

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE DE M'SILA**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE**  
**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME**  
**DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE**

**SPECIALITE: AUTOMATIQUE**

## **THEME**

---

**Etude qualitative et comparative d'algorithmes entre  
la transformée de Fourier et Ondelettes**

**« Application à la détection des défauts d'un machine tournant »**

---

**Proposé et dirigé par :**

**- Mr. Lotfi BENYETTOU**

**Présenté par :**

**- BENZAÏ Izzeddine**

**Année Universitaire: 2011/2012**

**N° d'ordre : 02**

## *Remerciements*

*Remerciements à Dieu-le tout puissant -qui m'a  
Aidé à réaliser ce modeste travail.*

*Je remercie mon promoteur «Mr Lotfi Benyettou »  
D'avoir accepté de me encadrer et de me  
Suivre durant toute cette période.*

*Je remercie aussi au président de jury et aux  
Membres du jury examinateurs qui nous fait  
l'honneur de participer au jury de ce travail.*

*Et enfin je remercie l'ensemble, enseignants et  
Collègues de notre promotion, qui j'ai aidés à réaliser  
ce modeste travail.*

*Izzeddine Benazi*

## *DEDICACE*

*Avant tous, je remercie dieu le tout puissant de M' avoir donné le courage et la patience pour réaliser ce travail malgré toutes les difficultés rencontrées.*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A l'esprit de mon père*

*A Ma très chère mère*

*A Mes sœurs*

*A mes frères surtout makhlouf*

*A toute ma famille*

*A mes chers amis*

*A tous les amis d'études surtout ceux*

*Automatique*

*Promotion 2012*

*Izzeddine*



# TABLE DE MATIERES

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>01</b>
------------------------------------	-----------

## **CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE DIFFERENTS DEFAUTS DES MACHINES TOURNANTES**

INTRODUCTION.....	03
1- VIBRATIONS MECANIQUES.....	03
1.1- Définition du vibration .....	03
1.2- Différentes formes de vibration.....	04
1.3- Les grandeurs de mesure .....	06
1.4- Modes de détection .....	06
1.5- Représentation de vibrations .....	08
1.5.1- Représentation vectorielle .....	08
1.5.2- Représentation complexe .....	08
1.5.3- Représentation temporelle et fréquentielle .....	08
2- MACHINES TOURNANTES .....	09
2.1- Description d'une machine tournante .....	09
2.2- Classification des machines tournantes .....	10
2.3.1- Les défaillances d'origine mécanique .....	11
2.3.1.1- Le déséquilibre .....	11
2.3.1.2- Le mauvais alignement .....	11
2.3.1.3- L'excentricité .....	12
2.3.1.4- Les roulements défectueux .....	13
2.3.1.5- Les engrenages .....	14
2.3.1.6- Les paliers lisses .....	14
2.3.1.7- Le mauvais serrage mécanique .....	15
2.3.1.8- Les courroies de transmissions .....	15
2.3.1.9- Le frottement .....	16
2.3.1.10- Les forces alternatives .....	16
2.3.2- Les problèmes électriques .....	16
2.3.3- Les forces aérodynamiques et hydrauliques .....	17
2.3.4- La résonance .....	18

3- L'ANALYSE DES VIBRATIONS .....	18
3.1- L'analyse orbitale .....	19
3.2- Analyse de phase.....	19
3.3- L'analyse spectrale .....	20
4-CHAINE D'ANALYSE SPECTRALE .....	21
4.1- Description de la chaine d'analyse spectrale .....	21
4.1.1- Capteur .....	21
4.1.2- Conditionnement du signal .....	22
4.1.3- L'interface d'acquisition .....	22
4.1.4- système de traitement .....	22
Conclusion .....	23

## **CHAPITRE 2 : LA TRANSFORMEE DE FOURIER**

INTRODUCTION .....	24
1-GENERALITES .....	24
1.1-Définition du signal .....	24
1.2- Classification des signaux .....	24
1.2.1- Classification temporelle .....	25
1.2.2- Classification spectrale (fréquentielle) .....	28
2- PUISSANCE ET ENERGIE DES SIGNAUX .....	29
2.1- Puissance .....	29
2.1.1- Puissance instantannée .....	29
2.1.2- Puissance moyenne sur une durée T.....	29
2.2- Energie .....	29
2.2.1- Energie instantannée .....	29
2.2.2- Energie totale .....	29
3- OUTILS DE REPRESENTATION .....	30
4- ANALYSE DE FOURIER .....	31
4.1- Echantillonnage et Quantification .....	32
4.1.1- L'échantillonnage.....	32
4.1.2- Quantification .....	35
4.1.3Codage .....	36
4.2- La pondération .....	37

4.3- Transformation de Fourier .....	41
4.3.1- Transformation de Fourier Discrète (TFD) .....	42
4.3.2-Transformée de Fourier Rapide (FFT) .....	43
4.3.3 Comparaison DFT - FFT .....	52
4.3.4 Les limites de la transformee de fourier à court terme .....	53
CONCLUSION .....	54

## **CHAPITRE 3 : LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES**

INTRODUCTION .....	55
1. HISTORIQUE SUR L'ANALYSE DES ONDELETTES.....	55
2. DEFINITION ET PROPRIETES DES ONDELETTES.....	56
2.1 Définitions des ondelettes .....	56
2.2 Propriétés des ondelettes .....	57
3. LA MULTIRESOLUTION .....	58
4. ESPACE, FREQUENCE, ECHELLE, RESOLUTION ET PERIODE.....	58
4.1 Espace.....	58
4.2 Frequence, Echelle, Resolution et Periode.....	59
4.3 Représentations « espace-frequence » et « espace-echelle ».....	60
5. LA TRANSFORMEE D'ONDELETTE.....	62
5.1 Illustration du changement d'échelle et de la translation .....	63
5.2 L'Algorithme Pour Calcul des Coefficients .....	63
5.3 Fondements mathématiques de la transformée en ondelettes continues .....	64
5.3.1 Définition .....	64
5.3.2 Interprétation.....	65
5.3.3 Conditions d'existence des ondelettes Condition d'admissibilité .....	66
5.3.4 Propriétés.....	67
e) Conservation de l'énergie.....	67
f) Reconstitution du signal.....	67
g) Régularité.....	67
5.4 Transformée en ondelettes discrète (TOD) .....	69
6. SCALOGRAMME.....	69
7. AVANTAGES.....	70
8. QUELLE ONDELETTE CHOISIR ?.....	71

CONCLUSION .....	71
<b>CHAPITRE 4 : ETUDE COMPARATIVE</b>	
INTRODUCTION .....	72
1. COMPARAISON ENTRE LA <i>TFCT</i> ET LA <i>TOC</i> .....	72
2. ETUDE COMPARATIVE .....	74
2.1 COMPARAISON ENTRE SPECTROGRAMME ET SCALOGRAMME .....	74
2.1.1 SIGNAUX STATIONNAIRES .....	74
2.1.2 SIGNAL NON-STATIONNAIRE .....	77
2.1.3 SIGNAL BRUITE .....	78
2.2 APPLICATION A LA DETECTION DU DEFAUT D'UN SYSTEME D'ENGRENAGES .....	80
2.2.1 PRESENTATION DES DONNEES ET INTERPRETATION DES RESULTATS .....	81
CONCLUSION .....	85
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	86

## Liste des figures

Figure (1.2): vibration périodique.....	05
Figure (1.3): vibration apériodique.....	05
Figure (1.4):Modes de détections .....	07
Figure (1.5): Représentation vectorielle.....	08
Figure (1.6) : Représentation complexe.....	08
Figure (1.7): Représentation temporelle et fréquentielle.....	09
Figure (1.8): Désaxage.....	12
Figure (1.9): Excentricité.....	12
Figure (1.10) : diagnostic par l'analyse orbitale.....	19
Figure (1.11) : diagnostic par analyse de phase.....	20
Figure (1.1.2) : diagnostic par l'analyse spectrale.....	20
Figure (1.13) : chaîne d'analyse spectrale.....	21
Figure (1.14): capteur.....	22
Figure (1.15) : statistiques publiées par TRC.....	23
Figure (2.1): signal analogique.....	25
Figure (2.2): signal discret.....	25
Figure (2.3): types des signaux.....	25
Figure (2.12): chaîne de traitement.....	31
Figure (2.23): Affixes des coefficients de la TFD.....	43
Figure (2.24):diagramme de fluence de la première décomposition de la FFT d'une suite de 8 valeurs.....	47
Figure (2.25): diagramme de fluence de la seconde décomposition de la FFT d'une suite de 8 valeurs.....	48
Figure (2.26): Diagramme de fluence de DFT.....	49
Figure (2.27) : FFT d'ordre 2 avec entrelacement temporel pour $N = 8$ .....	49
Figure (2.29): passage de l'ordre naturel à l'ordre des bits inversés.....	51
Figure (2.30) : Fenêtre de la transformée de Fourier à court terme pour deux fréquences différentes.....	53
Figure (3.1) : Ondelette Chapeau Mexicain.....	57
Figure (3.2) : Ondelette de Morlet.....	57
Figure (3.3) : Fenêtres temps-fréquence utilisées dans (a) l'analyse temporelle (base standard), (b) l'analyse de Fourier, (c) l'analyse de Gabor et (d) l'analyse par ondelette et leur série	61

temporelle correspondante dans les espaces temporel et fréquentiel.

Figure (3.4) : illustration de la variation du facteur d'échelle,.....	63
Figure (3.5): les étapes de Calcul Les Coefficients.....	64
Figure (3.6) : Schéma de calcul de la transformation en ondelettes continue.....	66
Figure (3.7) : Résolution temps-fréquence A) TFCT B) transformée en ondelette.....	71
Figure (4.1.a): Comparaison entre TFCT et TOC.....	72
Figure (4.1.b) Comparaison entre TFCT et TOC.....	73
Figure (4.7) : Système d'engrenage.....	80
Figure (4.8) : Les représentations temporelles, la transformé de Fourier rapide (FFT) et la transformé en Ondelette d'un système d'engrenages .....	84

## Liste des tableaux

Tableau (1.1) : Les causes des roulements .....	13
Tableau (2.1) : Caractéristiques d'une FFT .....	52

## INTRODUCTION GENERALE

Les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle en traitement du signal, et parmi ces dernières, la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier [1,3]. Cette transformation permet d'explorer la composition fréquentielle du signal. Très tôt dans l'histoire du traitement du signal, il s'est avéré que la décomposition obtenue par Fourier n'était pas toujours la plus satisfaisante. Aux années 1940, Gabor découvrait la première forme de la représentation temps-fréquence. Sa technique consiste à découper le signal en différentes plages de longueur fixée ou fenêtre[4,6]. Chaque segment du signal limité par une fenêtre est étudié séparément des autres par l'analyse de Fourier. L'ensemble de ces transformées localisées forme la transformée de Gabor du signal. L'inconvénient majeur de ce procédé est que la longueur de la fenêtre étant fixée, il n'est pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes. Une autre technique d'analyse qui ne privilégie aucune échelle particulière mais qui généralise à toutes les échelles l'analyse locale des fréquences obtenues par la méthode de Gabor devient plus que nécessaire [1,4,6]. En 1982, J.Morlet ouvre la voie conduisant à la solution en construisant l'analyse en ondelettes, fondée sur un concept quelque peu différent de celui de fréquence: le concept d'échelle [2,7]. Cette procédure développée par Stéphane Mallat et systématisée par Ingrid Daubechies, porte le nom de multi-résolution et suggère une interprétation différente de l'analyse par ondelettes [4,7]. Les ondelettes constituent donc un outil parmi les plus récents du traitement du signal et qui datent de quelques décennies seulement. Elles nous permettent d'effectuer une analyse robuste et mènent à une multitude d'applications. Contrairement à la transformée de Fourier à court terme, la transformée en ondelettes fait appel à la notion de temps-échelle impliquant des fenêtres d'analyse de longueurs dynamiques.

L'objectif de ce travail s'inscrit dans le cadre d'une simulation de fonctionnement d'algorithmes de la transformée de Fourier et la transformée en ondelette pour la détection des défauts mécaniques d'une machine tournant. On utilise à cet effet des programmes en Matlab permettant la mise en œuvre des programmes de deux algorithmes transformée de Fourier (spectrogramme) et la transformée en ondelette (scalogramme) est effectué à partir d'une étude en simulation sur plusieurs signaux différents.

Notre mémoire s'articule sur quatre chapitres qui sont présentés comme suit :

Le premier chapitre présente des généralités sur les vibrations mécaniques (définition, formes et modes de détections des vibrations, etc...). La description des machines tournantes et les différentes causes de vibrations (défauts d'origine mécanique, électrique, hydraulique et aérodynamique), l'essentiel apporte à ce chapitre.

Le second chapitre est dédié à la présentation de quelques définitions, généralités et représentations du signal. La présentions de la technique de transformée de Fourier rapide assurant l'analyse spectrale du signal vibratoire est aussi décrite.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de transformée en ondelette. Nous présentons es caractéristiques principales de cette méthode, les avantages de cette méthode sont indiquées.

Le dernier chapitre comporte une comparaison entre l'analyse de Fourier et l'analyse des Ondelettes suivis d'une application pour la détection de défaut d'un système d'engrenages.

Une conclusion générale donnera une synthèse du travail effectué et résumera les principaux résultats obtenus.

# **CHAPITRE 1**

## **PRESENTATION DE DIFFERENTS DEFAUTS**

### **DES MACHINES TOURNANTES**

#### **INTRODUCTION**

Toutes les machines en fonctionnement produisent des vibrations, images des efforts dynamiques en gendres par les pièces en mouvement. Ainsi, une machine neuve en excellent état de fonctionnement produit très peu de vibrations. La détérioration du fonctionnement conduit le plus souvent à un accroissement du niveau des vibrations. En observant l'évolution de ce niveau, il est par conséquent possible d'obtenir des informations très utiles sur l'état de la machine. Ces vibrations occupent une place privilégiée parmi les paramètres à prendre en considération pour effectuer un diagnostic. La modification de la vibration d'une machine constitue souvent la première manifestation physique d'une anomalie, cause potentielle de dégradations, voire de pannes. La surveillance des machines tournantes s'inscrit dans la politique de contrôler l'état d'un système en permanence, diagnostiquer l'origine d'un défaut constaté d'un système mécanique, qui nécessite la mesure de la grandeur vibratoire qui traduit fidèlement à l'information voulue.

Notre chapitre est dédié à la représentation de quelques notions fondamentales sur les vibrations mécaniques, la description d'une machine tournante, avec les différentes causes de vibrations, ainsi les différentes méthodes d'analyse des vibrations, en l'occurrence, l'analyse spectrale.

#### **1- VIBRATIONS MECANIQUES**

##### **1.1- Définition du vibration**

La vibration est la variation avec le temps d'une grandeur caractéristique du mouvement ou de la position d'un système mécanique [8], lorsque la grandeur est alternativement plus grande et plus petite, qu'une certaine valeur moyenne ou de référence (AFNOR 90.001).

Une vibration est caractérisée par trois paramètres:

- La fréquence.
- La phase.
- L'amplitude.

**\* La fréquence**

C'est le paramètre caractérisant 'la rapidité' d'oscillation (c'est le nombre d'oscillations par seconde), elle s'exprime en Hz (Hertz).

**\* La phase**

Elle permet de déterminer la position de la particule d'un corps oscillant à instant donnée.

**\* L'amplitude**

Elle s'exprime soit en déplacement, soit en vitesse, soit en accélération.

**1.2- Différentes formes de vibration**

On classe généralement les vibrations d'après l'évolution de la variable considérée dans le temps (périodicité). On distingue ainsi les vibrations:

- Harmoniques
- Périodiques.
- Apériodiques.

**\* Vibration harmonique**

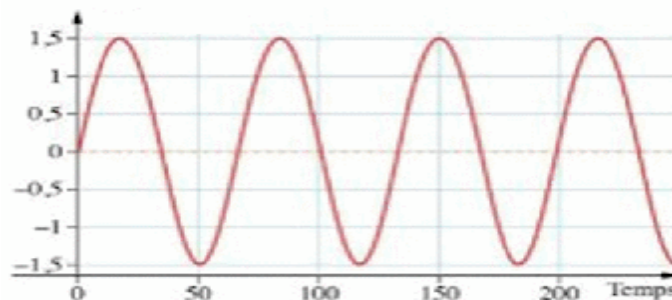
Dont le diagramme amplitude-temps, est représenté par une sinusoïde (figure (1.1)) :

$$s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega t + j) \quad (1.1)$$

$\omega$  : vitesse ou pulsation du mouvement en [rd/s].

$f$  : Fréquence du mouvement en [Hz].

$j$  : Phase du mouvement par rapport à un repère dans le temps en [rd].



Figure(1.1):vibration harmonique(une sinusoïde)

Le meilleur exemple d'une vibration harmonique est celle générée par le balourd d'un rotor en mouvement.

### \* Vibration périodique

Est telle qu'elle se produit exactement après un certain temps appelé période. Une telle vibration est créée par une excitation elle-même périodique c'est le cas le plus fréquent rencontré dans les machines.

La vibration périodique est composée de plusieurs vibrations harmoniques (figure(1.2))

Elle est décrite par l'équation (1.2):

$$s(t) = \sum_{i=1}^n S_i \cdot \sin(\omega_i t + j_i) \quad (1.2)$$

$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$  : sont des multiples de  $\omega_0$  (fondamentale).

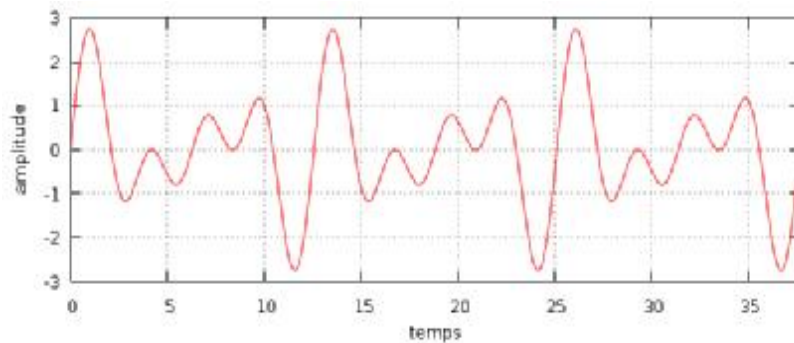


Figure (1.2): vibration périodique

### \* Vibration apériodique

Est telle que son comportement temporel est quelconque, c'est-à-dire que l'on n'observe jamais de reproductibilité dans le temps, c'est le cas des chocs qu'enregistre sur quelques systèmes (figure (1.3)).

Elle est décrite par l'équation (1.3)

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [S_i \sin(\omega_i t + j_i)] \quad (1.3)$$

$\omega_0, \omega_1, \dots$  : Ne sont pas des multiples de  $\omega_0$ .

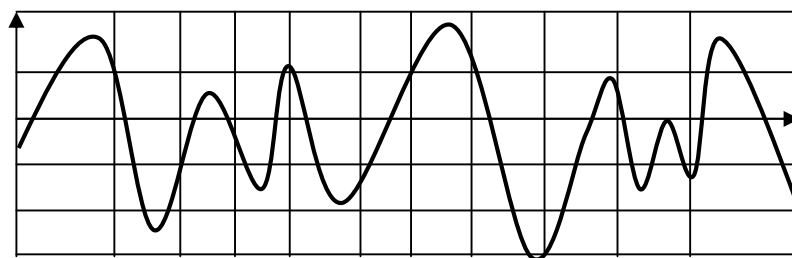


Figure (1.3): vibration apériodique

### 1.3- Les grandeurs de mesure

Une vibration mécanique peut être mesurée selon les trois grandeurs suivantes [8,9]:

- Déplacement.
- vitesse.
- accélération.

- **Déplacement**

Grandeur vectorielle qui définit le changement de position d'un corps ou point matériel par rapport à un système de référence.

- **Vitesse**

Vecteur qui représente la dérivée de déplacement par rapport au temps.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (1.4)$$

- **Accélération**

Dérivée de la vitesse par rapport au temps.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} \quad (1.5)$$

Les relations entre ces grandeurs dans le cas d'une vibration harmonique sont:

$$s(t) = S \sin(\omega t)$$

$$s'(t) = v(t) = S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \frac{p}{2}) \quad (1.6)$$

$$s''(t) = a(t) = -S \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = S \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + p)$$

- Les grandeurs de déplacements pour détecter des phénomènes à basse-fréquence.
- Les grandeurs d'accélération pour détecter des phénomènes à haute-fréquence.
- Les grandeurs de vitesses pour détecter des phénomènes à large gamme.

### 1.4- Modes de détection

En mesure vibratoire, on utilise couramment modes de détections:

- Valeur efficace
- Valeur crête
- Valeur crête à crête
- Valeur moyenne

- \* **Valeur efficace  $X_{eff}$**

Pour une vibration,  $S_{eff}$  est la valeur quadratique de valeurs efficaces de chacune des

vibrations harmoniques la constituant (equation (1.7)) :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2}(S_{1eff}^2 + S_{2eff}^2 + \dots + S_{neff}^2)} \tag{1.7}$$

Avec :  $S_{ieff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s_i^2(t).dt}$

**\* Valeur crête Xc**

La valeur crête d’une vibration est la valeur maximale prise par la variable  $s(t)$ , dans l’un des sens positif et négatif.

Les relations entre ces grandeurs:

$$S_{eff} = \frac{S_C}{\sqrt{2}} = \frac{S_{CC}}{2\sqrt{2}}$$

$$S_C = \sqrt{2}.S_{eff} = \frac{S_{CC}}{2} \tag{1.8}$$

$$S_{CC} = 2.\sqrt{2}.S_{eff} = 2.S_C$$

**\* Valeur moyenne**

- signal périodique:

$$S_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t).dt \tag{1.9}$$

-signal transitoire :

$$S_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t).dt \tag{1.10}$$

la figure (1.4) représente les modes de détections usuels :

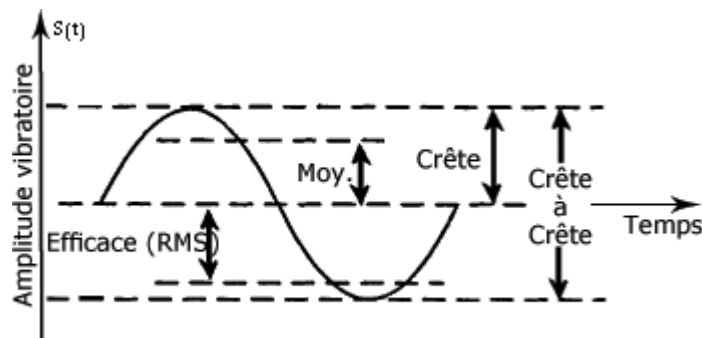


Figure (1.4):Modes de détections [9, 10,11]:

## 1.5- Représentation de vibrations

### 1.5.1- Représentation vectorielle

Soit  $\overrightarrow{OM}$ , le vecteur d'amplitude maximale  $S_0$  et d'argument  $(\omega t + j)$ , dont l'extrémité exécute une rotation uniforme sur le cercle du rayon  $S_0$ , sa projection sur axe fixe représente un mouvement oscillatoire. L'axe horizontal représente l'origine du temps (figure(1.5)) [12,13].

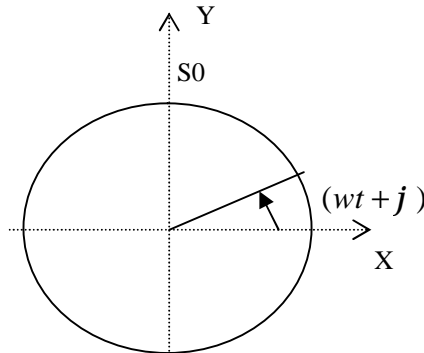


Figure (1.5): Représentation vectorielle

### 1.5.2- Représentation complexe

Soit  $a, b$  les projections du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  respectivement sur les axes  $(OX)$  et  $(OY)$ , assimilés au plan complexe d'axe réel  $R$ , et imaginaire  $I$ . On peut écrire :

$$Z = S_0 \cdot e^{j(\omega t + j)} \quad (1.11)$$

où :  $j^2 = -1$

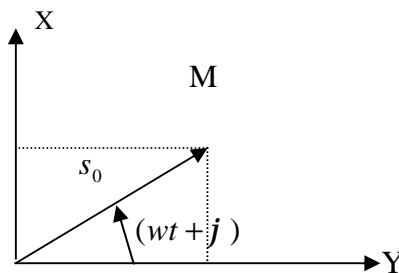


Figure (1.6): Représentation complexe

### 1.5.3- Représentation temporelle et fréquentielle

Examinons la composition de trois vibrations de fréquences respectives  $f_1, f_2$  et  $f_3$ . La combinaison linéaire de ces vibrations conduit (figure (1.7)), en supposant les déphasages nuls à la formulation suivante [12,13]:

$$s(t) = \sum_{j=1}^3 a_j \cdot \sin(2 \cdot p \cdot f_j \cdot t) \quad (1.12)$$

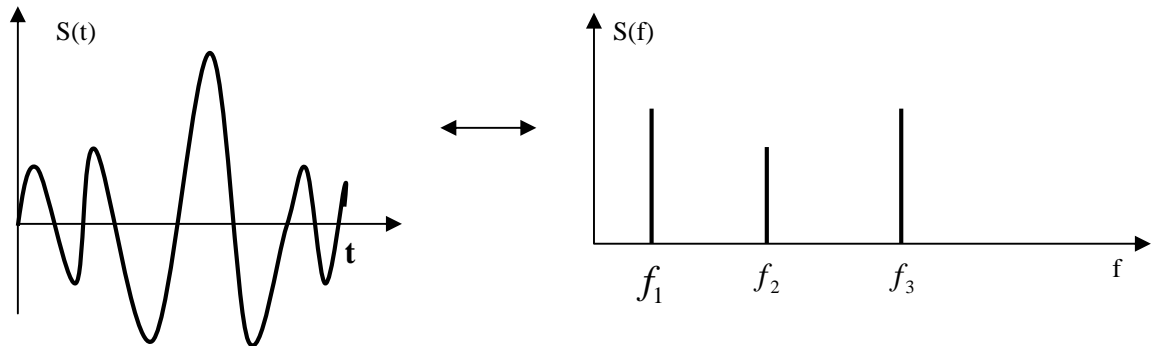


Figure (1.7): Representation temporelle et fréquentielle

**Remarque :**

Il est clair que le graphe dans le domaine fréquentiel est moins complexe que celui représenté, dans le domaine temporel;

A premier vue, l'analyse spectrale apparaît beaucoup plus intéressante.

## 2- MACHINES TOURNANTES

Le comportement vibratoire des machines tournantes est déterminé par l'analyse des vibrations qui a évolué d'une technique d'appréciation qualitative du fonctionnement mécanique des machines vers une technique de diagnostic de la cause vibratoire, dépend de:

- La valeur des grandeurs d'états pour lesquelles les régimes sont caractérisés (variations inductrices d'influences dites naturelles).
- L'état mécanique des éléments de la machine (évolution liée a des anomalies ou défaillances, dégradation, destruction).

