



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Méthodes numériques pour la résolution de l'équation des ondes

Présentée par :

M^{elle} BENADEL Zeyneb

Soutenu publiquement le : 05/06/2016.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r BENABDERRAHMANE* Benyattou
Encadreur : *M^r NOUIRI* Brahim
Examineur : *M^r BLIZAK* Tahar

Prof., Université de M'sila
M.C.B, Université de M'sila
M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2015/2016

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah** ,le tout puissant d'avoir,éclaire notre vie,renforce notre courage et notre volenté pour finie ce travail.

Je tiens á remercier particulièrement ma directeur de thèse Monsieur **Nouiri brahim**,pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Mes remerciements s'adressent á tout les enseignants du département des mathématiques pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je tiens ici á exprimer mes sentiments respectueux á mes chers parents á qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

un grand merci á ma famille, á mes proches et á mes collègues en particulier **Benhamida Khouloud**,**Barka Karima**,**chatouh Abir** et **Benzaine Siham** pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Dédicaces

Au nom de Allah le clément et le miséricordieux

Je dédie ce modeste travail

A Mon Père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que je te porte. Que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. J'espère rester à la hauteur de tes espoirs Que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

A mes chères soeurs :Fatima,Amel,Samia

A mes frères :yousef et yaakoub

A mes d'autre très chères sœurs et mes amies :Samia Bousadia,Meriem Benadel,nour elhoda Benadel,Radia Benganem,Zahia Belfar,Wahiba Bousadia,Mona tahi.

A tout ma grande famille, et a tout les gents qui m'ont aimé
A tous mes collègues (hoda,hayatet toutes les filles de groupe EDP)

A tous ceux qui me sont chers.

Je dédie ce modeste travail

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة تحدثنا عن ظاهرة انتشار الموجات في العديد من التطبيقات وهي ثلاثة أنواع رئيسية: الموجات الصوتية، أي موجات تنتشر في السوائل (الماء أو الهواء)؛ موجات مرنة، أي أن الموجات التي تنتشر في الأجسام الصلبة المرنة والموجات الكهرومغناطيسية مثل الضوء. ركزنا بشكل رئيسي على معادلة الأمواج الصوتية وهي أبسط نموذج (نموذج عددي) ولكنها بالفعل غنية جداً لأنها تساعد على معالجة مفاهيم أساسية مشتركة بين جميع هذه النماذج وفهم الخصائص الأساسية. أما الهدف في هذه المذكرة هو الدراسة الرياضية والعديدية لمعادلة الموجة ذات بعد واحد. استخدمنا طريقة الفروق المنتهية وطريقة العناصر المنتهية لحل المسألة عددياً.

كلمات المفتاح: معادلة الأمواج، الفروق المنتهية، العناصر المنتهية، طريقة نيو مارك.

Les phénomènes de propagation d'ondes se rencontrent dans de nombreuses applications. On rencontre essentiellement trois types d'ondes : les ondes acoustiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un fluide (eau ou air par exemple) ; les ondes élastiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un solide ; les ondes électromagnétiques, par exemple la lumière. Nous étudierons principalement l'équation des ondes acoustiques qui est le modèle le plus simple (modèle scalaire) mais qui est déjà très riche car il permet d'aborder les principales notions communes à tous ces modèles et d'en comprendre les propriétés essentielles. Notre objective dans ce mémoire est l'étude mathématique et numérique de l'équation des ondes à une dimension. Nous avons utilisé la méthode des différences finis et la méthode des éléments finis pour la résolution numérique.

Mots-Clés : Équation des ondes, Méthode des différences finis, Méthode des éléments finis, Méthode de Newmark.

The wave propagation phenomena occur in many applications. Essentially encounter three types of waves : acoustic waves, ie the waves propagating in a fluid (water or air) ; elastic waves, ie the waves propagating in a solid ; electromagnetic waves such as light. We will consider mainly the acoustic wave equation is the simplest model (scalar model) but is already very rich because it helps address the key notions common to all models and to understand its essential properties. Our objective in this memoir is the mathematical and numerical study of the wave equation in one dimension. We used the method of finite differences and finite element method for the numerical solution.

Keywords : Finite element method, Finite difference method, Newmark method, Wave equation

Table des matières

1	Modèles mathématiques pour l'équation des ondes	1
1.1	Ondes élastiques	2
1.2	Ondes acoustiques	4
1.3	Ondes électromagnétiques	5
1.4	Présentation d'un problème modèle	6
2	Analyse mathématique pour l'équation des ondes unidimensionnel	8
2.1	Problème de Cauchy en milieu homogène	9
2.2	Équation des ondes en milieu borné	13
2.2.1	Conséquences énergétiques	16
3	Méthodes numériques pour l'équation des ondes	18
3.1	Méthode des différences finies	19
3.1.1	Consistance et erreur de troncature	20
3.1.2	Stabilité - Estimation d'énergie discrète	21
3.1.3	Estimation d'énergie pour le schéma avec terme source	22
3.1.4	Convergence	23
3.2	Programme de schéma centré avec Matlab	23
3.3	Méthode des éléments finis	25
3.3.1	Formulation variationnelle	25
3.3.2	Semi-discrétisation en espace	26
3.3.3	Implémentation numérique	27
3.3.4	Convergence de la méthode	28
3.4	Méthode de Newmark	29

Table des figures

3.1	schéma centré	19
3.2	Le support des bases φ_j et φ_i	27

Introduction générale

Les phénomènes de propagation d'ondes se rencontrent dans de nombreuses applications. On rencontre essentiellement trois types d'ondes : les ondes acoustiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un fluide (eau ou air par exemple) ; les ondes élastiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un solide ; les ondes électromagnétiques, par exemple la lumière. Nous étudierons principalement l'équation des ondes acoustiques qui est le modèle le plus simple (modèle scalaire) mais qui est déjà très riche car il permet d'aborder les principales notions communes à tous ces modèles et d'en comprendre les propriétés essentielles. Nous verrons que ces différents modèles conduisent à un même type d'équations : les équations hyperboliques d'ordre 2, c'est à dire les équations de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f,$$

où A est un opérateur différentiel en espace d'ordre 2.

Notre objective dans ce mémoire est l'étude mathématique et numérique de l'équation des ondes à une dimension. Nous avons utilisé la méthode des différences finis et la méthode des éléments finis pour la résolution numérique.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : Le chapitre 1 est consacré à la présentation de divers modèles de propagation d'ondes linéaires qui interviennent dans divers domaines de la physique : acoustique, élasticité et électromagnétisme. Ceci illustre en particulier l'importance de l'étude et la modélisation de ces phénomènes vis à vis des applications. Un autre objectif est de dégager l'unité mathématique de ces modèles et justifier ainsi le fait de se limiter par la suite au modèle le plus simple fourni par l'équation des ondes scalaires (i. e. l'acoustique linéaire).

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'équation des ondes en dimension un, nous avons démontré que le problème de Cauchy en milieu homogène est bien posé. Ensuite nous avons utilisé la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème de la corde vibrante sur un intervalle borné $[0, L]$. Avec une technique énergétique, nous avons démontré la conservation de l'énergie.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié numériquement l'équation des ondes en dimension un en milieu homogène et non homogène. Dans le cas homogène, nous appliquons un schéma numérique aux différences finies pour un problème de la corde vibrante. Nous avons étudié les propriétés de consistance, stabilité et la convergence de cette méthode. En terminant par un programme avec Matlab qui permet de résoudre numériquement le problème considéré. Pour le cas non homogène, nous avons utilisé la méthode des éléments finis et la méthode de Newmark.

