i_X	Injection canonique.
e	Elément neutre ou distingué,on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$\mathrm{Lip}(X,Y)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de$X$ dans Y.
$\mathrm{Lip}_0(X,Y)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans Y nulles au point e.
$X^\#$	Espace des formes lipschitziennes sur X.
$\tilde{X}$	Ensemble définis par $\{(x,y) \in X^2 : x \neq y\}$.
$\ell_\infty(X)$	Espace des fonctions borneés de X dans R.
$\mathcal{B}_X$	Boule unité fermé de l'espace X.
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire.
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien.
$\mathcal{M}$	Une partie de X.
D	Une partie de Y.

Chapitre 1

Espaces métriques et opérateurs lipschitziens

1.1 Espaces métriques

La notion d'espace métrique a été formalisé par Maurice Fréchet dans sa thése de doctorat d'était en 1906 "Sur quelques points du calcul fonctionel" a Palerme. Pour tout ce qui concerne ce chapitre ; on pourra consulter l'excellent livre de Weaver [Wea99].

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *Une distance sur un ensemble X est une applicatiion*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que pour tous $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Séparation),*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie),*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *Un espace métrique est un couple (X, d) oŭ X est un ensemble et d est une distance sur X.*

Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué). On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{\textit{espaces métriques complets pointés}\}.$$

Exemple 1.3 *L'ensemble des réels muni de la distance* $d(x, y) = |x - y|$ *est un espace métrique.*

Exemple 1.4 *Soit* $X = C([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble de toutes les fonctions continues* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Il y a plusieurs façons de mesurer la distance entre deux fonctions dans* X.

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

est une métrique sur X. *Le même pour*

$$d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Définition 1.5 *Un espace métrique* (X, d) *est dit discrèt s'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d(x_1, x_2) \geq \delta.$$

Un espace métrique discrèt est dit localement fini si pour toute $a \in X$ *et* $r > 0$, *l'ensemble* $\{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ *est fini.*

Par exemple $\mathbb{N}$ *muni de la distance* $d(n, m) = |m - n|$ *est localement fini.*

Définition 1.6 *Soit* X *un espace vectoriel. Une métrique* d *sur* X *est dite invariante si, et seulement si, pour tous* $x, y, z \in X$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

Définition 1.7 *Un espace métrique* (X, d) *est dite métriquement convexe si pour tout* $x_1, x_2 \in X$ *et* $0 < t < 1$, *il existe* $x_t \in X$ *tel que*

$$d(x_0, x_t) = td(x_1, x_2)$$

et

$$d(x_t, x_1) = (1 - t)d(x_1, x_2).$$

Définition 1.8 *Un sous ensemble A d'un espace métrique (X, d) est borné si, et seulement si, il est contenue dans une boule*

$$\exists a \in X, \exists r > 0,\ A \subset B_f(a, r).$$

Propriétés des espaces métriques

Nous donnerons quelques propriétés classiques des espaces métriques.

Définition 1.9 *Soient (X, d) un espace métrique et $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X.*
La suite u est convergente vers $l \in X$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad d(u_n, l) < \varepsilon.$$

La suite u est de Cauchy si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \quad d(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Définition 1.10 *Un espace métrique est complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy est convergente.*

Théorème 1.11 (Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique X est compact si, et seulement si, toute suite de X admet une sous suite convergente.*

Définition 1.12 *Un espace métrique (X, d) est localement compact si chaque point $x \in X$ admet un voisinage $B(x, r)$ tel que la ferméture $B(x, r)$ est compact.*

Exemple 1.13 *L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est localement compact. Soit X un ensemble muni de la topologie discrète. L'espace X est localement compact mais non compact. En effet, soit la boule $B(x, \frac{1}{2})$, oŭ $x \in X$, est un voisinage tel que sa ferméture $B(x, \frac{1}{2}) = B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ est compact.*

Proposition 1.14 *Tout espace métrique compact est séparable.*

Proposition 1.15 *Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors (X, d) est complet.*

Les morphismes entre les espaces métriques

Définition 1.16 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre deux espaces métrique (X, d) et (Y, δ). L'application f est continue en $a \in X$ si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

L'application f est continue si, et seulement si, elle est continue en tout point a de X.
L'application f est uniformément continue si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, d(x, a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Proposition 1.17 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une applicayion entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ). L'application f est continue en $a \in X$, si, et seulement si, pour toute suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de X converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.*

Proposition 1.18 *Si f est uniformément continue sur X, alors f est continue sur X, mais ils existent des applications continues qui ne sont pas uniformément continues.*

Exemple 1.19 *La fonction $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ défini par $f(x) = x^2$. f est évidemment continu. On prend $\varepsilon = 1$ et $\eta > 0$, nous choisisons $x = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta}$ et $y = \frac{1}{\eta}$.*

$$|x - y| = \left|\frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta}\right| = \left|\frac{\eta}{2}\right| < \eta.$$

mais

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta}\right)^2\right| = 1 + \frac{\eta}{4} > 1.$$

Donc f n'est pas uniformément continu.

Théorème 1.20 (Heine) *Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métrique.On suppose que E est compact, alors toute application continue de (X, d) vers (Y, δ) est uniformément continue.*

Définition 1.21 (Isométrie et plongement) *On dit que deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) sont isométrique,s'il existe une application bijective $f : X \longrightarrow Y$ qui préserve les distances, c'est-à-dire que ,pour tout $a, b \in X$,*

$$\delta(f(a), f(b)) = d(a, b).$$

1.1.2 Produit d'espaces métriques

Définition 1.22 *Soit* $\{(X_i, d_i, \mathrm{e}_i); i \in I\}$ *une famille d'espace métrique dans* $\mathcal{M}_0$*, on définit* $(\Pi^\infty X_i, d, \mathrm{e})$ *l'ensemble des* $x = (x_i)_{i\in I}$ *tel que* $\sup_{i\in I} d_{xi}(x_i, \mathrm{e}_i) < \infty$ *avec la métrique*

$$d(x, y) = \sup_{i\in I} d_{X_i}(x_i, y_i)$$

et l'elément distingué $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_i)_{i\in I}$.
Nous avons $(\Pi^\infty X_i, d, \mathrm{e}) \in \mathcal{M}_0$.

Exemple 1.23 *Le produit* $\Pi^\infty\mathbb{R}$ *est* $l^\infty(\mathbb{R})$.

1.2 Les opérateurs lipschitziens

Le morphisme naturel entre les espaces métriques sont les fonctions lipschitziennes comme les opérateurs linéaires entre les espaces de Banach. Dans l'analyse mathématique, la continuité de lipschitz, appelée d'aprés Rodolf Lipschitz, est une forme forte de continuité uniforme pour des fonctions.

1.2.1 Définitions et propriétés

On commence par quelques définitions et propriétés élémentaires concernant les opérateurs lipschitziens. Soient (X, d), (Y, δ) deux espaces métriques.