### 2.1- Description d'une machine tournante

Une machine tournante se compose de trois parties essentielles:

- **Stator**

C'est une structure non-rotative qui comporte des paliers est une enveloppe liée à une

fondation, radier ou autre.

- **Rotor**

Structure en rotation autour d'une ligne de rotation qui peut être proche d'une droite. Les rotors sont des cylindres très longs par rapport à la taille de leur section, la proportion est de  $1/10^\circ$  à  $1/20^\circ$ .

- **Les liaisons**

Assurant de guidage du rotor par rapport au stator (les paliers hydrostatiques), dont la fonction est de supporter la ligne d'arbre en évitant tout contact entre les parties Statiques et les tournantes en enregard. On peut classer dans trois ensembles:

- Liaisons à fluides.
- Liaisons à roulements.
- Liaisons magnétiques.

De nombreuses machines ou éléments de machines sont sujet durant leur fonctionnement à des mouvements périodiques, appelés: vibration.

## 2.2- Classification des machines tournantes

Les machines tournantes peuvent être classées selon plusieurs critères à savoir:

- En fonction du nombre (n) de liaisons.
- En fonction de leur état rigide ou flexible.

### \* Classification selon le nombre de liaisons

Les liaisons disposées dans les paliers guident le rotor par rapport au stator avec deux liaisons, les forces moyennes (statiques) appliquées sur chacune d'elles sont déterminées à partir des forces appliquées sur le rotor dans une direction donnée par rapport à l'axe qui joint le centre des liaisons, cette configuration est dite isostatique. Si le nombre de liaisons est supérieur à deux, les forces appliquées sur les liaisons dépendent des impédances au droit des liaisons, cette configuration est dite hyperstatique.

### \* Classification selon l'état (rigide ou flexible)

Les matériaux qui constituent les rotors étant doués de masse et élasticité, les rotors se déforment sous l'action des forces centrifuges dues aux balourds et à la vitesse de rotation. Cependant lorsque les déformations sont faibles, il est possible de considérer le rotor en état rigide, tout état non-rigide est dite flexible.

### **2.3- Les cause des vibrations et défaillances rencontrées**

Dans le domaine industriel on rencontre plusieurs types des machines tournantes (mécanique, électrique, etc...), dont chaque type confirme des défaillances dont leurs sources diversifiées suivant la structure de la machine.

Pour raison de recenser le maximum possible de ces défauts rencontrés, nous allons les classées suivant leurs natures en plusieurs groupes principaux:

- Origine mécanique.
- Origine électrique.
- Origine hydraulique et aérodynamique.

#### **2.3.1- Les défaillances d'origine mécanique**

##### **2.3.1.1- Le déséquilibre**

Le déséquilibre est une répartition inégale du poids d'un rotor autour de son centre de rotation. Le déséquilibre excessif produit une vibration du rotor et de ses paliers et s'identie facilement par ses caractéristiques vibratoires [14]. Le déséquilibre est probablement la cause la plus commune de vibration, parmi les causes de déséquilibre on distingue:

- Excentricité.
- Addition des clavettes et leurs rainures sur les arbres.
- Défauts de moulage.
- Corrosion, usure et encrassement des rotors.

Pour corriger le problème de déséquilibre (balourd), en effectuera un équilibrage.

##### **2.3.1.2- Le mauvais alignement**

Le mauvais alignement est un problème presque aussi commun que le déséquilibre malgré l'emploi des paliers auto-alignants et d'accouplement flexibles. Il est difficile d'aligner deux arbres ainsi que leurs paliers afin d'assurer qu'il n' y existe aucune force qui puisse causer la vibration. La figure (1.8) démontre les trois genres possibles de mauvais alignement d'accouplement [14]

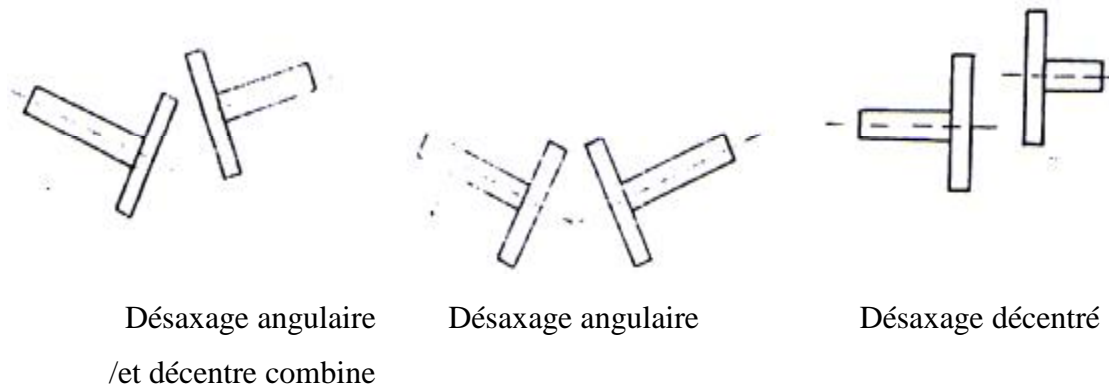


Figure (1.8): Désaxage

Le mauvais alignement peut se produire sans qu'un accouplement est utilisé, comme:

- Le mauvais alignement d'un arbre dans son palier.
- Le mauvais alignement des poulies et des pignons employés dans les transmissions à courroie en 'V' et par chaîne.
- L'arbre courbé réagit beaucoup comme le mauvais alignement angulaire.

### 2.3.1.3- L'excentricité

L'excentricité est une indication que l'axe de rotation de l'arbre ne coïncide pas avec l'axe qui passe par le centre géométrique du rotor. Des exemples d'excentricité sont illustrés en figure(1.9).

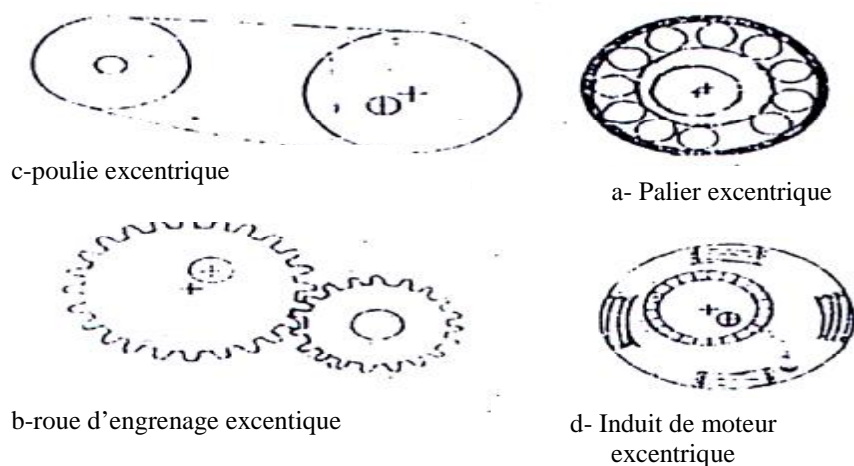


Figure (1.9): Excentricité

Le palier antifriction illustré en figure (1.9.a), montre que l'alésage de voie de roulement intérieure n'est pas concentrique à la ligne centrale géométrique de la voie de roulement

intérieure, il en résulte l'introduction d'un déséquilibre apparent.

L'excentricité peut avoir comme résultat des forces réactives dans certains cas qui ne peuvent être corrigées par un simple équilibrage, par exemple la transmission par engrenage figure (1.9.b), produit des forces réactives à cause de l'excentricité de l'un des deux roues d'engrenage.

L'excentricité de la poulie à courroie en ' V' figure (1.9.c), donne comme résultat des forces réactives, la vibration la plus grande aura lieu dans la direction de la tension du courroie, dans le cas de l'induit du moteur décentré figure(1.9.d), une force est produite entre l'induit et le stator à cause de l'attraction magnétique variable entre l'induit décentré et les pièces polaires du moteur, l'augmentation de la force du champ magnétique en augmentant la charge du moteur peut produire une vibration accrue [14].

#### 2.3.1.4- Les roulements défectueux

Les causes d'incidents sur les roulements sont très nombreuses. Elles doivent être recherchées dans la procédure de fabrication, le transport, le stockage, le montage et l'utilisation des roulements [9, 14,15]. Les origines de ces dégâts peuvent être réparties grossièrement en deux groupes usure et dégradation brutale. Un récapitulatif des causes les plus fréquentes retrouve en tableau (1.1):

Stade	Cause des dégâts
Fabrication	Matériaux non homogène Tolérance sur les cotes
Stokage/Transport	- Emballage insuffisant - vibration
Montage	- Chocs - Mauvaise précontrainte - Erreur de cote - Erreur de lignage
Service	- Surcharge - Manque ou excès de graisse - Corps et rangere (poussière) - Substance et rangère (gaz, agressif, humidité) - Charge thermique.

Tableau (1.1) : Les causes des roulements

Dans le cas d'un défaut local sur la bague externe, le passage de la bille au lieu de la déféctuosité provoque un choc qui engendre un bruit.

Les paliers sont des éléments les plus précis qu'existent, il ne se détériorent pas prématurément à moins qu'une ou plusieurs forces n'en soient responsables. Ce sont des mêmes forces qui provoquent les vibrations, un contrôle précis pour d'autres difficultés telles que déséquilibre ou désaxage doit être effectué après avoir remplacé le palier, particulièrement là où les ruptures prématurées du palier ont été fréquentes.

### **2.3.1.5- Les engrenages**

Les réducteurs (ou multiplicateurs) à engrenages sont très répandus en mécanique, on les trouve dans tous types d'industries, de procédés par exemple automobile (boîte de vitesses), aéronautique (hélicoptères), cimenteries, raffineries. Ce sont des éléments mécaniques très sollicités, complexes à dimensionner et à réaliser (calcul, choix et traitement des matériaux, taillage des dents, ...), qui peuvent présenter des défaillances limitant leur durée de vie [9, 12,16].

Les engrenages sont des éléments de construction directement générateur de choc en cas d'usure ou de mauvais fonctionnement.

Généralement dans les engrenages les défauts les plus dominants sont:

- \* L'ensemble de la denture est usé ou présente des défauts de surface (corrosion, crique, etc..... )
- \* Une dent est cassée ou fortement abimée sur l'arbre.
- \* L'arbre de pignons est tordu.
- \* Défauts d'usinage ou de montage telles que:
  - Le faux –rond.
  - Défaut de taillage.
  - L'écaillage.

### **2.3.1.6- Les paliers lisses**

Généralement, les problèmes des paliers lisses qui produisent des niveaux de vibration ou de bruit élevés remontent au jeu excessif dans le palier (causé par frottement, érosion chimique, mauvais serrage ou des problèmes de lubrification) [9,14].

Un palier lisse dont le jeu est excessif peut avoir comme résultat une force vibratoire entraîne

le desserrage mécanique. Généralement les problèmes encourus sur les machines équipées de paliers lisses sont:

- Les tolérances d'usinage des soies provoquent un faux-rond de l'arbre.
- Manque de lubrification ou si un mauvais lubrifiant est employé.
- Modification des caractéristiques d'huile (viscosité, température, ...).
- Le frottement qui produit une usure excessive.
- Le battement sec.

### **2.3.1.7- Le mauvais serrage mécanique**

Le mauvais serrage mécanique est l'action de cognement qui provoque vibration qui ne se produira pas à moins d'être causée par une autre force d'excitation tel que déséquilibre ou désaxage. Cependant, lorsque le desserrage est excessif des montants minimales de déséquilibre ou désaxage produiront des grandes vibrations [14].

### **2.3.1.8- Les courroies de transmissions**

Les problèmes de vibration associés aux courroies en 'V' sont généralement de deux genres:

**a-** Réaction de la courroie aux autres forces perturbantes dans l'équipement, par exemple :

- Un déséquilibre excessif des poulies excentriques.
- Un désaxage ou un mauvais serrage mécanique.

Ils peuvent causer une vibration de courroie qu'est facilement visible (dans ce cas la courroie peut être simplement un indicateur de perturbation), aussi une tension incorrecte, un mauvais alignement de poulies, une surcharge de force motrice. Pour les commandes à courroies multiples toutes les courroies doivent avoir des tensions égales, si une ou plusieurs courroies sont lâchées tandis que les autres ont la bonne tension, les courroies lâchées peuvent causer une vibration excessive, même par l'entremise des forces de dérangement mineures. Cette condition causera aussi un glissement de courroie et accélérera l'usure de courroies et de poulies [14].

**b-** vibration causée par des problèmes de la courroie:

La défectuosité du courroie qui excite une vibration inclut des crevasses, des points durs, des points mous ou des basses sur la surface de courroie, ainsi que des morceaux arrachés ou déchirés d'une courroie qu'est déformée à cause d'un mauvais emballage ou entreposage peut causer des vibrations élevées en 'V' comptent des variations de tolérance de

leur largeur dans ce cas, la poulie crée ainsi une vibration à cause des variations de la tension de courroie.

### **2.3.1.9- Le frottement**

Le frottement entre les pièces stationnaires et rotatives d'une machine peut occasionner une fréquence de vibration le double de la vitesse de rotation ou plus. Si le frottement est continu, il est peu probable que des caractéristiques de vibration et de bruit très élevés soit présentes, dont la source serait la friction qu'excite les fréquences naturelles du système [14].

Lorsque le frottement existe, il est habituellement, causé par un arbre fléchi, des pièces brisées ou endommagées ou une déformation dans le système qui se révélera par d'autres caractéristiques de vibration.

### **2.3.1.10- Les forces alternatives**

Les machines à mouvement alternatif telles que les compresseurs, les pompes à piston, les moteurs à essence et les moteurs diesel possèdent normalement des vibrations résultantes du mouvement alternatif inhérent dans la conception et l'opération de la machine. Ces vibrations inhérentes sont le résultat de l'inertie des pièces en mouvement alternatif plus variantes de pression, des pistons qui causent des variations de couple d'opération [14,17].

Les problèmes en cours sur les machines à mouvement alternatif qui cause une vibration et un bruit excessif qui peuvent être soit des problèmes mécaniques ou des problèmes d'opérations.

Z Les problèmes mécaniques dont nous avons parlé intérieurement dans les paragraphes précédents.

Les problèmes d'opérations qui causent la vibration comprennent l'échappement prématuré soupapes et clapets non-étanches ou souffrant de collage ainsi que des problèmes d'injecteurs et d'allumage.

### **2.3.2- Les problèmes électriques**

La vibration de machinerie électrique telle que moteurs, générateurs et alternateurs peut être d'origine mécanique ou électrique [14].

Les problèmes mécanique incluent le déséquilibre, le désaxage, le mauvais serrage. La vibration causée par des problèmes électriques est normalement le résultat de forces magnétiques inégales agissant sur le rotor ou le stator, ces forces magnétiques inégales

peuvent être dues à:

- \* Rotor ovalisé.
- \* Rotor et stator désaxés (exp: rotor non-centré par rapport au stator).
- \* Tourillons d'induit brisé.
- \* Alésage du stator elliptique (faux-rond).
- \* Barre d'induit brisée.
- \* Court-circuit d'enroulement.

La vibration disparaît à l'instant même où le courant est coupé, il est fort probable qu'il s'agit d'un problème électrique, dans ce cas on peut employer les procédures de vérifications électriques conventionnelles afin de repérer la vraie cause du problème. D'autre part, si l'amplitude de vibration diminue graduellement lorsque la puissance est débranchée, il est probable que le problème est de nature mécanique.

### 2.3.3- Les forces aérodynamiques et hydrauliques

Les machines qui servent à la manutention de fluides tels que l'air, l'eau, le gaz, etc... .Pourront souvent produire une vibration ou un bruit à cause de la réaction des ailettes ou aubes de la couronne mobile en contact avec le fluide. La vibration de ce genre est fréquente sur des pompes, des ventilateurs et des souffleurs et celle-ci peut être identifiée facilement, puisque la fréquence sera égale au nombre d'ailettes ou de palettes sur la couronne mobile multiplié par la vitesse de rotation en (tr/mn) de la machine.

Il existe à l'arrêt entre les organes fixes et mobiles un certain jeu de fonctionnement, ce jeu en rotation évolue en rotation sous l'influence combinée:

- Des déplacements longitudinaux du rotor dus aux variations de la poussée axiale .
- Des déformations des ailettes résultant des sollicitations aérodynamiques auxquelles elles sont soumises.

Si la vibration aérodynamique ou hydraulique est excessive et que l'on ne peut découvrir une condition de résonance. Le problème peut être causé par une mauvaise conception de la machine ou de la tuyauterie ou de la canalisation dans la parcourue du gaz ou du liquide ou des coudes à angles droits dans la direction de l'écoulement peuvent causer cette vibration. Des problèmes additionnels de bruit et de vibration associés au mouvement du liquide et du gaz comprennent aussi cavitation, recirculation et turbulence d'écoulement [12,14].

### **2.3.4- La résonance**

Le phénomène de résonance provient par la coincidence entre l'une quelconques des fréquences d'excitations et la fréquence propre (naturelle) et toute pièce composante d'une machine. On peut diagnostiquer les conditions de résonance par l'enregistrement de l'amplitude et de la phase de vibration par rapport à la vitesse de rotation de la machine à plusieurs vitesses choisies tout en traçant l'amplitude et la phase de vibration pour chaque vitesse. Si des conditions de résonance existent, elles seront clairement identifiées par les vibrations de pointe typique qui se produisent ainsi qu'un décalage de phase important (environ  $180^\circ$ )[14].

En présence d'un problème de résonance, il y a plusieurs façons de faire la correction, le moyen le plus simple est de changer la fréquence de la force d'excitation afin qu'elle ne coïncide plus avec la fréquence naturelle de la machine ou de la structure, on augmentant ou en réduisant la vitesse en (tr/mn) de la machine. Si la fréquence d'excitation ne peut être cependant corrigée le problème en changeant véritablement la fréquence naturelle, il y a deux choses qui déterminent ce qui sera la fréquence naturelle. Elle peut être augmentée ou diminuée en augmentant ou en diminuant la rigidité ou la masse d'un objet naturellement, la résonance pourrait être évitée en éliminant la force d'excitation. L'équilibrage à des niveaux plus bas que normal réduira parfois les effets de vibration en résonance. Cependant dans bien des cas, les tentatives d'éliminer la force d'excitation au moyen d'équilibrage et d'alignement peuvent être très difficile. La meilleure solution pour résoudre un problème de résonance est de séparer les fréquences naturelles et les fréquences d'excitations.

## **3- L'ANALYSE DES VIBRATIONS**

L'étude et l'analyse des vibrations des machines ont pris au cours des dernières années une importance considérable en raison des développements importants des techniques dans nombreux domaines: électricité, mécanique, etc...

Dans le cas de machines tournantes, le paramètre le plus significatif de l'état d'une machine est le niveau vibratoire.

Les trois techniques d'analyses vibratoires principalement utilisées sont:

- L'analyse orbitale.
- L'analyse de phase.
- L'analyse spectrale.

### 3.1- L'analyse orbitale

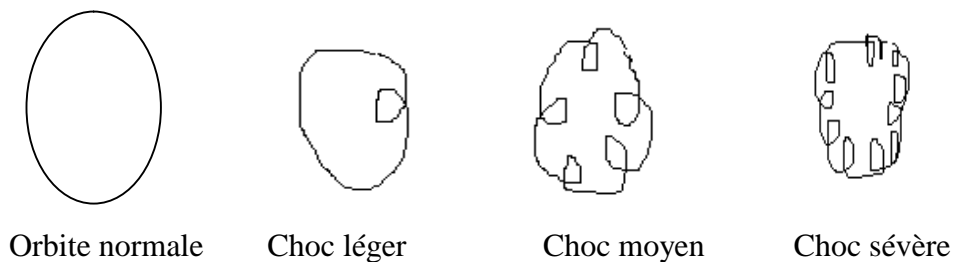
Cette technique est utilisée pour la protection et le diagnostic de mauvais fonctionnement des machines tournantes. Elle permet d'obtenir des figures de LISSAJOU représentant le mouvement de l'arbre dans son palier à l'aide d'un oscilloscope et deux capteurs montés à 90° dans chaque logement du palier.

Dans le cas d'un arbre parfaitement isotrope tournant dans des paliers parfaitement isotrope n'a comme seule excitation externe que le balourd résiduel de l'arbre, l'orbite cinétique est un cercle parfait.

Dans la réalité, la forme de cette orbite peut être influencée par:

- L'anisotropie des éléments de construction.
- La forme du film d'huile.
- La vitesse de rotation (passage de fréquences propres).

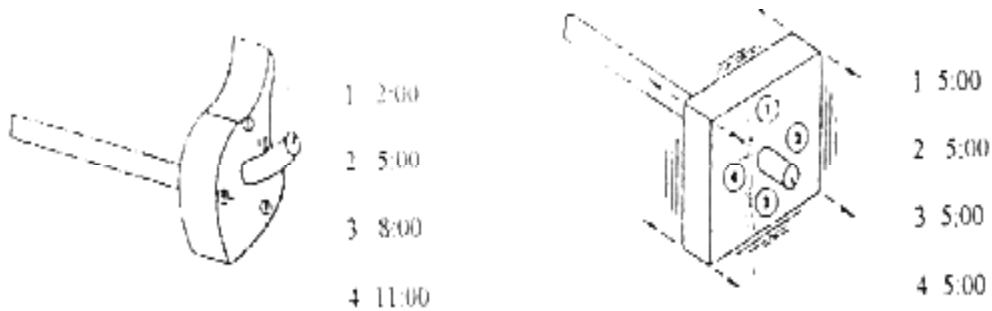
Le spectre typique des orbites présenté aux figures (1.10):



Figure(1.10) : diagnostic par l'analyse orbitale

### 3.2- Analyse de phase

Dans la maintenance conditionnelle on rencontre une technique avancée qui basée sur la détection de la différence de phase entre deux pièces d'une machine. La phase est définie comme étant la position d'une pièce en vibration à un moment donné en référence a un point fixe ou autre pièce en vibration. En pratique, la mesure de phase offre un moyen simple et efficace de déterminer le mouvement relatif ente les différentes pièces d'une machine ou de sa structure, aussi, une comparaison des lectures d'amplitude et de phase devrait vous permettre de déterminer si la structure vibre en résonance.



Les lectures de phase notamment  
Différentes au 4 points de mesures  
Indique qu'il y a torsion du palier

Les lectures de phase relativement  
semblable démontre que palier vibre  
axialement au mouvement de va et vient

Figure (1.11) : diagnostic par analyse de phase

### 3.3- L'analyse spectrale

Classiquement, les machines tournantes imposent des vibrations dont la fréquence fondamentale est égale à leur vitesse de rotation; les fluides imposent des vibrations aléatoires et (ou) des vibrations dont les fréquences sont en relation directe avec la vitesse des machines. Pour un nombre important de machines tournantes, la bande de fréquence se trouve 0-500Hz.

L'état de santé d'une machine peut être estimé par ces vibrations. On donne des renseignements généraux sur la mesure et le traitement des informations portées par le signal vibratoire et la manière d'entirer un diagnostic.

Toutes les machine vibrent, quelque soit le soin apporté à leur fabrication. La mesure globale permet, en se rapportant à des références connues (normes, spécifications du constructeur), de juger si le niveau de ces vibrations est acceptable. Dans le cas contraire, il est important d'en définir la raison, de trouver le phénomène excitateur. C'est le but de l'analyse en fréquence.

L'interprétation physique des spectres à pour but de relier l'effet à la cause, c'est-à-dire de déterminer, pour chacune des raies du spectre, la force excitatrice qui l'a engendrée.

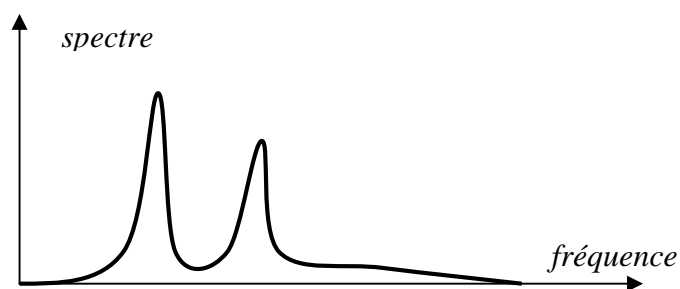


Figure (1.1.2) : diagnostic par l'analyse spectrale

## 4-CHAÎNE D'ANALYSE SPECTRALE

Le signal, porteur d'information, doit traverser une suite d'éléments qui constitue la chaîne d'analyse spectrale. Le point d'accès de la chaîne est constitué par un capteur qui a pour rôle de traduire le paramètre physique en un signal électrique. La chaîne d'analyse est constituée des dispositifs de conditionnement du signal, de la chaîne d'acquisition et d'un système de traitement.

### 4.1- Description de la chaîne d'analyse spectrale

La chaîne d'analyse spectrale prend souvent l'architecture indiquée à la figure (1.13)[18], elle est constituée de:

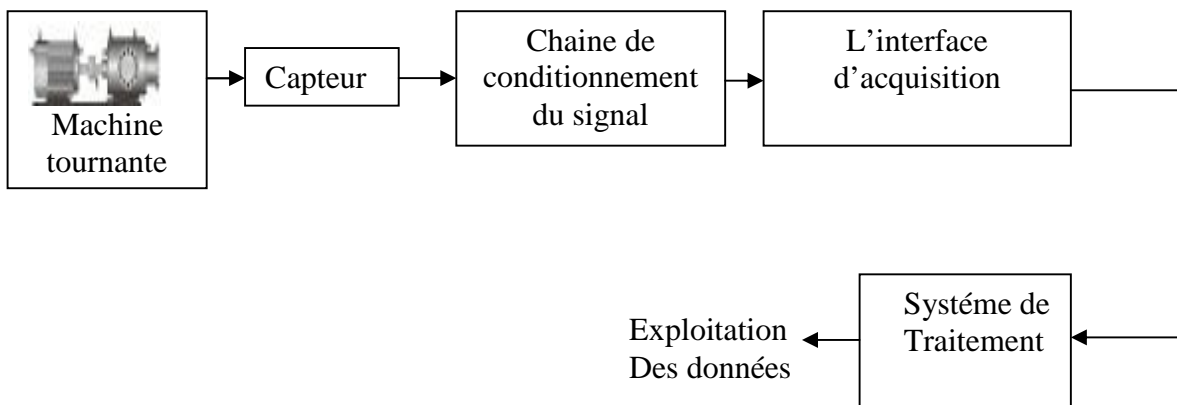


Figure (1.13) : chaîne d'analyse spectrale

#### 4.1.1- Capteur

Le capteur joue un rôle essentiel dans la chaîne d'analyse spectrale, ses caractéristiques ont une influence directe sur les performances qu'il est possible d'obtenir. Les capteurs assurent en général la fonction de conversion d'un paramètre physique (exp. grandeur mécanique: déplacement, vitesse, accélération, pression, contrainte,.....) en un signal électrique (tension, courant, charge, impédance) par l'intermédiaire d'un transducteur [19].