Ce mémoire se termine par une conclusion et quelques perspectives.

MODÈLES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉQUATION DES ONDES

Ce chapitre est consacré à la présentation de divers modèles de propagation d'ondes linéaires qui interviennent dans divers domaines de la physique : acoustique, élasticité et électromagnétisme. Ceci illustre en particulier l'importance de l'étude et la modélisation de ces phénomènes vis à vis des applications. Un autre objectif est de dégager l'unité mathématique de ces modèles et justifier ainsi le fait de se limiter par la suite au modèle le plus simple fourni par l'équation des ondes scalaires (i. e. l'acoustique linéaire). Dans ce chapitre, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) désignera le milieu de propagation et $x = (x_i)$ où $i = 1, \dots, N$ le point courant de Ω , la variable t désignant le temps. Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on désignera par Γ la frontière de Ω .

1.1 Ondes élastiques

On considère un milieu élastique qui occupe un domaine Ω . Soit $\vec{u}(x, t) = (u_i(x, t))$ où $i = 1, \dots, N$ le vecteur déplacement à l'instant t d'une particule matérielle occupant la position x de Ω . Avec l'hypothèse des petits mouvements et des petites déformations, les variations de ce champ de déplacements sont régies par les équations de la mécanique qui s'écrivent :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(\vec{u})) + \rho g, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

où $\sigma(\vec{u})$ désigne le tenseur des contraintes associé au champ de déplacement $\vec{u}(x, t)$ et $\rho = \rho(x)$ désigne la densité du matériau, g représente les forces extérieures. Il faut adjoindre aux équations de mouvement (1.1) la loi de comportement du matériau.

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope, cette loi est la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\vec{u}) \quad (1.2)$$

où $\epsilon(\vec{u}) = (\epsilon_{ij}(\vec{u}))$ désigne le tenseur des déformations (linéarisé) associé au champ de déplacement $\vec{u}$:

$$\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

où $\lambda = \lambda(x)$ et $\mu = \mu(x)$ désignent les coefficients de Lamé. Les fonctions ρ , λ et μ sont strictement positives et caractérisent le comportement élastique du matériau. Leur variation en fonction de x décrit l'éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation.

À partir des équations (1.1)-(1.3), il est facile d'obtenir la formulation en déplacement du problème :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div}(\vec{u})) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = \rho g, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

On doit adjoindre à cette équation, pour qu'elle soit bien posée, des conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad (1.5)$$

Des conditions aux limites posées sur le bord du domaine, on pourra considérer deux types :

– La condition de bord encasté :

$$\vec{u}|_{\Gamma} = 0 \quad (1.6)$$

– La condition de surface libre :

$$\sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(\vec{u}) n_j|_{\Gamma} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.7)$$

Remarque 1.1. La condition (1.6) n'est autre que la condition de Dirichlet homogène : elle exprime le fait que les points du bord Γ sont immobiles. La condition (1.7) peut être vue comme une condition de Neumann homogène généralisée : elle exprime le fait qu'aucune force de surface extérieure n'est appliquée sur la surface Γ .

L'équation (1.4) en milieu homogène ($\lambda = cte$ et $\mu = cte$) peut se réécrire :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla(\text{div}(\vec{u})) - \mu \Delta \vec{u} = \rho \vec{g} \quad (1.8a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\text{div}(\vec{u})) + \mu \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = \rho \vec{g} \quad (1.8b)$$

L'équation (1.8b) provient de (1.8a) et l'identité

$$\Delta \vec{u} = \nabla(\text{div}(\vec{u})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{u})).$$

Posons $d = \text{div}(\vec{u})$ et $r = \text{rot}(\vec{u})$. Alors, il est facile de voir que ces deux quantités obéissent à des équations d'ondes suivantes :

1. Prenons la divergence de (1.8b), alors en utilisant que $\text{div}(\nabla d) = \Delta d$ et $\text{div}(\text{rot}(r)) = 0$, on voit que d vérifie une équation des ondes scalaire :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - C_p^2 \Delta d = \text{div} \vec{g}$$

où $C_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ est la vitesse des ondes de pression.

Avec les conditions initiales :

$$d(x, 0) = d_0(x) \text{ et } \frac{\partial d}{\partial t}(x, 0) = d_1(x)$$

la condition de bord encastré :

$$d|_{\Gamma} = 0$$

la condition de surface libre :

$$\frac{\partial d}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$$

2. Prenons le rotationnel de (1.8b), alors en utilisant que $\text{rot}(\nabla d) = 0$ et que $\text{rot}(\text{rot} r) = -\Delta r$ (car $\text{div} r = \text{div}(\text{rot} u) = 0$), on voit que r vérifie une équation des ondes scalaire en 2D et vectoriel en 3D :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - C_s^2 \Delta r = \text{rot}(\vec{g})$$

où $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse des ondes de cisaillement.

Avec les conditions initiales :

$$r(x, 0) = r_0(x) \text{ et } \frac{\partial r}{\partial t}(x, 0) = r_1(x)$$

la condition de bord encastré :

$$r|_{\Gamma} = 0$$

la condition de surface libre :

$$\frac{\partial r}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$$

Application : les ondes élastiques se rencontrent notamment l'orsqu'on étudie des problèmes de sismique ou de géophysique, ou encore dans les problèmes de contrôles non destructif.

1.2 Ondes acoustiques

Les équations de l'acoustique linéaire peuvent être vues comme une dégénérescence des équations de l'élastodynamique linéaire lorsque le coefficient de Lamé μ tend vers 0. En effet, $\mu = 0$ caractérise le comportement élastique d'un fluide, l'autre coefficient de Lamé, λ , restant strictement positif. A partir des équations (1.2), il est facile de voir que le tenseur des contraintes devient sphérique, c'est-à-dire proportionnel à la matrice identité. On pose alors :

$$\sigma = -pI \quad (1.9)$$

où $p = p(x, t)$ est par définition la pression du fluide. De (1.2), on déduit :

$$p = -\lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \quad (1.10)$$

alors que l'équation de mouvement (1.1) se réécrit simplement :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (1.11)$$

On peut alors éliminer $\vec{u}$ entre (1.10) et (1.11) pour obtenir l'équation en pression (qui devient alors l'inconnue, scalaire, du problème) :

$$\frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla p \right) = -\operatorname{div}(\vec{g}), \quad x \in \Omega \quad (1.12)$$

où $\lambda(x) = \rho(x)c^2(x)$. En milieu homogène, l'équation (1.12) devient simplement :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = G \quad (1.13)$$

où $G(x, t) = -\lambda \operatorname{div}(\vec{g})$ est la fonction de source.

On doit adjoindre à l'équation (1.13), pour qu'elle soit bien posée, des conditions initiales :

$$P(x, 0) = P_0(x) \text{ et } \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x).$$

et des conditions aux limites posées sur le bord du domaine (par exemple homogènes) :

- Condition de Dirichlet : $p = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Condition de Neumann : $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Condition d'impédance : $\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Remarque 1.2. En acoustique, l'équation (1.12) décrit la propagation d'une onde de pression qui se propage à une vitesse c . En $2D$, on peut penser à la propagation d'une onde dans l'eau lorsqu'on jette un caillou ... L'onde due à l'excitation ponctuelle (caillou) se propage suivant des cercles et s'atténue au cours du temps mais ne disparaît pas. Un exemple d'onde acoustique en $3D$, c'est bien sûr le son qui se propage dans l'air : cette fois-ci l'onde passe et disparaît (heureusement!). De façon plus générale, il y a une différence de comportement de l'onde entre les dimensions paires ou impaires : en dimension paire, la solution fondamentale (c'est à dire l'onde créée par une source ponctuelle en espace et en temps) "remplit" le cône de lumière alors qu'en dimension impaire elle a pour support le bord du cône.