Définition 1.24 *Une application* $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \delta)$ *est dite lipschitzienne s'il existe* $k > 0$ *tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

si $k = 1, f$ *est dit non expansive,*
si $k < 1$, f *est dit contraction.*
On notera par $\mathrm{Lip}_k(X, Y)$ *l'ensemble des applications lipschitziens de raport* k *de* X *dans* Y*, et* $\mathrm{Lip}(X, Y)$ *la réunion de ces ensembles.*

Définition 1.25 *Pour une fonction lipschitzienne f, on définit la constante de Lipschitz par*

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f) &= \sup_{x\neq y}\frac{\delta(f(x),f(y))}{d(x,y)}.\\ &= \inf\{k, \quad k \text{ de la définition}\}.\end{aligned}$$

Définition 1.26 *Soit (X,e_1,d) et (Y,e_2,δ) deux espaces métriques pointés. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ préserve l'elément distingué si $f(\mathrm{e}_1)=\mathrm{e}_2$.*

Définition 1.27 *Soient $(X,d),(Y,\delta)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme lipschitzien si f est bijective et f et f^{-1} lipschitziennes .*
Elle est un isomorphisme isométrique si

$$\delta(f(x),f(y)) = d(x,y).$$

Définition 1.28 *Soient $(X,d),(Y,\delta)$ deux espaces métriques. On appelle plongement lipschitzien de X dans Y s'il existent $c_1,c_2>0, \forall x,y\in X$, on a*

$$\frac{1}{c_2}d(x,y) \leq \delta(f(x),f(y)) \leq c_1 d(x,y).$$

Remarque 1.29 *On dit que f est un plongement isométrique si $c_1=c_2=1$.*

Proposition 1.30 *Tout espace métrique (X,d) est isométrique à un sous ensemble de $l_\infty(I)$. Si X est séparable alors X est isométrique à un sous ensemble de $l_\infty(\mathbb{N})$.*

Remarque 1.31 *Toute application lipschitzienne est uniformément continue, mais la réciproque est fausse.*
Par exemple la fonction $x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ est uniformément continue, mais elle n'est pas lipschitzienne.

Proposition 1.32 *Soit X, $(X_i)_{i\in I}\in \mathrm{M}_0$. Pour tout $i\in I$, soit $f_i : X \longrightarrow X_i$ une application lipschitzienne telle que $f_i(\mathrm{e})=\mathrm{e}_i$, on suppose que $\sup_{i\in I}\mathrm{Lip}(f_i)<\infty$. Alors, la fonction*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \Pi^{\infty}_{i\in I}X_i\\ x &\longrightarrow f(x)=(f_i(x))_{i\in I}\end{aligned}$$

est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(f)=\sup_{i\in I}\mathrm{Lip}(f_i)$.

Démonstration. On montre que $(f_i(x))_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}^{\infty} X_i$.

$$d_i(f_i(x), \mathrm{e}_i) = d_i(f_i(x), f_i(\mathrm{e})) \leq d(x, \mathrm{e}),\ \forall i \in I.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} d_i(f_i(x), f_i(\mathrm{e})) \leq d(x, \mathrm{e}) < \infty.$$

On montre que f est lipschitzienne.

Soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) &= \sup_{i\in I} d_i\left(f_i\left(x\right), f_i\left(y\right)\right) \\ &\leq \sup_{i\in I} \mathrm{Lip}\left(f_i\right) d\left(x, y\right). \end{aligned}$$

Alors f est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(f) = \sup_{i\in I} \mathrm{Lip}(f_i)$. ■

Proposition 1.33 *Soient X, Y, Z trois espaces métriques. Soient $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications lipschitziennes alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est lipschitzienne et* $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leq \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f)$.

Démonstration. Soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d_z(g \circ f(x), g \circ f(y)) &= d_z(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\leq \mathrm{Lip}(g) d_y(f(x), f(y)) \\ &\leq \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f) d(x, y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leq \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f)$. ■

Proposition 1.34 *Soient X, Y deux espaces métriques et $f, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions lipschitziennes de X dans Y, on suppose que $f_n \longrightarrow f$ converge simplement, alors*

$$\mathrm{Lip}(f) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Lip}(f_n).$$

Démonstration. Comme f_n converge simplement vers f donc

$$\forall x \in X, f_n(x) \longrightarrow f(x) \Longleftrightarrow \forall x \in X, \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x).$$

On a

$$\begin{array}{rcl}
d_y(f(x),f(y)) & = & \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d_y(f_n(x),f_n(y)) \\
\frac{d_y(f(x),f(y))}{d(x,y)} & = & \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{d_y(f_n(x),f_n(y))}{d(x,y)} \\
\sup\limits_{x\neq y} \dfrac{d_y(f(x),f(y))}{d(x,y)} & = & \sup\limits_{x\neq y} \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{d_y(f_n(x),f_n(y))}{d(x,y)} \\
 & \leq & \sup\limits_{x\neq y} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{d_y(f_n(x),f_n(y))}{d(x,y)} \\
 & \leq & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{d_y(f_n(x),f_n(y))}{d(x,y)}.
\end{array}$$

Alors $\mathrm{Lip}(f) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Lip}(f_n)$. ■

1.2.2 Les espaces retracts

La notion de “Lipschitz retractation” dans les espaces métriques est comme la projection lineaire dans les espaces de Banach.

Définition 1.35 *Soit X un espace métrique et E un sous espace, une application lipschitzienne $P : X \longrightarrow E$ est dit “lipschitz retractation” si $P/E = Id_E$. Dans ce cas, on dira E l'espace retract de X.*

Définition 1.36 *Un espace métrique E est dit espace retract absolue s'il est espace retract de tout espace métrique qui le contient.*

$$\forall X \supset E \quad \exists P : X \longrightarrow E \text{ retractation.}$$

Proposition 1.37 *Soit Y un espace métrique alors, les proprietés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace Y est un espace retract absolu.*
2. *Pour tout métrique X, pour tout $E \subset X$ et toute fonction lipschitzienne $f : E \longrightarrow Y$ s'étend à $f^{\sim} : X \longrightarrow Y$ lipschitzienne.*

$$\begin{array}{lll}
X & & \\
i_X \uparrow & \searrow \widetilde{f} & \\
E & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

3. Pour tout Z espace métrique tel que $Y \subset Z$, et F espace métrique, alors toute fonction lipschitzienne $f : Y \longrightarrow F$ se prolonge à une fonction lipschitzienne $\widetilde{f} : Z \longrightarrow F$

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ i_X \uparrow & \searrow \widetilde{f} & \\ Y & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

1.2.3 L'espace $\mathrm{Lip}\,(X)$

Définition 1.38 *Soit X un espace métrique et Y un espace de Banach .On note par* $\mathrm{Lip}\,(X,Y)$ *l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes de X dans Y.*

$$\mathrm{Lip}\,(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \quad \textit{fonctions lipschitziennes}\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} = \max\{\|f\|_\infty, \quad \mathrm{Lip}\,(f)\}.$$

Si $Y = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Lip}\,(X,Y) = \mathrm{Lip}\,(X)$.

$\mathrm{Lip}\,(X)$ *est un espace de Banach muni de la norme sus citée, pour tout espace métrique X.*

1.2.4 Le prédual de $\mathrm{Lip}_0(X)$

Définition 1.39 *Soit X un espace métrique complét à l'elément distingué $X = (X, d, \mathrm{e})$*

$$X^\# = \mathrm{Lip}_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ \ \textit{lipschitzienne tel que } f(\mathrm{e}) = 0\}.$$

Proposition 1.40 *L'espace* $\mathrm{Lip}_0(X)$ *est complet pour tout espace métrique pointé X.*

Définition 1.41 (De Leew's map) *Soit (X, d) un espace métrique. Soit l'ensemble $\widetilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$ .pour toute $f : X \longrightarrow \Bbbk \quad (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*

On définit

$$\varphi(f)(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}.$$

De Leew's map est l'application

$$\begin{array}{rll} \varphi : & \mathrm{Lip}_0(X) & \longrightarrow L_\infty(\widetilde{\chi}) \\ & f & \longrightarrow \varphi(f). \end{array}$$

On a $\mathrm{Lip}(f) = \|\varphi(f)\|_{L_\infty(\widetilde{\chi})}$.