Le capteur est représenté par le modèle simplifié de la figure (1.14):

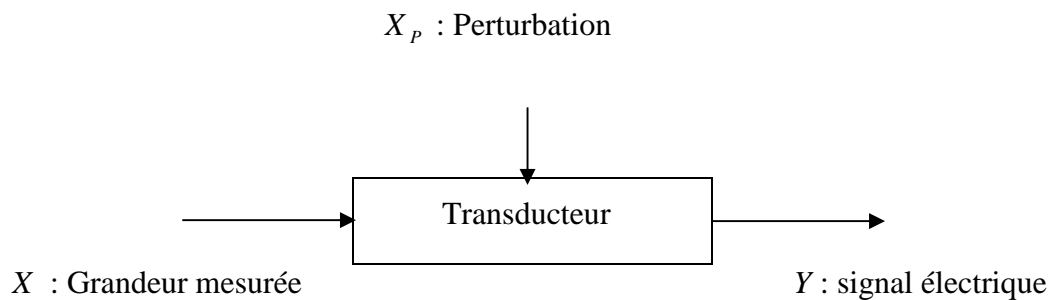


Figure (1.14): capteur

Le signal de sortie est donné par :

$$Y = f(X, X_p)$$

#### 4.1.2- Conditionnement du signal

Le conditionnement du signal a pour objet d'adapter le signal de sortie du capteur au système (souvent système de traitement) qui exploite la grandeur mesurée (l'information) par l'intermédiaire d'un système d'acquisition de données[19].

Les principales fonctions qui sont assurées à ce niveau sont les suivantes:

- Alimentation des capteurs passifs,
- Amplification,
- Linéarisation,
- Détection de l'information,

#### 4.1.3- L'interface d'acquisition

Composée essentiellement d'un convertisseur flash A/N. celui-ci convertit le signal d'entrée au format complément à deux.

#### 4.1.4- système de traitement

Le PC en assure la d'analyse spectrale du signal vibratoire et affichage des spectres obtenus.

#### *Remarque*

Il serait impossible de traiter toutes les sources possibles de vibration et de bruit dans les machines tournantes, ainsi, nous avons par courus seulement les causes que l'on rencontre couramment dans les machines rotatives.

D'après les statistiques publiées par TRC (division de Transport par Canalisation),

Montre la probabilité de pannes, liées à la vibration des turbo-compresseurs, turbo-pompes et turbo-alternateurs.

Les statistiques étant établies sur deux tranches, la première contenant 145 machines et la deuxième contenant 196 machines.

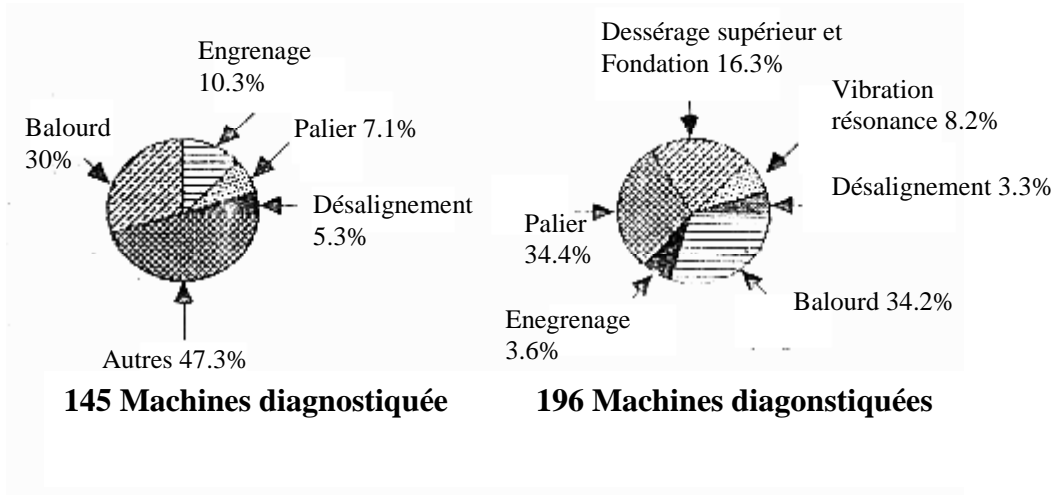


Figure (1.15) : statistiques publiées par TRC

A partir de la figure (1.15), on peut voir clairement que le balourd est le problème le plus dominant dans les machines tournantes, vient le problème des paliers, puis le desserrage mécanique et les engrenages, vient après le désalignement et d'autres problèmes divers. Tous ces problèmes sont à l'origine des vibrations.

## CONCLUSION

Ce chapitre a fait l'objet d'une étude descriptive sur les vibrations mécanique des machines tournantes.

Apparaissant comme paramètre caractéristique dans l'étude des défauts naissant au niveau de ces machines, ces vibrations ont suscité une attention particulière dans cette partie du mémoire. Pour diagnostiquer et détecter les défauts et éventuelles défailances, il existe différentes méthodes d'analyses telles que l'analyse orbitale, l'analyse de phase et l'analyse spectrale.

L'analyse spectrale est l'outil majeur pour l'étude des signaux vibratoires des machines tournantes, elle fera l'objet sur les deux chapitres suivants.

## CHAPITRE 2

# LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

### INTRODUCTION

Le traitement du signal est dans sa globalité, l'ensemble des moyens (méthodes et techniques), dont l'emploi à des différents domaines d'applications tels que: la télécommunication, biomédecine, vibrations mécaniques, etc.....

Dans ce chapitre on va présenter quelques généralités sur le signal vibratoire avec leur représentation, classification, et finalement l'analyse spectrale utilisons la transformée de Fourier qui occupe une place privilégiée dans le traitement des signaux, l'analyse spectrale faite à partir de la transformée de Fourier rapide (FFT) qui permet de connaître la totalité des composantes spectrales du signal vibratoire, qui est l'objectif de ce chapitre.

### 1-GENERALITES

#### 1.1-Définition du signal

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire.

Il est considéré comme une fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes, le plus courant, un signal est déterminé comme une fonction du temps: déroulement d'un processus au cours de temps.

#### 1.2- Classification des signaux

Lorsqu'on considère un signal quelconque, il est indispensable d'avoir à l'esprit deux représentations possibles de ce signal [21].

\*Une représentation temporelle de la forme  $y = g(t)$ , où la variable libre est le temps;

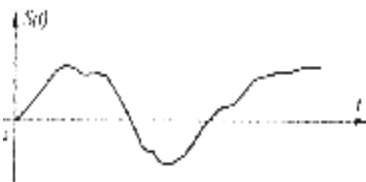
\* Une représentation fréquentielle de la forme  $Y = G(f)$ , où la variable libre est la fréquence.

Ces deux représentations sont complémentaires est liées entre elles par la transformation de Fourier, qui sera traitée en détail ultérieurement. Selon les deux représentations précédentes, on distingue les classifications suivantes:

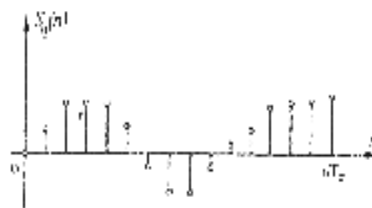
**1.2.1- Classification temporelle**

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que sa variable libre 't' est continue ou discrète [20,22].

Dans le premier cas, le signal correspondant est appelé signal analogique ou continu (Figure (2.1)), alors que, dans le deuxième cas, il est appelé signal discret ou échantillonné (figure (2.2)).



Figure(2.1): signal analogique



Figure(2.2): signal discret

En considérant la nature de l'évolution du signal en fonction du temps, on peut remarquer qu'il existe de nombreux types de signaux (tableau( 2.1)) ,on peut d'ores et déjà les classer en deux grandes catégories:

- Les signaux déterministes.
- Les signaux aléatoires.

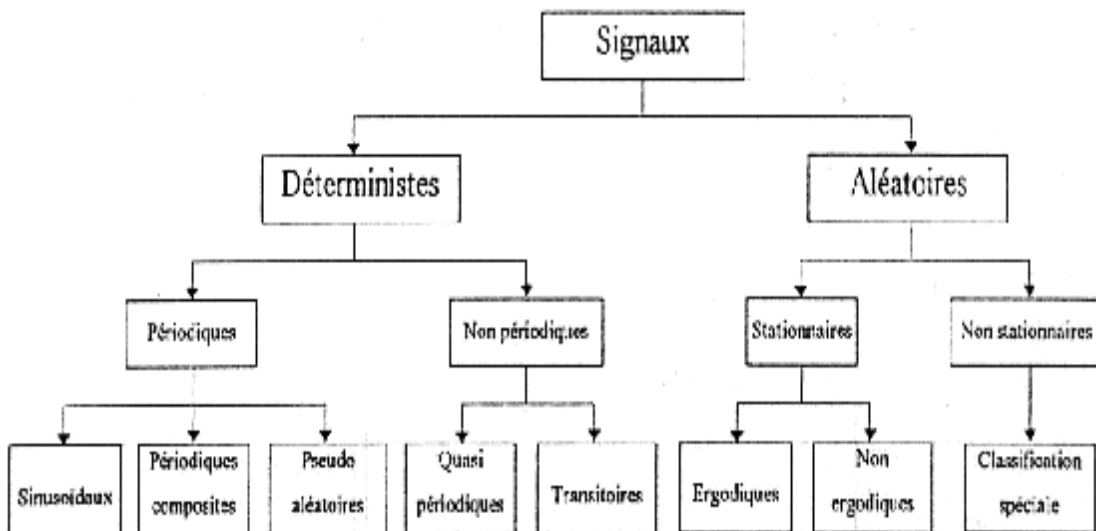


Figure (2.3): types des signaux

### a- Les signaux déterministes

L'évolution peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié [20,22]. Ils sont classés comme suit:

\* **Les signaux périodiques**, satisfaisant à la relation:

$$s(t) = s(t + k \cdot T) \quad (2.1)$$

$k$  : Entier.

Qui obéissent à un loi de répétition cyclique régulière de période  $T$ .

Dans la classe des signaux périodique, on trouve:

- **Les signaux sinusoïdaux**, (figure (2.4)), d'équation générale:

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + j) \quad (2.2)$$

Qui forment le groupe le plus familier des signaux périodiques;

- **Les signaux périodiques composites**, (figure (2.5)), d'équation générale:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot \sin(n\omega t) + b_n \cdot \cos(n\omega t)] \quad (2.3)$$

- **Les signaux pseudo-aléatoires**, (figure ( 2.6 )),

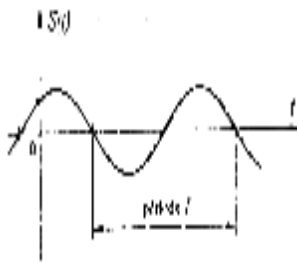


Figure (2.4)



Figure (2.5)

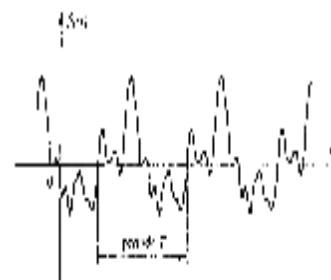


Figure (2.6)

\* **Les signaux aléatoires non-périodiques**, qui ne jouissent pas cette propriété.

Dans la deuxième classe, celle des signaux non-périodique, on trouve:

\* **Les signaux quasi-périodiques**, (figure (2.7)), d'équation générale:

$$s(t) = \sum \sin(\omega_i t + j) \quad (2.4)$$

Qui résultent d'une somme de sinusoides de périodes incommensurables.

\* **Les signaux transitoires**, (figure (2.8)), d'équation générale :

$$s(t) = e^{-at} \cdot \sin(\omega t) \quad (2.5)$$

Qui sont définis seulement sur un intervalle (signaux à support borné).

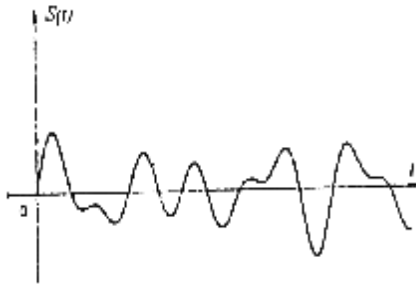


Figure (2.7)

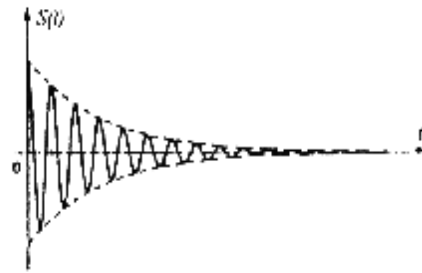


Figure (2.8)

### b- Signaux aléatoires

L'évolution en fonction du temps est imprévisible, donc ils ne peuvent être définis par un modèle mathématique sans faire appel à la statistique [20]. On les classe comme suit:

- **Les signaux aléatoires stationnaires**, dont les caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps (figure (2.9)).

Dans la classe des signaux aléatoires stationnaires, on trouve :

\* **Les signaux ergodiques**, où les valeurs moyennes statistiques, ou moments s'identifient aux valeurs moyennes temporelles.

\* **Les signaux non-ergodiques**, qui ne jouissent pas de cette propriété.

- **Les signaux aléatoires non-stationnaires**, qui ne jouissent pas de cette propriété

(Figure (2.10)).

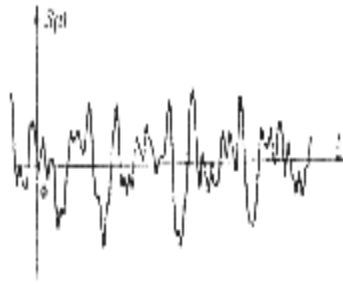


Figure (2.9)

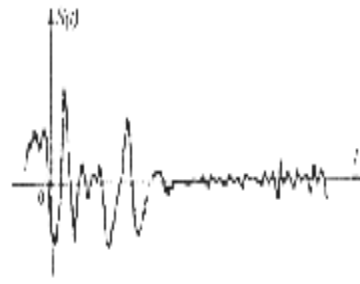


Figure (2.10)

**1.2.2- Classification spectrale (fréquentielle)**

L'analyse spectrale d'un signal conduit à une classification basée sur la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre) [20]. On distingue (Figure (2.11)):

- \* Les signaux de basses fréquences (a).
- \* Les signaux de hautes fréquences (b).
- \* Les signaux à band étroite (c).
- \* Les signaux à large bande (d)

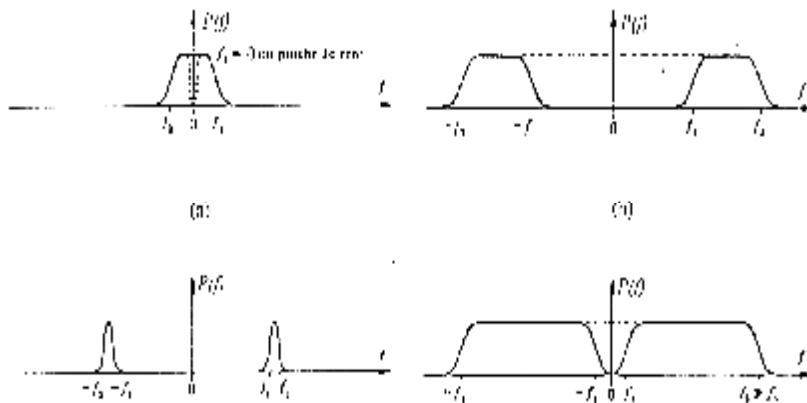


Figure (2.11)

## 2- PUISSANCE ET ENERGIE DES SIGNAUX

### 2.1- Puissance [26]

#### 2.1.1- Puissance instantannée

La puissance instantannée ( $P$ ) d'un signal  $s(t)$ , est le carré de la valeur de  $s(t)$  à instant  $t$ .

$$P(t) = [s(t)]^2 \quad (2.6)$$

#### 2.1.2- Puissance moyenne sur une durée T

La puissance moyenne  $P(t, T)$  d'un signal  $s(t)$  prise sur une durée T est défini par:

$$P(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [s(t)]^2 . dt \quad (2.7)$$

### 2.2- Energie

L'énergie d'un signal  $s(t)$  est l'intégrale de sa puissance dans tout le domaine d'existence du signal [27].

#### 2.2.1- Energie instantannée

Cette énergie a pour valeur:

$$E(t, \Delta t) = \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} |s(t)|^2 . dt \quad (2.8)$$

#### 2.2.2- Energie totale

L'énergie totale d'un signal est donnée par:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 . dt \quad (2.9)$$

### 3- OUTILS DE REPRESENTATION

Il n'existe pas d'outil de représentation unique mais plutôt des outils pertinents suivant leur formulation ou leurs propriétés. On décrira quelques uns, en partant des structures de non-stationnarités définies précédemment.

L'objectif consiste à localiser précisément les composantes fréquentielles et également à suivre leur contenu énergétique au cours du temps. De même on souhaite localiser au mieux dans le temps l'apparition d'évènements transitoires et estimer leur contenu spectral.

1- Pour les structures fréquentielles et dans la mesure où la situation est lentement variable, la représentation de Fourier à court terme (RFCT), encore appelée spectrogramme ou scalogramme pour la version énergétique, fournit un outil satisfaisant en pratique. Bien entendu, une bonne localisation spectrale est obtenue au détriment de la résolution temporelle (limitation classique en analyse spectrale par Fourier).

2- Dans le cas de structures temporelles les mêmes outils sont applicables sous réserve d'un réglage de la durée d'analyse élémentaire afin d'assurer une localisation temporelle maximale. Il en découle une perte quant à la résolution spectrale.

3- Le cas des structures conjointes est sans doute, naturellement plus complexe; on peut à la fois une bonne résolution temporelle et fréquentielle. Ceci conduit à un nécessaire compromis qui peut s'avérer insuffisant. Une amélioration passe alors par la mise en oeuvre d'autres techniques. Cette méthode est fondée sur le lissage d'une distribution bilinéaire en prenant soin de contrôler séparément les résolutions temporelles et fréquentielles. Ce lissage permet, entre autres choses, d'atténuer certains effets parasites (interférences entre structures), liée à la nature bilinéaire de la transformée. Il faut noter que le spectrogramme peut également être vu comme une version "lissée" de la distribution de Wigner-Ville mais sans qu'il y ait séparabilité en temps et en fréquence du lissage.

La seconde met en oeuvre une approche paramétrique dans laquelle le modèle à estimer sur le signal dépend explicitement du temps.

4- Pour les structures d'échelles, une approche multi-résolution semble tout à fait pertinente.

Le but est de fournir (à la résolution globale équivalente à celle du spectrogramme), une résolution non conforme dans le plan temps-fréquence (bonne résolution fréquentielle pour les basses fréquences et bonne localisation temporelle pour les hautes). C'est par la transformée en ondelettes continue. Le passage des fréquences aux échelles d'analyse vient

assurer, dans ce cas, par le caractère passe bande dans l'ondelette analysant. La structure d'une telle analyse est à rapprocher d'un banc de filters à coefficient de surtension constant ( $Q=Cte$ ). Tout comme pour le spectrogramme, il existe une version énergétique (scalogramme), de cette représentation. Il faut noter le choix délicate de l'ondelette  $y$  compris lorsque des bases orthogonales de décomposition sont mises en oeuvre.

#### 4- Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier appliquée à un signal quantifié peut être schématisée par une chaîne de traitement composée de plusieurs fonctions indispensables pour l'analyse spectrale du signal d'entrée. La transformée de Fourier rapide (ou filtre de Fourier), joue un rôle principal dans cette opération de filtrage, sans oublier les autres fonctions telles que l'échantillonnage et la quantification, les opération de fenêtrage et de lissage nécessaires au procédé de traitement. La figure (2.12) représente la chaîne de traitement comprenant toutes les fonctions nécessaires au calcul du spectre de puissance d'un signal stationnaire [31].

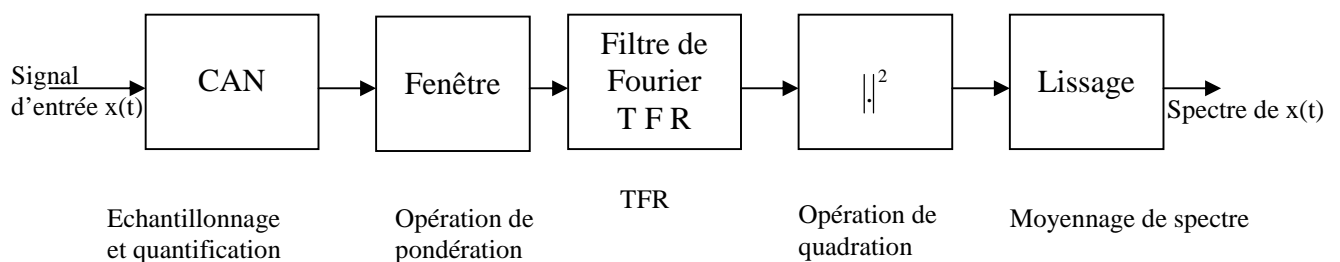


Figure (2.12): chaîne de traitement

**4.1- ECHANTILLONNAGE ET QUANTIFICATION**

**4.1.1- L'échantillonnage**

**- Principe d'échantillonnage**

Le principe de base d'un échantillonneur est réalisé à l'aide d'un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la cadence  $f_e = \frac{1}{T_e}$ , il s'agit d'un échantillonnage naturel (figure (2.13.b)) [23]. Le signal apparait en sortie quand l'interrupteur est fermé (position1).

Pendant  $t$  secondes et disparaît quand l'interrupteur est ouvert (position2) pendant le reste de la période  $T_e$ . De ce fait le signal échantillonné est une suite d'impulsions de très faible durée du signal d'entrée, figure (2.13.c)

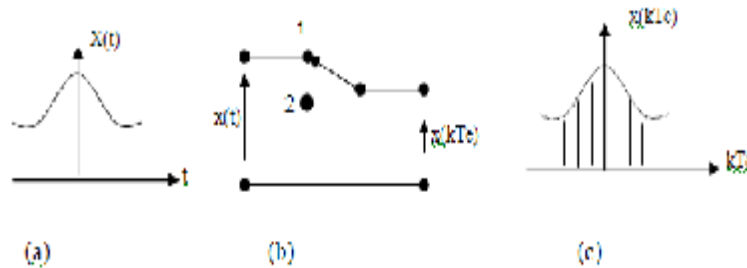


Figure (2.13)

Le signal échantillonné se réduit donc à une simple multiplication du signal analogique à échantillonner  $s(t)$ , par une fonction  $d(t)$ . (Dite : peine de Dirac),

figure (2.14) qu'est une suite d'impulsions rectangulaires d'amplitude unité, de durée  $t$  et de période  $T_e$ ,

Donc :  $s(kT) = s(t).d_T(t)$  .

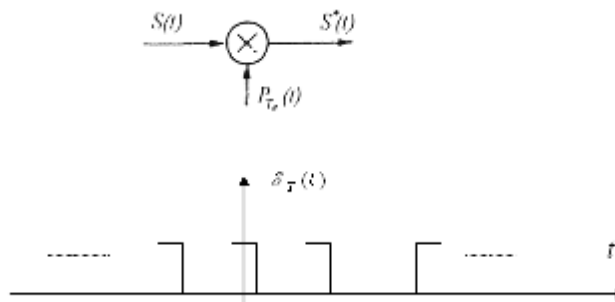


Figure (2.14)

IL existe d'autres types d'échantillonneurs tels que:

- Echantillonneur idéal.
- Echantillonneur à l'aide d'une impulsion de forme quelconque.
- Echantillonneur moyenneur.
- Echantillonneur avec maintien.

L'opération d'échantillonnage et son incidence sur le spectre du signal sont représentées sur la figure (2.15).

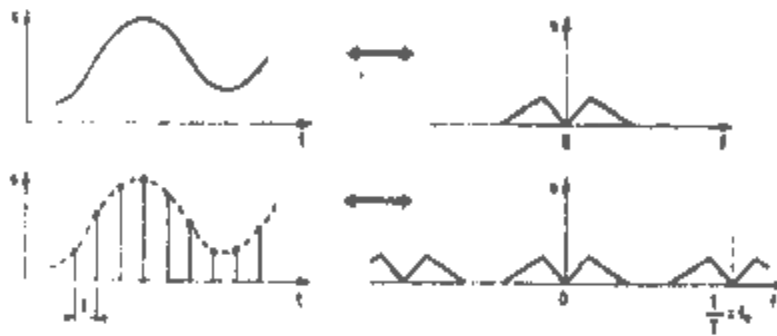


Figure (2.15)

### - Théorème de SHANNON [21,24]

*Enoncé du Théorème:*

Pour que la répétition périodique du spectre ne déforme pas le motif répété, il faut et il suffit que la fréquence de répétition ( $f_e$ ) qu'est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à ( $2.f_M$ ).

$f_M$  : est la fréquence maximale pouvant être lue sur le spectre, c'est-à-dire la composante harmonique à la plus grande fréquence contenue dans le signal temporel.

$$f_e \geq 2.f_M .$$

la figure(2.16) montre la déformation du motif répété (chevauchement du spectre périodisé) quand la fréquence ( $f_M$ ) est supérieure à  $\frac{1}{2}.f_e$ .

Ce chevauchement a lieu symétriquement autour de la fréquence ( $\frac{1}{2}.f_e$ ), appelée fréquence de Nyquist. Il est aussi appelée "repliement du spectre" autour de la fréquence de Nyquist, en littérature anglaise "Aliasing".

Sur la figure (2.17), on remarque l'absence du chevauchement, quand la fréquence ( $f_M$ ) est égale à  $(\frac{1}{2} \cdot f_e)$ , et même l'existence d'un temps mort dans le cas où ( $f_M$ ) est inférieure à  $(\frac{1}{2} \cdot f_e)$ .

