

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse numérique et Mathématique

Thème

Résolution numérique de l'équation de chaleur stationnaire en 2d

Présentée par :

ABDELKEBIR IBTISSAM

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> BOUNAB NOURA	M.C.B,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> DJERAD ABDELKADER	M.C.A,	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r</i> MIHOUBI HAMZA	M.C.B,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2021/2022

Remerciements

Je remercie avant tout le BON DIEU qui ma donné la force ,le courage et la santé pour pouvoir mener à terme ce travail .

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadrant , professeur ABDELKADER DJARRAD , qui grace à ses orientations précieuses,ses encouragement valorisants, sa direction compétente de ce mémoire ,son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle ;j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Mes vifs Remerciements aux membres du jury pour avoir accepter d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

J'adresse mes sincères Remerciements et ma grande reconnaissance à ma grande famille ,à mes amis et à tous mes professeurs pour leurs soutiens moral et Amical et leurs encouragements valorisants durant ces années d'étude.

Table des matières

Remerciements	I
Table des matières	II
Introduction	1
1 Les équations Différentielles	3
1.1 Introduction	4
1.2 Définition	4
1.3 Résolution d'une équation différentielle	4
1.4 Les types des équations différentielles	4
1.4.1 Les équations différentielles ordinaires (EDO)	4
1.4.2 Les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP)	5
1.5 Les applications des équations différentielles	5
1.5.1 Mécanique	6
1.5.2 Dynamique des Populations	6
1.5.3 Electricité	7
1.5.4 Météorologie	8
1.6 L'importance des équations différentielles	8
1.7 Quelques exemples des équations différentielles	8
1.7.1 Equation de Laplace	9
1.7.2 Equation de Schrödinger	9
1.7.3 Equation de Bernoulli	10
1.7.4 Equation de Riccati	10
1.7.5 Equation de poisson	10
1.7.6 Equation de chaleur	11
1.8 Méthodes de résolution des équations différentielles	11
1.8.1 Méthode exacte (analytique)	11
1.8.2 Méthodes approximatives (numériques)	12

1.9	Aspect fini des ordinateurs	13
2	L'équation De chaleur	14
2.1	Introduction	15
2.2	L'équation de la chaleur	15
2.2.1	Présentation générale	15
2.2.2	L'historique et analyse de Fourier	15
2.3	Transfert de chaleur	17
2.3.1	Définition	17
2.3.2	Modes de transfert de chaleur	17
2.3.3	Champ de température	20
2.4	La loi de Fourier	21
2.5	Exemple unidimensionnelle pour la conduction en régime permanent	21
2.6	Transformées de Fourier finies - Séries de Fourier	22
2.7	Un cas de propagation	23
2.8	Différentes formes de l'équation de la chaleur	24
2.9	Conditions aux limites	24
2.9.1	Conditions aux limites de type Dirichlet (températures imposées)	25
2.9.2	Condition aux limites de Neumann (flux imposés)	26
2.9.3	Condition aux limites de Robin	26
3	RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE CHALEUR STATION-	
	NAIRE A 2D	28
3.1	Introduction	29
3.2	Etapes pour une résolution numérique	29
3.2.1	La stabilité	29
3.2.2	La consistance	30
3.2.3	La convergence	30
3.3	Principe générale des méthodes numériques	30
3.4	Erreur et ordre de précision	30
3.5	Les principales méthodes numériques	31
3.6	Les méthodes à un pas	31
3.6.1	Méthodes d'Euler explicite et implicite	31
3.6.2	Méthode d'Euler amélioré	32
3.6.3	Méthode d'Euler-Cauchy	32
3.6.4	Méthode de Crank-Nicholson	32

3.6.5	Méthodes de Runge et Kutta	32
3.6.6	Méthodes de Runge et Kutta implicites	33
3.6.7	Méthode de Nystrom ou saute-mouton	33
3.7	La discrétisation Temporelle	34
3.8	Discrétisation spatiale de l'équation de chaleur à 2 d par la méthode de différences finies	34
3.9	Méthode de calcul	36
Conclusion		38
Résumé		41

Introduction

L'étude des équations différentielles est un vaste domaine des mathématiques pures et appliquées, de la physique et de l'ingénierie. Toutes ces disciplines s'intéressent aux propriétés des équations différentielles de divers types. Les mathématiques pures mettent l'accent sur l'existence et l'unicité des solutions, tandis que les mathématiques appliquées mettent l'accent sur la stricte justification des méthodes d'approximation des solutions. Les équations différentielles jouent un rôle important dans la modélisation de presque tous les processus physiques, technologiques ou biologiques, du mouvement céleste à la conception de ponts en passant par les interactions neuronales. Les équations différentielles telles que celles utilisées pour résoudre des problèmes de la vie réelle ne peuvent pas nécessairement être résolues directement, c'est-à-dire qu'elles n'ont pas de solutions de forme fermée. Alternativement, les solutions peuvent être approchées en utilisant des méthodes numériques.

De nombreuses lois fondamentales de la physique et de la chimie peuvent être formulées sous forme d'équations différentielles. En biologie et en économie, les équations différentielles sont utilisées pour modéliser le comportement de systèmes complexes. La théorie mathématique des équations différentielles s'est d'abord développée avec les sciences dans lesquelles les équations sont nées et où les résultats sont trouvés pour être mis en pratique. Cependant, des problèmes divers, se posant parfois dans des domaines scientifiques complètement distincts, peuvent conduire à des équations différentielles identiques. Chaque fois que cela se produit, la théorie mathématique derrière les équations peut être considérée comme un principe unificateur derrière les divers phénomènes, . La conduction thermique, développée par Joseph Fourier, est régie par une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'équation de la chaleur. Il s'avère que de nombreuses diffusions, bien qu'apparemment différentes, sont décrites par la même équation ; L'équation de Black-Scholes en finance, par exemple, est liée à l'équation de la chaleur . Ce phénomène de transfert (ou transport), dit irréversible, est causé par l'hétérogénéité d'une physique intensive entre deux systèmes (ou deux régions de même système). Le paramètre de température T est une de ces grandeurs qui va être responsable d'un phénomène de transport particulier. Il va s'agir ici d'un transfert d'énergie thermique ou chaleur qui peut s'effectuer suivant trois processus : conduction, convection et rayonnement. Notre étude porte

sur la conduction thermique et plus précisément dans un rectangle à deux dimensions [2].

Notre projet dans ce mémoire est de trouver la solution numérique basé sur la méthode de discrétisation de différences finies de l'équation différentielle stationnaire à deux dimensions. Pour cela, on va organiser notre mémoire selon le chemin suivant. Dans le premier chapitre, on va exposer brièvement le sujet des équations différentielles, leurs types, quelques exemples, et leurs méthodes de résolution. Le deuxième chapitre est consacré à l'exposition de l'équation de chaleur, son origine, et les différents types de cette équation ainsi que les solutions de Fourier. Le troisième chapitre sera une description de notre programme Maple pour résoudre notre équation bidimensionnelle suivie par des commentaires sur les résultats. A la fin, on présente une conclusion générale de ce travail.