1.2.5 Adjoints d'opérateurs lipschitziens

Il a été montré par Arens et Eells que $\mathrm{Lip}_0(X)$ est un espace de Banach dual, nous commençons par rappeler la définition et les propriétés de l'espace d'Arens-Eells.

Définition 1.42 *Soit* (X, d, e) *un espace métrique pointé, une molucule sur* X *est une fonction* $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *a support fini satisfaisant* $\sum\limits_{x \in supp(m)} m(x) = 0.$
On note par $\mathcal{M}(X)$ *l'espace vectoriel des molécules sur* X. *On peut écrire*

$$m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j (1_{\{x_j\}} - 1\, \{x\prime_j\}).$$

On peut écrire

$$m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j m_{x_j x'_j}.$$

La condition $\sum\limits_{i=1}^{n} m(x_i) = 0$, *mais assure que cette réprésentation existe.*
On pose.

$$\|m\|_{\mathcal{M}(x)} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{l} |\lambda_j|\, d(x_j, x'_j) \quad \textit{sur toute les réprésentation} \right\}.$$

Il s'ensuit que $\|.\|_{\mathcal{M}(X)}$ *est une norme sur l'espace* $\mathcal{M}(X)$. *On note par* $\text{Æ}(X, d_X)$ *le complété de l'espace normé* $(\mathcal{M}(X), \|.\|_{\mathcal{M}(X)})$.

Proposition 1.43 *L'application.*

$$\begin{array}{rcccl} i_X : & X & \longrightarrow & \text{Æ}(X) & \\ & x & \longrightarrow & i_X(X) & = & 1_{\{x\}} - 1_{\{\mathrm{e}\}}. \\ & & & & = & m_{x\mathrm{e}}. \end{array}$$

est isométrie.

Théorème 1.44 *Soit* X *un espace métrique pointé, alors* $\mathrm{Lip}_0(X) = \text{Æ}(X)^\star$.

Démonstration. On définit

$$S : \text{Æ}(X)^\star \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(X).$$

par

$$\begin{aligned} S(\varphi)(x) &= \varphi(1_{\{x\}} - 1_{\{e\}}). \\ &= \varphi(m_{xe}) \end{aligned}$$

tel que $\varphi \in Æ(X)^\star$. On a pour tous $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(x)| &= \left|\varphi(1_{\{x\}} - 1_{\{\mathrm{e}\}}) - \varphi(1_{\{y\}} - 1_{\{\mathrm{e}\}})\right| \\ &= \left|\varphi(1_{\{x\}} - 1_{\{y\}})\right| \leq \|\varphi\| \left\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right\| \\ &\leq \|\varphi\| \, d(x, y). \end{aligned}$$

Alors on obtient que S est un opérateur lineaire contractante et $\mathrm{Lip}(S\varphi) \leq \|\varphi\|$, $\varphi \in Æ(X)^\star$.

On définite maintenant

$$\begin{aligned} R: \ \mathrm{Lip}_0(X) &\longrightarrow Æ(X)^\star \\ f &\longrightarrow R(f) \end{aligned}$$

avec

$$R(f)(m) = \sum m(x) f(x).$$

Soit $m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j (1_{\{x_j\}} - 1_{\{x'_j\}}$. Alors.

$$\begin{aligned} |R(f)(m)| &= \left|\sum_{j=1}^{l} m(x) f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{l} \lambda_j f(x_j) - f(x'_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{l} |\lambda_j| \left|f(x_j) - f(x'_j)\right| \\ &\leq \mathrm{Lip}(f) \sum_{j=1}^{l} |\lambda_j| \, d(x_j, x'_j). \\ &\leq \mathrm{Lip(f)} \, \|m\|_{Æ(X)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que cette inégalité reste valable dans $Æ(X)$, car $\mathcal{M}(X)$ est dense dans $Æ(X)$.

Par conséquent$\|R(f)\| \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Les deux opérateurs R et S sont l'inverse l'un de l'autre, donc l'espace $\mathrm{Lip}_0(X)$ est isométriquement isomorphe au $Æ(X)^\star$.

$$Æ(X)^\star \equiv \mathrm{Lip}_0(X).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 1.45 *Soit* $X \in \mathcal{M}_0$.

1. *Pour toute molécule* m, *on a* $\|m\|_{Æ(X)} = \sup\limits_{f \in B_{X^\#}} |\langle m, f\rangle|$.
2. $\|.\|_{Æ(X)}$ *est la plus grand semi norme sur* $\mathcal{M}(X)$ *qui satisfait*

$$\left\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right\|_{Æ(X)} = d(x,y), \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.46 *Soit* X *est un espace de Banach alors, il existe une projection de* $\mathrm{Lip}_0(X)$ *dans* X^*.

Théorème 1.47 (Linéairisation) *Soit* X *un espace métrique pointé, soit* E *un espace de Banach et soit* $T : X \longrightarrow E$ *un opérateur lipschitzien tel que* $T(0) = 0$. *Alors il existe un unique opérateur linéaire borné* $u : Æ(X) \longrightarrow E$, *tel que* $T : u \circ i_X$ *et* $\|T\| = \mathrm{Lip}(T)$.

$$\begin{array}{lcc} Æ(X) & & \\ i_X \uparrow & \searrow u & \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

Définition 1.48 *Soient* X *un espace métrique pointé et* Y *un espace de Banach. Sawashima a défini l'adjoint lipschitzien* $T^\# : \mathrm{Lip}_0(Y) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(X)$ *d'une application lipschitzienne* $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ *par la formule*

$$\begin{array}{rccc} T^\# : & \mathrm{Lip}_0(Y) & \longrightarrow & \mathrm{Lip}_0(X) \\ & f & \longmapsto & T^\#(f) = f \circ T \end{array}$$

L'opérateur $T^\#$ *est linéaire continue et* $\left\|T^\#\right\| = \mathrm{Lip}(T)$. *La restriction de* $T^\#$ *sur* E^* *définit un opérateur linéaire continue appelé l'opérateur transposer lipschitzien de* T

Chapitre 2

Théorème d'extension et ses conséquences

2.1 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

2.1.1 Introduction

Le théorème de Hahn-Banach est l'un des deux plus importants et fondamentaux dans la théorie de l'analyse fonctionnelle. L'autre théorème est "le Théorème de Baire" et leurs applications (Théorème de la borne uniforme, théorème du graphe fermé, etc,...). Sans le Théorème de Hahn-Banach, l'analyse fonctionnelle serait différent de la structure que nous connaissons aujourd'hui. Le théorème de .Hahn Banach et prouvé indépendamment pour le cas réel à la fin des années 1920 ([Hahn 27], [Ban 29]) puis il y a eu extension par Murray au cas complexe. Mais ce n'est qu'en 1950 que Nachbin a donné une réponse définitive à cette question. Pour plus d'informations, on peut consulter [BN 97].

Rappel : soit X un espace de Banach et soit X^* le dual topologique. Soit $u \in X$, puis par définition nous avons

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| .$$

2.1.2 Théorème de Hahn-Banach forme analytique

Le théorème de Hahn-Banach a été prouvé dans un premier temps en 1912 par le mathématicien autrichien Eduard Helly (1884 – 1943). Il a été redécouvert indépendamment dans les années 1920 par le mathématicien autrichien Hans Hahn (1879 – 1934) en 1927 et le mathématicien polonais Stefan Banach (1892 – 1945) en 1929.