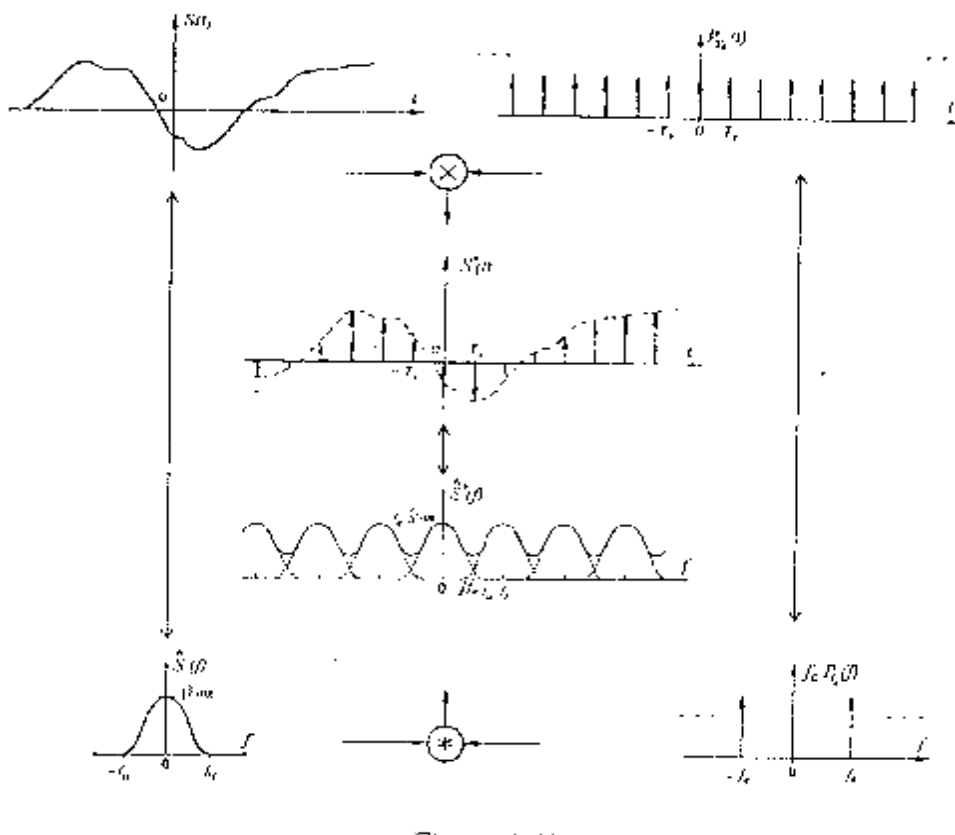


Figure (2.16)

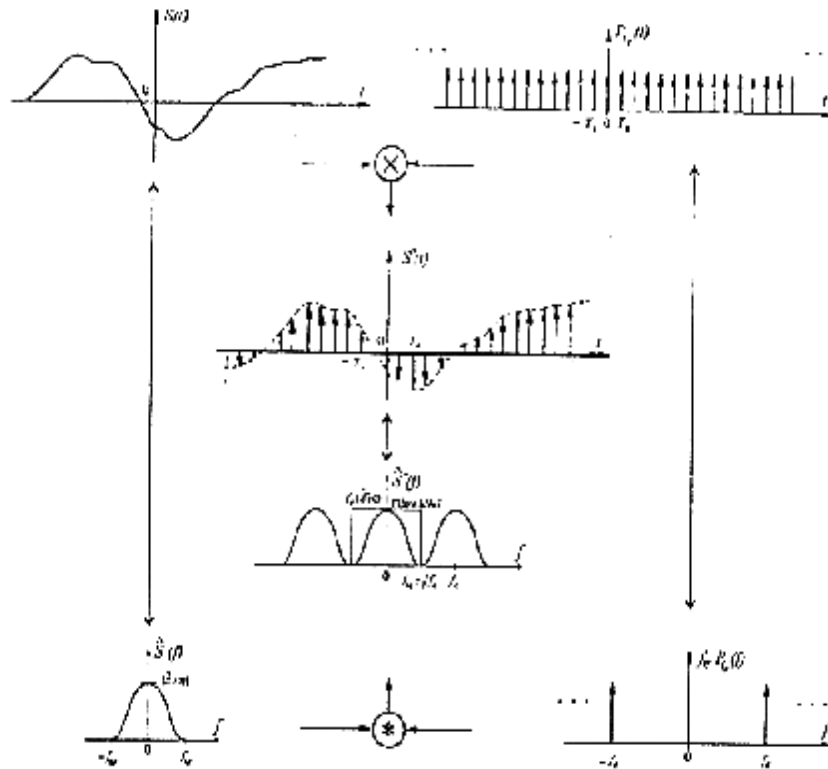


Figure (2.17)

#### 4.1.2- Quantification

La quantification est l'approximation de chaque valeur du signal  $s(t)$ . Par un multiple entier d'une quantité élémentaire  $q$ , appelée échelon de quantification. Si  $q$  est constant quelle que soit l'amplitude du signal, la quantification est dite uniforme [25].

Cette opération revient à faire passer le signal dans un organe qui possède une caractéristique en marche d'escalier, comme le montre la figure (2.18)

Pour:  $q = 1$ , et fournit le signal  $s_q(t)$ .

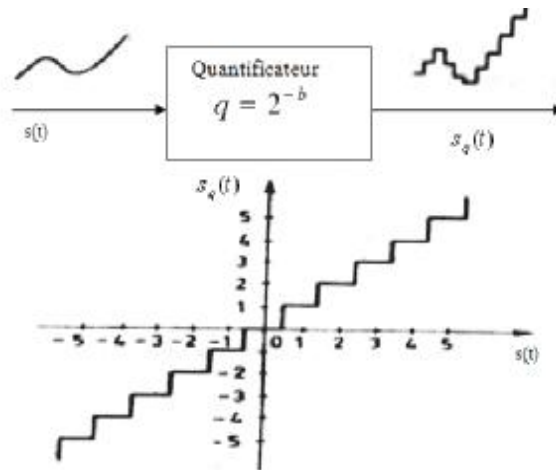


Figure (2.18)

IL existe deux types d'approximations :

- 1- Une approximation par arrondi (où toute valeur du signal comprise entre  $(n-1/2).q$  Et  $(n+1/2).q$  est arrondi  $n.q$ ).
- 2- Une approximation par défaut (opération de troncature), qui consiste à approcher par  $n.q$  tout valeurs comprises entre  $n.q$  et  $(n+1).q$
- 3- Le bruit  $e(t)$  est moins important dans la première approximation.

Quoi qu'il en soit, l'erreur introduite par la quantification dans le calcul d'un moment d'ordre 2 (tel que la densité spectrale de puissance) peut être négligée en pratique, si la résolution du convertisseur est importante.

### 4.1.3 Codage

IL existe diverses façons d'établir la correspondance entre l'ensemble des amplitudes quantifiées et l'ensemble des nombres binaires qui doivent les représenter. Les signaux à coder ayant des amplitudes en général positives et négatives, Les representation préférées sont celles qui conservent l'information de signe [25]. Les plus courantes pour les codages à échelon constant sont les suivantes:

- Signe et valeur absolue.
- Binaire décentré.

- Complément à 1.
- Complément à 2.

Les représentations en signe et valeur absolue et en binaire décentré sont les plus commodes pour la conversion Analogique/Numérique, Les deux autres sont sur tout utilisées dans les circuits de calcul numérique.

#### 4.2- La pondération

La limitation de la durée d'observation et de l'enregistrement imposé par un appareillage ou par un ordinateur sur le signal à traiter, entraîne une perte d'information contenue dans le signal  $s(t)$ , supposé défini sur un support infini, ce qui génère une perturbation dans le spectre de  $s(t)$  [21,24,28].

L'opération de pondération, en terme mathématique, s'exprime par le produit de la fonction qui modélise le signal par une fonction fenêtre représentative de la fenêtre d'observation.

Le fragment  $s_T(t)$  est en effet le résultat du produit du signal  $s(t)$  avec une fonction unité  $D_0(t)$  limité dans l'intervalle  $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ , appelée fenêtre naturelle cette fenêtre est à l'origine des perturbations introduit dans le spectre  $S_T(f)$ , qui représente le produit de convolution des transformations de Fourier de  $s(t)$ , et de  $D_0(t)$ .

$$\begin{aligned}
 s(t) &\leftrightarrow S(f) \\
 D_0(t) &\leftrightarrow Q_0(f) \\
 s_T(t) = s(t).D_0(t) &\leftrightarrow S_T(f) * Q_0(f)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Ce qui est contestable dans la fenêtre naturelle, ce sont les lobes latéraux positifs et surtout négatifs relativement amples qu'amènent des distorsions gênantes. Les inconvénients de cette fenêtre nous conduisons à déterminer une fonction de pondération  $D(t)$  dont la transformée de Fourier  $Q(f)$  serait plus avantageuses que celle d'une fenêtre naturelle.

Cette opération de pondération s'effectue avant tout calcul de transformée de Fourier rapide. Le choix d'une telle fenêtre est toujours conditionné par les critères suivants:

- La fenêtre temporelle  $D(t)$  qui détermine la pondération du signal  $s_T(t)$  doit être limitée à

l'intervalle de définition:  $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$

- La fenêtre spectrale correspondant  $Q(f)$ , doit être de largeur limitée afin d'éviter que sa convolution avec le spectre réel amène en une fréquence  $V_j$  les contributions des fréquences voisines.

Parmi les fenêtres de pondération usuelles, citons la fenêtre de: Hanning, Hamming, Blackman, Barlett, etc.... .

### - La fenêtre triangulaire (ou barlett)

Elle est définie par la fonction:

$$D_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 \cdot |t|}{T_0} & ; \text{pour } : |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ; \text{pour } : |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

La transformée de Fourier (figure (2.19)) est:

$$Q_1(f) = \frac{T_0}{2} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{p}{2} \cdot T_0 \cdot f\right)}{\frac{p}{2} \cdot T_0 \cdot f} \right]^2 \quad (2.12)$$

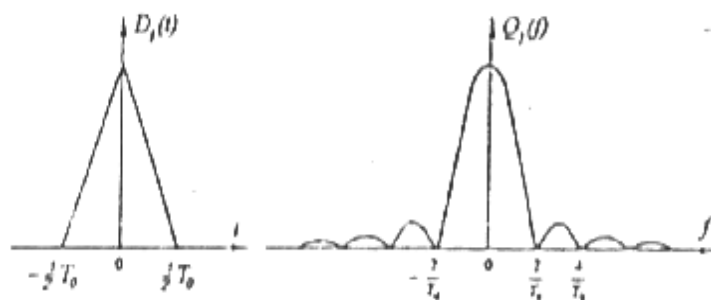


Figure (2.19)

### - Les fenêtres du modèle de Hamming

Ce modèle est défini par la fonction paramétrée (paramètre  $\infty$ ):

$$D_{Ham,\infty}(t) = \begin{cases} \infty + (1 - \infty) \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot p \cdot t}{T_0}\right] & ; \text{pour } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ; \text{pour } |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

Sa transformée de Fourier est :

$$Q_{Ham,\infty}(f) = T_0 \cdot \frac{\sin(p \cdot T_0 \cdot f)}{p \cdot T_0 \cdot f} \cdot \frac{(2 \cdot \infty - 1) T_0^2 \cdot f^2 - \infty}{T_0^2 \cdot f^2 - 1} \quad (2.14)$$

- lorsque  $\infty = 0.5$ , on obtient la fenêtre de **Hanning** (figure (2.20)), définie par:

$$D_2(t) = D_{Ham,\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \cos\left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{T_0}\right) \right] & ; \text{pour } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ; \text{pour } |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

sa transformée de Fourier est :

$$Q_2(f) = Q_{Ham,\frac{1}{2}}(f) = -\frac{T_0}{2} \cdot \frac{\sin(p \cdot T_0 \cdot f)}{p \cdot T_0 \cdot f} \cdot \frac{1}{T_0^2 \cdot f^2 - 1} \quad (2.16)$$

- Lorsque  $\infty = 0.54$ , on obtient la **fenêtre de Hamming** (figure(2.21)), définie par la fonction:

$$D_3(t) = D_{Ham,0.54}(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{T_0}\right) & ; \text{pour } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ; \text{pour } |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.17)$$

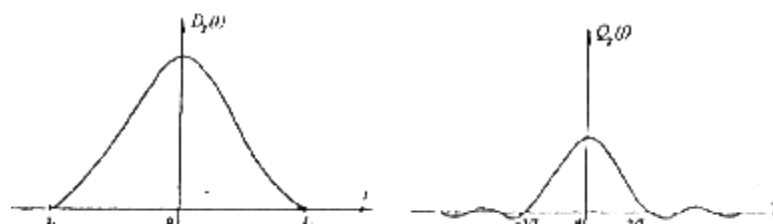


Figure (2.20)

Sa transformée de Fourier est :

$$Q_3(f) = Q_{Ham,0.54}(f) = T_0 \cdot \frac{\sin(p \cdot T_0 \cdot f)}{p \cdot T_0 \cdot f} \cdot \frac{0.54 - 0.08 \cdot T_0^2 \cdot f^2}{1 - T_0^2 \cdot f^2} \quad (2.18)$$

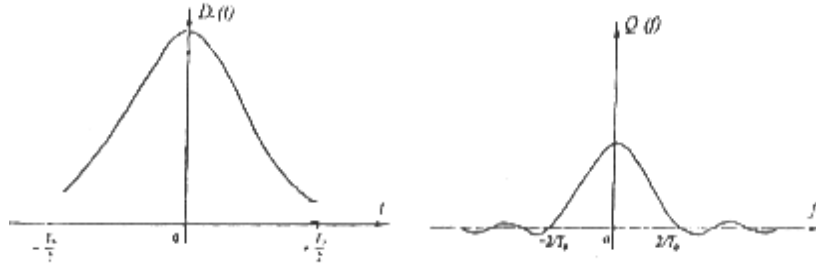


Figure (2.21)

**- la fenêtre de blackman**

Elle est définie par la fonction:

$$D_4(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{T_0}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot p \cdot t}{T_0}\right) & ; \text{pour } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ; \text{pour } |t| \geq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (2.19)$$

Sa transformée de Fourier (figure (2.22)) est :

$$Q_4(f) = T_0 \cdot \frac{\sin(p \cdot T_0 \cdot f)}{p \cdot T_0 \cdot f} \cdot \frac{1.68 - 0.18 T_0^2 \cdot f^2}{(1 - T_0^2 \cdot f^2) \cdot (4 - T_0^2 \cdot f^2)} \quad (2.20)$$

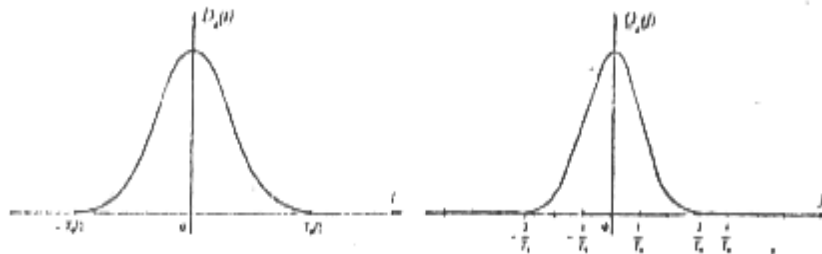


Figure (2.22)

**Remarque**

Les fenêtres d'analyses ou de pondération jouent un rôle très important dans l'analyse de Fourier. Une fenêtre est caractérisée par:

- La largeur de son lobe principal, elle fixe la résolution de l'analyse, c'est-à-dire l'aptitude à pouvoir séparer deux fréquences proches l'une de l'autre.
- Les amplitudes des lobes secondaires, ils fixent la dynamique de l'analyse, c'est-à-dire l'aptitude à mesurer les amplitudes très différentes de deux composantes de fréquence relativement éloignées l'une de l'autre.

**4.3- Transformation de Fourier**

On définit la Transformée de Fourier d'un signal par:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).e^{-j.2\pi.f.t} .dt \quad (2.21)$$

La fonction  $S(f)$  est périodique de période 1, et celle est généralement, une fonction complexe de la variable  $f$ .

La transformation inverse de Fourier est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f).e^{j.2\pi.f.t} .df \quad (2.22)$$

**Remarque**

Il y a deux difficultés associées à la relation précédente; la première est que  $f$  est une variable continue, on ne peut pas manipuler dans un système de traitement numérique. La deuxième est due au nombre infini d'échantillons du signal  $s(t)$ , qu'il est impossible de traiter pratiquement [29].

Les solutions à ces deux problèmes sont immédiates; Il faut remplacer la variable continue par variable discrète, et il faut limiter la durée du signal  $s_T(k)$

### 4.3.1- Transformation de Fourier Discrète (TFD)

La transformation de Fourier discrète s'introduit quand il s'agit de calculer la transformée de Fourier d'une fonction à l'aide d'un ordinateur numérique. En effet un tel opérateur ne peut traiter que des nombres et de plus en quantité limitée par la taille de sa mémoire [25]. Doit être adaptée, d'une part en remplaçant le signal  $s(t)$ , par des nombres  $s(nT)$ , qui représentent un échantillonnage de ce signal et d'autre part en limitant l'ensemble des nombres sur lesquels portent les calculs à une valeur finie  $N$ , le calcul fournit alors des nombres  $S^*(f)$  définis par:

$$S^*(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT).e^{-j.2\pi.f.n.T} \quad (2.23)$$

Comme le calculateur est limité dans sa puissance de calcul, il ne peut fournir ces résultats que pour un nombre limité de valeurs de la fréquence  $f$ ; qu'il est naturel de choisir multiples d'un certain pas de fréquence  $\Delta f$  alors:

$$S^*(k.\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT).e^{-j.2\pi.nk.\Delta f T} \quad (2.24)$$

Un choix simplificateur intéressant consiste à prendre:  $\Delta f = \frac{1}{NT}$ , on peut alors vérifier qu'il existe seulement  $N$  valeurs différentes dans la suite des  $S^*(k/NT)$  qu'est une suite périodique est de période  $N$  puisque:

$$S^*[(k.\Delta f)/NT] = S^*(k/NT) \quad (2.25)$$

La transformée de Fourier rapide et la transformée inverse établissent entre ces deux suites, les relations suivantes respectivement:

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j.2\pi.\frac{nk}{N}}$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k).e^{-j.2\pi.\frac{nk}{N}} \quad (2.26)$$

### 4.3.2-Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Plusieurs algorithmes existent, pour réduire le nombre de multiplications nécessaires au calcul de la transformée de Fourier discrète (DFT). On se limite à celui de COOLEY et TUKEY, qu'est le plus utilisé.

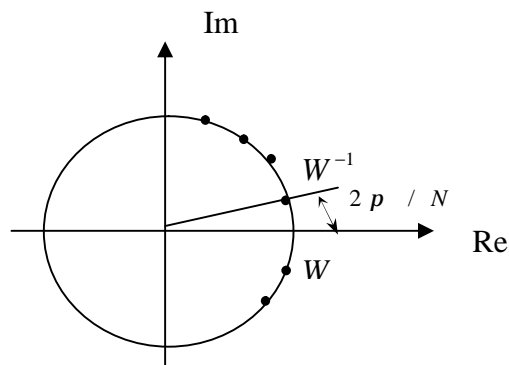
$$\begin{aligned}
 S(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n).e^{-j.2p.\frac{k.n}{N}} \quad k = 0,1,\dots,N-1 \\
 s(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} S(k).e^{j.2p.\frac{k.n}{N}} \quad n = 0,1,\dots,N-1
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Les équations de définition de la TFD fournissent une relation entre deux ensembles de  $N$  nombres complexes, qui s'écrit d'une manière commode sous une forme matricielle, en posant:

$$W_N^{nk} = e^{-j.2p.\frac{k.n}{N}}$$

Les affixes des nombres  $W^n$ , appelés coefficients de la TFD, se trouvent sur le cercle unité comme le montre la figure(2.23). Ce sont les racines de l'équation  $Z^N - 1 = 0$

Ou racines  $N$  ièmes de l'unité.



Figure(2.23): Affixes des coefficients de la TFD

Pour tout entier  $L$ , on a:

$$\begin{aligned}
 * W_N^{2N} &= e^{j.2p.L} = 1 \\
 * W_N^{\frac{N}{2}} &= e^{j.p} = -1 \\
 * W_N^{\frac{K+\frac{N}{2}}{2}} &= e^{j.2p.\frac{k}{N}} . e^{j.p} = -W_N^k \\
 * W_N^2 &= e^{2.j.\frac{2p}{N}} = e^{\frac{2.p}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

\* propriété d’orthonormalité:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} 1 & , \text{pour } k = l.N \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

L’équation matricielle est la suivante pour la transformée directe:

$$\begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & \dots & W^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & \dots & W^{(N-1).(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix}
 \tag{2.29}$$

Pour la transformée inverse, il suffit de retirer le scalaire  $\frac{1}{N}$ , et de changer  $W^n$  en  $W^{-n}$ . Quand la TFD est calculée à l’aide de tels algorithmes, on dit que l’on effectue une transformation de Fourier rapide (TFR) ;

Un cas très intéressant est celui où  $N$ , et une puissance de deux, car il conduit à des algorithmes peu complexes qui sont particulièrement efficaces. Ces algorithmes sont basés sur une décomposition de la suite à transformer en sous-suites entrelacées, dite TFR avec entrelacement temporel [25].

### \* FFT à entrelacement temporel

Plusieurs techniques de calcul existent. Nous nous proposons d'étudier et d'utiliser la technique FFT radix2 à entrelacement temporel [30].

La suite d'éléments  $s(n)$  peut être décomposée en deux suites entrelacées, celle des échantillons d'indice paire, et celle des échantillons d'indice impaire. Soit  $s_1(n) = s(2m)$ , les échantillons de la suite  $s(n)$  d'indice paire et soit  $s_2(n) = s(2m+1)$  les échantillons de la suite  $s(n)$  d'indice impaire.

Chacune des suites  $s(2m)$  et  $s(2m+1)$  comporte donc  $N/2$  éléments pour  $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ ; idem pour  $s_1(n)$  et  $s_2(n)$  avec  $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ . Sous l'hypothèse où le facteur de normalisation  $1/N$  est laissé de côté, la relation:

$$S(k) = \frac{1}{N} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n).W_N^{nk} \quad \text{Pour } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.30)$$

Devient :

$$S(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} s(2m).W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} s(2m+1).W_N^{(2m+2).k} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

La propriété  $W_N^{2m} = e^{-j.2p.\frac{2m}{N}} = e^{-j.2p.\frac{m}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}^m$

permet d'écrire l'équation (2.32) sous la forme:

$$S(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} s(2m).W_{\frac{N}{2}}^{mk} + W_N^k \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} s(2m+1).W_{\frac{N}{2}}^{mk} \quad \text{pour: } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.32)$$

En substituant respectivement  $s_1(n)$  et  $s_2(n)$  à  $s(2m)$  et  $s(2m+1)$  et en sommant par rapport à  $n$  les éléments  $W_{\frac{N}{2}}^{mk}$  restent inchangés par rapport à ce nouveau intervalle de

sommation. Ainsi, l'équation (2.32) devient :

$$S(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} s_1(n).W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} s_2(n).W_{\frac{N}{2}}^{nk}; \quad \text{Pour } : k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.33)$$

Chacune des sommes dans l'expression (2.33) est une DFT d'ordre  $N/2$ . La première somme est une DFT des échantillons d'indice paire et la deuxième somme est la DFT des échantillons d'indice impaire. On peut donc écrire:

$$S(k) = S_1(k) + W_N^k \cdot S_2(k) \quad \text{Pour } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.34)$$

La relation (2.34) montre que le calcul d'une DFT d'ordre  $N$  revient au calcul de deux DFT d'ordre  $N/2$  chacune.

Pour déterminer les éléments  $S(k)$  d'indice supérieur ou égal à  $N/2$ , on exploite la périodicité des suites  $S_1(k)$  et  $S_2(k)$  :

$$S\left(k + \frac{N}{2}\right) = S_1(k) + W_N^{k + \frac{N}{2}} \cdot S_2(k) = S_1(k) - W_N^k \cdot S_2(k) \quad (2.35)$$

$$\text{où: } W_N^{k + \frac{N}{2}} = e^{-j \cdot 2\pi \frac{k + N/2}{N}} = -e^{-j \cdot 2\pi \cdot k/N} = -W_N^k$$

En résumé, les échantillons  $S(k)$  sont déterminés par la paire d'équations suivante:

$$\begin{aligned} S(k) &= S_1(k) + W_N^k \cdot S_2(k) \\ S\left(k + \frac{N}{2}\right) &= S_1(k) - W_N^k \cdot S_2(k) \end{aligned} \quad (2.36)$$

### \* Illustration du mécanisme de la FFT

Ce processus de décomposition est répété jusqu'à ce que des DFT d'ordre 2 sont engendrés. Chacune des DFT d'ordre  $N/2$  est composée en deux DFT d'ordre  $N/4$ . Les échantillons intervenant dans le calcul de chaque DFT d'ordre  $N/2$  sont de nouveau groupés en deux suites de  $N/4$  valeurs. La première suite sera formée par les échantillons d'indice paire et la deuxième suite sera formée par les échantillons d'indice impaire [30].

Soit  $s_{11}(n) = s_1(2m)$  les échantillons de la suite  $s_1(n)$  d'indice paire, et soit  $s_{12}(n) = s_1(2m+1)$  les échantillons de la suite  $s_1(n)$  d'indice impaire.

Chacune des suites  $s_1(2m)$  et  $s_1(2m+1)$  les échantillons pour  $m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$  ; idem pour  $s_{11}(n)$  et  $s_{12}(n)$  avec  $m = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{4} - 1\right)$  ; pour la suite  $x_1(n)$ , on a donc:

$$\begin{aligned}
 S_1(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s_1(n).W_{\frac{N}{2}}^{nk} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m).W_{\frac{N}{2}}^{2mk} + W_{\frac{N}{2}}^k \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m+1).W_{\frac{N}{2}}^{2mk} \\
 &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m).W_{\frac{N}{4}}^{mk} + W_{\frac{N}{2}}^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m+1).W_{\frac{N}{4}}^{mk}
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Avec :  $W_{\frac{N}{2}}^{2m} = W_{\frac{N}{4}}^{mk}$

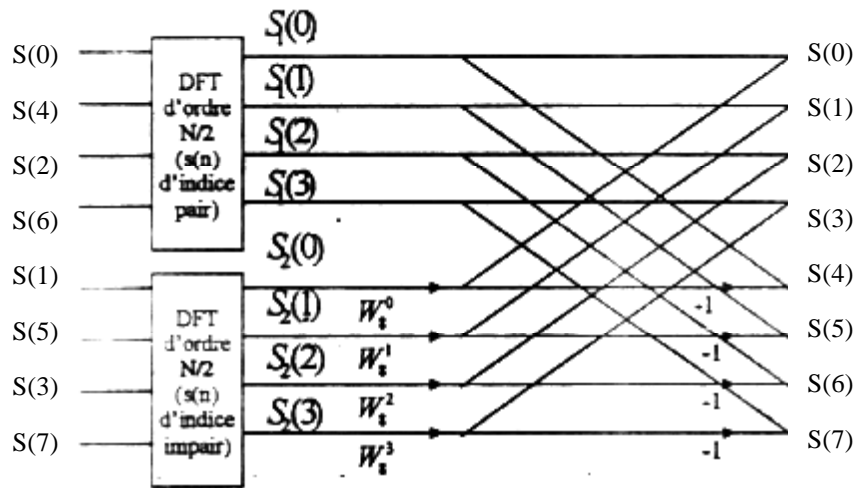


Figure (2.24):diagramme de fluence de la première décomposition de la FFT d’une suite de 8 valeurs.