Les équations Différentielles

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va traiter brièvement le sujet des équations différentielles. Après la définition, on va exposer les deux types des équations différentielles (EDO, et EDP), puis leurs applications dans les différents domaines : mécanique, électricité,...etc. puis on va brièvement passer aux formes mathématiques les plus connues des EDP et EPO, et finalement, on explique les méthodes de résolution en basant sur les méthodes numériques.

1.2 Définition

Une équation différentielle d'ordre n est une équation où l'inconnue est une fonction $y(x)$ et qui fait intervenir la dérivée d'ordre n de $y(x)$ et éventuellement $x, y(x)$ et les dérivées intermédiaires. Sa forme générale est

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Les solutions sont déterminées à des constants près qu'on peut les déterminer si on ajoute des conditions initiales.

1.3 Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I , c'est trouver toutes les fonctions dérivables n fois sur I solution de l'équation. Quand ces solutions ont toutes la même forme on peut donner cette forme générale appelée solution générale de l'équation.

1.4 Les types des équations différentielles

On distingue généralement deux types d'équations différentielles

1.4.1 Les équations différentielles ordinaires (EDO)

Une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

1.4.2 Les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP)

Une équation différentielle partielle (plus communément équation aux dérivées partielles, ou EDP) est une équation où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables. Sans plus de précision, le terme équation différentielle fait le plus souvent référence aux équations différentielles ordinaires.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrés par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasitotalité des problèmes.

On rencontre également d'autres types d'équations différentielles (liste non-exhaustive)

- **les équations intégrons-différentielles** qui font intervenir les dérivées de fonction(s) et ses/leurs intégrale(s) ;
- **les équations différentielles holomorphes (EDH)** où la ou les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable complexe ;
- **les équations différentielles stochastiques (EDS)** où un ou plusieurs termes de l'équation différentielle sont des processus stochastiques ;
- **les équations différentielles abstraites (en) (EDA)** où les fonctions inconnues et leurs dérivées prennent leurs valeurs dans des espaces fonctionnels abstraits (espace de Hilbert, espace de Banach, etc.) ;
- **les équations différentielles à retard (en) (EDR)** dans laquelle la dérivée de la fonction inconnue à un moment donné est donnée en termes de valeurs de la fonction aux temps précédents

1.5 Les applications des équations différentielles

Les équations différentielles EDO décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés (thermodynamique, radioactivité mécanique classique (chute libre), Dynamique des populations, Circuits électriques, Évolution d'une population de saumons), comme le montrent les exemples suivants

1.5.1 Mécanique

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension pour une particule ponctuelle fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (1.2)$$

où x désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et f représente les forces appliquées sur la particule.

Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à une instante origine : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v = \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases. Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(v, t)$ dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse : $\dot{v} = f(v, t)$ peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$. Si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

on obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

1.5.2 Dynamique des Populations

De nombreuses modélisations de dynamique des populations [1] (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798) qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d

$$\begin{cases} \dot{N} = bN - dN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non-linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{k}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

où α et k sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme nonlinéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite k .

1.5.3 Electricité

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Les différentes lois de l'électricité montrent que cet état est régi par un système d'équation différentielle. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C , le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée

$$U_R = F(I_R) \quad (1.7)$$

On a les équations différentielles

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L \\ C \frac{dU_C}{dt} = I_C \end{cases} \quad (1.8)$$

assorties des relations

$$\begin{aligned} U_C &= U_L + U_R, \\ I_R &= I_L = -I_C \end{aligned} \quad (1.9)$$

Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on sera même à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ C \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (1.10)$$

dans le cas particulier où

$$F(x) = x^3 - x \quad (1.11)$$

ce système est connu sous le nom d'équation de Van der Pol.

1.5.4 Météorologie

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres météorologiques (température, humidité, pression, etc...) sont très complexes [1]. Un système très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations a été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (1.12)$$

Pour les EDP, ils sont omniprésents dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

1.6 L'importance des équations différentielles

Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations... La variable t représente alors souvent le temps, même si d'autres choix de modélisation sont possibles. Les objectifs principaux de la théorie des équations ordinaires sont la résolution explicite complète quand elle est possible, la résolution approchée par des procédés d'analyse numérique, ou encore l'étude qualitative des solutions. Ce dernier domaine s'est progressivement étoffé, et constitue l'un des composants principaux d'une vaste branche des mathématiques contemporaines : l'étude des systèmes dynamiques.

1.7 Quelques exemples des équations différentielles

Une équation différentielle partielle très simple de point de vue mathématique est

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

Où u est une fonction inconnue de x et y . Cette équation implique que les valeurs $u(x, y)$ sont indépendantes de x . Les solutions de cette équation sont

$$u(x, y) = f(y) \quad (1.14)$$

où f est une fonction de y . L'équation différentielle ordinaire

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (1.15)$$

a pour solution :

$$u(x) = c \quad (1.16)$$

avec c une valeur constante (indépendante de x).

Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une équation différentielle ordinaire met en jeu une constante arbitraire, tandis que les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires. Une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique.

Trois catégories importantes d'EDP sont les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du second-ordre dites elliptiques, hyperboliques, et paraboliques. Voici quelques exemples des EDP

1.7.1 Equation de Laplace

L'équation de Laplace est une EDP de base très importante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.17)$$

où $u = u(x, y, z)$ désigne la fonction inconnue.

Il est possible d'écrire cette fonction de manière analytique dans certaines conditions limites et avec une géométrie donnée, par exemple avec des coordonnées sphériques. En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur Laplacien Δ

$$\Delta u = 0 \quad (1.18)$$

1.7.2 Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger 1925 [3], est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de dynamique

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right] \psi \quad (1.19)$$

Δ l'opérateur de Laplace.

1.7.3 Equation de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli [4] est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t)y^n \quad (1.20)$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendant et ou des constantes connues, avec la condition $n \neq 0, 1$. Bien entendu, si $n = 0$, l'équation (1.20) devient une équation linéaire avec second membre ; et si $n = 1$, elle devient une équation linéaire sans second membre.

1.7.4 Equation de Riccati

Une équation différentielle de Riccati est une équation [5] différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t) \quad (1.21)$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues de x . L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière y_p de cette équation. Généralement, on utilise le changement de variable

$$z = y - y_p \quad (1.22)$$

Pour simplifier cette équation.

1.7.5 Equation de poisson

L'équation de Poisson à deux dimensions est [7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = s(x, y) \quad (1.23)$$

Un exemple d'équation de Poisson est celle vérifiée par le potentiel électrostatique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.24)$$

où ρ est la densité volumique de charge électrique et ε la permittivité électrique du milieu. Un autre exemple est l'équation de la chaleur en régime stationnaire vérifiée par la température

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\sigma(x, y)}{\lambda} \quad (1.25)$$

où $\sigma(x, y)$ est la source thermique et λ la conductivité thermique.

1.7.6 Equation de chaleur

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier [5] après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, surplus d'un siècle.