Théorème 2.1 (Théorème de Hahn Banach) *Soit X un espace de Banach et $E \subset X$ un sous-espace. Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un opérateur linéaire borné. Alors il existe une extension $\widetilde{u} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de u (i.e.,$\widetilde{u}/E = u$) telle que $\|\widetilde{u}\| = \|u\|$.*

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \uparrow i_X & \searrow \widetilde{u} & \\ E & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} \end{array}$$

Démonstration. On fixe z dans $X \setminus E$. Nous devons trouver une valeur pour $\widetilde{u}(z)$ telle que, pour tout x de E

$$|\widetilde{u}(z) - u(x)| \leq \|u\| \|x - z\|, \quad \forall x \in E.$$

qui est équivalente à

$$u(y) - \|u\| \|y - z\| \leq \widetilde{u}(z) \leq u(x) + \|u\| \|x - z\|, \quad \forall x, y \in E$$

donc

$$\sup_{y \in E} (u(y) - \|u\| \|y - x\|) \leq \widetilde{u}(z) \leq \inf_{x \in E} (u(x) + \|u\| \|x - z\|)$$

qui est possible parce que, pour tout x, y dans E, nous avons

$$u(x) - u(y) \leq \|u\| \|x - y\| \leq \|u\| (\|x - z\| + \|y - z\|).$$

On pose

$$\widetilde{u}(z) = \inf_{x \in E} (u(x) + \|u\| \|x - z\|).$$

Puis le lemme de Zorn termine la preuve. ■

Corollaire 2.2 *Soit X un espace de Banach et $x \in X$. Il existe u dans X^* tel que*

$$\|u\| = \|x\|$$

et

$$u(x) = \langle u, x \rangle = \|x\|^2$$

oŭ $\langle\ ,\ \rangle$, *désigne le crochet de dualité.*

Démonstration. Considérons x dans X. On pose $X_0 = \mathbb{R}x$ et nous définissons u_0 par

$$u_0(\alpha x) = \alpha \|x_0\|^2.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|u_0\| &= \sup_{\|y\|=1} |u_0(y)| \\ &= \sup_{\|\alpha x\|=1} |u_0(\alpha x)| \\ &= \sup_{\|\alpha x\|=1} \left|\alpha \|x\|^2\right| \\ &= \sup_{|\alpha|\|x\|=1} |\alpha| \|x\| \|x\| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Par le théorème de Hahn-Banach, on a $u \in X^*$ et $\|u\| = \|x\|$. Aussi

$$\langle u, x \rangle = \langle u \backslash x_0, x \rangle = \langle u_0, x \rangle = \|x\|^2.$$

Ceci termine la preuve. ■

Corollaire 2.3 *Pour tout x dans X, nous avons*

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup_{\|u\|_{X^*}=1} |\langle u, x \rangle| \\ &= \max |\langle u, x \rangle| \ (\textit{i.e., le } \sup \textit{ est atteint}). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons

$$\sup_{\|u\|_{X^*}=1} |\langle u, x \rangle| \leq \sup_{\|u\|_{X^*}=1} \|u\| \|x\| \leq 1.$$

Soit u_0 comme dans le Corollaire 2.2, nous avons

$$u_1 = \frac{u_0}{\|x\|} \in X^*.$$

Et donc, $\|u_1\| = 1$ et $\langle u_1, x \rangle = \|x\|$. ■

Remarque 2.4 *Dans le rappel* $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$ *est une définition.Le* sup *n'est pas atteint en général.*

$$\begin{array}{rcl} \text{Le sup est atteint} & \Longleftrightarrow & X \text{ est rèflexif.} \\ & \Longleftarrow & \text{car } B_{X^*} \text{ est } *\text{- faiblement compact} \\ & \Longrightarrow & \text{R.-C. James (1951).} \end{array}$$

2.1.3 Conséquences du théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.5 (Krein-Milmann) *(Krein-Milmann) Soit* $K \subset X$ *un sous-ensemble convexe compact. Alors* K *coïncide avec l'envelope convexe fermée de ses points extrêmes (i.e.,* $K = \overline{conv}^{\|\cdot\|}(ext(K))$.

Définition 2.6 *Soit* f *un espace de Banach.* F *est injective isométrique si pour chaque sous-ensemble fermé* X_0 *d'un espace de Banach* X *et chaque opérateur linéaire bornée* $\widetilde{u}$: $X_0 \longrightarrow F$ *il existe un opérateur* $u : X \longrightarrow F$ *est une extension de* u *avec la même norme.*

Théorème 2.7 (Théorème Goodner, Nachbin, 1949-1950) $C(K)$ *est injective isométrie si, et seulement si,* $C(K)$ *est complet.*

Théorème 2.8 (Théorème de Kelly) F *est injective isométrie si, et seulement si,* $F = C(K)$.

2.2 Théorème de Hahn-Banach non linéaire et ses conséquences

2.2.1 Introduction

Dans cette section, nous allons étendre le théorème de Hahn-Banach analytique au cas non linéaire ; plus précisément au cas lipschitzien. Pour la démonstration on contoure le cas classique celui du lemme de Zorn en le montrant directement. Cette démonstration est due à (Metric *Embeddings and Lipschitz Extensions*, Lecture Notes, Assaf Naor).

2.2.2 Théorème de Hahn-Banach non linéaire

Théorème 2.9 (Théorème de Hahn-Banach non linéaire) *Soit E une partie d'un espace métrique (X, d) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Alors f se prolonge à $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ avec* $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}\left(\widetilde{f}\right)$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ i_X \uparrow & \searrow \widetilde{f} & \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

Démonstration. En considérant chaque coordonnée séparèment, il suffit de prouver que pour $\mathbb{R}$ au lieu de $l_\infty(I)$. Fixons z dans $X \setminus E$. Nous devons trouver une valeur pour $\widetilde{f}(z)$ telle que pour tout X dans E, on a

$$\left|\widetilde{f}(z) - f(x)\right| \leq \mathrm{Lip}(f) d(x, z) \quad , \forall x \in E$$

qui est équivalente à

$$f(y) - \mathrm{Lip}(f)\, d(y, z) \leq \widetilde{f}(z) \leq f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x, z) \quad , \forall y \in E.$$

Par conséquent

$$\sup_{y \in E} (f(y) - \mathrm{Lip}(f)\, d(y, z)) \leq \widetilde{f}(z) \leq \inf_{x \in E} (f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x, z)).$$

Il est possible parce que pour tous x, y dans E, nous avons

$$f(x) - f(y) \leq \mathrm{Lip}(f)\, d(x, y) \leq \mathrm{Lip}(f)\, (d(x, z) + d(y, z)).$$

Nous mettons

$$\widetilde{f}(z) = \inf_{x \in E}(f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x, z)).$$

Et le lemme de Zorn termine la preuve.

Preuve directe voir (Métric Embedding and lipschitz Extensions,lecture Notes, Assaf Naor).