En substituant respectivement  $s_{11}(n)$  et  $s_{12}(n)$  à  $s_1(2m)$  et  $s_2(2m+1)$  , et en sommant par rapport à  $N$  , on obtient:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} s_{11}(n).W_{\frac{N}{4}}^{2k} + W_{\frac{N}{2}}^{2k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} s_{12}(n).W_{\frac{N}{4}}^{nk} \quad : k = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1;
 \tag{2.38}$$

Avec :  $W_{\frac{N}{2}}^k = W_{\frac{N}{4}}^{2k}$  .

Les calculs intervenant dans la première opération papillon résultante sont donnés par:

$$\begin{aligned}
 S_1(k) &= S_{11}(k) + W_N^{2k} \cdot S_{12}(k) \\
 S_1(k + \frac{N}{4}) &= S_{11}(k) - W_N^{2k} \cdot S_{12}(k)
 \end{aligned}
 \quad : k = 0,1,\dots,\frac{N}{4}-1
 \tag{2.39}$$

En faisant la même décomposition sur la suite  $s_2(n)$ ; ( $s_{21}(n) = s_2(2m)$  et  $s_{22}(n) = s_2(2m+1)$ ); la seconde opération papillon permet les calculs:

$$\begin{aligned}
 S_2(k) &= S_{21}(k) + W_N^{2k} \cdot S_{22}(k) \\
 S_2(k + \frac{N}{4}) &= S_{21}(k) - W_N^{2k} \cdot S_{22}(k)
 \end{aligned}
 \quad : k = 0,1,\dots,\frac{N}{4}-1
 \tag{2.40}$$

Le résultat de cette seconde décomposition de deux DFT d'ordre  $N/2$ , est représenté à la figure (2.25) pour  $N=8$ . Dans cette seconde décomposition, chaque paire de noeuds duaux est séparée par une distance de  $N/4$ .

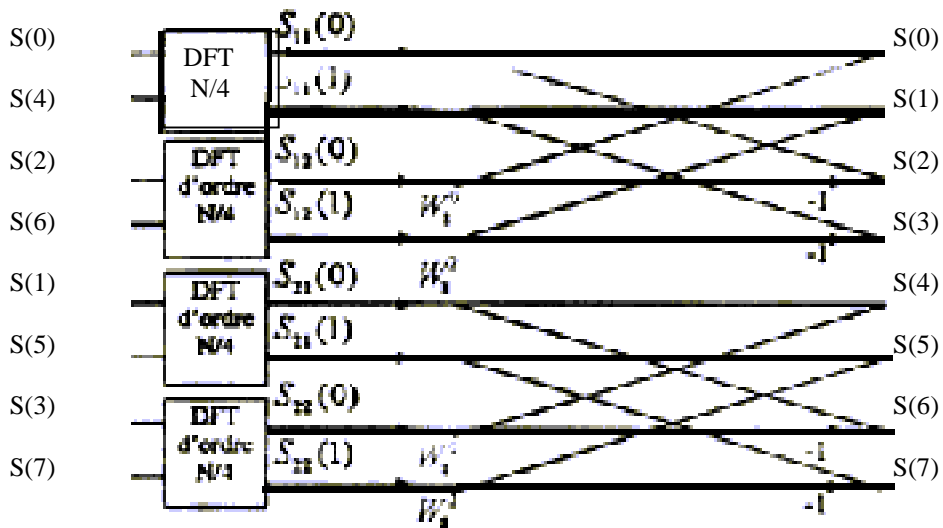


Figure (2.25): diagramme de flux de la seconde décomposition de la FFT d'une suite de 8 valeurs.

Dans cette deuxième décomposition, le calcul est réduit à des DFT d'ordre 2. En considérant par exemple  $s_{11}(0)$  et  $s_{11}(1)$ , le premier terme du second membre de l'équation (2.61) donne:

$$S_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} s_{11}(n) \cdot W_{\frac{N}{4}}^{nk} = \sum_{n=0}^1 s_{11}(n) \cdot W_{\frac{N}{4}}^{nk}
 \tag{2.41}$$

$$S_{11}(0) = ss_{11}(0) + s_{11}(1).W_2^1 = s_{11}(0) + s_{11}(1) = s(0) + s(4)$$

$$S_{11}(1) = ss_{11}(0) + s_{11}(1).W_2^1 = s_{11}(0) - s_{11}(1) = s(0) - s(1)$$

Le diagramme de fluence à l'une des DFT d'ordre2 est représenté sur la figure(2.26).  
Chaque décomposition est appelée étape intermédiaire.

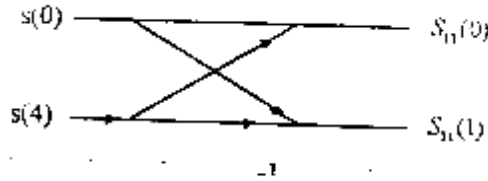


Figure (2.26): Diagramme de fluence de DFT

Si l'ordre de la DFT est une puissance de 2 :  $N = 2^M$  , le nombre d'étapes intermédiaires est donné par:

$$M = \log_2 N .$$

le diagramme de fluence d'une FFT d'ordre 8 avec entrelacement temporel. Ce diagramme est représenté à la figure (2.27).

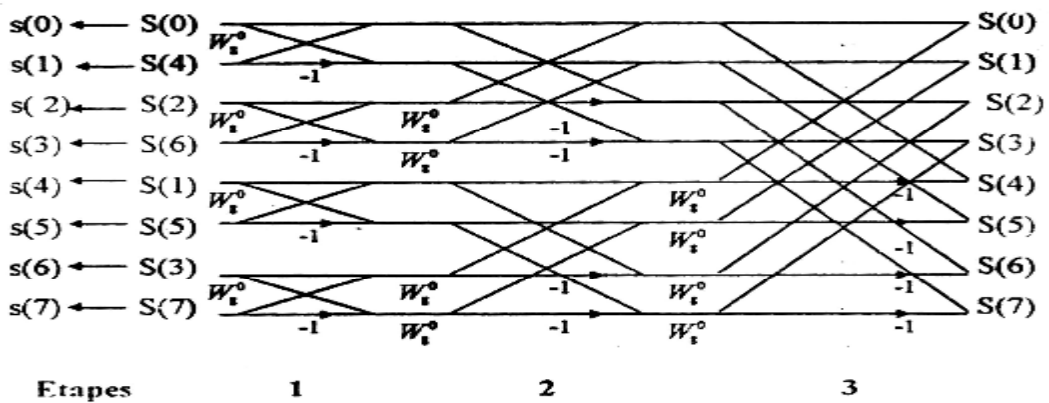


Figure (2.27) : FFT d'ordre 2 avec entrelacement temporel pour N = 8

### \* Le papillon

L'ensemble des calculs intervenant dans l'équation (2.36) peut être représenté par le diagramme de fluence de la figure (2.28.b). Cette structure de base est appelée une opération papillon "croisillon". Les deux noeuds à gauche représentent les échantillons  $S_1(k)$  et  $S_2(k)$  et les deux noeuds à droite (noeuds puits) sont sollicités par les deux précédents (noeuds sources). A travers deux branches est munie d'un coefficient multiplicatif, l'absence de ce coefficient signifie que sa valeur est égale à l'unité. Comme ce diagramme de fluence découle directement de la relation (2.36), le calcul intervenant dans une opération papillon exige deux multiplications complexes et deux additions complexes. Il faut remarquer que le produit  $W_N^k \cdot S_2(k)$  est calculé deux fois. Ce diagramme de fluence est modifié afin d'éviter ceci pour donner la structure (2.28.a), cette nouvelle forme nécessite uniquement une multiplication complexe et une addition complexe de moitié [30].

Dans cette première décomposition d'une DFT d'ordre  $N$  en deux DFT d'ordre  $N/2$  chacune, les deux noeuds  $S(k)$  et  $S(k+N/2)$  sont séparés par une distance de  $N/2$ . Il s'agit de deux noeuds duaux sollicités par la même paire de noeuds sources.

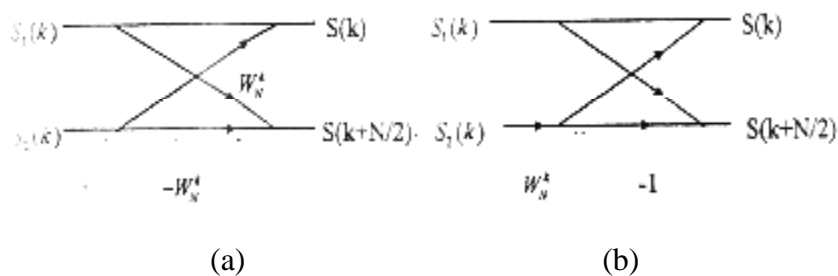


Figure (2.28)

### \* Inversion binaire des indices [30]

En comparant l'ordre des indices des valeurs d'entrée et de sortie du diagramme de fluence de la FFT d'ordre 2 avec entrelacement temporel, on remarque que les indices d'entrées sont désordonnés et ceux du signal de sortie apparaissent dans un ordre naturel. Ce désordre est dû aux entrelacements successifs et se traduit par une inversion de la représentation binaire des indices. La technique d'inversion binaire consiste à écrire l'indice  $n$  d'un échantillon  $s(n)$  quelconque sous forme binaire. Les bits de ce mot binaire ainsi obtenu sont inversés. Chacun de ces bits peut prendre la valeur '0' ou la valeur '1'. On peut écrire l'indice  $n$  sous une forme binaire à  $L$  bits de la manière suivante:

$$n = \sum_{i=0}^{L-1} b_i \cdot 2^i \quad (2.42)$$

Le mot binaire correspondant est:

$$b_{L-1}b_{L-2}\dots\dots\dots b_2b_1b_0$$

L'inversion des bits de ce mot binaire donne:

$$b_0b_1b_2\dots\dots\dots b_{L-2}b_{L-1} .$$

Le passage de l'ordre naturel à l'ordre des bits inversés est représenté à la figure (2.29) pour  $N = 8$  :

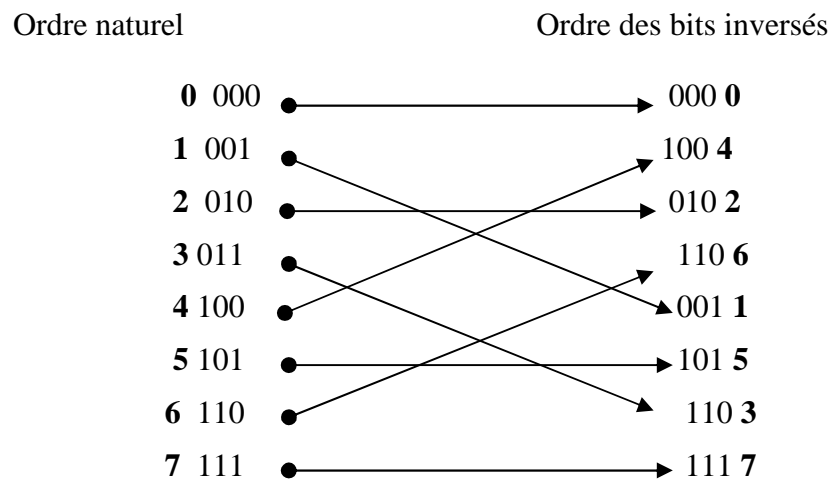


Figure (2.29): passage de l'ordre naturel à l'ordre des bits inversés

L'inversion des bits est une opération primordiale dans le calcul d'une FFT qui peut consommer jusqu'à 50% du temps de calcul global.

- **Les caractéristiques d'une FFT avec entrelacement temporel**

Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques d'une FFT avec entrelacement temporel en base 2 :

Etages	Etage 1	Etage 2	Etage 3	Etage log N
Nombre de Groupes	N/2	N/4	N/8	1
Papillons/ Groupe	1	2	4	N/2
Espace dual	1	2	4	N/2
Facteur De rotation	(N/2).k k=0;	(N/4).k k=0,1;	(N/8).k k=0,1,2;	K, k=0,...,(N/2)-1;

Tableau (2.1) : Caractéristiques d'une FFT

Cet algorithme permet de réaliser la TFD au moyen de  $N \cdot \log_2 N$  multiplications au lieu de  $N^2$  ;

D'où: un gain de temps de l'ordre de  $N / \log_2 N = 2^p / p$

Si:  $N = 1024$  ,  $p = 10$  , le gain est de  $1024/10 \approx 102$  ;

### 4.3.3 Comparaison DFT - FFT

La différence fondamentale entre la DFT et la FFT réside dans la méthode de calcul des éléments de la suite  $S(k)$  . La DFT calcule directement ces éléments de la relation (2.29). Si  $N$  est une puissance de 2 :  $N = 2^M$  , la FFT est simplement une méthode de décomposition d'une DFT d'ordre  $N$  en deux DFT, d'ordre  $N/2$  chacune.

Ce processus de décomposition est répété jusqu'à ce que des DFT d'ordre 2 sont engendrés. Ces étapes ont pour but de réduire le nombre de multiplications, additions complexes. Puisque le nombre d'étapes intermédiaires est égale à  $M = \log_2 N$  et comme chacune de ces étapes comporte  $N/2$  multiplications complexes et  $N$  additions complexes, la FFT nécessite donc un nombre de multiplications complexes:

$$M_c = \frac{N}{2} \cdot \log_2 N .$$

Et un nombre d'additions complexes:

$$A_c = N \cdot \log_2 N .$$

Le nombre de multiplications peut être encore réduit du fait que pour certaines valeurs de  $n$  et  $k$ ,  $W_N^{nk}$  est égale à  $\pm 1$  ou  $\pm j$ . Si nous considérons que le temps de calcul est proportionnel au nombre de multiplications complexes, alors le rapport du nombre de multiplications complexes nécessaire pour le calcul direct par celui nécessaire pour le calcul indirect donne le gain en temps de calcul:

$$G = \frac{2 \cdot N}{\log_2 N} .$$

Pour:  $N = 1024$  ; La FFT permet de réduire le temps de calcul de 295 fois.

#### 4.3.4 Les limites de la transformée de Fourier à court terme

Cette approche n'est pourtant pas pleinement satisfaisante pour plusieurs raisons :

- premièrement se pose le problème du choix de la fenêtre utilisée et plus précisément du choix de sa largeur temporelle ;
- deuxièmes pour une taille de fenêtre fixée (Figure 2.30), on remarque alors que pour des fréquences, hautes ou basses, la résolution obtenue n'est pas optimale :

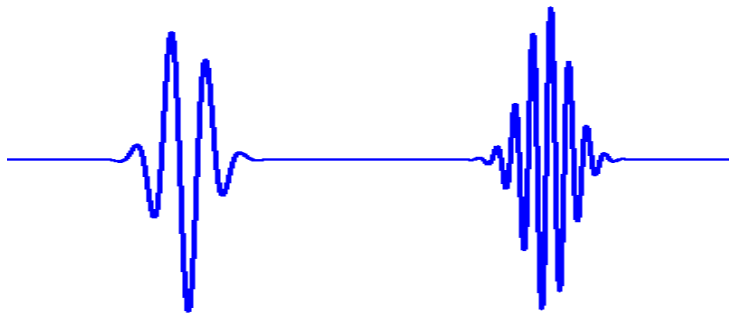


Figure (2.30) : Fenêtre de la transformée de Fourier à court terme  
Pour deux fréquences différentes

Une exponentielle complexe basse fréquence modulée par une fenêtre suffisamment large  $g(s-t)$  permettra l'analyse de basse fréquence dans le signal.

En revanche, une exponentielle haute fréquence modulée par cette même fenêtre ne permettra pas une bonne localisation temporelle de cette fréquence. On aurait le même

problème avec une fenêtre courte : bonne localisation en hautes fréquences, mais mauvaise analyse des basses fréquences.

## **CONCLUSION**

Dans ce chapitre, on a évoqué essentiellement des généralités et définitions fondamentales en traitement du signal. La classification des signaux vibratoires du point de vue phénoménologique a été soulignée. L'analyse spectrale à base de FFT a été particulièrement présentée. Ses performances relatives à la DFT n'ont pas toujours empêché la réduction du temps de calcul nécessaire à son exécution. La transformée de Fourier à court terme (à fenêtre glissante) en tant que technique de traitement du signal a été décrite. Faut-il souligner que cette technique nécessite l'utilisation d'une fenêtre temporelle, donc se pose le problème de choix de fenêtre et plus précisément le choix de sa longueur temporelle (la taille de la fenêtre est fixée), qui influe sur la résolution. Pour résoudre ce problème, une autre méthode qui est la transformée en ondelette qui utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps-fréquence lui donne beaucoup d'avantages. Cette méthode ainsi que ses caractéristiques et propriétés sont illustrées dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE 3

# LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

### INTRODUCTION

Ce chapitre est destiné à nous familiariser avec l'analyse par ondelette. Nous commençons par une définition d'une ondelette, leurs propriétés, la notion de multirésolution, les notions d'espace, fréquence, échelle, résolution et période. Après avoir établi des représentations « espace - fréquence » et « espace - échelle ». Nous poursuivons par le formalisme des ondelettes continues, et discrètes, nous introduisons les propriétés de la transformée en ondelettes ainsi leurs avantages.

### 1. HISTORIQUE SUR L'ANALYSE DES ONDELETTES

D'un point de vue historique, l'analyse des ondelettes est une nouvelle méthode, bien que ses sous-œuvre remontent au travail de Joseph Fourier au dix-neuvième siècle. Fourier a créé les bases avec ses théories d'analyse fréquentielle, qui se sont avérées énormément importantes et influentes.

L'attention des chercheurs a graduellement tourné de l'analyse fréquentielle à l'analyse à base d'échelle lorsqu'il est apparu clairement que les fluctuations moyennes de mesure d'une approche à différentes échelles pourraient s'avérer moins sensible au bruit.

La première appellation du terme "ondelette" était en 1909, dans une thèse par Alfred Haar.

Le concept des ondelettes dans sa présente forme théorique était premièrement proposé par Jean Morlet et l'équipe au Centre de la Physique Théorique de Marseille sous les travaux d'Alex Grossmann en France.

Les méthodes d'analyse des ondelettes ont été développées principalement par Y. Meyer et ses collègues, qui ont assuré la diffusion des méthodes. La date du principal algorithme remonte au travail de Stéphane Mallât en 1988. Ensuite, la recherche sur les ondelettes est devenue internationale. Une telle recherche est en particulier active aux Etats-Unis, où elle est lancée par le travail des scientifiques comme Ingrid Daubechies, Ronald Coifman, et Victor Wickerhauser.

Partout autour de nous sont les signaux qui doivent être analysés. Tremblements séismiques, discours humains, vibrations de moteur, données financières, musique, et

beaucoup d'autres types de signaux doivent être efficacement encodés, comprimés, nettoyés, reconstruits, décrits, simplifiés, modélisés, distingués, ou situés.

L'analyse des ondelettes est un nouvel ensemble d'outils et de techniques pour faire ceci.

## 2. DEFINITION ET PROPRIETES DES ONDELETTES

### 2.1 Définitions des ondelettes

Les ondelettes sont des fenêtres  $\Psi(x)$  qui se dilatent et se contractent et qui sont bien localisées dans les domaines spatial (ou temporel) et fréquentiel. Partant d'une telle fonction  $\Psi(x)$  que l'on appelle ondelette «mère» possédant une certaine largeur de fenêtre, on lui associe la famille d'ondelettes «filles»  $\Psi_{(a,b)}(x)$  engendrée par des translations et des changements d'échelle (dilatations ou compressions)[32]. Cette famille est de la forme suivante:

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (3.1)$$

où « a » est le paramètre d'échelle ou de résolution et « b » le paramètre de translation. Comme « a » est souvent positif, l'expression se simplifie par

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (3.2)$$

$\Psi(x)$  Peut aussi être appelée ondelette analysante ou atome.

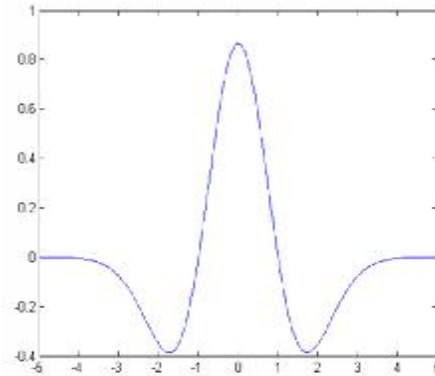
Une ondelette est une fonction élémentaire très particulière à valeurs réelles ou complexes, très concentrée à la fois en temps et en fréquence et vérifie les conditions initiales:

$$\begin{aligned} |t|^{\frac{1}{2}+e} \Psi &\in L^2 \\ |f|^e \hat{\Psi} &\in L^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

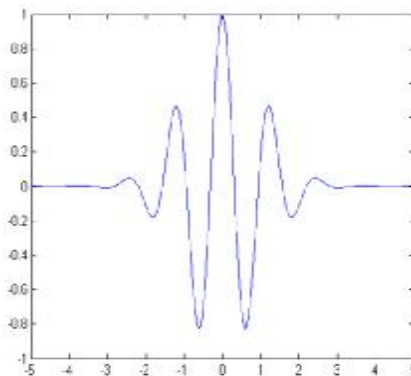
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \text{ avec } e > 0$$

Où  $\hat{\Psi}$  est la transformée de Fourier de  $\Psi$

- l'ondelette chapeau Mexicain:  $\Psi(t) = \cos \cos(5t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$  (3.4)

Figure (3.1) : Ondelette *Chapeau Mexicain*

- l'ondelette de Morlet:  $\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} p^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$  (3.5)

Figure (3.2) : Ondelette de *Morlet*

## 2.2 Propriétés des ondelettes

- Toute fonction oscillante d'énergie finie et de moyenne nulle

$$y(w) \int_{-\infty}^{+\infty} j(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} j(t) dt = 0 \quad (3.6)$$

est une ondelette possible.  $\Psi$  est la TF de l'ondelette  $\phi$  [37].

- La condition nécessaire pour que  $\phi$  puisse être utilisée comme une ondelette analysante est qu'elle vérifie la condition d'admissibilité [32]:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.7)$$

- L'ondelette est une fonction de carrée intégrable appartenant à  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty \quad (3.8)$$

## 3. LA MULTIRÉSOLUTION

Une multirésolution analyse le signal à haute fréquences, pour en prélever les détails, ensuite elle analyse le signal à une résolution deux fois moins fine, et elle réitère l'opération en grossissant son échelle d'un facteur deux, sans se préoccuper des échelles intermédiaires, jusqu'à obtenir une description complète du signal ; on parle alors d'une étude multirésolution du signal, d'où l'appellation de cet algorithme. En général, la description du signal à cinq échelles différentes est suffisante pour décrire ce signal. La méthode est en accord avec le théorème d'échantillonnage : chaque fois qu'on double la fréquence, on double le nombre d'ondelettes qui échantillonnent le signal [33].

• Il permet d'obtenir une décomposition temps fréquences d'un signal ;

• Là où la FFT nécessite  $N \log_{10} N$  calculs, la multirésolution en nécessite  $2N$  !

D'un point de vue pratique, cette méthode nécessite deux fonctions en plus du signal analysé. Une fonction appelée fonction d'échelle et une ondelette associée à cette fonction d'échelle.

#### 4. ESPACE, FREQUENCE, ECHELLE, RESOLUTION ET PERIODE

Dans le contexte des analyses spectrales, telles que la Transformée de Fourier, ou des analyses « espace-fréquence » et « espace-échelle », introduites un peu plus loin, de nombreux abus de langage conduisent souvent à confondre –sans gravité– les notions d'espace, de fréquence, d'échelle, de résolution et de période.

##### 4.1 ESPACE

Les outils du traitement du signal peuvent s'appliquer à des signaux de dimensions diverses. Le cas le plus simple est évidemment celui des données mono- dimensionnelles telles que des séries temporelles. Dans ce cas, l'*espace* de travail est le temps ou la profondeur. En dimension supérieure, l'espace est alors l'espace géométrique de la dimension considérée. « *Espace* » est donc un terme général pouvant être le temps ou un espace géométrique de dimension donnée. Dans cette première partie concernant, concernant les applications 2D, l'espace,  $x$ , sera le plan cartésien défini par  $(xx, xy)$ .

##### 4.2 FREQUENCE, ECHELLE, RESOLUTION ET PERIODE

La *fréquence*, est un attribut physique d'un processus ou d'un signal. qui est une quantité physique bien définie et mesuré en cycles par seconde (ou un équivalent), différentes notions d'échelle existent selon le contexte.

Comme l'expliquent Bloshl et Sivapalan (1995) dans le contexte des applications géophysiques, l'*échelle* peut être vue selon deux manières : «l'échelle du processus » et «l'échelle d'observation ». L'échelle du processus est l'échelle à laquelle le phénomène naturel existe et qui n'est donc pas sous notre contrôle. Typiquement, elle est caractérisée en termes de (1) durée de vie, (2) période, ou (3) longueur de corrélation du processus. L'échelle d'observation dépend, quant à elle, de la façon dont on décide de mesurer le phénomène. Ainsi, l'échelle d'observation est définie en termes (1) d'extension temporelle ou spatiale, et (2) de distance entre points d'échantillonnage. L'extension temporelle ou spatiale fixe le champ d'observation; la distance entre les points d'échantillonnage représente la résolution du signal.

Lors d'une étude multi-échelle par ondelettes, le terme "*résolution*" est malencontreusement aussi utilisé pour préciser l'échelle à laquelle est faite l'analyse. Ainsi suivant les auteurs, les termes échelle, facteur d'échelle et résolution seront synonymes.

Plus l'échelle augmentera, plus la portion du signal analysé localement par l'ondelette sera grande et plus les détails seront lissés.

La *période* (inverse de la fréquence) est la période de Fourier correspondant aux oscillations de l'ondelette. Quelle que soit l'ondelette, il existe une relation un-pour-un entre échelle et période. Cette relation peut être déduite en calculant la TO d'une sinusoïde pure de fréquence (de Fourier) connue et en cherchant pour quelle échelle le spectre d'ondelette atteint son maximum.

### 4.3 REPRESENTATIONS « ESPACE-FREQUENCE » ET « ESPACE-ECHELLE »

A une telle fonction, on associe un pavé espace-fréquence, c'est-à-dire un rectangle dans le plan  $(x, f)$  centré. Ce pavé est une représentation intuitive de la couverture en espace et en fréquence d'une fonction. On associe également à une base un pavage du plan espace-fréquence, qui est un recouvrement du plan  $(x, f)$  par des rectangles de couverture des fonctions de base. Si le centre des boîtes de Gabor est fixé comme le point des centres spatial et fréquentiel de la fonction, leurs dimensions sont en général choisies de telle manière que les boîtes forment une partition du plan espace fréquence. Cette représentation a un aspect arbitraire, d'autant qu'aucun résultat ne lie le fait qu'une famille soit une base au fait que les pavés espace-fréquence de la famille recouvrent le plan.