Une variante de cette équation est très présente en physique sous le nom générique d'équation de diffusion. On la retrouve dans la diffusion de masse dans un milieu binaire ou de charge électrique dans un conducteur, le transfert radiatif ,etc. Elle est également liée à l'équation de Burgers et à l'équation de Schrödinger[6]. Sa forme originale est

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + r \quad (1.26)$$

1.8 Méthodes de résolution des équations différentielles

On appelle solution (ou intégrale) de l'équation différentielle

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.27)$$

la fonction y n fois dérivable définie sur I telle que pour tout t de I , on ait

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.28)$$

On distingue deux méthodes de résolution pour les équations différentielles en générale

1.8.1 Méthode exacte (analytique)

Résoudre ou intégrer une équation différentielle (1.24) consiste à rechercher

- un intervalle I de R ,
- une fonction y suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I

Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites) ne peuvent pas être déterminées dans le cas général, et ne

concernent que les cas académiques connus depuis longtemps. Ces cas sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour la pratique, en particulier au niveau des géométries. Ils permettent de mettre en pratique la méthode de séparation des variables, ou les séries de Fourier. On cherche donc des méthodes permettant d'approcher le comportement de la structure, la notion d'approximation est inhérente aux méthodes numériques de résolution des problèmes.

1.8.2 Méthodes approximatives (numériques)

La Résolution numérique d'une équation différentielle approchée sur l'intervalle $[t_0, t_0 + L]$ de longueur L est basée sur la discrétisation par découpage de cet intervalle de longueur L [7]. Selon un pas constant h l'échantillonnage de la solution $y(t)$ aux instants

$$t_i = t_0 + i.h \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad (1.29)$$

Se note par les y_i . À partir de la condition initiale

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.30)$$

On peut faire une boucle sur les abscisses t_i pour calculer l'approximation y_{i+1} à t_{i+1} moyennant notre équation différentielle. À chaque pas de la boucle, pour calculer y_{i+1} , on peut s'appuyer sur

- La dernière valeur calculée u_i : méthodes à un pas
- Plusieurs valeurs u_{i-k} ($k \geq 0$) antérieurement calculées : méthodes à plusieurs pas (initialisation nécessaire par méthode à un pas). On cite par suite trois méthodes de résolution numérique pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret

(a) Les différences finis

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. D'après le développement de Taylor, on a

$$f(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0) + O(x - x_0)^2 \quad (1.31)$$

on tire alors la dérivée

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.32)$$

Ainsi, on a remplacé la dérivée qui est une différence infinitésimale par une différence finie pour des petites intervalles $[x, x_0]$. On peut faire la même chose pour les dérivées d'ordre 2 (voir

chapitre 3) et plus élevé de la même manière [8].

(b) Les volumes finis

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.[8]

(c) Les éléments finis La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme vibrationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.[8]

1.9 Aspect fini des ordinateurs

La solution exacte d'un problème d'EDO ou d'EDP est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. En effectuant un calcul numérique, un ordinateur ne peut retenir qu'un nombre fini de chiffres pour représenter les opérandes et les résultats des calculs intermédiaires. Les solutions approchées seront calculées comme des ensembles de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. La représentation des nombres dans un ordinateur introduit la notion d'erreur d'arrondi ou de troncature. Ces erreurs peuvent se cumuler sur un calcul et la solution numérique finale pourra s'avérer très éloignée de la solution exacte.

L'équation De chaleur

2.1 Introduction

Le transfert thermique ou bien la diffusion de chaleur est un phénomène physique intéressant grâce à son intérêt dans la vie quotidienne. Dans ce chapitre, on va aborder le sujet de l'équation de chaleur qu'on appelle aussi l'équation de diffusion de point de vue physique et mathématique. Après une présentation générale du sujet et l'historique, on va exposer les trois modes de transfert de chaleur, puis, on va présenter l'équation de chaleur de Fourier dans le cas général, puis dans ses différentes formes, et finalement, les conditions aux limites qu'on peut rencontrer lors d'un problème de diffusion en particulier.

2.2 L'équation de la chaleur

2.2.1 Présentation générale

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisent l'évolution de la température avec des séries trigonométriques[1], appelés depuis série de Fourier et transformées de Fourier. Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques.

La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) L'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Les transferts d'énergies sont déterminés à partir de l'évolution de la température dans le temps et dans l'espace

$$T = f(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

Pour déterminer l'évolution de cette température, il faut résoudre les équations de conduction de chaleur correspondant en connaissant les conditions initiales.

2.2.2 L'historique et analyse de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768-Paris 1830) 'était obsédé par l'étude de la chaleur, le sujet "chaud" de l'époque [2]. Il suivit en 1798 l'expédition de Napoléon en Egypte. De retour en France (vers 1801), il concentra son activité sur les mathématiques et enseigna l'analyse à l'Ecole Polytechnique. Vers 1802 – 1804, il trouva l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, et en 1807, il mit au point une méthode pour la résoudre :

l'analyse de Fourier. Il utilisa sa technique mathématique pour élucider de nombreux exemples de propagation de la chaleur. Il remplaçait une fonction unique, mais difficile à décrire mathématiquement, par une série beaucoup plus maniable de fonctions sinus ou cosinus, dont la somme reconstituait la fonction initiale.

L'analyse de Fourier défiait les théories mathématiques auxquelles ses contemporains adhéraient sans réserve. Au début du XIX siècle, nombre de mathématiciens parisiens parmi lesquels Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1797), Biot (1744-1862) et Poisson (1781-1840) n'acceptaient pas la conjecture de Fourier. Leonhard Euler (1707-1783) releva des lacunes dans la théorie de Fourier. Aussi, lorsque Fourier exposa sa conjecture lors d'une réunion de l'Académie des sciences, Lagrange se leva et déclara la tenir pour fausse. Mais, l'Académie lui décerna un prix en 1811 pour sa théorie mathématique des lois de propagation de la chaleur et sa vérification expérimentale. Les importantes réserves émises en retardèrent la publication jusqu'en 1815. Ce ne fut qu'en 1822 qu'elle parut sous une forme achevée dans son livre "théorie analytique de la chaleur".

En dépit de ces objections, la mathématicienne Sophie Germain (1776-1831) et l'ingénieur Claude Navier étendirent la théorie de Fourier à d'autres domaines que la transmission de chaleur. La question de la convergence de la série de Fourier réapparut à la fin du XIX siècle, lors de tentatives pour prédire les mouvements des marées. L'analyse de Fourier reste inapplicable à certaines fonctions inhabituelles par exemple celles qui possèdent un nombre infini de sauts infinis sur un intervalle fini.

De vastes domaines nouveaux des mathématiques ont été développés à partir de recherches pour savoir si la série de Fourier de telle ou telle fonction donnée est convergente. Un exemple en est la théorie des fonctions généralisées ou distributions à laquelle s'attachent les noms de George Temple, Jan Mikunski et Laurent Schwartz (1915-). La théorie de Laurent Schwartz nous permet d'utiliser l'analyse de Fourier pour résoudre des équations mettant en jeu des concepts intuitifs tels que point massif, point chargé, dipôle magnétique ou charges concentrées sur une poutre.

Après environ deux siècles de développement, la théorie de l'analyse de Fourier est à présent solidement structurée et bien comprise.