Définissons la fonction $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{f}(z) = \inf (f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x, z)) \quad , z \in X.$$

Pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x) &\leq \mathrm{Lip}(f)\, d(x_0, x) \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)\, (d(x_0, z) + d(z, x)). \end{aligned}$$

Ceci s'implique (que $f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x,z)$ est borné ci dessous)

$$f(x_0) - \mathrm{Lip}(f)\, d(x_0,z) \leq f(x) + \mathrm{Lip}(f)\, d(x,z)$$

Si f est bien définie. De même, si $z \in E$, ce qui précède montre que $\widetilde{f}(z) = f(z)$. Finallement (par définition de l'inf), pour $z, y \in X$ et $\varepsilon > 0$, choisissez $x_z \in E$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f}(z) & \geq & f(x_z) + \mathrm{Lip}(f)\, d(z,x_z) - \varepsilon, \\ -\widetilde{f}(z) & \leq & -f(x_z) - \mathrm{Lip}(f)\, d(z,x_z) + \varepsilon. \end{array}$$

Puis

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z) & \leq & f(x_z) + \mathrm{Lip}(f)\, d(y,x_z) - f(x_z) - \mathrm{Lip}(f)\, d(z,x_z) + \varepsilon. \\ & \leq & \mathrm{Lip}(f)\, d(y,z) + \varepsilon. \end{array}$$

Ainsi, on voit que $\widetilde{f}$ est bien Lip(f)-lipschitzenne. ■

2.2.3 Conséquences du théorème de H-B non linéaire

D'aprés le Théorème 2.9 nous pourrions obtenir quelques corollaires, qui sont semblables à ceux du théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 2.10 *Soit $x_0 \neq 0$ un élément de X, alors il existe une fonction lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x_0) = \|x_0\| \text{ et } \mathrm{Lip}(f) = 1.$$

Démonstration. On note par $\mathcal{M}$ le sous-ensemble fermé de tous les points de la forme αx_0, oŭ α est un réel non négative. Définissons f sur $\mathcal{M}$ par $f(x) = \|x\|$. Nous avons $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Il est claire que $f(x_0) = \|x_0\|$. Pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

La fonction ainsi définie f est lipschitzienne sur $\mathcal{M}$ et $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$.
D'autre part, il existe α_1, α_2 des nombres réels tels que pour tous $x, y \in \mathcal{M}$ $\quad x = \alpha_1 x_0$, $y = \alpha_2 x_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |\|\alpha_1 x_0\| - \|\alpha_2 x_0\|| \quad = \quad |\alpha_1 \|x_0\| - \alpha_2 \|x_0\|| \\ & = & |\alpha_1 - \alpha_2| \|x_0\| \quad = \quad \|(\alpha_1 - \alpha_2) x_0\| = \|\alpha_1 x_0 - \alpha_2 x_0\| \\ & = & \|x - y\|. \end{array}$$

Donc $\mathrm{Lip}\,(f) \geq 1$. Alors nous obtenons que $\mathrm{Lip}\,(f) = 1$.

Nous étendons maintenant le fonction f de $\mathcal{M}$ à X par le Théorème 2.9.

Corollaire 2.11 *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^{\#}} \frac{|f(x)|}{\mathrm{Lip}\,(f)} = \sup_{f \in X^{\#}} |f(x)|. \tag{2.1}$$

■

Démonstration. Si $x = 0$ alors, $f(x) = 0$, l'egalité 2.1 est triviale. Donc nous supposons que $x \neq 0$. Puisque $|f(x)| \leq \mathrm{Lip}\,(f)\,\|x\|$ pour tout $f \in X^{\#}$, si $\mathrm{Lip}\,(f) \neq 0$ on a

$$\sup_{f \in X^{\#}} \frac{|f(x)|}{\mathrm{Lip}\,(f)} \geq \|x\|. \tag{2.2}$$

Par le Corollaire (2.2), il existe une fonction $f \in X^{\#}$ tel que $\mathrm{Lip}\,(f) = 1$ et $f(x) = \|x\|$, donc $(|f(x)|/\mathrm{Lip}\,(f)) = \|x\|$ .Alors

$$\sup_{f \in X^{\#}} \frac{|f(x)|}{\mathrm{Lip}\,(f)} \geq \|x\|. \tag{2.3}$$

Ainsi la première partie de 2.1 découle de 2.2 et 2.3.Il en va de même de la preuve de seconde partie de 2.1. ■

Corollaire 2.12 *Pour toute $x_0 \in X \backslash \mathcal{M}$, il existe une fonction lipschitzienne réelle f définie sur X telle que*

1. $f(x) = 0$ *pour* $x \in \mathcal{M}$,
2. $f(x_0) = d$ *oŭ* $d = \inf_{z \in \mathcal{M}} \|z - x_0\| > 0$,
3. $\mathrm{Lip}\,(f) = 1$.

Démonstration. On note par $\mathcal{M}_1$ un ensemble fermé quelconque de X, et on définit une fonction f sur $\mathcal{M}_1$ par

$$f(x) = \inf_{z \in \mathcal{M}} \|z - x\|.$$

Alors il est facile de voir que f satisfaite les conditions 1 et 2 du Corollaire. Nous montrons que maintenant f vérifiée la condition 3. Pour cela, soient $x, y \in \mathcal{M}_1$. Il est claire que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \inf_{z \in M} \|z - x\| - \inf_{z \in M} \|z - y\| \right| \\ &\leq \sup_{z \in M} |\|z - x\| - \|z - y\|| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Danc f est une fonction lipschitzienne sur $\mathcal{M}_1$ et $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$.

D'autre part, puisqu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ telle que $\|z_n - x_0\| \longrightarrow d$ quand $n \longrightarrow \infty$. On a

$$d = |f(z_n) - f(x_0)| \leq \mathrm{Lip}(f) \|z_n - x_0\| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathrm{Lip}(f) \cdot d$$

et donc $\mathrm{Lip}(f) \geq 1$. Par conséquent $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Nous prolongeons maintenant la fonction f à X par le Théorème 2.9. ■

Théorème 2.13 *Soit f une fonction complexe lipschitzienne définie sur un sous-ensemble fermé $\mathcal{M}$ d'un espace de Banach complexe X. Alors il existe une fonction complexe F définie sur X telle que pour tout $x \in \mathcal{M}$, on a*

1. $F(x) \quad = \quad f(x)$
2. $\mathrm{Lip}^2(F) \quad \leq \quad \mathrm{Lip}^2(\mathrm{Re}\, f) + \mathrm{Lip}^2(\mathrm{Im}\, f)$,

oŭ $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont les parties réelles et imaginaires de f respectivement.

Démonstration. Si $f(x) = g(x) + ih(x)$, oŭ $g(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$ et $h(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$, alors g et h sont des fonctions réelles lipschitziennes définies sur $\mathcal{M}$. Pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, donc

$$f(x) - f(y) = (g(x) - g(y)) + i(h(x) + h(y)),$$

nous avons

$$|g(x) - g(y)| \quad \leq \quad |f(x) - f(y)| \quad \leq \quad \mathrm{Lip}(f) \|x - y\|$$

et

$$|h(x) + h(y)| \quad \leq \quad |f(x) - f(y)| \quad \leq \quad \mathrm{Lip}(f) \|x - y\|.$$

En même temps, nous avons

$$\mathrm{Lip}(g) \leq \mathrm{Lip}(h) \text{ et } \mathrm{Lip}(h) \leq \mathrm{Lip}(f).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)|^2 &= |g(x) - g(y)|^2 + |h(x) + h(y)|^2 \\ &\leq \left(\mathrm{Lip}^2(g) + \mathrm{Lip}^2(h)\right) \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Implique que

$$\text{Lip}^2(f) \leq \text{Lip}^2(g) + \text{Lip}^2(h).$$

Maintenant le Théorème peut être prouvé de manière similaire au Théorème 2.9.

Si $X \neq \mathcal{M}$, choisir $x \in X \setminus \mathcal{M}$, et défini $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cup \{x_0\}$.