Le pavage espace-fréquence correspondant par exemple aux bases de fonctions de Dirac et de fonctions de Fourier est des pavages par des rectangles infiniment fins et allongés qui sont représentés schématiquement dans la figure (3.3).

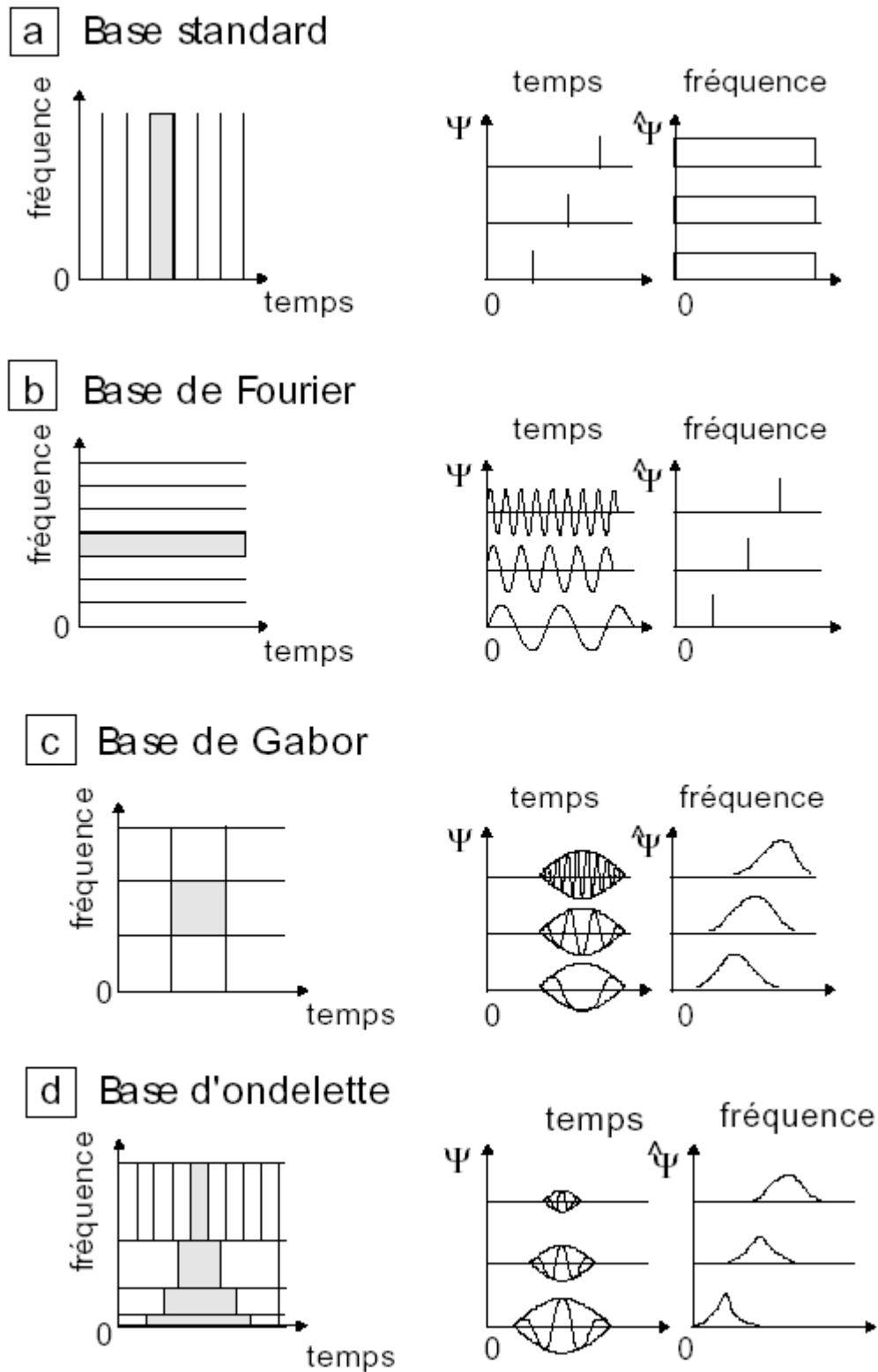


Figure (3.3) : Fenêtres temps-fréquence utilisées dans (a) l'analyse temporelle (base standard), (b) l'analyse de Fourier, (c) l'analyse de Gabor et (d) l'analyse par ondelette et leur série temporelle correspondante dans les espaces temporel et fréquentiel.

## 5. LA TRANSFORMEE D'ONDELETTE

Un Ondelette mère  $\Psi$  est une fonction  $f$  de base que l'on va translater et dilater pour couvrir le plan temps fréquences et analyser le signal [34]. On peut définir la transformée en Ondelette d'un signal  $f(t)$  comme une projection sur la base des fonctions

$$\text{Ondelette } \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$TO(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad \text{Avec } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (3.9)$$

Dans cette expression,  $a$  est le facteur d'échelle,  $b$  est le paramètre de translation.

$$\text{En posant } \Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.10)$$

Où  $\Psi_{a,b}(t)$  sont une famille d'Ondelette analysantes générales à partir d'une Ondelette «mère»  $\psi(t)$  par dilatation (facteur  $a$ ) et translation (paramètre  $b$ ). L'équation (3.9) devient.

$$TO(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle \quad (3.11)$$

$\langle f, \Psi_{a,b} \rangle$  Est un produit scalaire entre deux fonctions  $f$  et  $\psi$ .

La fonction Ondelette doit vérifier un certain nombre de propriétés, la première d'entre elles nomme condition d'admissibilité.

Soit  $y \in L^2$  (ensemble des fonctions à carré sommable).

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(w)|}{|w|} dw < \infty \quad (3.12)$$

Cette condition permet d'analyser le signal, puis de le synthétiser sans perte d'information.

La condition d'admissibilité implique en outre que la transformée de Fourier de l'Ondelette à la Fréquence continu (pour  $\omega = 0$ ) doit être nulle. Soit :

$$Y(w)|_{w=0} \quad (3.13)$$

Ceci implique en particulier deux conséquences importantes :

- la première est que les Ondelettes doivent posséder un spectre de type passe-bande
- la seconde apparaît en réécrivant l'équation (3.14) de façon équivalente sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (3.14)$$

Donc  $\Psi(t)$  doit être à moyenne nulle.  $\Psi(t)$  Est une fonction à largeur temporelle finie (fenêtre temporelle) possédant un caractère oscillatoire. On est alors bien en Présence d'une petite onde : une Ondelette[38,39].

Cette Ondelette agit comme un filtre passe bande, pour retrouver la partie du spectre éliminé par l'Ondelette (les basses fréquences), on utilise une autre fonction appelée fonction échelle  $\phi(t)$ , sa moyenne est non nulle[38].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt \neq 0 \quad (3.15)$$

### 5.1 Illustration du changement d'échelle et de la translation

Le changement d'échelle sert à compresser ou dilater l'onde mère, ce qui même analyser les hautes fréquence ou les basse respectivement continu dans un signal[39,40].

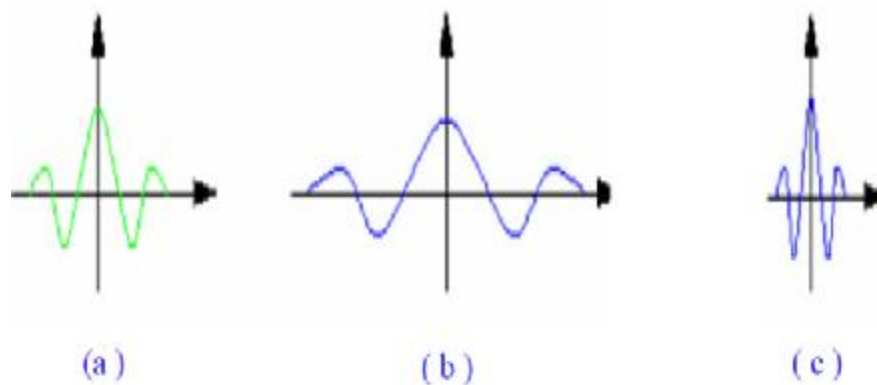


Figure (3.4) : illustration de la variation du facteur d'échelle,  
 (a) l'Onde mère, (b) l'Onde pour  $0 < a < 1$ , (c) l'Onde pour  $a > 1$ .

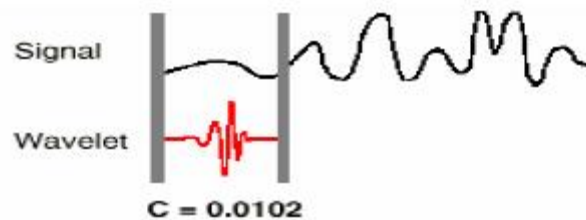
### 5.2 L'Algorithme Pour Calcul des Coefficients

La procédure de calcul des coefficients  $C_f(s, u)$  s'effectue comme suit :

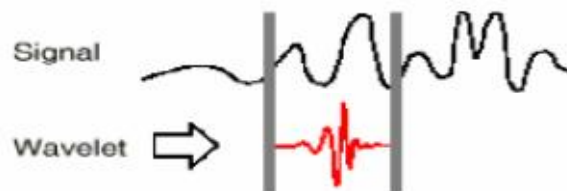
On multiplie le signal et la fonction analysante et l'on calcule l'intégrale du produit

C'est un processus assez simple ; en fait il se déroule en cinq étapes[39,40]:

1. On prend une Ondelette et on l'a compare à une section au début du signal original
2. On calcule le coefficient  $C_x(a,b)$  qui représente le degré de corrélation de l'Ondelette avec cette portion du signal.



3. On translate l'Ondelette vers la droite et on répète les étapes (1) et(2) jusqu'à ce que le signal soit couvert en entier.



4. On dilate l'Ondelette et on répète les étapes une (1) à trois (3).

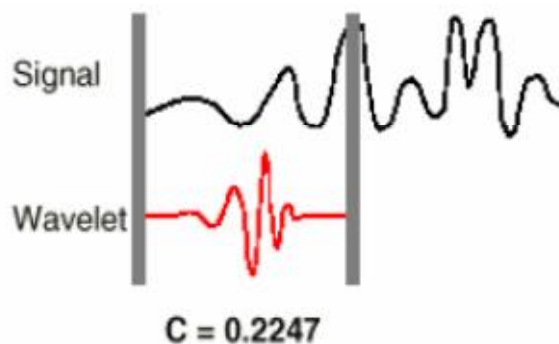


Figure (3.5): les étapes de Calcul Les Coefficients

5. On recommence l'opération pour toutes les étapes à différentes échelles

### 5.3 Fondements mathématiques de la transformée en ondelettes continues

#### 5.3.1 Définition

Si  $f(x)$  est le signal à analyser et  $\mathcal{Y}_{a,b}(x)$  une ondelette analysante telle qu'elle a été définie paragraphe 5, on définit la transformée en ondelettes  $w_{\Psi}^f(a,b)$  par la relation

$$w_{\Psi}^f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi^* \left( \frac{x-b}{a} \right) dx \quad (3.16)$$

Avec  $a$  strictement positif et  $b$  réel respectivement le paramètre d'échelle et de translation. Par analogie à une décomposition en série de Fourier, les  $w_{\Psi}^f(a,b)$  sont les coefficients d'ondelettes du signal  $f(x)$ . Le signe « \* » signifie complexe conjugué.

Si on regarde la définition mathématique il s'agit comme pour la transformée de Fourier à court terme d'une corrélation entre un signal, le profil, et la famille d'ondelettes engendrée par l'ondelette mère [34,35].

#### 5.3.2 Interprétation

Le théorème de Parseval nous permet d'écrire la relation de conservation d'énergie:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathcal{Y}_{a,b}^*(x) dx = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \mathcal{Y}_{a,b}^{\mathfrak{s}*}(w) dw \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \sqrt{a} e^{-i2pwb} \mathfrak{S} \Psi^{\mathfrak{s}}(aw) dw \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donc la transformée en ondelettes devient :

$$w_{\Psi}^f(a,b) = \sqrt{a} \mathcal{F}^{-1} \left[ f(w) \mathfrak{S} \Psi^{\mathfrak{s}}(aw) (-b) \right] \quad (3.18)$$

Cette relation peut donc s'interpréter pour  $a$  fixé comme le produit de convolution de la fonction  $f(x)$  avec la fonction  $\frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left( \frac{x}{a} \right)$  d'après le théorème du produit (la transformée de Fourier du produit de deux fonctions dans le domaine des fréquences est un produit de

convolution de leurs transformées de Fourier dans le domaine de l'espace physique considéré). Ce produit de convolution s'écrit :

$$w_{\Psi}^f(a,b) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^* \left( -\frac{x}{a} \right) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left( \frac{x}{a} \right) \quad (3.19)$$

Si  $y(x)$  est symétrique, on a alors :  $y^*(-x) = y(x)$

Si on fixe les échelles  $a = \{a_j\}$  alors pour réaliser la transformée en ondelettes, il suffit donc d'effectuer la convolution du profil à analyser avec l'ondelette conjuguée ou l'ondelette, si celle-ci est réelle et symétrique ou complexe et à symétrie hermitienne. Les ondelettes sont dans ce cas données, jouent ainsi le rôle d'un banc de filtres passe bande caractérisés par les valeurs du paramètre d'échelle en série.  $a_j$

Le paramètre d'échelle des ondelettes « $a$ » dénote la résolution d'analyse, c'est à dire l'échelle d'analyse mais ne signifie en aucun cas que l'on analyse une longueur d'onde donnée bien précise contenue dans le signal.

Pour le calcul de la transformée en ondelette continue, il suffit donc d'analyser le signal avec chaque résolution d'ondelette fille comme l'illustre la figure (3.6) :

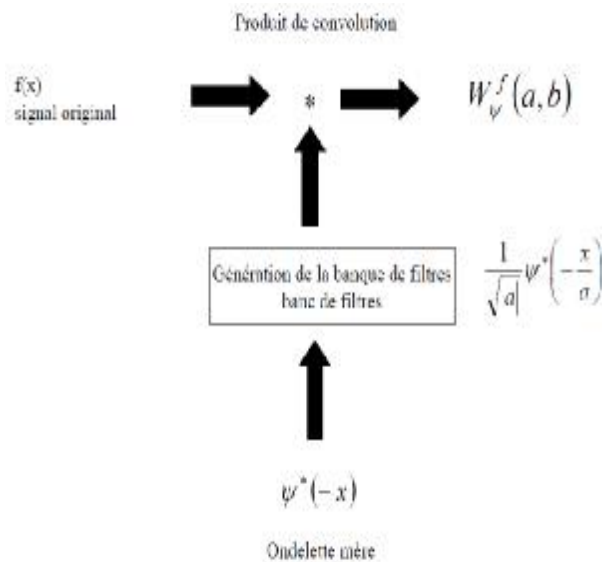


Figure (3.6) : Schéma de calcul de la transformation en ondelettes continue

### 5.3.3 Conditions d'existence des ondelettes

#### Condition d'admissibilité

Les ondelettes doivent satisfaire les conditions suivantes :

- Être continue absolument intégrables et de carré intégrable : elles possèdent toutes les caractéristiques des fenêtres, c'est à dire appartiennent aux espaces vectoriels  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^1(\mathbb{R})$ .

- Être admissibles c'est à dire répondre à la condition suivante :

$$(c_y) = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(w)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad (3.20)$$

$c_y$  Appelé *constant d'admissibilité* La condition d'admissibilité implique, en particulier que la transformé de Fourier de l'ondelette admissible soit nulle en zéro, car les ondelettes sont continués. Autrement dit, la moyenne de la fonction  $\Psi$  doit être nulle :

$$\hat{y}(w = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = 0 \quad (3.21)$$

Cette dernière équation s'assimile à une condition d'oscillation puisque l'on impose à l'ondelette d'osciller suffisamment afin que sa moyenne s'annule. De plus l'annulation de la moyenne de l'ondelette n'implique que le spectre de celle-ci est de type passe-bande. Pour finir, la condition d'admissibilité est très liée avec la conservation de l'énergie des ondelettes et est nécessaire à la reconstruction du signal analysé.

### 5.3.4 Propriétés

Soit une ondelette mère vérifiant les conditions suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(t)|^2 dt = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Y(f)|^2}{f} df = c < +\infty \quad (3.22)$$

#### e) Conservation de l'énergie

$$J = K \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.23)$$

L'analyse par ondelette assure la conservation de l'énergie.

#### f) Reconstitution du signal

$$x(t) = C^{-1} \iint_R C(a,b) \Psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2} \quad (3.24)$$

#### g) Régularité

La régularité d'une ondelette est la propriété permettant de localiser les singularités dans un signal. Cette propriété se traduit sur les coefficients d'ondelettes par une amplitude importante, caractérisant une singularité dans le signal, et par la décroissance des valeurs des coefficients avec l'échelle de résolution.

La régularité est une propriété importante pour les applications concernant la compression.

En effet, on désire alors obtenir des coefficients d'ondelettes les plus petits possibles (afin de les annuler), pour tout ce qui concerne les détails du signal ; la décroissance des coefficients en fonction de l'échelle est donc primordial. On peut noter qu'il existe un lien entre la régularité et les moments nuls d'une ondelette. Une ondelette a  $n$  moments nuls si :

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \Psi(t) dt = 0 \quad 0 \leq k \leq n \quad (3.25)$$

\* **Remarque** : on a déjà vu que  $M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 0$

Pour affiner la compréhension de la régularité, on va partir d'une expression simplifiée d'une transformée en ondelettes.

$$TO(m, q) = \int f(t) y_{m,q}(t) dt \quad (3.26)$$

Posons  $q = 0$  dans l'équation (2.15) et développons-la en série de Taylor autour de  $t=0$

$$TO(m, 0) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left[ \sum_{p=0}^n f^{(p)}(0) \int \frac{t^p}{p!} \Psi\left(\frac{t}{m}\right) dt + O(n+1) \right] \quad (3.27)$$

où  $O(n+1)$  désigne les termes d'ordre supérieur à  $n$ .

$$TO(m, 0) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left[ f(0)M_0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}M_1m^2 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}M_2m^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}M_n m^{n+1} + O(m^{n+2}) \right] \quad (3.28)$$

Si tous les moments  $M_0 \dots M_n$  est nuls, cela veut dire que les coefficients  $TO(m, q)$  vont décroître comme  $m^{n+2}$  pour une fonction  $f$  suffisamment régulière. Cette propriété de *Régularité-moments nuls* conditionne l'ondelette à posséder une décroissance rapide. On peut effectuer une mesure de la régularité locale d'une fonction en utilisant les exposants de Lipchitz.

\* **Conditions d'application**

-Fonction à énergie finie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \quad (3.29)$$

-La transformée en ondelettes a donc une résolution temps-fréquence qui dépend de l'échelle  $b$ , et vérifie la condition d'admissibilité, c'est à dire que l'intégrale suivante existe et soit finie :

$$C_y = \int_0^{+\infty} \frac{\left| \int \Psi(f) \right|^2}{|f|} df < +\infty \quad (3.30)$$

Pour garantir l'existence finie de  $C_\psi$ , il faut s'assurer de la convergence de l'intégrale aux bornes. A l'infini, il faut que le spectre de l'ondelette mère ait une décroissance au moins en  $|f|^{-1/2}$ . Par contre, autour de l'origine, le spectre doit s'annuler pour assurer la convergence de l'intégrale en zéro :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (3.31)$$

Cette condition impose à l'ondelette d'être à moyenne nulle. Ainsi, son amplitude passe forcément par zéro et présente donc quelques oscillations ; c'est ce qui fait qu'on lui attribue le nom d'ondelette.

Finalement, l'approche fréquentielle permet la réécriture de l'équation (3.16) sous la forme:

$$C_x(a,b) = \int x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) \Psi^*(af) e^{2j\pi fb} \sqrt{a} df \quad (3.32)$$

#### 5.4 Transformée en ondelettes discrète (TOD)

La transformée en ondelettes discrète est issue de la version continue, à la différence de cette dernière, la TOD utilise un facteur d'échelle et une translation discrétisée. On appelle transformées ondelettes discrète toute base d'ondelettes travaillant avec un facteur d'échelle  $a=2^i$ . Il est clair que la transformée en ondelettes discrète est pratique en implémentation sur tout système numérique (PC, CARTE à  $\mu$ P...) [41].

## 6. SCALOGRAMME

Le scalogramme (spectrogramme d'ondelette) est défini comme le carré de module de la transformée en ondelette. Il fournit une distribution de l'énergie dans le plan temps-échelle, contrairement au spectrogramme l'énergie est distribuée avec des résolutions différentes[36].

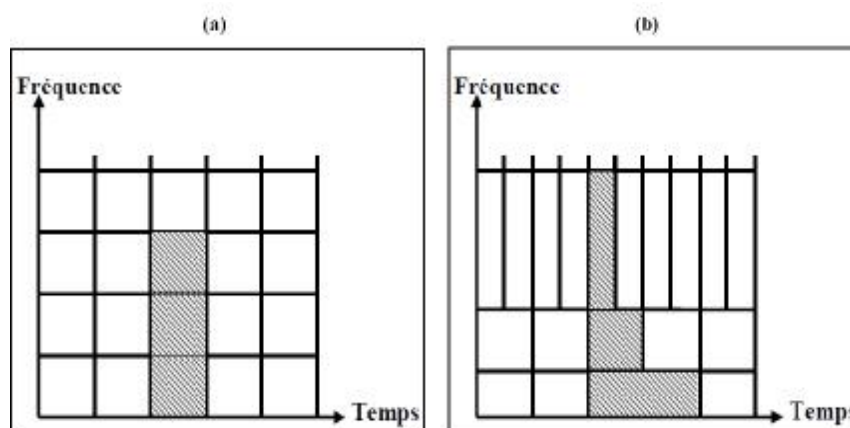


Figure (3.7) : Résolution temps-fréquence A) TFCT B) transformée en ondelette

En notant  $h$  le centre de fréquence de l'ondelette élémentaire, le centre de fréquence d'une ondelette dilatée est  $x = \frac{h}{s}$ . Le scalogramme d'un signal est défini par :

$$P_w f(u, x) = |w f(u, s)|^2 = \left| w f\left(u, \frac{h}{s}\right) \right|^2 \quad (3.33)$$

Le scalogramme normalisé vaut

$$\frac{x}{h} P_w f(u, x) \quad (3.34)$$

La TOC travaille donc à résolution fréquentielle relative constante. Cela implique:

- Pour  $u$  petit, donc pour les hautes fréquences, une bonne résolution temporelle et une mauvaise résolution fréquentielle.
- Pour  $u$  grand, donc pour les basses fréquences, une mauvaise résolution temporelle et une bonne résolution fréquentielle.

En terme de pavage temps-échelle (ou temps-fréquence), cela se traduit par pavés élémentaires qui se déforment lorsque l'échelle d'analyse varie, leur surface demeurant constante. Dans cette représentation, chaque cellule correspond à la résolution d'analyse

pour le point du plan situé en son centre, les lignes horizontales délimitant les bandes des filtres associés.

La TOC, lorsqu'elle est utilisée pour l'analyse des signaux discrets, doit être échantillonnée, c'est-à-dire calculée pour des valeurs discrètes de  $u$  et de  $t$ . L'implémentation de la transformée continue correspond généralement à un échantillonnage uniforme du temps calqué sur celui du signal, et à la sélection d'un nombre constant d'échelle par bandes d'octaves. Cette implémentation conserve la caractéristique de redondance attachée à la transformée continue, tant du point de vue du temps que de l'échelle [42].

## 7. AVANTAGES

Le fait que la transformée utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps fréquence lui donne beaucoup d'avantages :

- la résolution en fréquence de la transformée dépend du facteur de dilatation  $s$  par le Principe d'Heisenberg, on peut donc choisir arbitrairement celle-ci suivant ce que l'on désire analyser ; pour des signaux physiques présentant des variations très rapides, des *marches*, bref des discontinuités ; l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces variations et analyser celles-ci, cette particularité rend l'analyse en ondelettes complémentaire à l'analyse de Fourier ;
- la localisation en temps est précieuse pour nombre d'applications ;
- la transformée en ondelette peut représenter complètement et exactement un signal Quelconque en peu de coefficients.

## 8. QUELLE ONDELETTE CHOISIR ?

Le choix de l'ondelette dépend surtout de l'application : en traitement d'images, on Préfère utiliser des ondelettes bi-orthogonales qui permettent d'allier les propriétés de linéarité en phase (symétrie du traitement droite-gauche) avec la compacité des supports des filtres utilisés (filtres à réponse impulsionnelle finie).

En raison de sa forme, l'Ondelette de MORLET se prête naturellement à l'analyse de signaux de type réponses impulsionnelles à un choc [D'Amours,2000]. En outre, selon [Staszewski,1997], ce type d'Ondelette est aussi bien adapté pour détecter de brusques changements (discontinuités et impulsions) dans les signaux vibratoires venant d'engrenages.

En tout cas, il importe de se pencher sur deux facteurs : le système de représentation (continu ou discret) et les propriétés des ondelettes, notamment trois caractéristiques essentielles [55] :

- Le nombre de moments nuls
- La régularité (Ondelette lisse ou non) qui agit sur la qualité de la reconstruction du signal,

- La sélectivité fréquentielle

Dans le choix de la fonction d'ondelettes, quatre aspects doivent être considérés :

- L'orthogonalité
- Fonction mère complexe ou réelle
- Largeur (définie par le temps nécessaire à l'amplitude pour augmenter de e)
- Forme

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons donné en premier temps, quelques rappels sur la transformée en ondelettes continues (TOC) et la transformée en ondelettes discrète (TOD), ensuite en deuxième temps, nous avons évoqué une grande famille des ondelettes fréquemment utilisées. Les propriétés de cette transformée à été également présentées. Les avantages de cette méthode. Le chapitre suivant va donc faire une comparaison entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelette.

## CHAPITRE 4

### ETUDE COMPARATIVE

#### INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons faire une comparaison entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelette, en se basant sur des exemples numériques et application à la détection du défaut d'un système d'engrenages.

En premier lieu, on doit fixer les différents paramètres (la fréquence, le nombre de point du signal et la fréquence d'échantillonnage).

#### 1. COMPARAISON ENTRE LA *TFCT* ET LA *TOC*

La TFCT (qui peut être interprétée comme la projection d'un signal sur un ensemble de fonctions de base) on peut générer une distribution énergétique du signal qu'on appelle le spectrogramme. Précédemment on a montré que la TOC représente aussi une projection du signal sur un ensemble des fonctions ondelettes.

Pour comparaison avec la TFCT, on présente sur la figure suivante les bancs de filtres correspondants à la TFCT et à la TO et également, les pavages temps-fréquence correspondants.