2.3 Transfert de chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final [3].

2.3.1 Définition

Un transfert thermique, appelé plus communément chaleur, est un transfert d'énergie microscopique désordonnée. Cela correspond en réalité à un transfert d'agitation thermique entre particules, au gré des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique.

2.3.2 Modes de transfert de chaleur

On distingue trois mécanismes d'échange de chaleur entre milieux matériels [4]

(a) Conduction

La conduction est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre. Au plan corpusculaire, l'interprétation est la suivante : une zone chaude est occupée par des particules à vitesse élevée, par définition même de la température. Le mouvement brownien fait constamment passer des particules d'une zone à l'autre ; mais entre zones à températures inégales, les particules ont des énergies cinétiques différentes ; le brassage a pour effet de transférer de l'énergie cinétique d'agitation, des zones chaudes vers celles qui le sont moins. La manifestation macroscopique en est un transfert de chaleur. C'est donc un mécanisme de chocs qui intervient. Fig. 2.1

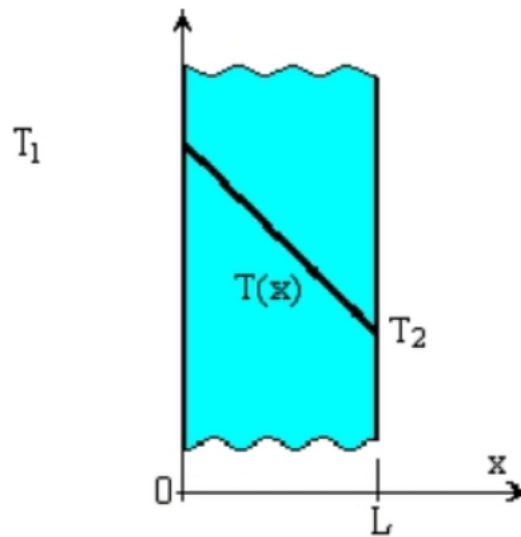


Figure :2.1 Conduction thermique dans une plaque

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc. Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur [5].

(b) Rayonnement

Le rayonnement est une transmission d'énergie à distance, entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel (transformation d'énergie thermique d'un émetteur en énergie électromagnétique, propagation, transformation partielle en énergie thermique sur un corps récepteur) [4]. C'est le cas de l'énergie qui nous vient du soleil. L'interprétation physique est la suivante : tout corps émet des particules désignées par "photons" ; ceux-ci se déplacent à la vitesse de la lumière et transportent une énergie fonction de leur "longueur d'onde".

Un corps C émettant des photons dans toutes les directions possibles, certains d'entre eux sont reçus par l'autre corps C' , éventuellement absorbés, en tout ou partie. Bien entendu, le corps C' émet aussi des photons dont certains seront reçus et absorbés par C . Le bilan net se traduit par un échange d'énergie entre C et C' .

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son

action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent [6] :

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.) ;
- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...) ;
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...);
- Les polymérisations (encres, revêtements, emballages...) ;
- La stérilisation (flacons pharmaceutique, produits alimentaires divers...).

Le rayonnement ultraviolet est constitué de photons dont l'énergie est de l'ordre de grandeur de l'énergie des liaisons atomiques. Ceux-ci agissent sur la matière par déplacement des électrons vers des niveaux énergétiques supérieurs. Lorsque la matière soumise au rayonnement y est sensible, il s'y produit des réactions chimiques. La partie du rayonnement ultraviolet absorbée par la matière et qui n'est pas utilisée à la réaction chimique est transformée en chaleur.

Dans la pratique, cet échauffement reste faible et le rayonnement ultraviolet est principalement utilisé dans le domaine des réticulations de films plastiques et des polymérisations de produits organiques comme les encres d'imprimerie, les laques et vernis, opérations qui sont souvent appelées improprement séchages.

(c) Convection

La convection est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi, La cause profonde est encore une agitation des particules fluides, mais à une échelle beaucoup moins microscopique. Les parcelles de matière au contact de la paroi (chaude par exemple) s'échauffent par conduction ; le mouvement du fluide reporte ces parcelles dans la masse où elles cèdent par mélange une partie de la chaleur reçue ; d'autres les remplacent à la paroi et ainsi de suite [4].

Quant au mouvement du fluide, il peut avoir deux causes. Ou bien il est imposé de l'extérieur par une machine (pompe, ventilateur, compresseur) ; c'est la convection forcée. Ou bien le contact du fluide avec la paroi plus chaude ou plus froide crée des différences de masse volumique, génératrices de mouvement au sein du fluide ; c'est la convection naturelle. Rigoureusement, même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de convection mixte quand

les deux phénomènes ont de l'importance.

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur. Fig. 2.2.

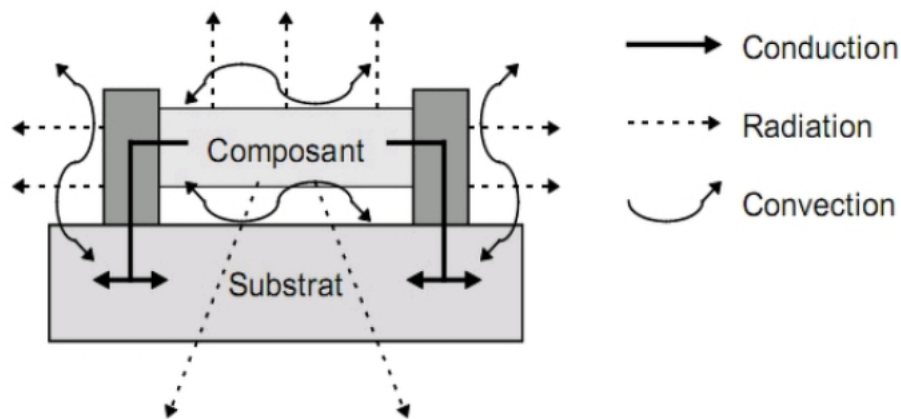


Figure 2.2 Représentation des trois modes de transfert de chaleur [7].

2.3.3 Champ de température

Les transferts d'énergie w sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température

$$w = g(x, y, z, t, T) \quad (2.2)$$

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire [3].

2.4 La loi de Fourier

Pour un milieu isotrope, à travers une surface isotherme montre que le flux thermique, par conduction, dans une direction donnée est proportionnel à l'aire A normale à la direction du flux thermique et au gradient de température à cette direction. Le flux thermique Q , (dans la direction x par exemple), conformément à la loi de Fourier est donné par la relation [11]

$$Q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} A \quad (2.3)$$

λ est une constante, T étant la température. Ou si l'on exprime la densité du flux thermique

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} [\text{W/m}^2] \quad (2.4)$$

Le coefficient de proportionnalité λ , appelé coefficient de conductivité thermique, dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.) ; il se mesure en $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ et il est toujours positif car la chaleur se transmet des zones chaudes vers les zones froides. Si la température décroît dans la direction positive x , alors dT/dx est négatif.