D'abord, nous étendons la fonction f de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}_1$ avec continuité on définit une fonction f_1 sur $\mathcal{M}_1$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) \text{ if } x \in \mathcal{M} \\ C = iD \text{ if } x = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ici les constantes C et D sont les suivantes. Comme $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions Lipschitziennes sur $\mathcal{M}$, il est clair qu'il existe, en répétant le même argument que le théorème , les constantes C et D telle que

$$\sup_{x\in\mathcal{M}} (g(x) - \text{Lip}(g)\|x - x_0\|) \leq C \leq \inf_{x\in\mathcal{M}} (g(x) + \text{Lip}(g)\|x - x_0\|),$$

$$\sup_{x\in\mathcal{M}} (h(x) - \text{Lip}(h)\|x - x_0\|) \leq D \leq \inf_{x\in\mathcal{M}} (h(x) + \text{Lip}(h)\|x - x_0\|).$$

La constante C et D dans 2.4 sont telles. Nous allons montrer que la fonction f_1 définie par 2.4 est la fonction Lipchitzienne sur $\mathcal{M}_1$ et $\text{Lip}^2(f_1) \leq \text{Lip}^2(g) + \text{Lip}^2(h)$. Choisir tous $x, y \in \mathcal{M}_1$. Si $x, y \in \mathcal{M}$, alors il est claire que

$$|f_1(x) - f_1(y)| = |f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f)\|x - y\|.$$

Si $x \in \mathcal{M}$, $y = x_0$, puit

$$f_1(x) - f_1(y) = f(x) - (C - iD) = (g(x) - (C)) + i(h(x) - D),$$

et, donc

$$\begin{aligned} |g(x) - C| &\leq \text{Lip}(g)\|x - x_0\|, \\ |h(x) - D| &\leq \text{Lip}(h)\|x - x_0\|, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_1(y)| &= |g(x) - C|^2 + |h(x) - D|^2 \\ &\leq \left(\text{Lip}^2(g) + \text{Lip}^2(h)\right)\|x - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Il en est de même pour $y \in \mathcal{M}$, $x = x_0$. Donc il existe une fonction Lipschitzienne f_1 telle que f_1 soit l'extension de f de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}_1$ avec la continuité.

La seconde partie de la preuve, c'est-à dire l'existence du fonction complexe Lipschitzien défini sur X satisfaisant aux conditions 1 et 2, peut être prouvée en répétant le processus du Théorème 2.9 ci dessus, qui a été fait par le lemme de Zorn. ■

Théorème 2.14 *Soit f une fonction complexe lipschitzienne définie sur un sous-ensemble fermé $\mathcal{M}$ d'un espace de Banach complexe X. Il existe une fonction complexe lipschitzienne F définie sur X telle que*

$$\begin{aligned} 1.\ F(x) &= f(x) \quad \textit{pour } x \in \mathcal{M}, \\ 2.\ \mathrm{Lip}'(F) &= \mathrm{Lip}'(f). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Inversibilité de l'opérateur Lipschitzien et la dualité

3.1 Propriétés

Le dualité a joué un rôle trés important dans la théorie de l'opérateur lineaire. En générale, de composer un dual correspondant à l'opérateur non lineaire est impossible dans une mesure, mais il est posssible pour l'opérateur Lipschitzien. Un concept d'un dual de l'opérateur non lineaire Lipschitzien dans les espaces de Banach a été introduit dans le document [PX02]. Cette idée était basée sur l'espace Lip-dual des espaces de Banach [PX99].

Dans cette section nous allons considérer le problème en [PX99].sur la relation d'inversibilité entre l'opérateur Lipschitzien non lineaire et son opérateur Lip dual.L'inversibilité du l'opérateur lipschitzien est le problème important présenté dans plusieurs côtés y compris son analyse spéctrale.

Proposition 3.1 *Soit* $T \in \operatorname{Lip}(\mathcal{M}, D)$. *Alors* $\mathcal{M}$ *est un certain sous ensemble de* $\left(\mathcal{M}^{\#}\right)^{*}$ *d'inclusion isométrique. Si l'opérateur* $\delta : \mathcal{M} \longrightarrow \left(\mathcal{M}^{\#}\right)^{*}$ *est isométrique, alors, pour tous* $x, y \in \mathcal{M}$, *on a*

$$\|x-y\| = \|\delta_x - \delta_y\| = \sup_{f \in \mathcal{M}^{\#}} |f(x) - f(y)|, \tag{3.1}$$

$$\|T_x - T_y\| = \left\| \left(T^{\#}\right)^{*}(\delta_x) - \left(T^{\#}\right)^{*}(\delta_y) \right\|. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{M}$ fixé. Considerons une fonction $\delta(x)$ définie sur $\mathcal{M}^{\#}$ par $\delta(x)(f) = f(x)$. Alors la fonction $\delta(x)$ est linéaire bornée sur $\mathcal{M}^{\#}$ pour que

$$|\delta(x)(f)| = |f(x)| \leq \mathrm{Lip}(f)\|x\|, \text{i.e.,} \delta(x) \in \left(\mathcal{M}^{\#}\right)^{*}.$$

Maintenant

$$\delta\mathcal{M} = \{\delta(x) \in \mathcal{M} \setminus x \in \mathcal{M}\},$$

et nous allons montrer que l'opérateure $\delta : \mathcal{M} \longrightarrow \delta\mathcal{M}$ est isométrique.
Si $x, y \in \mathcal{M}$, alors nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\|\delta(x) - \delta(y)\| &= \sup_{f \in \mathcal{M}} \|(\delta(x) - \delta(y))(f)\| \\
&= \sup_{f \in \mathcal{M}} |f(x) - f(y)| \\
&\leq \sup_{f \in \mathcal{M}} \mathrm{Lip}(f)\|x - y\| \\
&\leq \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Si $x \neq y$, Alors par le Théorème de Hahn-Banach, il existe une fonction $f_0 \in X$ tel que

$$\|f_0\| = \mathrm{Lip}(f_0) = 1, \; f_0(x - y) = \|x - y\|.$$

Maintenant nous notons encore par f_0 une contraction à $\mathcal{M}$ de f_0, alors il est clair que $f_0 \in \mathcal{M}^{\#}$. d'oŭ nous avons que

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= |f_0(x - y)| \\
&= |f_0(x) - f_0(y)| \\
&\leq \sup_{f \in \mathcal{M}^{\#}} |f(x) - f(y)| \\
&= \sup_{f \in \mathcal{M}^{\#}} |(\delta(x) - \delta(y))(f)| \\
&= \|\delta(x) - \delta(y)\|.
\end{aligned}$$

C'est la preuve de l'égalité 3.1. Nous montrons l'égalité 3.2.
Pour tout $x \in \mathcal{M}$ et tout $f \in D^{\#}$, puisque $f \circ T \in \mathcal{M}^{\#}$ et $\delta(x) \in \left(\mathcal{M}^{\#}\right)^{*}$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(Tx) &= (f \circ T)(x) \\
&= \left(T^{\#} f\right)(x) \\
&= \delta(x)\left(T^{\#} f\right) \\
&= \left(\delta(x) \circ T^{\#}\right)(f) \\
&= \left(T^{\#}\right)^{*}(\delta(x))(f).
\end{aligned}$$

D'autre part, si l'opérateur $\delta' : D \longrightarrow (D^{\#})^*$ est isométrique comme δ, alors $\delta'(Tx) \in (D^{\#})^*$. Donc

$$f(Tx) = \delta'(Tx)(f).$$

Ainsi nous avons

$$\delta'(Tx)(f) = (T^{\#})^*(\delta(x))(f), \quad \text{for all } f \in D^{\#},$$

c'est-à-dire

$$\delta'(Tx) = (T^{\#})^*(\delta(x)).$$

Donc, par l'égalité 3.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \|\delta'(Tx) - \delta'(Ty)\| \\ &= \left\|(T^{\#})^*(\delta(x)) - (T^{\#})^*(\delta(y))\right\|. \end{aligned}$$