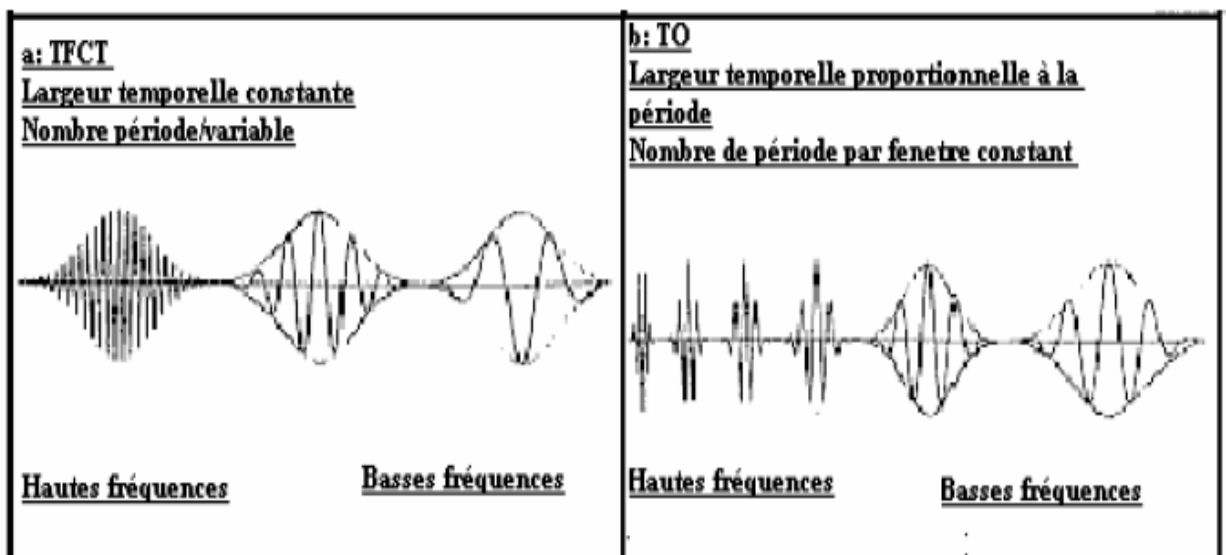


Figure (4.1.a): Comparaison entre TFCT et TOC

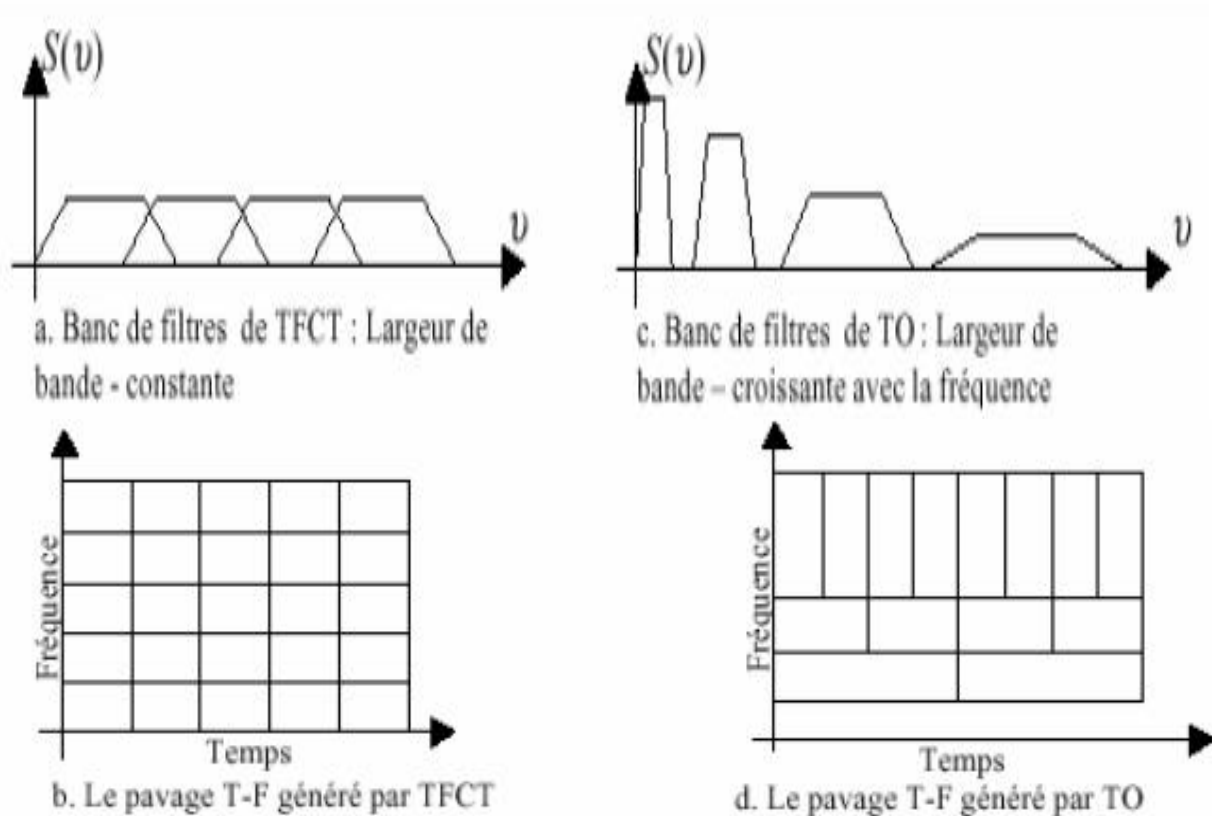


Figure (4.1.b) Comparaison entre TFCT et TOC

La différence principale avec la transformée de Fourier à court terme est que les résolutions ne sont pas identiques en tous les points du plan temps-fréquence :

dans le cas de changements brusques ou de structures très localisées, la transformée en ondelettes existera essentiellement dans le domaine des petites échelles, aptes à «voir » des détails fins du signal; cependant, puisque ces petites échelles sont traduites par une ondelette analysante de support temporel réduit, il s'en suit que son support fréquentiel est étendu, ce qui limite la résolution fréquentielle absolue; réciproquement, une résolution fréquentielle importante n'est possible qu'avec une ondelette analysante longue, soit à de grandes échelles d'observation. Dans la zone du plan temps- fréquence où le gain en résolution fréquentielle est possible, celui-ci se fait donc encore au détriment de la résolution temporelle. L'analyse en ondelettes présente cependant l'avantage de ne pas correspondre à une résolution fixée a priori par le choix du signal élémentaire : c'est fondamentalement une analyse multi-échelles [42].

## 2. ETUDE COMPARATIVE

### 2.1 COMPARAISON ENTRE SPECTROGRAMME ET SCALOGRAMME

Dans cette section on se propose d'analyser des signaux par les méthodes traditionnelles qui se résument dans la transformé de Fourier rapide (FFT), la représentation par spectrogramme en suite en compare ces résultats avec les résultats obtenus à l'aide de la transformé en Ondelette en utilisant comme logiciel Matlab.

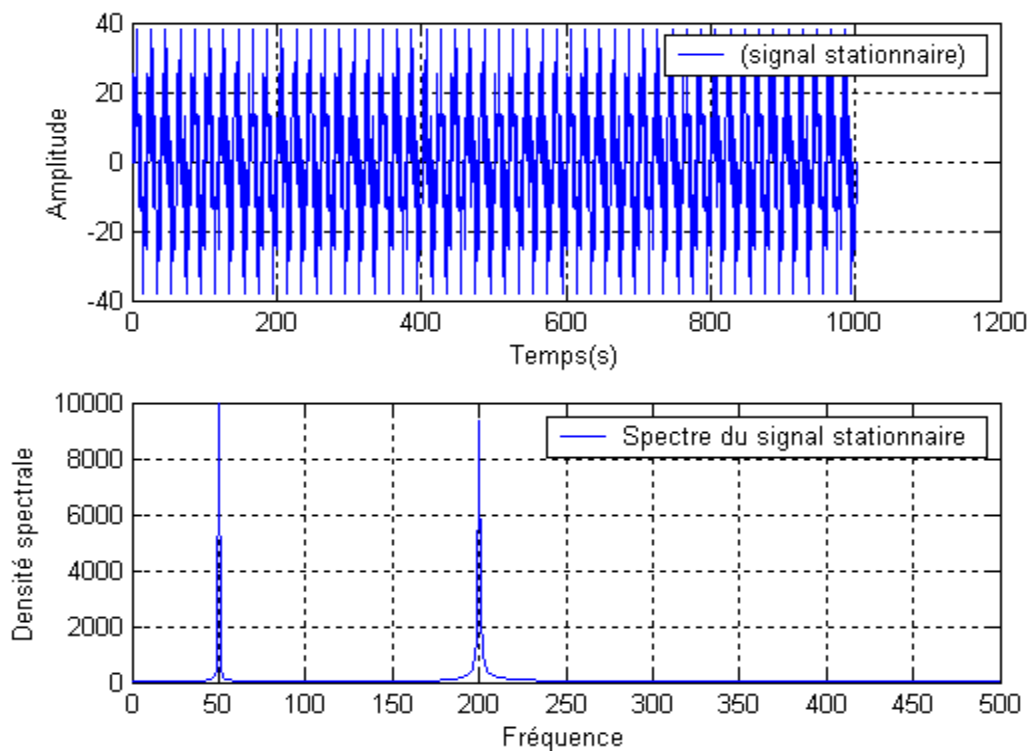
#### 2.1.1 SIGNAUX STATIONNAIRES

a) On utilise ici un signal sinusoidale défini comme suit

$$s(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t)$$

Avec  $A_1=20$ ,  $A_2=20$  ;

$f_1=50$  Hz,  $f_2=200$  Hz ; et  $N= 128$  points.



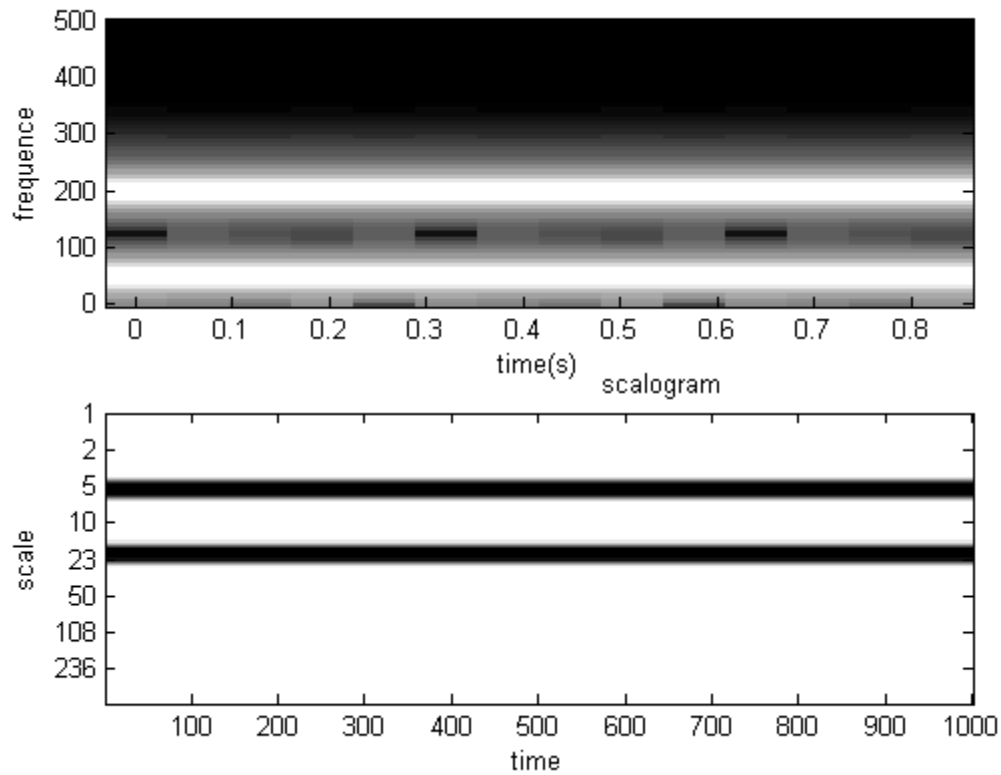


Figure (4.2)

On remarque que sur la figure (4.2.c) et (4.2.d) l'existence de deux bandes parallèles à l'axe du temps. Elles sont localisées autour de 50Hz et 200Hz pour le spectrogramme et autour de l'échelle  $a=5$  et 23 pour le scalogramme. Dans ce cas les deux méthodes se comportent normalement.

**b) On utilise ici un signal sinusoïdale défini comme suit**

$$s(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t)$$

Avec  $A_1=10$ ,  $A_2=20$ ,  $A_3=30$  ;

$f_1=50$  Hz,  $f_2=200$  Hz,  $f_3=210$  ; et  $N= 128$  points.

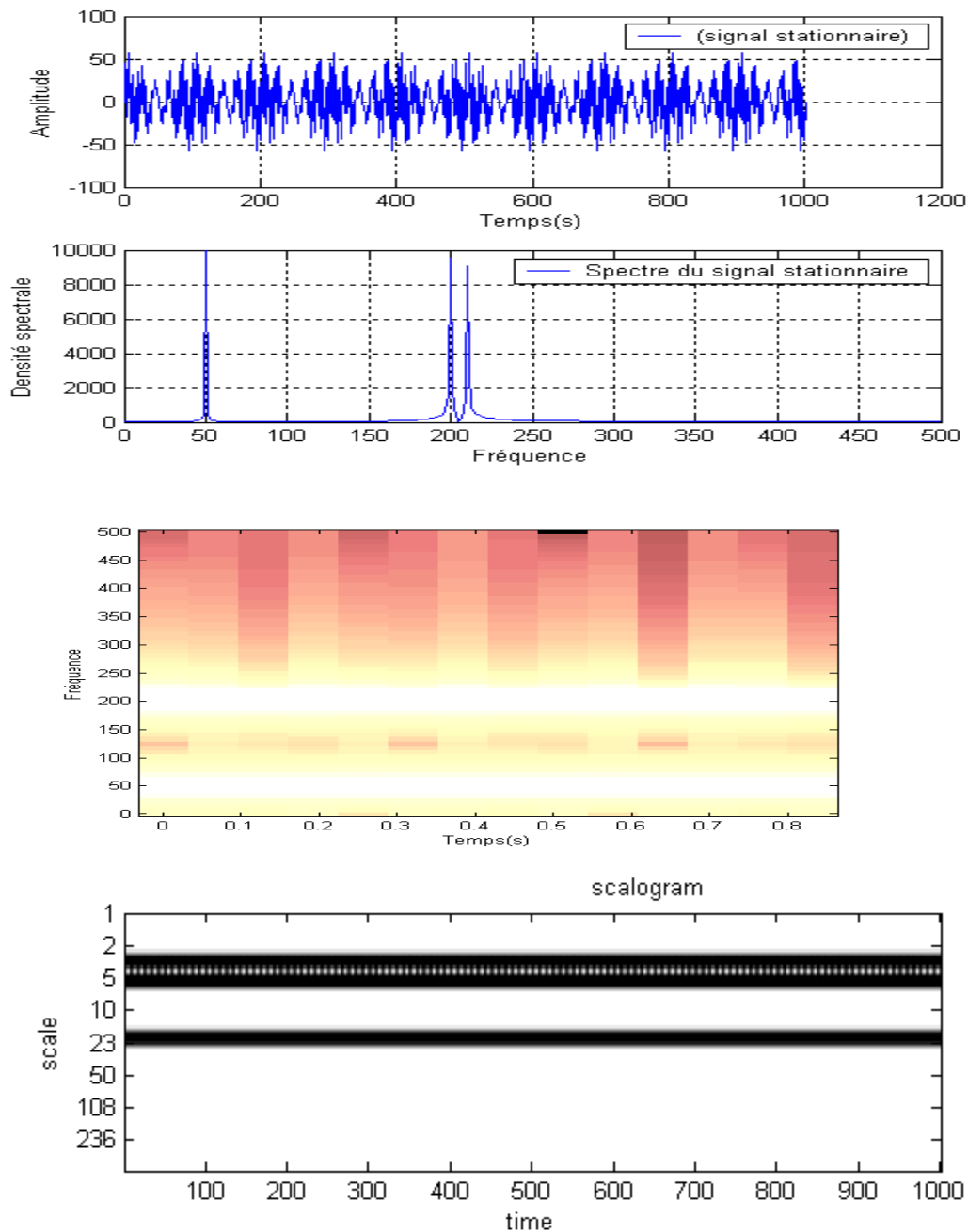


Figure (4.3)

On a pris deux fréquences très proches, on remarque cela sur la figure (4.3.b), par contre sur la figure (4.3.c), au lieu d'avoir trois bandes parallèles à l'axe de temps on a deux, mais sur la figure (4.3.d) on voit les trois fréquences.

Donc la transformée en ondelette donne une meilleure résolution fréquentielle que la transformée en ondelette.

2.1.2 SIGNAL NON-STATIONNAIRE

Soit le signal à étudier dont la fréquence est en fonction du temps définie comme suit :

$$s(t) = A_0 \sin(2pf_0t^2)$$

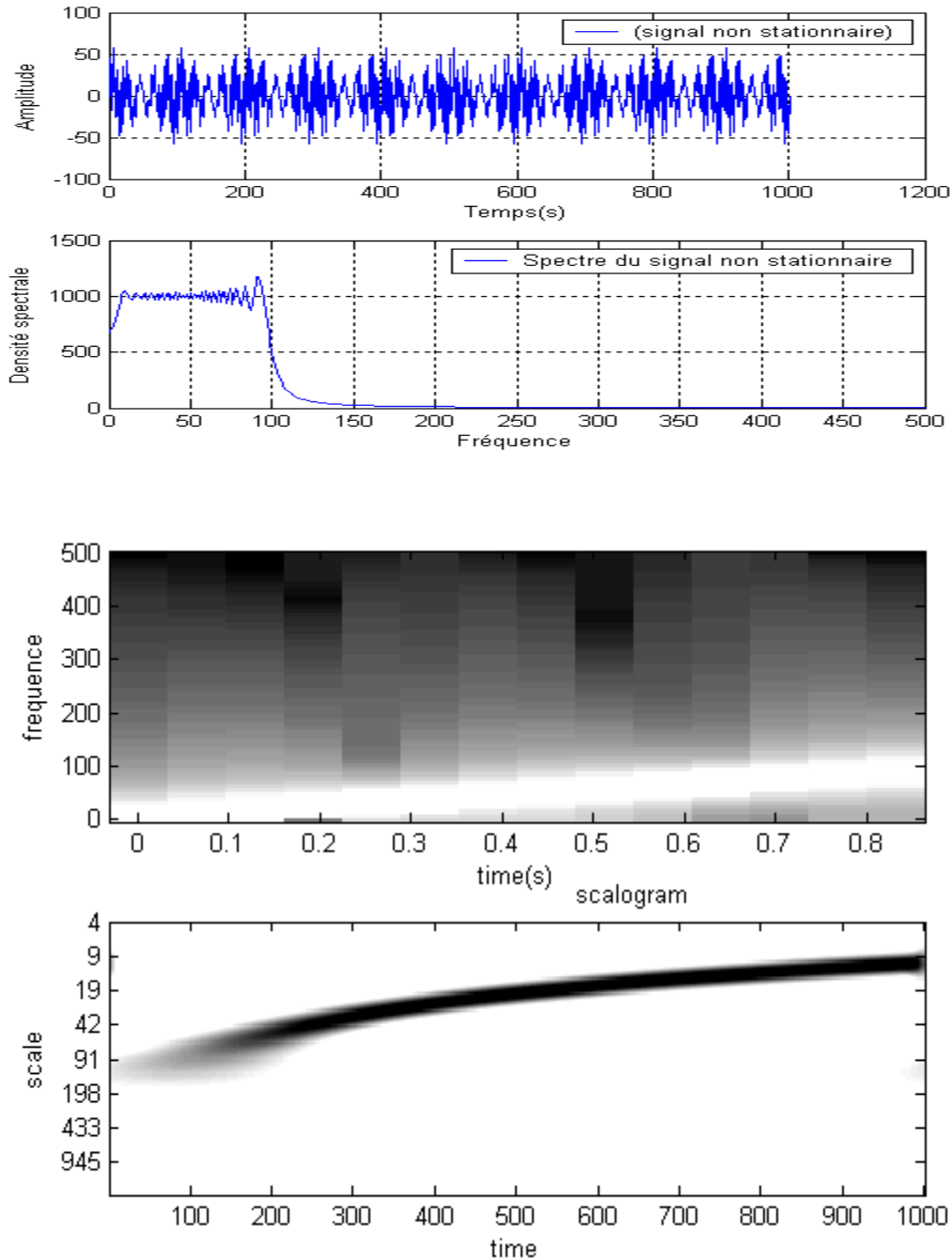


Figure (4.4)

La figure (4.4. c) et la figure (4.4. d) montrent d'une façon claire cette modulation. Dans le spectrogramme la modulation est linéaire, par contre pour le scalogramme, elle est hyperbolique car l'échelle est logarithmique.

2.1.3 SIGNAL BRUITÉ

Pour exploiter les deux méthodes avec des signaux bruités, on a utilisé un signal composé d deux signaux sinusoïdes auquel on a ajouté du bruit.

$$S = A_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) + 10 \cdot \text{randn}(\text{size}(t))$$

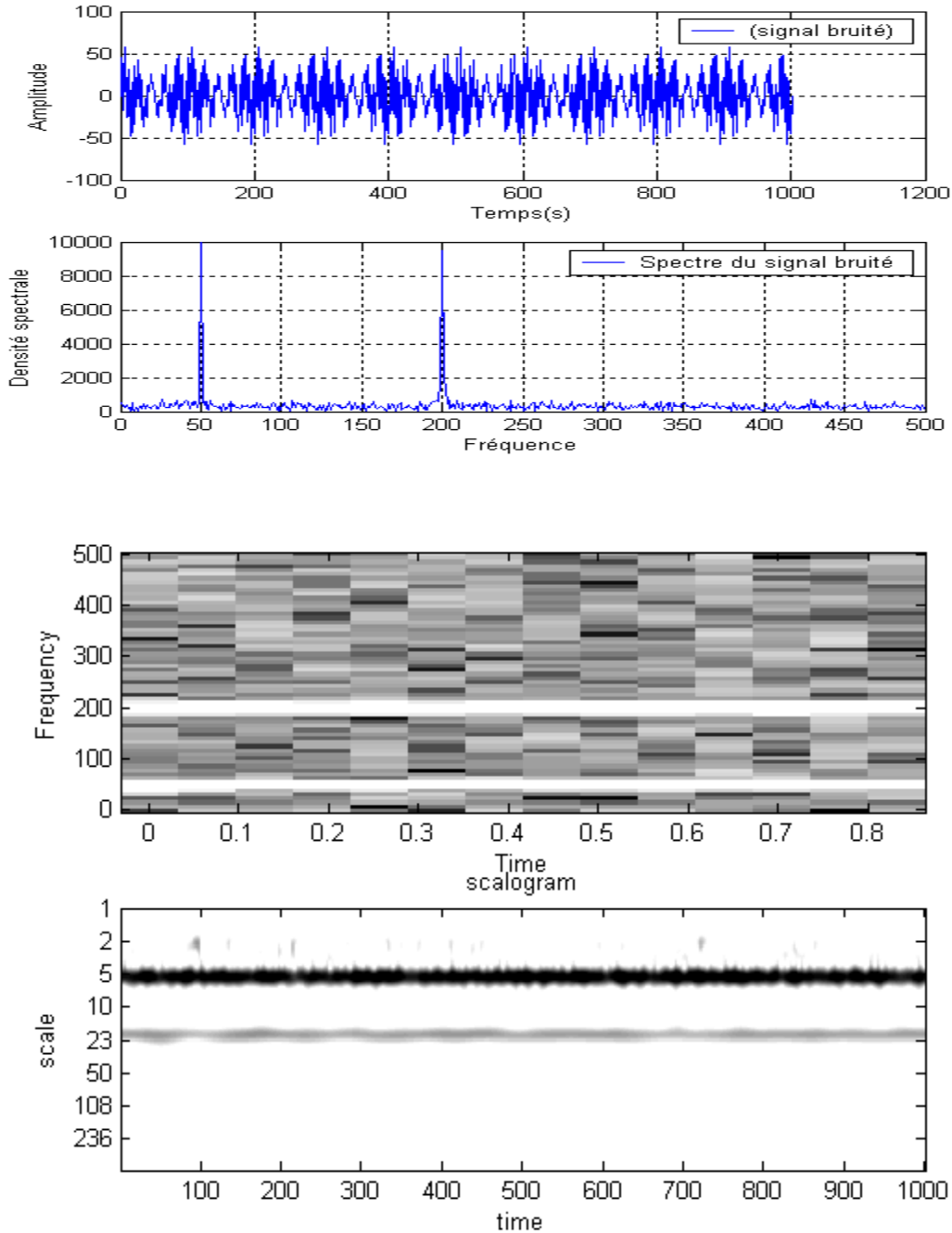


Figure (4.5)

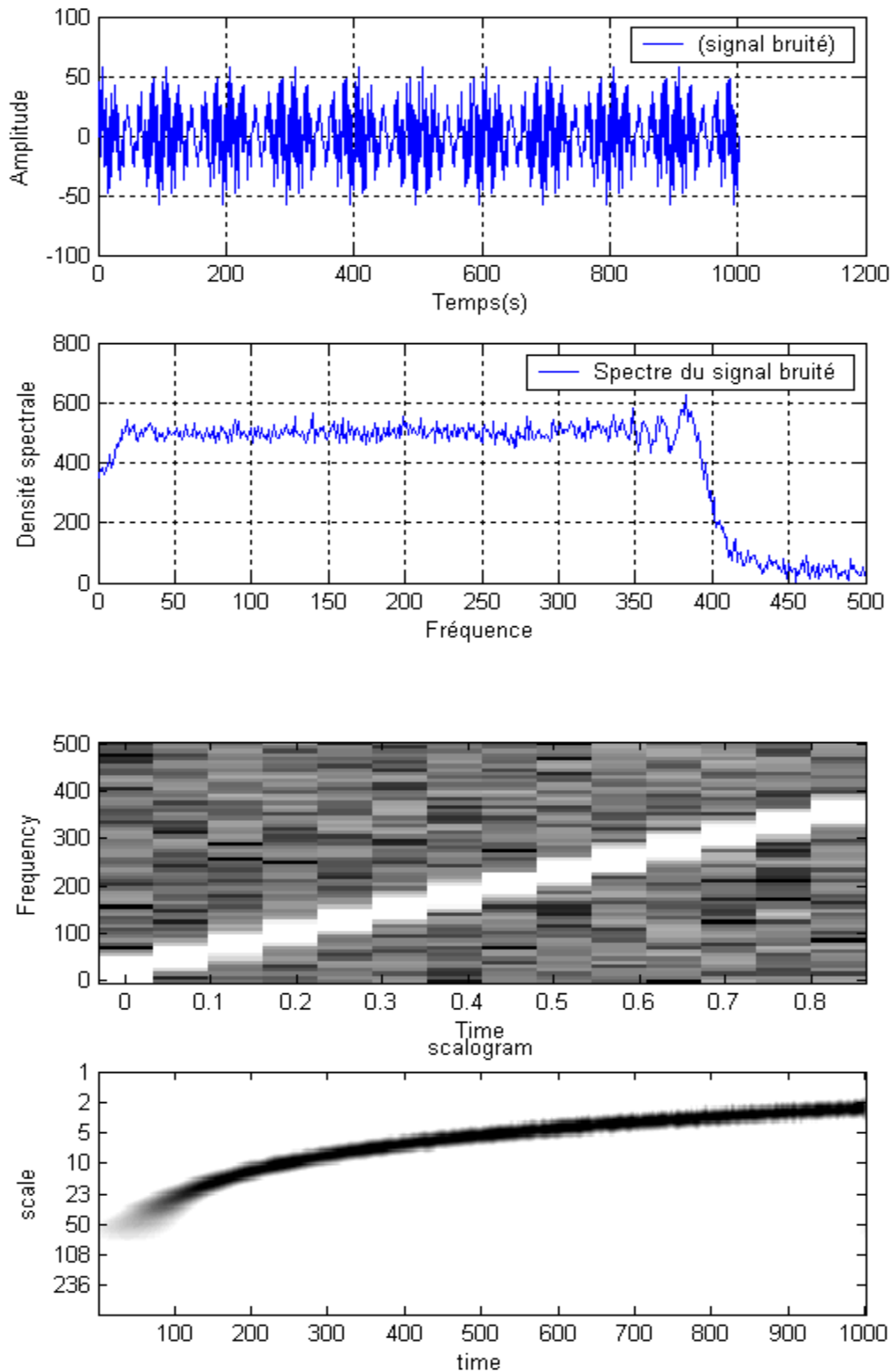


Figure (4.6)

A chaque fois quand on augmente le rapport *signal/bruit*, le spectrogramme présente toujours des défauts, mais les résultats du scalogramme deviennent de plus en plus meilleurs figure (4.5) et figure (4.6)

## 2.2 APPLICATION A LA DETECTION DU DEFAUT D'UN SYSTEME D'ENGRENAGES

Les engrenages sont les éléments de machines les plus utilisées dans la construction mécanique. Le rôle des engrenages est de transmettre un mouvement ou une puissance entre deux arbres, avec un rapport de vitesse constant. Les matériaux utilisés varient en fonction des utilisations, mais les plus couramment employés sont l'acier et la fonte. Les matériaux plastiques sont toutefois de plus en plus employés pour transmettre une faible puissance.