Applications : Les ondes acoustiques interviennent par exemple en acoustique musicale, en acoustique de salle, en acoustique sous-marine, ou pour étudier les phénomènes de houle.

1.3 Ondes électromagnétiques

Dans un milieu que nous supposerons diélectrique linéaire isotrope, un champ électromagnétique dans un domaine Ω est décrit par le champ électrique $\vec{E}(x, t)$ et le champ magnétique $\vec{H}(x, t)$ qui vérifient les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot} \vec{H} + \vec{j}_s = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\epsilon(x) > 0$ est la permittivité diélectrique du milieu, $\mu(x) > 0$ est la perméabilité magnétique du milieu, $\sigma(x) \geq 0$ est la conductivité du matériau, $\vec{j}_s$ est un courant source. La vitesse des ondes du milieu est donnée par la relation :

$$C^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$$

Le vide est un cas particulier de milieu homogène, il est non conducteur donc $\sigma_0 = 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1}, \\ \mu(x) &= \mu_0 = 4\pi 10^{-7}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

ce qui donne la valeur bien connue pour la vitesse de la lumière $C_0 = 3,108 m/s$. Lorsque la conductivité est positive, une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation c'est à dire qu'il y a un phénomène d'absorption. Nous supposerons par la suite que le milieu est non conducteur. Le champ électromagnétique vérifie alors les équations de Maxwell :

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0, \quad (1.16a)$$

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{H} + \vec{j}_s = 0. \quad (1.16b)$$

On peut remarquer en prenant la divergence de (1.16a) que $(\text{div}(\text{rot}) = 0)$ et

$$\frac{\partial \text{div}(\mu \vec{H})}{\partial t} = 0.$$

Par conséquent si on suppose qu'à l'instant initial on a $\text{div}(\mu \vec{H}_0) = 0$, cette propriété reste vraie pour tout instant :

$$\text{div}(\mu \vec{H}) = 0.$$

De même si on prend la divergence de (1.16b), en supposant que $\text{div} \vec{j}_s = 0$ et que $\text{div}(\epsilon \vec{E}_0) = 0$ alors :

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0.$$

Nous ferons ces hypothèse par la suite.

Formulation en $\vec{E}$: On peut éliminer $\vec{H}$, en utilisant la première équation et en dérivant la seconde équation par rapport à t , on obtient :

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{rot}(\mu^{-1} \text{rot} \vec{E}) + \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

Formulation en $\vec{H}$: De même on peut éliminer $\vec{E}$, on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \text{rot}(\epsilon^{-1} \text{rot} \vec{H}) + \text{rot}(\epsilon^{-1} \vec{j}_s) = 0. \quad (1.18)$$

On peut noter une parenté entre les systèmes (1.17) ou (1.18) et l'équation des ondes scalaires et sous certaines hypothèses supplémentaires, on retombe exactement sur une équation d'ondes. Plaçons nous par exemple dans le vide. En utilisant la relation $\Delta = \nabla(\text{div}) - \text{rot}(\text{rot})$, (1.17) se réécrit

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + C_0^2 (\nabla(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}$$

ce qui, compte tenu de la relation $\text{div}(\vec{E}) = 0$ devient une équation d'ondes :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - C_0^2 \Delta \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}$$

à laquelle on pourra adjoindre une condition aux limites de conducteur parfait (si Ω est en contact avec un conducteur parfait (un métal par exemple)) :

$$\vec{E} \wedge n|_{\Gamma} = 0.$$

Applications : Les ondes électromagnétiques sont beaucoup utilisées pour la détection d'objets volants (furtivité radar). Elles interviennent bien sûr aussi dans tout ce qui concerne les télécommunications, en particulier dans l'étude des antennes ou en optique (fibres optiques, optique intégrée).

1.4 Présentation d'un problème modèle

Pour décrire un problème modèle qui présente toutes les propriétés caractéristiques des problèmes d'ondes, nous donnons :

1. un milieu de propagation :

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \quad (1.19)$$

2. deux fonctions mesurables $\rho(x)$ et $\mu(x)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+, & \text{p.p. } x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.20)$$

3. une équation de propagation :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}(\mu(x) \nabla u) = g, \quad (1.21)$$

où $u(x, t)$ est l'inconnue, ici scalaire, du problème.

L'équation (1.21) s'écrit encore formellement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = G, \quad G = g/\rho \quad (1.22)$$

où l'opérateur A est défini par :

$$Au = -\frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(\mu(x) \nabla u). \quad (1.23)$$

Si l'on considère le produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx, \quad (1.24)$$

A est un opérateur symétrique et positif, au sens où :

$$\begin{cases} \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega), (Au, v) = (u, Av), \\ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega), (Au, u) \geq 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Remarque 1.3. Il est facile de vérifier que chacun des trois modèles des Section 1.1 à Section 1.3 rentre dans le cadre général ((1.23)-(1.25)). En effet, si on désigne par $u(x, t) \in \mathbb{R}^N$, ($N = 1, 2, 3$), l'inconnue du problème est donné par :

$$\begin{aligned} & \bullet u(x, t) = \vec{u}(x, t) \quad \text{pour ondes élastiques} \quad N = 3, \\ & \bullet u(x, t) = p(x, t) \quad \text{pour ondes acoustiques} \quad N = 1, \\ & \bullet u(x, t) = E(x, t) \quad \text{pour ondes électromagnétiques} \quad N = 3. \end{aligned} \quad (1.26)$$

alors, dans chacun de ces trois cas, l'équation de propagation dans Ω s'écrit sous la forme (1.22) où A est un opérateur différentiel du second ordre en espace, de type elliptique, défini par :

$$\begin{cases} (Au)_i = -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)), i = 1, 2, 3, & \text{pour les ondes élastiques,} \\ Au = -\frac{1}{K} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho} \nabla u\right) & \text{pour les ondes acoustiques,} \\ Au = \epsilon \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(u)\right) & \text{pour les ondes électromagnétiques.} \end{cases} \quad (1.27)$$

De plus, dans chaque cas, A désigne un opérateur différentiel du second ordre, formellement autoadjoint et positif, pour un produit scalaire convenablement choisi. Le modèle rentre alors dans la classe des systèmes hyperboliques du deuxième ordre.

ANALYSE MATHÉMATIQUE POUR L'ÉQUATION DES ONDES UNIDIMENSIONNEL

L'équation des ondes (1.21) se réécrit en dimension un comme suit :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = g(x, t). \quad (2.1)$$

Cette équation est appelée équation de la corde vibrante dans un milieu non homogène. Le scalaire $u(x, t)$ représente le déplacement du point de la corde d'abscisse x à l'instant t et g une fonction donnée appelée terme source. La présence des coefficients ρ et μ permet de prendre en compte les propriétés de la corde qui peuvent éventuellement varier d'un point à un autre. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude mathématique de l'équation des ondes (2.1) dans un milieu homogène. On commence par la démonstration que le problème de Cauchy est bien posé en se basant par la formule de d'Alembert et on termine par la méthode des séparation des variables.