Le flux thermique Q_x et la densité du flux thermique q_x étant des quantités positives dans la direction positive x , alors il est nécessaire d'introduire le signe moins dans le membre droite des expressions (2.3) et (2.4). Si le membre droite des expressions (2.3) et (2.4) est négatif alors le flux thermique (et également la densité du flux thermique) est orienté dans la direction négative x .

Dans le cas général, dans l'espace à plusieurs dimensions, la loi de Fourier est donnée par la relation

$$Q = -\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{A} \quad (2.5)$$

où \vec{A} est le vecteur normal à l'aire A . La densité du flux thermique est

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (2.6)$$

En général la conductivité thermique λ varie en fonction de la température. À des basses températures, cette variation peut être négligée [5].

2.5 Exemple unidimensionnelle pour la conduction en régime permanent

Nous raisonnons, pour plus de clarté, dans le cadre d'un problème à une seule dimension voir figure 2.3. Un tel problème unidimensionnel est connu sous le nom de problème du mur,

c'est-à-dire d'un milieu limité par deux plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. Le gradient de température est par conséquent porté par cette normale. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces [9].

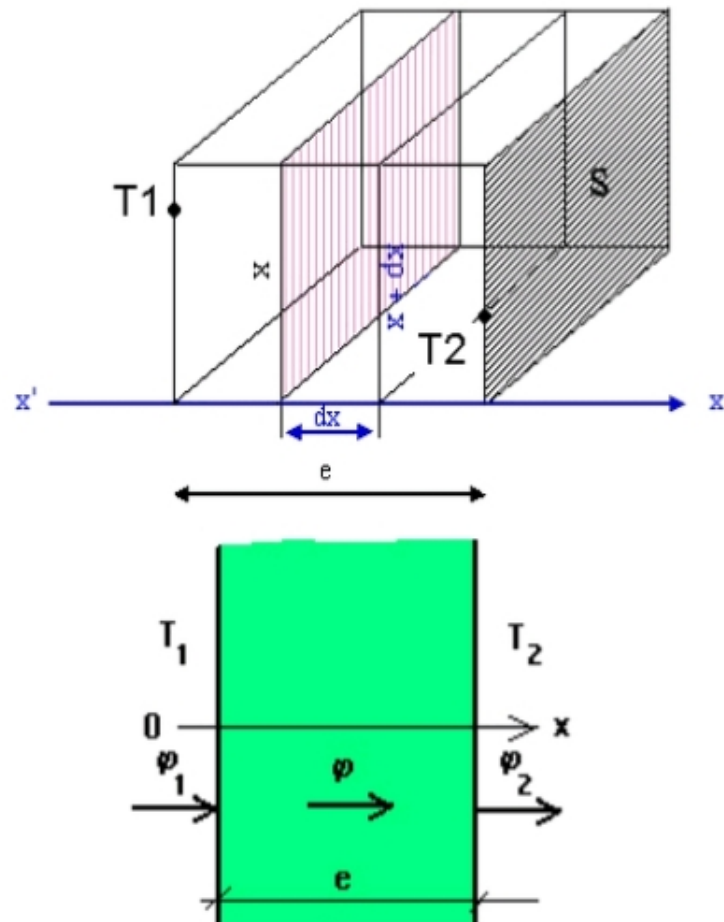


Figure. 2.3 Conduction dans un mur plan

Un tel champ thermique est unidirectionnel. Dans ce cas, la température T n'est fonction que de l'abscisse.

2.6 Transformées de Fourier finies - Séries de Fourier

Les transformées Fourier finies sont définies à l'aide des séries sinus et cosinus de Fourier. Elles sont aussi connues sous le nom des Séries de Fourier. La transformée sinus finie de Fourier de $f(x)$ sur $0 < x < 1$, est définie par

$$f(x) = \frac{2}{L} \sum_0^{+\infty} F_s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.7)$$

avec les constantes

$$F_s(n) = \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.8)$$

n est un entier positif, et L la période de f . De même, la transformée cosinus finie de Fourier de $f(x)$ sur $0 < x < 1$, est définie par

$$f(x) = \frac{1}{L} F_c(0) + \frac{2}{L} \sum_0^{+\infty} F_c(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.9)$$

et

$$F_c(n) = \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.10)$$

Ces transformées nous permettent d'écrire une fonction périodique non continue en fonction des sinus et cosinus et déterminer quelques sommes discrètes.

2.7 Un cas de propagation

L'évolution des températures aux divers points d'un anneau de fer a été l'un des premiers phénomènes analysés par la technique de Fourier. Un cas de propagation particulièrement instructif et qui ne présente aucune difficulté de calcul est donc le suivant : On place une flamme sous une région d'un anneau. Lorsqu'une partie de l'anneau est chauffé au rouge, on le retire du feu et on l'enfouit dans un sable fin isolant. On mesure alors la répartition des températures tout autour de l'anneau et son évolution dans le temps. Juste après le chauffage, la température est irrégulièrement répartie : une moitié est uniformément chaude, l'autre uniformément froide et entre-elles, la température décroît brutalement. Pour l'analyse, on déroule l'anneau et on mesure la température en chaque point, pour obtenir une répartition de la température le long du pourtour de l'anneau.

Fourier proposa la décomposition de la répartition initiale discontinue en une somme d'un grand nombre (éventuellement infini) de sinusoides, c'est-à-dire cette répartition est décomposée en plusieurs courbes sinusoidales

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \exp(inx) \quad (2.11)$$

En additionnant $n = 16$ de ces courbes, on obtient une bonne approximation de la température initiale. A mesure que la chaleur se propage de la région chaude vers la région froide, les températures s'égalisent peu à peu. Bientôt, la distribution de la chaleur sur l'anneau est presque sinusoidale. Le graphique(2.7) représentant la valeur de la température en fonction de la position sur l'anneau a une forme en S , analogue aux fonctions sinus ou cosinus. Ensuite, la sinusoides s'aplatit graduellement jusqu'à ce que tous les points de l'anneau soient à la même température.

2.8 Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation de la chaleur prend des formes différentes [10] - Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent. L'équation de la chaleur se réduit alors à

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0 \quad (2.12)$$

C'est l'équation de Laplace. - Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent :

$$\Delta T + \frac{s}{k} = 0 \quad (2.13)$$

C'est l'équation de Poisson. - Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable :

$$\Delta T = \frac{pc}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14)$$

C'est l'équation de Fourier. Finalement, on note qu'il existe d'autres formes non linéaires plus compliquées. [10]

2.9 Conditions aux limites

Pour la résolution d'une équation de transfert thermique, des conditions initiales (CI) et aux limites (CL) adéquates sont nécessaires. Les conditions initiales spécifient la distribution de la température à l'instant $t = 0$. Les conditions aux limites spécifient les conditions thermiques aux frontières du domaine de calcul. Par exemple, sur une frontière, on peut spécifier la distribution de la température, ou la distribution de la densité du flux thermique, ou un transfert thermique par convection vers le fluide environnant ayant une température connue et un coefficient de transfert thermique aussi connu [5].

Par la suite on présente la représentation mathématique (Fig. 2.4) des trois types de conditions aux limites appelées températures imposées, densité du flux thermique imposée et condition à la limite par convection.