Les tests ont été effectués sur un système d'engrenages composé de deux roues comportant respectivement 20 et 21 dents figure (4.7). Ce système fonctionne 24h/24h sous des conditions fixes. Les fréquences de rotation des deux roues sont de l'ordre de 16.67 Hz et la fréquence d'engrènement est de l'ordre de 330 Hz.

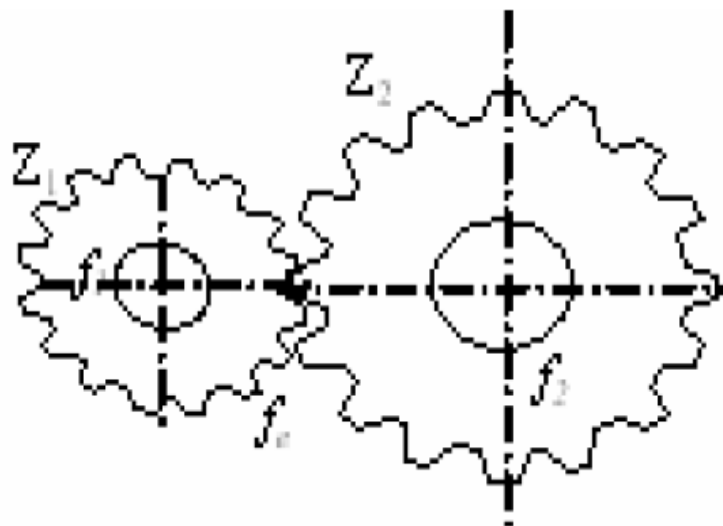


Figure (4.7) : Système d'engrenage

Le signal d'engrènement est périodique, sa fréquence est égale à la fréquence de rotation de l'une des deux roues multipliée par le nombre de dents de cette roue.

$$f_e = Z_1 f_1 = Z_2 f_2$$

Avec :

$f_1$  : La fréquence de rotation de la roue 1.

$f_2$  : La fréquence de rotation de la roue 2.

$Z_1$  : Nombre de dents de la roue 1.

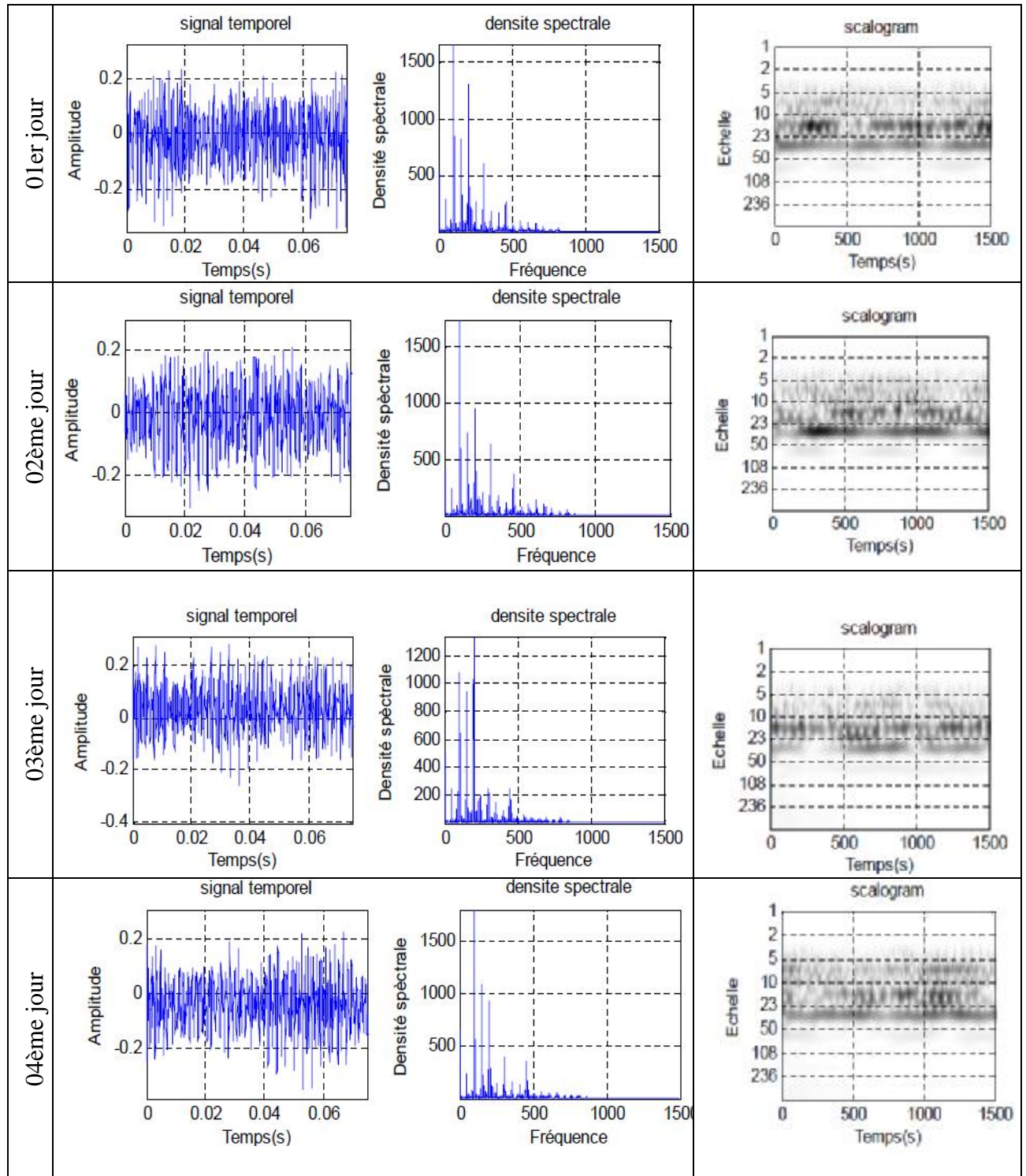
$Z_2$  : Nombre de dents de la roue 2.

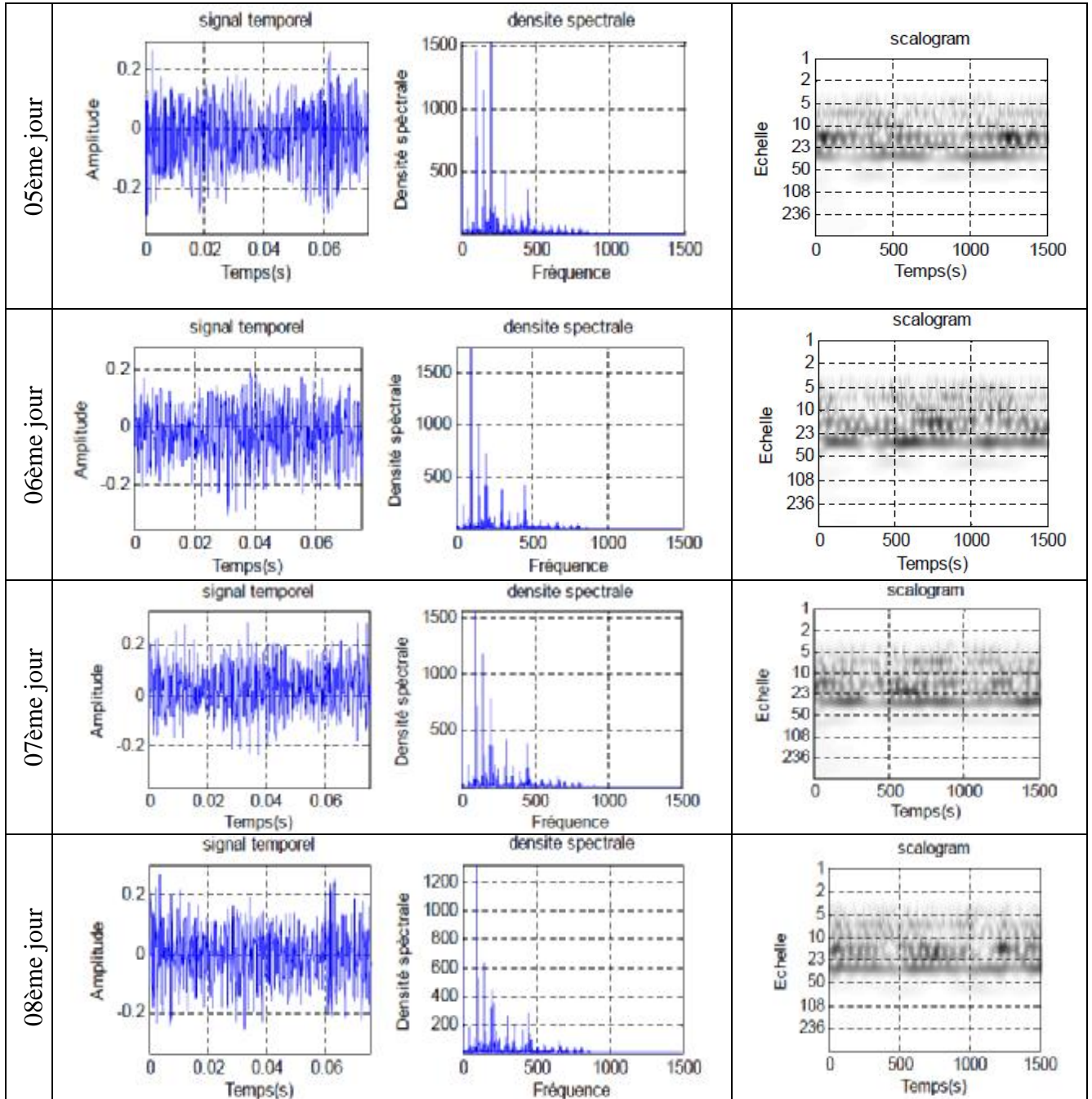
Les enregistrements sont effectués chaque jour pendant 12 jours. Un signal vibratoire issu du banc d'essai comportant 60160 échantillons avec une fréquence d'échantillonnage de 20 KHz.

### **2.2.1 PRESENTATION DES DONNEES ET INTERPRETATION DES RESULTATS**

Vu le grand nombre de données (60160 échantillons), il est difficile de les traiter toutes. Donc on doit choisir un nombre permettant de ne pas perdre beaucoup d'informations. Pour cela, on doit au moins couvrir une période. On a  $f=16.67$  Hz et  $f_e=20$  KHz. Pour calculer le nombre d'échantillons couvrants une période, on divise la période de rotation T sur la période d'échantillonnage. Le nombre d'échantillons obtenu sera 1200 échantillons. On choisit donc un nombre de 1500 échantillons.

Les représentations temporelles, la transformé de Fourier rapide (FFT) et la transformé en Ondelette du signal émis par le système pour chaque jour sont données sur les Figure (4.8)





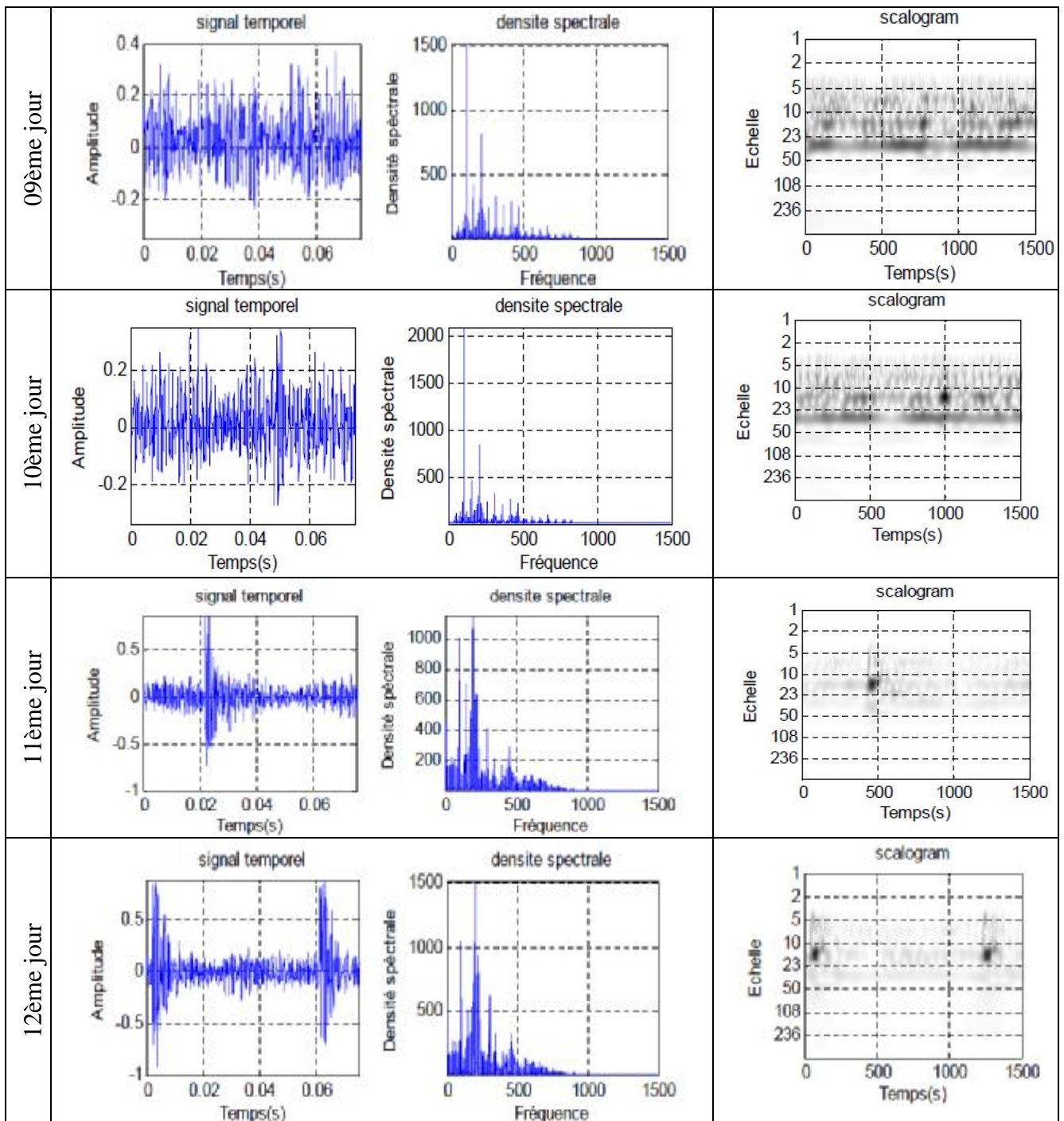


Figure (4.8) : Les représentations temporelles, la transformé de Fourier rapide (FFT) et la transformé en Ondelette d'un système d'engrenages

Nous remarquons que pendant les dix premiers jours, la représentation temporelle et la transformée de Fourier du signal vibratoire d'engrènement ne donne aucun indice supplémentaire caractérisant l'apparition d'un défaut, par contre le douzième et le dernier jour présentent des représentations différentes qui sont les indicateurs de la présence d'un défaut (un phénomène de battement) dû à la détérioration d'une dent.

Dans le domaine de la transformée en ondelettes, les coefficients sont stables et de même ordre de grandeur jusqu'au 9ème jour. Au 10ème jour, les coefficients commencent à changer leurs régimes (absence d'une partie de la bande sur le scalogramme). C'est un indice précoce qui indique que le système d'engrenage va subir des défauts. Le système d'engrenage présente un défaut au 12ème jour qui se traduit par un changement complet de la localisation des coefficients de la transformée en ondelettes.

#### **CONCLUSION :**

L'étude effectuée dans ce chapitre est principalement dédiée à la simulation. L'exécution des programmes, à obtenir à des résultats qui ont permis une comparaison directe entre les deux méthodes (la transformée de Fourier et la transformée en ondelette).

## CONCLUSION GENERALE

En traitement du signal, le critère d'efficacité de la méthode d'analyse réside dans une bonne lisibilité de la transformée.

La transformée en ondelettes se présente comme un instrument d'analyse plus riche et plus puissant que l'analyse de *Fourier*.

Dans cette étude, on a fait un développement théorique pour les deux méthodes d'analyse (Fourier et ondelette), et on a donné des exemples pratiques pour monter les limites de la transformée de Fourier.

Nous avons fait une comparaison entre les deux méthodes, en se basant sur des signaux simulés et application à la détection du défaut d'un système d'engrenages, en prenant compte des différents paramètres afin de bien exploiter la transformée en ondelettes.

Ce travail à été structuré autour de quatre chapitres, le premier consacré à la description des machines tournantes et les différentes causes de vibrations (défauts d'origine mécanique, électrique, hydraulique et aérodynamique), le deuxième à été plutôt dédié à la présentation de la transformée de Fourier, Le troisième chapitre est consacré à la méthode de transformée en ondelette. Une comparaison entre les deux méthodes l'objet du dernier chapitre.

La transformée en ondelettes semble très pertinente surtout dans l'étude des signaux non-stationnaire.

Vu les propriétés intéressantes de la transformée en ondelettes et la pertinence de la technique et l'efficacité des algorithmes de décomposition recomposition, nous espérons continuer dans cette voie pour étudier des problèmes liés à la technologie de pointes.

## REFERANCES

- [1] T. Frédéric, « Ondelette pour le signal numérique », éditions. Hermès, Paris, 1998.
- [2] : P. Flandrin, « Temps-Fréquence », éditions. Hermès, Paris, 1993.
- [3] : A. Ouahabi, « Techniques avancées de traitement du signal et applications », Alger, 1993.
- [4] C. Gasquet, P. Witomski, « Analyse de Fourier et application: Filtrage, Calcul numérique et Ondelette », éditions Dunod, Paris 2000.
- [5] I. Daubechies, « The wavelet Transform, Time-frequency Localisation and Analysais, » IEEE transactions on information theory, Vol. 36, pp. 961-1004, 1990.
- [6] S. Mallat, « Multifrequency Channel decomposition of images and wavelet models », IEEE Transe, On Acoustic Speech and Signal Proc, Vol. 37, N°. 12, pp. 2091-2110, Décembre 1989.
- [7] S. Mallat, « A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, » IEEE Pattern Anal and Machine Intell., vol. 11, N°. 7, pp. 674-693, 1989.
- [8] : Jacques Morlet « Vibration des machines tournantes et diagnostic de leur état mécanique » : édition Eyroles 92
- [9] :Baudy j, Boidina & Delannogh « vibrations équilibrage sur site :applications a la maintenance conditionnelle » SCHENCK A. Paris. France(1994).
- [10] :Broch j,T « mechanical vibration and chock mesurent » Bruel & kajaer.Denmark (avril 1984).
- [11] :M.sidahmed & Y.Grenier.. « Détection de défaut d'engrenage par Analyse vibratoire » traitement de signal.vol.8,no.5.(spécial traitement de Signal en mécanique).pp.331-343(1992).
- [12] : Bourgain L,dart.& Bourgain j. « machine tournantes et circuit pulsés » Application industrielles et médicales de l'analyse spectrale Dunod, paris, France(1988).
- [13] :A. lagrad « Etude des caractéristiques dynamiques d'un tour parallèle »mémoire de magister université d'Annaba,. « sn40 »
- [14] : « IRD mechanalysis cour audio/visuel de formation manuel de Construction »U.K.(1988).
- [15] : « influence d'un défaut de roulement sur la signature d'une machine » Diagnostic technologique des systèmes mécaniques. pp1-8.
- [16] : M. sidahmed « traitement du signal en pour détecter de manière pécore, les défaillance des machines « CETIM.FIST91 » .France(1991).

- [17] : p. grivet « surveillance des compresseurs alternatifs par les vibrations », Traitement du signal en mécanique .SETIM, pp-157-166, paris, France (7-8- Mars1995).
- [18] : électronique des systèmes de mesure .tran tan Lang ; Masson(92).
- [19] : informatique industriel tome 3.Nussbaumer, la presse normande(87).
- [20] :F. coulons. « Théorie et traitement des signaux ».vol.6.édition GEORGI (1 édition). Lausanne,(1984).
- [21] : J.MAX (et collaborateurs)-« méthodes et techniques de traitement du signal et Application Aix mesures » physiques. Tome1.édition MASSON (3 édition). Paris, France(1981).
- [22] : HEROUS L.DJEDDI M , SAAD S. « élément de base de théorie et du Traitement du signal ».O.P.U , Alger, janvier(1992).
- [23] : RAIS EL HADI BEKKA « introduction au traitement du signal » office des publications universitaires, 1993
- [24] :Brighame. O-“the fast Fourier transforms”. Edition dunod(3 édition Paris,1981.
- [25] : Maurice Bellanger « traitement numérique du signal ,théorie et pratique » ;, DUNDO, 6 édition.
- [26] :Bouizem « analyse des vibration des Machine tournantes (application a un réducteur a engrenage) », mémoire de magister (U.S.T.O),. 1983.
- [27] :J.lombard,F.mirsk « la rigidité dynamique des Broche et la capacité dynamique des machines outils ». (C.E.R.M.O) ; revue scientifique)
- [28] :DASILVA &PASSOS /A-« méthode mathématiques du traitement numérique- Du signal ».édition EYROLLES, paris,1989.
- [29] :P. Flandrin .temps-fréquence .traité des nouvelles technologies, série Traitement signal. Hermès, paris.1993.
- [30] : rais el Hadi Beka . « Fondements du traitement du signal »..office de publication.
- [31] : SCV technique de mesure industrielle, SA(SUISSE),cours de formation professionnelle,03.1999.
- [32] Lucas QUARTA. – « Une introduction (élémentaire) à la théorie des ondelettes ». Cours de l’institut de Mathématique, Université de Mons-Hainaut, Novembre 2001.
- [33] : V. Pierre «Ondelettes et simulation numérique », Thèse de doctorat, Paris 1991.
- [32] CHAKER M. – « Etude qualitative et comparative d’algorithmes d’analyse de signaux par ondelettes ». Thèse du Magister, Université de M’sila.
- [34] : MEYER. Y «L’analyse par ondelette », pour la science, sept 87, mensuel N°119, pp. 28-37.

- [35] : P. BONNET, D.REMOND «Une transformée en ondelette rapide », traitement du signal V8, N°3, pp. 195-207, 1991
- [36] : R. OLIVIER « Wavelet and signal processing » IEEE Magazine October 1991
- [37] : OUARDA SOLTANI « Restauration D'Images Satellites Via la Transformée en Ondelette » Mémoire Magister en Electronique Université de Batna
- [38] : Yves Meyer, Stéphane Jaffard et Olivier Rioul, « L'analyse par Ondelettes » Pour la science. Septembre 1987
- [39] : YOUSSEF BENTALEB. « Analyse par Ondelettes des Signaux Sismiques : Applications Aux ondes de surface ». Thèse de Doctorats Université *Mohamed V AGDAL Rabat*
- [40] : Redha BENZID, « Ondelettes et statistiques d'Ordre supérieur aux signaux uni Et Bidimensionnels » thèse de doctorat science en électronique Université de Batna, 2005
- [41] : M. Weeks. « Digital Signal Processing Using MATLAB and Wavelets», Infinity Science Press LLC Hingham, Massachusetts, 2007.
- [42] : BOUZIDA Ahcene « *diagnostic de défauts de la machine asynchrone a cage par la technique des ondelettes* », Mémoire de Magister Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2005

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPÔLME  
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE**

**SPECIALITE : AUTOMATIQUE**

**PROPOSE ET DIRIGE PAR: - Mr. L.BENYETTOU**

**PRESENTE PAR: - BENAZI IZZEDDINE**

**Thème :**

**Etude qualitative et comparative d'algorithmes entre  
la transformée de Fourier et Ondelettes**

**« Application à la détection des défauts d'un machine tournant »**

**Résumé :**

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une simulation de fonctionnement d'algorithmes de la transformée de Fourier et la transformée en ondelette pour la détection des défauts mécaniques d'un machine tournant. On utilise à cet effet des programmes en MATLAB permettant la mise en œuvre des programmes de deux algorithmes transformée de Fourier (spectrogramme) et la transformée en ondelette (scalogramme) est effectué à partir d'une étude en simulation sur plusieurs signaux différents.

**Mots clés :**

Transformée de Fourier, Spectrogramme, Transformée en ondelette, Scalogramme, détection des défauts, Simulation.

**N° d'ordre : 02**