2.1 Problème de Cauchy en milieu homogène

Nous considérons le cas où les fonctions $\rho(x) = \rho$ et $\mu(x) = \mu$ sont constantes, ce qui nous amène à l'équation des ondes 1D sur la droite réelle avec vitesse de propagation constante égale à

$$c = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (2.2)$$

On s'intéresse à la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lemme 2.1. (Formule de DUHAMEL). *L'équation de transport suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Admet une unique solution $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, donnée par la formule de DUHAMEL :

$$v(x, t) = v_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Démonstration. Avec la méthode des courbes caractéristiques, nous introduisons les équations caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \\ \frac{dx}{ds} = c, \\ \frac{dv}{ds} = f(x, t). \end{cases}$$

avec des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} t(r, 0) = 0, \\ x(r, 0) = r, \\ v(r, 0) = v_0(r). \end{cases}$$

Tout d'abord résoudre les équations caractéristiques pour t et x , nous avons :

$$\begin{aligned} t(r, s) &= s, \\ x(r, s) &= cs + r. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation pour v devienne :

$$\begin{cases} \frac{dv}{ds} = f(cs + r, s), \\ v(r, 0) = v_0(r). \end{cases}$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$v(r, s) = v_0(r) + \int_0^s f(c\tau + r, \tau) d\tau.$$

Par conséquent, la solution v est donnée par :

$$v(x, t) = v(x - ct, t) = v_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau.$$

□

Pour étudier le problème (2.3), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1. (Formule de d'Alembert). Soient $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Alors, le problème de Cauchy (2.3) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, donnée par la formule de d'Alembert suivante :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds. \quad (2.5)$$

Démonstration. 1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ une solution de (2.3). Nous factorisons l'équation des ondes comme suit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = f(x, t).$$

On pose $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$. Alors, v est une solution de l'équation de transport non homogène suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, t), \\ v(x, 0) = u_1(x) - cu'_0(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

En utilisant Lemme 2.1, on obtient que la solution v de (2.6) est donnée par :

$$v(x, t) = u_1(x - ct) - cu'_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - \tau), \tau) d\tau.$$

Maintenant, il reste à résoudre l'équation de transport non homogène suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous avons le système d'équations caractéristiques :

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \\ \frac{dx}{ds} = -c, \\ \frac{dv}{ds} = v(x, t). \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} t(r, 0) = 0, \\ x(r, 0) = r, \\ v(r, 0) = v_0(r). \end{cases}$$

Notre équations de t et x sont données par :

$$\begin{aligned} t(r, s) &= s, \\ x(r, s) &= -cs + r. \end{aligned}$$

Donc, notre équation de z devienne :

$$\begin{cases} \frac{dv}{ds} = v(-cs + r, s), \\ v(r, 0) = v_0(r). \end{cases}$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\begin{aligned} v(r, s) &= v_0(r) + \int_0^s v(-c\tau + r, \tau) d\tau \\ &= v_0(r) + \int_0^s [u_1(-c\tau + r - c\tau) - cu'_0(-c\tau + r - c\tau)] d\tau \\ &\quad + \int_0^s \left[\int_0^\tau f(c\mu + (-c\tau + r) - c\tau, \mu) d\mu \right] d\tau \\ &= v_0(r) + \int_0^s [u_1(-2c\tau + r) - cu'_0(-2c\tau + r)] d\tau \\ &\quad + \int_0^s \left[\int_0^\tau f(c\mu - 2c\tau + r, \mu) d\mu \right] d\tau \end{aligned}$$

Alors, la solution u de (2.7) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x + ct, t) = v_0(x + ct) + \int_0^t [u_1(-2c\tau + x + ct) - cu'_0(-2c\tau + x + ct)] d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_0^\tau f(c\mu - 2c\tau + x + ct, \mu) d\mu \right] d\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Avec le changement de variable $y = -2c\tau + x + ct$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t u_1(-2c\tau + x + ct) d\tau &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy \\ -c \int_0^t u'_0(-2c\tau + x + ct) d\tau &= -\frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u'_0(y) dy \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x - ct) - u_0(x + ct)]. \end{aligned}$$

Alors, les trois premiers termes de (2.8) sont données :

$$\frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

Avec le changement de variable suivant :

$$y = c\mu - 2c\tau + x + ct, \quad s = \mu$$

le dernier terme dans (2.8) devient :

$$\int_0^t \left[\int_0^\tau f(c\mu - 2c\tau + x + ct, \mu) d\mu \right] d\tau = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) J dy ds.$$

où J le Jacobien de changement de variable. Alors, on a :

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \partial\mu/\partial y & \partial\mu/\partial s \\ \partial\tau/\partial y & \partial\tau/\partial s \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2c & 1/2 \end{pmatrix} \right| = 1/2c.$$

Donc, le dernier terme de (2.8) est

$$\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que la formule de d'Alembert (2.5) constitue bien une solution de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ pour le problème de Cauchy (2.3).

2. Montrons l'unicité de la solution. Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ deux solutions de (2.3) où $u \neq v$. On pose $w = u - v$ et avec le problème (2.3), on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après la formule de d'Alembert (2.5), on déduit que $w = 0$. D'où $u = v$.

□

Pour la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales et au terme source, en norme $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ pour tout $T > 0$ fixé, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $T > 0$ fixé et $\epsilon > 0$ donné, soient (u_0, u_1) et $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ deux couples de fonctions dans $C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ et f_1, f_2 des termes sources continus sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ telles que*

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])} \leq \epsilon$$

Soient u et $\tilde{u}$ les solutions respectivement obtenues pour ces données initiales et termes sources. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+, t \leq T$, on a :

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \epsilon(1 + T + T^2)$$

Démonstration. On pose $v = u - \tilde{u}$, $f = f_1 - f_2$, $v_0 = u_0 - \tilde{u}_0$ et $v_1 = u_1 - \tilde{u}_1$. Avec le problème (2.3), on obtient le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

La solution de (2.9) est donnée par la formule de d'Alembert suivant :

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [v_0(x + ct) + v_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &\leq \frac{1}{2} [|v_0(x + ct)| + |v_0(x - ct)|] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |v_1(s)| ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} |f(y, s)| dy ds \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |v_0(y)| + T \sup_{y \in \mathbb{R}} |v_1(y)| + T^2 \sup_{(y, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} |f(y, t)| \\ &\leq \epsilon (1 + T + T^2). \end{aligned}$$

d'où

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])} \leq \epsilon (1 + T + T^2).$$

□

Remarque 2.1. D'après Théorème 2.1 et Proposition 2.1, le problème de Cauchy (2.3) est bien posé sur $\mathbb{R} \times [0, T]$.

2.2 Équation des ondes en milieu borné

Considérons le problème de la corde vibrante de longueur L fixée aux bouts, modélisé par l'équation des ondes 1D suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad x \in]0, L[\quad (2.10)$$

avec les condition initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < L \quad (2.11)$$

et par exemple les conditions de bord de Dirichlet homogène :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.12)$$

La résolution de ce problème par séparation des variables comporte trois étapes :

Étape 1 : Séparation des variables. Posons

$$u(x, t) = F(x) G(t)$$

et substituons les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x) G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x) G(t)$$

dans (2.10), on obtient :

$$F(x) G''(t) = c^2 F''(x) G(t).$$

En divisant par $c^2 FG$, on a :

$$\frac{1}{c^2} \frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k, \text{ une constante.}$$

Donc, on obtient deux équations différentielles ordinaires de seconde ordre, l'une pour $F(x)$ et l'autre pour $G(t)$:

$$F''(x) - kF(x) = 0, \quad (2.13)$$

$$G''(t) - c^2 k G(t) = 0. \quad (2.14)$$

où k est à déterminer au moyen des conditions aux limites (2.12).