Cela termine la preuve. ■

Lemme 3.2 *Si $l(T) > 0$, alors $R(T)$ est un ensemble fermé, T^{-1}existe, et $T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(R(T), \mathcal{M})$, oŭ*

$$l(T) = \inf_{x \neq y} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|}, \tag{3.3}$$

qui a été appelé une constante Lipschitz-glp de T.[WX99]

Démonstration. Pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, car $l(T)\|x - y\| \leq \|Tx - Ty\|$, si $l(T) > 0$, puis $Tx = Ty$ implique $x = y$. Par conséquence T^{-1} existe.
D'une part, pour tous $x_1, y_1 \in R(T)$ il existe $x, y \in \mathcal{M}$ tel que

$$Tx = x_1, Ty = y_1.$$

Par conséquence T^{-1} est une opérateur lipschitzien sur $R(T)$ dans $\mathcal{M}$ i.e., $T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(R(T), \mathcal{M})$ et nous avons

$$L(T^{-1}) \leq l^{-1}(T).$$

Maintenant nous montrons que $R(T)$ est un ensemble fermé. Pour ce faire, nous prenons tout $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R(T)\, et y_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} y_0.$$

Alors il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ tel que

$$y_n = Tx_n, \text{ i.e., } x_n = T^{-1}y_n, \quad (n = 1, 2, ...).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|T^{-1}y_n - T^{-1}y_m\| \\ &\leq l^{-1}(T)\|y_n - y_m\| \underset{n,m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Cela nous montrons que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de cauchy de X. Puisque X est complet et $\mathcal{M}$ est fermé, il existe un point $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que $x_n \longrightarrow x_0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Par la continuité de T, nous avons

$$\begin{aligned}y_0 &= \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n \\ &= Tx_0 \in R(T).\end{aligned}$$

Il est facile de voire que le même résultat pour $T^{\#}$ est vrai. ■

Lemme 3.3 *Si $R(T)$ est un ensemble fermé, T^{-1} existe, et $T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(R(T), \mathcal{M})$, alors on a :*

$$R\left(T^{\#}\right) = \mathcal{M}^{\#}.$$

Démonstration. Pour tout $y \in R(T)$ et tout $f \in \mathcal{M}^{\#}$, l'ensemble $g(y) = f(T^{-1}y)$. sont lipschitzienne respectivement sur $R(T)$ et $\mathcal{M}$, le fonction g est aussi lipschitzienne sur $R(T)$. Par le Théorème 2.9, nous peuvons étendre g de $R(T)$ a D. Nous notons encore une fois par l'extension g, il est clair que $g \in D^{\#}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{M}$,

$$\left(T^{\#}g\right)(x) = g(Tx) = g(y) = f\left(T^{-1}y\right) = f\left(T^{-1}Tx\right) = f(x).$$

Donc $T^{\#}g = f$. Cela montre que $R\left(T^{\#}\right) = \mathcal{M}^{\#}$. ■

Lemme 3.4 *Si $R(T)$ est un ensemble fermé et $\left(T^{\#}\right)^{-1}$ existe, alors*

$$R(T) = D.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $y_0 \in D \setminus R(T)$. Parce que $R(T)$ est l'ensemble fermé, on a

$$d = \inf_{y\in R(T)} \|y - y_0\| > 0.$$

Par le Corollaire 2.12 du Théorème 2.9, il existe une fonction $f_0 \in D^{\#}$ tel que

$$f_0(y) = 0 \text{ for } y \in R(T), \; f_0(y) = d \text{ et } \operatorname{Lip}(f_0) = 1.$$

D'une part, puisque $Tx \in R(T)$ pour tout $x \in \mathcal{M}$, nous avons

$$f_0(Tx) = \left(T^{\#} f_0\right)(x) = 0.$$

Alors

$$T^{\#} f_0 = 0.$$

Donc $\left(T^{\#}\right)^{-1}$ existe, nous avons $f_0 = 0$, mais cela contre dit que $\operatorname{Lip}(f_0) = 1$. ■

Il est facile de voir que le Lemme suivant est valide, mais nous allons vérifier cela dans l'intérêt de la preuve du théorème suivante. Il nous faut non seulement le Lemme3.5 mais aussi la remarque de celui-ci.

Lemme 3.5 *L'opérateur T est inversible dans $\operatorname{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$ si, et seulement si, $l(T) > 0$, $R(T) = D$. Alors on a*

$$l(T) = \operatorname{Lip}^{-1}\left(T^{-1}\right).$$

Démonstration. D'abord, nous montrons que si T est inversible dans $\operatorname{Lip}_0(\mathcal{M},D)$ alors $l(T) = L^{-1}(T^{-1})$.
Donc, pour tous $x, y \in \mathcal{M}$ $(x \neq y)$, il existe $x_1, y_1 \in D$ $(x_1 \neq y_1)$ tel que

$$\begin{cases} T^{-1}x_1 = x, \\ T^{-1}y_1 = y. \end{cases}$$

Inversement, pour tous $x_1, y_1 \in D$, il existe $x, y \in \mathcal{M}$ tel que

$$Tx = x_1, \; Ty = y_1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} l(T) &= \inf_{x,y \in \mathcal{M}} \|Tx - Ty\| . \|x - y\|^{-1} \\ &= \inf_{x_1,y_1 \in \mathcal{D}} \left(\|x_1 - y_1\|^{-1} . \|T^{-1}x_1 - T^{-1}y_1\|\right)^{-1} \\ &= \left(\sup_{x_1,y_1 \in D} \|T^{-1}x_1 - T^{-1}y_1\| . \|x_1 - y_1\|^{-1}\right)^{-1} \\ &= L^{-1}(T^{-1}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ensuite, nous montrons la partie avant du théorème. Si T est inversible dans $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$, alors $L(T^{-1}) > 0$ et donc on a $l(T) > 0$ et $R(T) = D$. Inversement, Si $l(T) > 0$ et $R(T) = D$, il est claire que T est inversible dans $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M},D)$ par le Lemme 3.5. ■

Remarque 3.6 *Il est facile de voir que le même résultat pour $T^{\#}$ est vrai. En d'autre termes, nous pouvons obtenir le résultat suivant pour $T^{\#}$ en répétant les même arguments que le Théorème 2.9. L'opérateur $T^{\#}$ est inversible dans $B\left(D^{\#}, \mathcal{M}^{\#}\right)$ si, et seulement si,*

$$l\left(T^{\#}\right) > 0 \text{ et } R\left(T^{\#}\right) = \mathcal{M}^{\#}.$$

3.2 Inversibilité des fonctions lipschitziennes

Le théorème suivant est le résultat principal sur la relation d'inversibilité entre l'opérateur lipschitzienne et le dual de l'opérateur lipschitzien.

Théorème 3.7 *L'opérateur T est inversible dans $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M},D)$ si, et seulement si, l'opérateur $T^{\#}$ est inversible dans $B\left(D^{\#}, \mathcal{M}^{\#}\right)$. Alors on a*

$$\left(T^{\#}\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^{\#}.$$

Démonstration. Si T est inversible dans $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$, alors le Lemme 3.5 implique $l(T) > 0$. Nous avons donc $R\left(T^{\#}\right) = \mathcal{M}^{\#}$ par le Lemme 3.2 et Lemme 3.3. D'une part, presque $T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$, le dual de l'opérateur lipschitzien $\left(T^{-1}\right)^{\#}$ de T^{-1} est défini sur $\mathcal{M}^{\#}$ et $\left(T^{-1}\right)^{\#} \in B\left(\mathcal{M}^{\#}, D^{\#}\right)$.