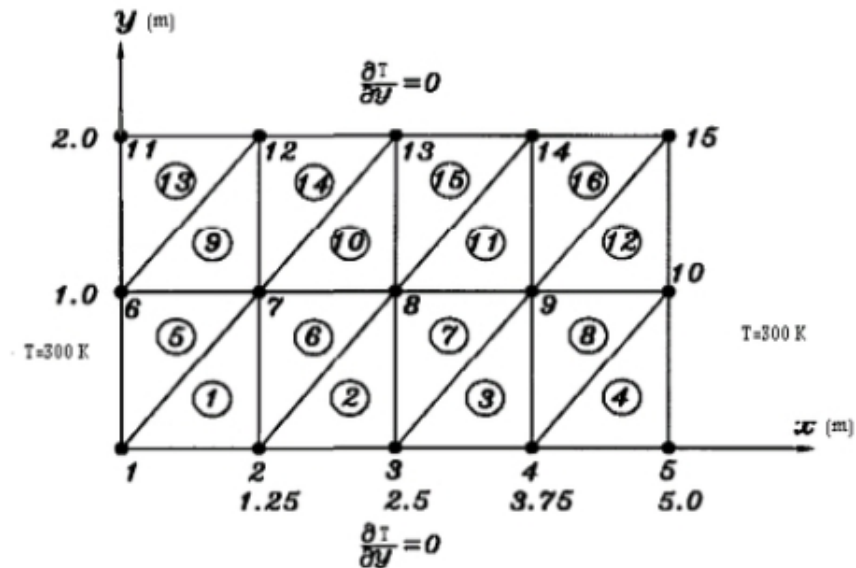


Figure 2.4 Représentation des différents types des conditions aux limites

2.9.1 Conditions aux limites de type Dirichlet (températures imposées)

Dans de nombreuses applications pratiques la température est considérée connue sur les frontières du domaine de calcul. Par exemple, une surface de frontière en contact avec la glace qui se fond est maintenue à une température uniforme ou la distribution de la température sur la frontière est connue en fonction du temps. On considère à trois dimensions une plaque d'épaisseur L illustrée à la figure (2.5) où on suppose que la surface de la frontière à $x = 0$ est maintenue à la température uniforme T_1 et la surface de la frontière à $x = L$ à la température uniforme T_2 .

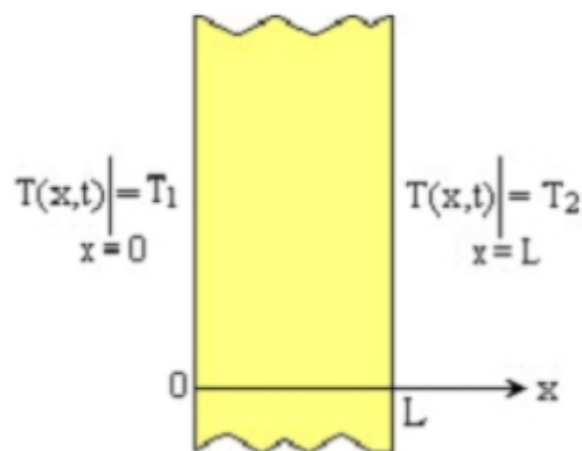


Figure (2.5) Condition aux limites de type Dirichlet (CLD).

Les conditions aux limites peuvent être écrites ainsi

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1, \\ T(L, t) &= T_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans certains cas, la distribution de la température aux frontières est spécifiée en fonction de la position et du temps. Quand la valeur de la température est spécifiée à la frontière, on dit que la condition à la limite est de type Dirichlet.

2.9.2 Condition aux limites de Neumann (flux imposés)

En mathématiques, une condition aux limites de Neumann (CLN) - nommée d'après Carl Neumann - est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières limites du domaine. Pour l'exemple précédent (illustré dans la figure 2.5), les CLNs s'expriment par

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= a, \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} &= b \end{aligned} \quad (2.16)$$

Où a et b sont des constantes.

2.9.3 Condition aux limites de Robin

En mathématique, une condition aux limites de Robin (CLR) est un type de condition aux limites portant le nom du mathématicien français Victor Gustave Robin (1855-1897), qui a travaillé dans le domaine de la thermodynamique [11]. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine. Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Ceci contraste avec la condition aux limites mêlée, constituée de conditions aux limites de types différents imposées chacune sur une partie du bord du domaine. La condition aux limites de Robin est aussi appelée condition d'impédance, en raison de son rôle dans les problèmes d'électromagnétisme.

Si Ω est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine (la frontière), la condition aux limites de Robin est de la forme

$$aT + b \frac{\partial T}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.17)$$

où a, b et g sont des fonctions bien définies, et $\frac{\partial T}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure sur le bord. En dimension un, si, par exemple, $\Omega = [0, L]$, la condition (2.15) s'écrit

$$\begin{aligned} aT(0) + bT'(0) &= g(0), \\ aT(L) + bT'(L) &= g(L) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Remarquons que le signe devant le terme dérivé change selon la partie du bord considérée : la raison est que le vecteur normal à $[0, L]$ au point 0 pointe vers la direction négative (gauche), tandis qu'en L ce vecteur pointe vers les positifs. La condition aux limites de Robin est souvent utilisée dans la résolution des problèmes de Sturm-Liouville

**RESOLUTION NUMERIQUE DE
L'EQUATION DE CHALEUR
STATIONNAIRE A 2D**

3.1 Introduction

Pour une équation différentielle, il existe des méthodes de résolution en forme locale ou en forme faible. La forme locale est la solution analytique, et la forme faible représente la solution approchée. Le cas transitoire est toujours plus délicat à résoudre que le cas stationnaire. A deux dimensions, l'équation de chaleur stationnaire est linéaire, et on peut la résoudre analytiquement par la méthode de séparation de variables. Notre objectif dans ce chapitre, est de trouver des solutions discrètes de notre équation pour un système rectangulaire ou carré par la méthode de différence finies moyennant un programme de Maple. Pour cela, on va commencer ce chapitre par les étapes nécessaires pour une résolution numérique, ainsi que ses trois conditions de fiabilité qui sont la convergence, la stabilité et la consistance, puis on va décrire avec des exemples concrets selon le pas de discrétisation, les deux principaux types d'une méthode numérique. Après cela, on va expliquer la méthode de différence finie, ainsi que notre algorithme Maple.

3.2 Etapes pour une résolution numérique

Les différentes étapes pour modéliser puis résoudre un système complexe sont :

- a- Recherche d'un modèle mathématique représentant la physique.
- b- Mise en équation.
- c- Elaboration d'un maillage. Discrétisation des équations
- d- Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- e- Transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- f- Simulation numérique et exploitation des résultats.

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

3.2.1 La stabilité

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée. La stabilité indique si l'erreur augmente ou non au cours du calcul. Une méthode peut être stable sous condition (elle sera dite conditionnellement stable) ou toujours stable (elle sera dite inconditionnellement stable).

3.2.2 La consistance

C'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation (Δt et Δx) tendent vers zéro.

3.2.3 La convergence

C'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée !

3.3 Principe générale des méthodes numériques

Pour obtenir une approximation numérique de la solution $y(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$, nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points x_i , pour $i = 0; 1; \dots; n$, constituant les nœuds du maillage. La solution numérique discrète obtenue aux points x_i est notée $y_i = y(x_i)$.

L'écart entre deux abscisses, noté h , est appelé pas de discrétisation. Ce pas, dans les méthodes les plus simples, est constant, mais il peut être judicieux de travailler avec un pas variable $h_i = f(x_i)$. Le choix du maillage et de la répartition des nœuds peuvent s'avérer crucial. Les techniques de résolution des EDO sont basées sur :

- L'approximation géométrique de la fonction
- Les formules d'intégration numérique (rectangle, trapèze, Simpson...)
- Les développements de Taylor au voisinage de x_i . cf. équation (1.31)

3.4 Erreur et ordre de précision

A ces propriétés, il convient d'ajouter la notion de précision ainsi que des aspects informatiques comme la facilité de mise en œuvre, les coûts CPU et mémoire [1]. L'erreur de troncature est définie comme la différence entre la solution exacte $y(x)$, et l'approximation numérique obtenue $y(x_i)$. Soit

$$\epsilon_n = |y(x_n) - y_n| = O(h^p) \quad (3.1)$$

p représente l'ordre de précision de la méthode.

3.5 Les principales méthodes numériques

Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.8.2, les principales méthodes de résolution numérique des EDO sont séparées en deux grands types [2]

3.6 Les méthodes à un pas

La formulation générale des méthodes à un pas explicite est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n, h) \end{cases}$$

où la fonction ϕ définit la méthode utilisée. La formulation générale des méthodes à un pas implicite est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h) \end{cases}$$

L'obtention de la solution à chaque abscisse nécessite la résolution d'une équation. Ces méthodes sont obtenues en intégrant l'équation différentielle et en utilisant des formules d'intégration numérique pour le second membre. L'ordre du schéma est égal au degré du polynôme pour lequel l'intégration est exacte +1.

3.6.1 Méthodes d'Euler explicite et implicite

Méthode explicite, d'ordre 1, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

La méthode peut s'interpréter de plusieurs manières :

- 1) Via les formules d'intégration numérique : la méthode est le résultat de l'application de la formule des rectangles basée au point x_n .
- 2) Géométriquement : la méthode revient à remplacer localement en chaque point x_n la courbe solution par sa tangente.
- 3) Via les développements de Taylor : la méthode provient du développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction y au voisinage de x_n .

Méthode implicite, d'ordre 1, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

3.6.2 Méthode d'Euler amélioré

Méthode explicite dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y_{n+1}^* &= y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^*) \end{cases}$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en (x_n, y_n) par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$.

3.6.3 Méthode d'Euler-Cauchy

Méthode explicite dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y_{n+1}^* &= y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)] \end{cases}$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en (x_n, y_n) par la moyenne de cette pente avec la valeur corrigée en x_{n+1} .

3.6.4 Méthode de Crank-Nicholson

Méthode implicite, d'ordre 2, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \end{cases}$$

Elle est obtenue en utilisant la formule d'intégration numérique des trapèzes.

3.6.5 Méthodes de Runge et Kutta

Ce sont des méthodes d'ordre élevé, obtenues à partir des formules d'intégration numérique plus précises que la formule des rectangles.

Une méthode explicite, d'ordre 2, peut être obtenue par l'utilisation de la formule des trapèzes.

L'algorithme, noté RK2, s'écrit :

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné} \\ y_{n+1}^* &= y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)] \end{cases}$$

Une méthode explicite, d'ordre 4, peut être obtenue par l'utilisation de la formule de Simpson.

L'algorithme, noté RK4, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ donné} \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

3.6.6 Méthodes de Runge et Kutta implicites

Des méthodes de Runge et Kutta implicites (ou méthodes de Radau) peuvent aussi être construites à partir des techniques d'intégration numériques. Une méthode implicite, d'ordre 3, peut être obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ donné} \\ k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{12}(5k_1 - k_2)\right) \\ k_2 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2)\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(3k_1 + k_2) \end{array} \right.$$

Il est nécessaire de résoudre un système linéaire pour évaluer k_1 et k_2 . Par exemple, les paramètres (a_{ij}) , (b_i) et (c_i) pour les méthodes d'ordre 3 et 5 sont :

1/3	5/12	-1/12	$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
1	3/4	1/4	$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
	3/4	1/4		$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
			$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$	

3.6.7 Méthode de Nystrom ou saute-mouton

Méthode à 2 pas dont l'algorithme est :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ donné} \\ y_1 \text{ calculé avec une méthode à un pas} \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n) \end{array} \right.$$

Géométriquement : on considère la droite de pente $f(x_n, y_n)$ passant par le point (x_{n-1}, y_{n-1}) parallèle à la tangente passant par (x_n, y_n) . La valeur y_{n+1} est l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse x_{n+1} .

3.7 La discrétisation Temporelle

L'intégration temporelle permet d'obtenir l'évolution au cours du temps du vecteur des températures aux nœuds du maillage, et donc par approximation nodale la température et son gradient en tout point du solide. On résout ce problème pas à pas dans le temps. On peut par exemple utiliser un schéma aux différences finies explicite. On part de la condition initiale à $t = 0$ puis, on estime à chaque instant par incréments successifs $\tau = \Delta t$. La solution est approchée en espace par la méthode par éléments finis et en temps par la méthode des différences finies. Ce problème pourrait être résolu avec d'autres méthodes : la méthode par décomposition modale, des méthodes d'intégration directe dans le temps (méthode d'Euler explicite ou implicite, les méthodes semi explicites, la méthode de Crank-Nicholson...) [4].

3.8 Discrétisation spatiale de l'équation de chaleur à 2 d par la méthode de différences finies

Dans le développement (1.32) on définit notre pas spatial d par

$$x = x_0 + dd \ll 1 \quad (3.13)$$

et on obtient alors la forme discrétisée de la première dérivée

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0 + d) - f(x_0)}{d} \quad (3.14)$$

Les valeurs discrétisées de f sont notées par

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f_i \\ f(x_0 \pm d) &= f_{i \pm 1}, \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Alors on obtient

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{d} \quad (3.16)$$

Le développement de Taylor pour 2^{eme} ordre s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} + O(x - x_0)^3 \quad (3.17)$$

or

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x) - f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0)}{(x - x_0)^2} \quad (3.18)$$

On traite deux cas

- Si : $x = x_0 + d$, on trouve

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x_0 + d) - f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} d}{d^2} \quad (3.19)$$

- Si : $x = x_0 - d$, on obtient

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} = 2 \frac{f(x_0 - d) - f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} d}{d^2} \quad (3.20)$$

par sommation de (3.19) et (3.20), et en tenant compte de (3.15), on obtient

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{d^2} \quad (3.21)$$

Pour l'équation de chaleur indépendante de temps à deux dimensions

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.22)$$

on a besoin de deux indices i , et j pour les variables x , et y respectivement. Alors, les dérivées discrétisées (en tenant compte de (3.21)) sont

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_i &= \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{d^2} \\ \left. \frac{d^2 T}{dy^2} \right|_j &= \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{d^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

et on trouve bien sa version discrétisée

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{d^2} = -\frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{d^2} \quad (3.24)$$

On simplifie par la supposition $d = d'$, et on trouve

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 4T_{i,j} \quad (3.25)$$

Cette relation exprime la corrélation entre les régions infinitésimales de la géométrie bidimensionnelle. Chaque élément de la matrice T est la moyenne de ces quatre plus proches voisins. Elle peut se représenter par la figure 3.1.