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres. On résout (2.13) et (2.14) tel que $u = FG$ satisfasse (2.12) :

$$u(0, t) = F(0) G(t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

$$u(L, t) = F(L) G(t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

On exclut le cas $G(t) = 0$, correspondant à la solution nulle sans intérêt ($u \equiv 0$). Donc, on a :

$$F(0) = F(L) = 0.$$

Les conditions aux limites (2.12) pour F déterminent les valeurs admissibles de la constante k dans (2.13).

1. Si $k = 0$, (2.13) admet la solution générale :

$$F(x) = ax + b.$$

Donc,

$$F(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

et

$$F(L) = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow a = 0;$$

donc sans intérêt parce que $u \equiv 0$.

2. Si $k = \mu^2 > 0$, (2.13) admet la solution générale :

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Donc, on a :

$$F(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

et

$$F(L) = 0 \Rightarrow Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0.$$

Alors, on a le système homogène :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est non nul :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{pmatrix} = e^{-\mu L} - e^{\mu L} \neq 0$$

puisque $\mu L \neq 0$. Donc, l'unique solution est la solution nulle $A = B = 0$. Ce cas est aussi sans intérêt : $u \equiv 0$.

3. Si $k = -\mu^2 < 0$, (2.13) admet la solution générale :

$$F(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x).$$

Alors, on a :

$$F(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

et

$$F(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\mu L) = 0.$$

Or $B \neq 0$, sinon $u \equiv 0$; donc

$$\sin(\mu L) = 0,$$

c'est à dire

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, l'équation (2.13) admet une suite de solutions données par :

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, on résout (2.14) avec

$$k = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

c'est à dire

$$G''(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0,$$

où

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle ordinaire est

$$G_n(t) = A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc, les fonctions simples non nulles, qu'on appellera *fonctions propres* :

$$u_n(x, t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

sont des solutions de l'équation des ondes (2.10) qui satisfont les conditions aux limites de Dirichlet (2.12). Dans ce cas, les nombres λ_n seront appelés *valeurs propres* du problème (2.10), (2.12).

Étape 3 : Superposition des fonctions propres. Pour satisfaire les conditions initiales (2.11), on cherche une solution qui est une somme (convergente) de fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

On détermine A_n et B_n . En $t = 0$, on a :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x).$$

Donc, les A_n sont les coefficients de la série de Fourier de sinus de $u_0(x)$ donnés par la formule suivante :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

De même, en $t = 0$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum \lambda_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_1(x).$$

Alors, $\lambda_n B_n$ sont les coefficients de la série de Fourier de sinus de $u_1(x)$, donc on a :

$$B_n = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Remarque 2.2. On dispose de la même méthode pour le cas de conditions de bord de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

On obtient la solution de la forme suivante

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

2.2.1 Conséquences énergétiques

Définition 2.1. Etant donné $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R}_+)$, on définit l'énergie totale à l'instant t de problème (2.10)-(2.12) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx. \quad (2.15)$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique et le second correspond à l'énergie potentielle.

Proposition 2.2. (Conservation de l'énergie). Soit $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R}_+)$ une solution du problème (2.10)-(2.12). Alors, pour tout $t > 0$, on a :

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|_{L^2([0, L])}^2 + \frac{c^2}{2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L^2([0, L])}^2.$$

Démonstration. Du fait de la régularité de u , la fonction $t \rightarrow E(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Nous avons :

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) \right) dx.$$

Par intégration par parties, le second terme vaut

$$\int_0^L c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) dx = - \int_0^L c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx + \left[c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L.$$

La crochets s'annule par la condition de bord de Dirichlet (ou de Neumann). Ainsi

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) \right] dx = 0.$$

Alors, on a :

$$E(t) = E(0).$$

□

Corollaire 2.1. On rajoute un terme source $f \in L^2([0, L] \times [0, T])$ dans l'équation des ondes (2.10). Alors, l'énergie totale est restée bornée c'est à dire

$$\sup_{t \in [0, T]} E(t) \leq E(0) e^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L f^2(x, s) e^{T-s} dx ds. \quad (2.16)$$

Démonstration. En dérivant la fonction d'énergie totale (2.15) par rapport à t et avec simplification, on obtient :

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, de (2.15) on obtient :

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^L f^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(x, t) dx,$$

de sorte que :

$$E'(t) \leq E(t) + \frac{1}{2} \int_0^L f^2(x, t) dx.$$

Posons

$$\xi(t) = E(t) e^{-t}.$$

On a :

$$\xi'(t) = (E'(t) - E(t)) e^{-t} \leq \frac{1}{2} e^{-t} \int_0^L f^2(x, t) dx.$$

Par intégration sur l'intervalle $[0, t]$, on a, compte tenu du fait que $\xi(0) = E(0)$:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \xi'(s) ds \leq E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \left[e^{-s} \int_0^L f^2(x, s) dx \right] ds.$$

ce qui, revenant à la fonction d'énergie $E(t)$, donne finalement (2.16). □

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ÉQUATION DES ONDES

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement l'équation des ondes en dimension un en milieu homogène et non homogène. Dans le cas homogène, nous appliquons un schéma numérique aux différences finies pour un problème de la corde vibrante. Nous avons étudié les propriétés de consistance, stabilité et la convergence de cette méthode. En terminant par un programme avec Matlab qui permet de résoudre numériquement le problème considéré. Pour le cas non homogène, nous avons utilisé la méthode des éléments finis et la méthode de Newmark.

3.1 Méthode des différences finies

On s'intéresse à la résolution numérique par la méthode des différences finies pour le problème de la corde vibrante suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.1)$$

On propose un schéma numérique pour approcher la solution u aux points

$$x_0 = 0, x_j = j\Delta x, j = 1, \dots, N, x_{N+1} = L \text{ avec } \Delta x = L/(N+1)$$

aux instants

$$t_0 = 0, t_n = n\Delta t, n = 1, \dots, M, t_{M+1} = T \text{ avec } \Delta t = T/(M+1).$$

S'appuyant sur des développements de Taylor de la solution exacte u au voisinage du point (x_j, t_n) , le schéma aux différences finies proposé calcule des valeurs u_j^n approchant la valeur exacte $u(x_j, t_n)$.