Et, parce que $I_{\mathcal{M}} = T^{-1} \circ T$, $I_D = T \circ T^{-1}$ sont des opérateurs d'identité sur $\mathcal{M}, D$ respectivement, nous avons

$$\begin{aligned} (I_M)^{\#} &= \left(T^{-1} \circ T\right)^{\#} = T^{\#} \circ \left(T^{-1}\right)^{\#}, \\ (I_D)^{\#} &= \left(T \circ T^{-1}\right)^{\#} = \left(T^{-1}\right)^{\#} \circ T^{\#}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Oŭ $(I_{\mathcal{M}})^{\#}$, $(I_D)^{\#}$ sont les opérateurs de l'identité sur $\mathcal{M}^{\#}$,$D^{\#}$ respectivement .

Donc, par 3.5, nous avons $\left(T^{-1}\right)^{\#}$ existe et $\left(T^{\#}\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^{\#}$. Alors $\left(T^{\#}\right)^{-1} \in B(\mathcal{M}, D)$, ainsi $T^{\#}$ est inversible dans $B\left(D^{\#}, \mathcal{M}^{\#}\right)$. Donc, par le Lemme 3.5, nous avons que

$$l\left(T^{\#}\right) = L^{-1}\left(\left(T^{\#}\right)^{-1}\right).$$

D'oŭ

$$L\left(\left(T^{\#}\right)^{-1}\right) = L\left(\left(\left(T^{\#}\right)\right)^{-1}\right),$$

et

$$\begin{aligned} l\left(T^{\#}\right) &= L^{-1}\left(\left(T^{\#}\right)^{-1}\right) \\ &= l\left(T^{\#}\right)^{*}, \end{aligned}$$

ensuite

$$\left(\left(T^{\#}\right)^{*}\right)^{-1} = \left(\left(T^{\#}\right)^{-1}\right)^{*}$$

et

$$\left\|\left(T^{\#}\right)^{-1}\right\| = \left(\left(T^{\#}\right)^{*}\right)^{-1}.$$

D'après le Lemme 3.5, l'égalité 3.1 et 3.2, nous obtenons que

$$\begin{aligned} 0 < l\left(T^{\#}\right) &= l\left(\left(T^{\#}\right)^{*}\right) \\ &= \inf_{\overline{x},\overline{y}\in\left(\mathcal{M}^{\#}\right)^{*}} \left\|\left(T^{\#}\right)^{*}\overline{x} - \left(T^{\#}\right)^{*}\overline{y}\right\| \cdot \left\|\overline{x}-\overline{y}\right\|^{-1} \\ &\leq \inf_{\delta x,\delta y\in\delta\mathcal{M}} \left\|\left(T^{\#}\right)^{*}(\delta x) - \left(T^{\#}\right)^{*}(\delta x)\right\| \cdot \left\|Jx-Jy\right\|^{-1} \\ &= \inf_{x,y\in\mathcal{M}} \left\|Tx-Ty\right\| \cdot \left\|x-y\right\|^{-1} \\ &= l(T). \end{aligned}$$

Puisque $\left(T^{\#}\right)^{-1}$ existe et $R(T)$ est fermé, par le Lemme 3.4, nous aurons

$$R(T) = D.$$

Donc T est inversible dans $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$.
Enfin, on a $L\left(T^{-1}\right) = \left\|\left(T^{\#}\right)^{-1}\right\|$ et par l'égalité 3.5, nous avons

$$\begin{aligned} l(T) &= L^{-1}\left(T^{-1}\right) \\ &= L^{-1}\left(\left(T^{-1}\right)^{\#}\right) \\ &= L^{-1}\left(\left(T^{\#}\right)^{-1}\right) \\ &= l\left(T^{\#}\right). \end{aligned}$$

Cela termine la preuve. ■

Corollaire 3.8 *Les propriètés suivants sont équivalents*

1. *L'opérateur T est inversible dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathcal{M}, D)$,
2. $l(T) > 0$ *et* $\left(T^{\#}\right)^{-1}$ *existe,*
3. $l(T) \cdot l\left(T^{\#}\right) > 0.$

Conclusion

Il est intéressant de continuer le travail fait dans le chapitre trois en le développant d'une autre manière. Pour cela, il faut approfondir cette idée et la placer dans le cadre du travail de nos équipes du laboratoire en utilisant nos notations et notre philosophie de voir l'analyse non linéaire.

Bibliographie

[Ass15] ASSAF. N. *Metric Embeddings and Lipschitz Extensions*, Lecture Notes, Department of Mathematics, Princeton University, Spring 2015.

[Ban 23] S. BANACH. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,* Fund. Math., **3** (1923), 133–181.

[Ban 29] S.BANACH. *Sur les fonctionnelles linéaires*, Studia Mathematica **1** (1929), 211-216.

[BN 97] L. NARICI, E. Beckenstein. *The Hahn-Banach theorem : the life and times*, Topology and its Applications **77** (2,3) (1997), 193-211

[Hah 22] H. HAHN. *Über Folgen linearer Operationen,* Monatsh. Math. Phys., **32** (1922), 1–88.

[Hahn 27] H. HAHN. *Ober linearer Gleichungssysteme in lincarer Rfiumcn*, J. Reina Angew. Math. **157** (1927) ; 214-229.

[PX02] J.G.PENG, Z. B. XU. A Novel Dual Notion of a Banach Space :Lipschitz Dual Space, Acta Mathematica Sinica, **45**(3),2002, 469-480.

[PX99] J.G.PENG, Z. B. XU. *A Novel Dual Notion of a Banach Space :Lipschitz Dual Space*, Acta Mathematica Sinica, **42**(1),1999, 61-70.

[Wea99] N. WEAVER, Lipschitz Algebras, World Scientific, Singapore, 1999.

[WX99] L.S.WANG, Z.B.XU, B.L. Chen, Qualitative Studies on Nonlinear Lipschitz Operators (III)-the glb-Lipschitz Constant, Acta Mathematica Sinica, **42**(3), 1999, 395-402.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse au théorème de Hahn-Banach dans le cas Lipchitzien. On donne une preuve simple sans passer par le lemme de Zorn, puis il sera suivi de quelques conséqeunces comme dans le cas linéaire, on essaie de détaille la notion de dual et l'inversibilité des opérateurs Lipschitziens.

Mots clés: L'opérateur lipschitzien, fonction Lipschitzien, dual de l'espace Lipschitz

Abstract

In this thesis we are interested about theorem of Han-Banach in the case of lipchtizien.we give a simple proof without passing by the lemma of zorn, then we followed by some consequence like linear case, we try to detail the notion of dual and the inversibility of the lipschitz operators.

Key word: Lipschitz operator, Lipschitz functional, Lipschitz dual space, Lipschitz dual operator.

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة نظرية هان بناخ في الحالة الليبتشيزية, قدمنا برهانا بسيطا بدون استخدام مسلمة زورن.واتبعناها ببعض النتائج كما في الحالة الخطية, ثم حاولنا تفصيل مفهوم المزدوج والتطبيقات الليبتشيزية الانعكاسية.

الكلمات المفتاحية: مؤثر ليبشيتزي, التطبيق الليبشيتزي, الفضاء الليبشيتزي المزدوج.