Définition 3.1. (Schéma centré). On définit le schéma centré pour l'équation des ondes par :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad j = 0, \dots, N, n = 0, \dots, M. \quad (3.2)$$

avec la condition de Dirichlet homogène :

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n = 0, \dots, M+1.$$

et les données initiales

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u_1(x_j), \quad j = 0, \dots, N+1.$$

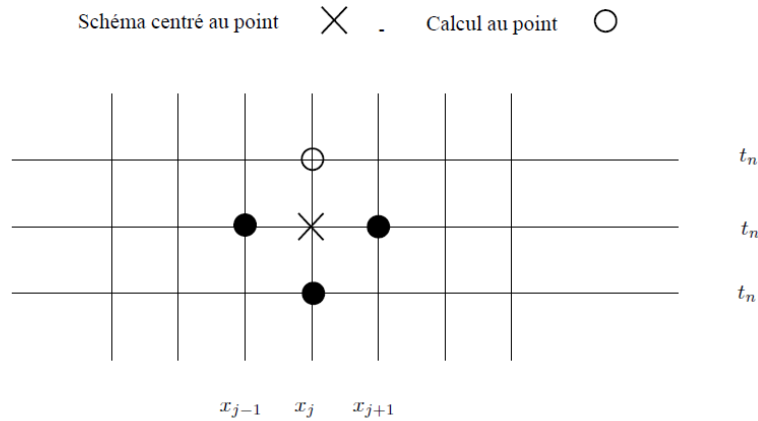


FIGURE 3.1 – schéma centré

Remarque 3.1. Le schéma centré (3.2) est un schéma explicite donné par :

$$u_j^{n+1} = \alpha^2 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + 2(1 - \alpha^2) u_j^n - u_j^{n-1}, \quad \alpha = c\Delta t/\Delta x. \quad (3.3)$$

3.1.1 Consistance et erreur de troncature

Définition 3.2. (Erreur de troncature).

1. On appelle erreur de troncature l'erreur commise en supposant que la solution exacte réalise le schéma numérique :

$$e_i^n = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{\Delta x^2} \quad (3.4)$$

2. Le schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0.
3. On dit que le schéma est consistant à l'ordre p en espace et m en temps si :

$$e_i^n = o(\Delta t^m + \Delta x^p). \quad (3.5)$$

Remarque 3.2. L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

Lemme 3.1. Le schéma 3.2 est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace si $\alpha = c\Delta t/\Delta x < 1$ et d'ordre au moins 4 si $\alpha = 1$.

Démonstration. En utilisant la formule de Taylor pour la solution exacte u supposée suffisamment régulière, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1}))}{\Delta t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{2}{4!} \Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t_n) + o(\Delta t^4) \\ \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{2}{4!} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + o(\Delta x^4) \end{aligned}$$

le premier terme est nul car u vérifie l'équation des ondes. Donc, on a :

$$e_j^n = \frac{1}{12} \left[\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t_n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) \right] + o(\Delta t^4 + \Delta x^4) \quad (3.6)$$

Avec l'équation des ondes, nous avons :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

De (3.6), on a :

$$e_j^n = \frac{c^2}{12} \Delta x^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + o(\Delta t^4 + \Delta x^4).$$

où $\alpha = c\Delta t/\Delta x$. Alors, le schéma (3.2) d'ordre 2 si $\alpha \neq 1$ et d'ordre au moins 4 si $\alpha = 1$. □

3.1.2 Stabilité - Estimation d'énergie discrète

Définition 3.3. (Stabilité). Un schéma numérique est dit stable si la solution discrète u_n à l'instant t_n est bornée indépendamment des paramètres de discrétisation Δx et Δt .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on assimile la solution numérique (u_j^n) à un élément de $L^2(0, L)$, en posant :

$$\|u^n\| = \left(\int_0^1 |\tilde{u}(x, t_n)|^2 dx \right)^{1/2}$$

où $\tilde{u}(\cdot, t_n)$ est la fonction constante sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. Autrement dit,

$$\|u^n\| = \left(\sum_{j=0}^N |u_j^n|^2 \Delta x \right)^{1/2}.$$

On considère également le produit scalaire associé :

$$(u, v) = \sum_{j=0}^N u_j v_j \Delta x.$$

Pour analyser la stabilité du schéma (3.2), nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. (Conservation de l'énergie discrète). Soient u^0 et u^1 dans $L^2([0, L])$ et soit (u_j^n) la solution numérique du schéma (3.2). On pose

$$E^{n+1/2} := \frac{1}{2} \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{A} u^n, u^{n+1})$$

avec $(\mathcal{A} u^n)_j = -\frac{c^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$. Alors, nous avons :

1. l'énergie discrète $E^{n+1/2}$ est une quantité indépendante de n c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, E^{n+1/2} = E^{1/2}. \quad (3.7)$$

2. Sous la condition CFL $\alpha = c\Delta t/\Delta x < 1$, $E^{n+1/2}$ est une forme quadratique positive et par conséquent le schéma est stable. Plus précisément, on a l'estimation suivante :

$$\frac{1}{2} (1 - \alpha^2) \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|_2^2 \leq E^{n+1/2}. \quad (3.8)$$

Démonstration. En multipliant l'équation (3.2) par la dérivée discrète centrée

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

et par sommation sur j , on obtient :

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right] \Delta x = 0$$

Le premier terme n'est rien d'autre que

$$\sum_{j=1}^N \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2}{2\Delta t^3} \Delta x = \frac{1}{2\Delta t} \left(\left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|^2 - \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 \right)$$

Le second terme donne :

$$\begin{aligned} & \frac{-c^2}{2\Delta x^2 \Delta t} \left(\sum_{j=1}^N (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n+1} \Delta x - \sum_{j=1}^N (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n-1} \Delta x \right) \\ &= \frac{-c^2}{2\Delta x^2 \Delta t} \left(\sum_{j=1}^N (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n+1} \Delta x - \sum_{j=1}^N (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) u_j^n \Delta x \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} ((\mathcal{A} u^n, u^{n+1}) - (\mathcal{A} u^{n-1}, u^n)) \end{aligned}$$

En rassemblant les morceaux, on obtient $E^{n+1/2} = E^{n-1/2}$. D'autre part, on a :

$$\sum_{k=1}^n (E^{k+1/2} - E^{(k-1)+1/2}) = E^{n+1/2} - E^{1/2} = 0.$$

D'où (3.7). □

3.1.3 Estimation d'énergie pour le schéma avec terme source

Corollaire 3.1. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 3.1, si u_j^n est solution du schéma avec un terme source :*

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t^2} = f_j^n \quad (3.9)$$

avec les conditions initiales du schéma (3.2), alors l'énergie $E^{n+1/2}$ vérifie l'identité suivante :

$$E^{n+1/2} - E^{n-1/2} = \frac{1}{2} (f^n, u^{n+1} - u^{n-1}).$$

De plus, si $\alpha < 1$, nous avons l'estimation d'énergie suivante :

$$\sqrt{E^{n+1/2}} \leq \sqrt{E^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|f^k\|. \quad (3.10)$$

Démonstration. l'identité 3.9 est immédiate. Il est par ailleurs facile de voir qu'elle implique :

$$\begin{aligned} \underbrace{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}_{= (\sqrt{E^{n+1/2}} - \sqrt{E^{n-1/2}})(\sqrt{E^{n+1/2}} + \sqrt{E^{n-1/2}})} &\leq \frac{1}{2} \|f^n\| (\|u^{n+1} - u^n\| + \|u^n - u^{n-1}\|). \end{aligned}$$

Si $\alpha < 1$, l'estimation 3.8 montre que :

$$\|u^{n+1} - u^n\| \leq \Delta t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sqrt{E^{n+1/2}}$$

ce qui, avec l'inégalité précédente conduit à :

$$\sqrt{E^{n+1/2}} - \sqrt{E^{n-1/2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \|f^n\|$$

□

3.1.4 Convergence

Définition 3.4. (Erreur de convergence). On appelle erreur de convergence la différence entre la solution exacte et la solution numérique

$$e_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n \quad (3.11)$$

On dira que le schéma est convergent si pour tout $T > 0$

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \sup_{n>0, t_n \leq T} \|u(x_j, t_n) - u_j^n\|_2 = 0 \quad (3.12)$$

En fait, l'erreur de convergence est alors du même ordre que l'erreur de troncature si les données initiales sont approchées au même ordre.

Théorème 3.2. (Convergence du schéma centré). Si la solution u du problème de Cauchy est assez régulière, et sous la condition CFL $c\Delta t < \Delta x$, le schéma centré (3.2) est convergent.

Démonstration. La solution exacte réalise le schéma à l'erreur de consistance près :

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1}))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} = \epsilon_j^n$$

La solution numérique réalise le schéma de manière exacte :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

En soustrayant les deux équations précédentes on obtient donc une équation portant sur l'erreur de convergence en e_j^n qui résout le schéma

$$\frac{e_j^{n+1} - 2e_j^n + e_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \epsilon_j^n$$

avec des données initiales $e_j^0 = 0$ et $e_j^1 = O(\Delta t)$. En utilisant le résultat de stabilité associé à ce problème, par exemple (3.10), on obtient que l'énergie associée vérifie la majoration

$$\sqrt{E^{n+1/2}} \leq \sqrt{E^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}\Delta t}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{k=1}^n \|\epsilon^k\|$$

Le premier terme correspond à l'erreur sur les données initiales, et le second est le résidu hérité de l'erreur de consistance. $\square$

3.2 Programme de schéma centré avec Matlab

Voici par exemple un programme Matlab qui utilise le schéma explicite (3.3) pour résoudre le problème de Dirichlet, le problème de Neumann et le problème de Robin moyennant une petite modification.

```

clear all
close all
c=1;
L=2.*pi;
xm=0;
xp=xm+L;
N=500;
dx=L./(N-1);
x=[xm:dx:xp];
u0=cos(x)-1;
u1=cos(x)-1;
plot(x,u0,'LineWidth',3);
%axis([xm:xp -up: up]);
pause
alpha=1;
dt=alpha*dx./c;
T=1000*dt;
temps=0;
while temps < T;
    temps=temps+dt;
    u1past=[u1(1) u1(1:N-1)];
    u1farwd=[u1(2:N) u1(N)];
    u=alpha^2*(u1past+u1farwd)+2.*(1-alpha^2)*u1-u0;
    u(1)=0;
    u(N)=0;
    u0=u1;
    u1=u;
    plot(x,u,'LineWidth',3)
    %axis([xm xp -up up])
    drawnow
end

```

Remarque 3.3. Ceci résout le problème de Dirichlet homogène. Pour le problème de Neumann homogène, seules les deux lignes concernant les conditions au bord changent, évidemment. Elles sont simplement remplacées par :

$$\begin{aligned}
 u(1) &= u(2), \\
 u(N) &= u(N-1).
 \end{aligned}$$

et pour le problème de Robin :

$$\begin{aligned}
 u(1) &= 0, \\
 u(N) &= u(N-1).
 \end{aligned}$$

3.3 Méthode des éléments finis

On considère l'équation des ondes en milieu non homogène posée sur un domaine borné $\Omega =]0, L[$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in]0, L[, t > 0 \quad (3.13)$$

et les condition initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = u_1(x) \quad (3.14)$$

avec les condition aux limites

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.15)$$

On définit l'espace de Hilbert suivant :

$$V = \{v \in H^1(0, L) \mid v(0) = v(L) = 0\}.$$

Nous avons les hypothèses suivantes sur les coefficients et sur les conditions initiales :

$$\begin{cases} \rho \in L^\infty(0, L), \quad 0 < \rho_* \leq \rho(x) \leq \rho^* \\ \mu \in L^\infty(0, L), \quad 0 < \mu_* \leq \mu(x) \leq \mu^* \\ u_0 \in H_0^1(0, L) = V, u_1 \in L^2(0, L) = H \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.13) par une fonction arbitraire $v \in V$ et en intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) v(x) dx = \int_0^L g(x, t) v(x) dx \quad (3.17)$$

Par intégration par parties, le membre gauche de (3.17) devient :

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx + \int_0^L \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) v'(x) dx = \int_0^L g(x, t) v(x) dx \quad (3.18)$$

Par conséquent, la formulation variationnelle du problème (3.13)-(3.15) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v(x))_\rho + a(u(t), v(x)) = 0 \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0; \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1 \end{cases} \quad (3.19)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} (u, v)_\rho = \int_0^L \rho(x) u(x) v(x) dx \\ a(u, v) = \int_0^L \mu(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \end{cases}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.19), nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1. *le problème (3.16) admet une solution unique*

$$u \in \mathcal{C}(0, T; V); \frac{du}{dt} \in \mathcal{C}(0, T; H).$$

Démonstration. Grâce aux hypothèses (3.16), le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_\rho$ est équivalent au produit scalaire usuel sur $L^2(0, L)$ et $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$ et coercive sur V d'après l'inégalité de Poincaré sur V :

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}.$$

le problème (3.16) admet une solution unique. □

3.3.2 Semi-discrétisation en espace

On introduit un sous-espace vectoriel $V_h \subset V$, de dimension finie N qui approche V au sens suivant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| = 0, \quad \forall v \in V. \quad (3.20)$$

On se donne un entier naturel N et on pose $h = L/(N+1)$, $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$ (avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = L$) et $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, N$.

On définit l'espace vectoriel V_h par :

$$V_h := \left\{ v_h \in \mathcal{C}([0, L]) : v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1, v_h(0) = v_h(L) = 0 \right\}. \quad (3.21)$$

où $\mathbb{P}_1$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1. Soit $(\varphi_i)_{i=1}^N$ une base de V_h définit, pour $i = 1, \dots, N+1$, les fonctions ϕ_i par :

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou si } x \geq x_{i+1}. \end{cases} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

$$\phi_{N+1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 & \text{si } x \leq x_N. \end{cases} \quad (3.23)$$

Les fonctions ϕ_i , $i = 1, \dots, N+1$, sont des fonctions "chapeau", elles vérifient

$$\phi_i \in V_h \text{ et } \phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le problème approché consiste à se placer dans V_h au lieu de V c'est à dire à chercher $u_h(t) \in V_h$ tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u_h(t), v_h)_\rho + a(u_h(t), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) = u_{0h} \in V_h; \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1h} \in V_h. \end{cases} \quad (3.24)$$

où u_{0h} approche u_0 dans V et u_{1h} approche u_1 dans $L^2(0, L)$ i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_0 - u_{0h}\|_V = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_1 - u_{1h}\|_{L^2(0, L)} = 0. \quad (3.25)$$

En décomposant $u_h(t)$ sur la base

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i.$$

et en notant $U(t)$ le vecteur de composantes $u_i(t)$, ceci peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + KU(t) = 0, \\ U(0) = U_0, \quad \frac{dU}{dt}(0) = U_1. \end{cases} \quad (3.26)$$

où les matrices M et K sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, définies par :

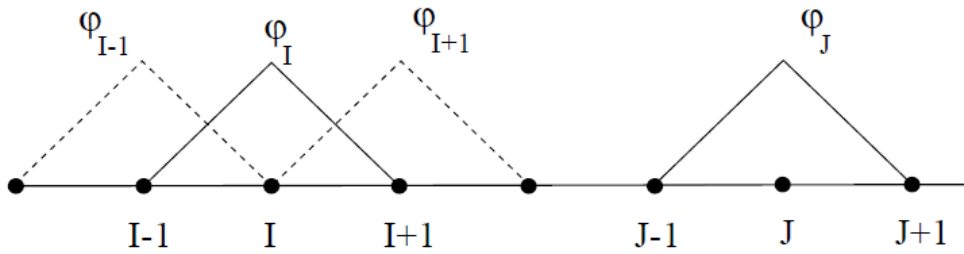
$$M_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j); \quad K_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

3.3.3 Implémentation numérique

Pour calculer les composantes du vecteur de charge et les éléments de matrice de rigidité, nous utilisons la formule de quadrature :

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [g(a) + g(b)].$$

Matrices tridiagonales : les fonctions de base ont pour support 2 intervalles adjacents et donc les supports de 2 fonctions de base ne s'intersectent que si ces fonctions de base sont associées au même nœud ou à un nœud voisin, i.e. On se place en milieu hétérogène et on suppose que ρ et μ sont



$$(\varphi_I, \varphi_J)_\rho = 0, \quad \text{si } J \neq I-1, I, I+1 \quad \text{car} \quad \text{Supp } \varphi_I \cap \text{Supp } \varphi_J = \emptyset$$

FIGURE 3.2 – Le support des bases φ_j et φ_i

constantes par morceaux :

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_{i+1/2} \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[\\ \mu(x) &= \mu_{i+1/2} \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[\end{aligned}$$

1. **la matrice de masse :** Rappelons que les éléments de la matrice de masse s'expriment :

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

On a déjà vu que seuls $M_{i,i+1}$, $M_{i,i}$ et $M_{i,i-1}$ sont non nuls. Regardons par exemple le terme :

$$\begin{aligned} M_{i,i+1} &= \int_0^L \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_{i+1/2} \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx \\ &\approx \rho_{i+1/2} h \frac{\overbrace{\varphi_i(x_i) \varphi_{i+1}(x_i)}^0 + \overbrace{\varphi_i(x_{i+1}) \varphi_{i+1}(x_{i+1})}^0}{2} \end{aligned}$$

donc $M_{i,i+1}^{ap} = 0$. Pour le terme diagonal, on a

$$\begin{aligned} M_{i,i} &= \int_0^L \rho(x) (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho_{i-1/2} (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_{i+1/2} (\varphi_i(x))^2 dx \\ &\approx \rho_{i-1/2} \frac{\overbrace{(\varphi_i(x_{i-1}))^2}^0 + \overbrace{(\varphi_i(x_i))^2}^1}{2} + \rho_{i+1/2} \frac{\overbrace{(\varphi_i(x_i))^2}^1 + \overbrace{(\varphi_i(x_{i+1}))^2}^0}{2} \\ &\approx \frac{\rho_{i-1/2} + \rho_{i+1/2}}{2} \end{aligned}$$

2. **La matrice de Rigidité :**

$$K_{i,j} = \int_0^L \mu(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx$$

Or $d\varphi_i/dx = 1/h$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ et $d\varphi_i/dx = -1/h$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ donc

$$K_{i,i} = \frac{\mu_{i-1/2}}{h} + \frac{\mu_{i+1/2}}{h}, K_{i,i+1} = -\frac{\mu_{i+1/2}}{h}$$

3.3.4 Convergence de la méthode

Nous allons étudier l'erreur $\|u - u_h\|_V$, où u est la solution de (3.19) et u_h est la solution du problème approché (3.24).

Théorème 3.3. *Si u et u_h sont les solutions respectives de (3.19) et (3.24), on a l'estimation suivante :*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (3.27)$$

Démonstration. Puisque $V_h \subset V$, on déduit par soustraction des formulations variationnelles (3.19) et (3.24), que

$$\frac{d^2}{dt^2} (u - u_h(t), v - v_h)_{\rho} + a(u - u_h(t), v - v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.28)$$

On trouve

$$a(u - u_h(t), v - v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h$$

On choisissant $w_h = u - u_h$ on obtient

$$a(u - u_h(t), u - u_h) = 0$$

d'où (coercivité+continuité de a)

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq \|a\| \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

ce qui permet de conclure. □

3.4 Méthode de Newmark

Le schéma de Newmark se présente sous la forme

$$\begin{cases} U^{i+1} = U^i + h\dot{U}^i + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}^i + \beta \ddot{U}^{i+1} \right], \\ \dot{U}^{i+1} = \dot{U}^i + h \left[(1 - \gamma) \ddot{U}^i + \gamma \ddot{U}^{i+1} \right]. \end{cases} \quad (3.29)$$

où β et γ sont deux paramètres. En appliquant le schéma de Newmark (3.29) sur le système différentielle (3.26), on obtient le système linéaire suivant :

$$(M + h^2 \beta K) \ddot{U}^{i+1} = -K \left(U^i + h\dot{U}^i + h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}^i \right) \quad (3.30)$$

Nous avons deux possibilités pour la résolution de ce système linéaire

1. Méthode de Cholesky
2. Méthode de gradient conjugué

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié mathématiquement et numériquement l'équation des ondes en dimension un. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Étude Mathématique :** nous avons démontré que le problème de Cauchy en milieu homogène est bien posé. Ensuite nous avons utilisé la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème de la corde vibrante sur un intervalle borné $[0, L]$. Avec une technique énergétique, nous avons démontré la conservation de l'énergie.
- ✓ **Étude numérique :** en milieu homogène, nous appliquons un schéma numérique aux différences finies pour un problème de la corde vibrante. Nous avons étudié les propriétés de consistance, stabilité et la convergence de cette méthode. En terminant par un programme avec Matlab qui permet de résoudre numériquement le problème considéré. Pour le milieu non homogène, nous avons utilisé la méthode des éléments finis et la méthode de Newmark.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Étude mathématique et numérique l'équation des ondes en $2D$ en milieu homogène :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

- ☞ Étude mathématique et numérique l'équation des ondes en $2D$ en milieu non homogène :

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(\lambda(x, y) \nabla u) = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [2] Eliane Bécache. *Schémas numériques pour la résolution de l'équation des ondes master, modélisation et simulation*. ENSTA, 2009.
- [3] J. Bear. *Analyse Et Approximation De Modèles De Propagation D'ondes*. American Elsevier, New York, 2001-2002.
- [4] Benjamin Boutin. *Équation des ondes Agrégation de mathématiques Calcul scientifique*. Université de Rennes 1, 2012.
- [5] Farshid Dabaghi. *Étude de la convergence des méthodes de redistribution de masse pour les problèmes de contact en élastodynamique*. PhD thesis, 2014.
- [6] B. Després. *Méthodes numériques pour les EDP instationnaires : Différences Finies et Volumes Finis, Notes pour le cours de base M2-Mathématiques de la modélisation*. 2014.
- [7] Boussen Halima et Boughar Leila. *Méthode des différences finies pour l'équation des ondes en dimension un*. Master's thesis, Université Amar Téliidji de Laghouat, Algérie, 2014.
- [8] Frédéric Legoll et Mathieu Lewin. *Mathématiques des modèles multi-échelles*. 2013.
- [9] Isabelle Terrasse et Toufic Abboud. *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes*. Promotion, 2005.
- [10] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [11] Franck Jedrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition*. Springer-Verlag France, Paris, 2005.
- [12] Vincent Manet. *La Méthode des Éléments Finis : vulgarisation des aspects mathématiques, illustration des capacités de la méthode*. HAL Id : cel-00763690 <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00763690v4>, 2015.
- [13] J-H SAIAC. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. 2006.
- [14] Sandro Salsa. *Partial Differential Equations in Action From Modelling to Theory*. Springer-Verlag Italia, 2008.
- [15] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations An Introduction*. John Wiley and Sons, 1992.