Notre problème est d'étudier la distribution de la chaleur sur une plaque rectangulaire de dimensions $L \times L'$ à l'équilibre mis aux conditions aux bords de type Dirichlet. Alors, pour les quatre côtés (respectivement : gauche, supérieur, droite, et inférieur), on a les relations

$$\begin{aligned} T_{i,0} &= C_g(i) \\ T_{0,j} &= C_s(j) \\ T_{i,L'} &= C_d(i) \\ T_{L,j} &= C_i(j) \end{aligned} \quad (3.26)$$

pour $0 \leq i \leq L$, et $0 \leq j \leq L$,

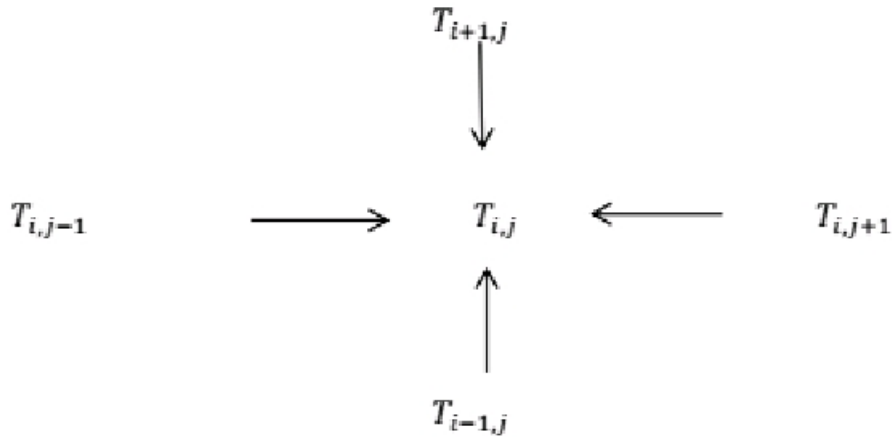


Figure 3.1 l'influence des quatre plus proches voisins sur l'élément central.

Les deux relations (3.25), et (3.26) nous ramène à un système d'équation dont les solutions sont les éléments de la matrice T la solution de notre équation différentielle (3.22). Voir l'annexe ci-joint.

3.9 Méthode de calcul

Dans notre programme Maple, (voir l'annexe). Tout d'abord on fixe les deux dimensions de notre rectangle qu'on appel $L = L_h$ pour le nombre de lignes et $L' = L_v$ pour le nombre des colones. Dans notre cas, on fait un simple choix

$$L_h = L_v = 8 \quad (3.27)$$

Alors, on doit calculer $8 \times 8 = 64$ valeurs de température moyennant notre relation de récurrence (3.25). En ajoutant les conditions aux limites (3.26), on obtient un rectangle de 10 x 10. Les conditions aux limites des cotés gauche, supérieur, droite, et inferieur sont notées respectivement C_g , C_h , C_d , et C_b qui prennent des valeurs aléatoires dans des domaines de notre choix. Ici on a choisi les quatre domaines $[0, 10]$, $[10, 20]$, $[20, 30]$, et $[30, 40]$ dans l'ordre précédent.

La relation de récurrence nous ramène à un système d'équation linéaire de 64 inconnus et également 64 relations d'où une solution unique. On obtient la matrice T des solutions, et en ajoutant les conditions aux limites, on obtient la matrice F exprimant la distribution de la température à travers la plaque. Notons que les valeurs aux coins de la matrice F ne sont pas demandées par la relation de récurrence. Pour illustrer les résultats, on a représenté la

matrice de solution par des histogrammes. Finalement, on note qu'on peut choisir des tailles plus importantes de la plaque mais cela va nécessiter un temps de calcul plus grand.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons vu la résolution numérique de l'équation de chaleur stationnaire en 2D.

Dans le 1er chapitre, nous avons abordé le sujet des équations différentielles, leurs applications avec des exemples.

Dans le chapitre 2, nous avons abordé en détail l'équation de chaleur, les modes de transfert de chaleur et les différentes formes de l'équation de chaleur.

Le chapitre 3 constitue le cœur de notre mémoire. Dans ce chapitre nous avons entamé la résolution numérique de l'équation de chaleur stationnaire en 2D. Nous avons parlé des différentes étapes de la résolution numérique, les erreurs et les ordres de précision et les méthodes à un pas. Nous avons terminé ce chapitre par la discrétisation temporelle et spatiale et la méthode de calcul

Dans notre travail, nous avons résolu l'équation de la chaleur en deux dimensions et en équilibre grâce à une méthode estimée appelée Finite Difference Method, et au moyen d'un petit programme de Maple, nous avons obtenu des solutions à notre équation pour les domaines finis en deux dimensions, Cette idée ouvre de nombreuses autres idées liées à ce problème telles que la comparaison avec la solution analytique, le changement de coordonnées polaires, la suggestion de relations de fréquence, etc.

Bibliographie

- [1] ERIC GONCALVES, *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO institut national polytechnique de grenoble*
- [2] D. SENECHAL , *Histoire des sciences. Cours de l'université de Sherbrooke, 2004.*
- [3] A. QUARTERONI , *Analyse numérique. Cours de l'EPFL, 2003[4] P. Viot. Méthodes d'analyse numériques. Cours de DEA de Jussieu, 2003*
- [4] ACHOURI ISMAIL ET BENKHALED REDOUANE , *Equations différentielles ordinaires et applications, Mémoire de licence (L.M.D),session 2012-2013.*
- [5] KORICHI WENNASSA , *Simulation numérique d'une plaque bidimensionnelle avec source de chaleur Université Mohamed khider - BISKRA*
- [6] H. BREZIS , "Analyse fonctionnelle, Théorie et applications", Masson. W. Korner, "Fourier Analysis", Cambridge University Press Laurent Schwartz, "Méthode mathématiques pour les sciences physiques", Hermann A. C. Zaanen, "Continuity, Integration and Fourier theory" Springer Verlag Pour la science, dossier hors série, janvier 1994, "les mathématiciens"
- [7] RENÉ LELEU , , « Transferts De Chaleur » J 1080 , *Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales*, 2, 4, 10.
- [8] PIERRE CORMAULT , « *Cours de Thermique théorique et pratique* », Edition Janvier, 1999.
- [9] D. SENECHAL , *Histoire des sciences. Cours de l'université de Sherbrooke, 2004.*
- [10] A. QUARTERONI , *Analyse numérique. Cours de l'EPFL, 2003*
- [11] ERIC GONCALVES , *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO institut national polytechnique de grenoble*
- [12] [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title= quation_de_Schrodinger&oldid=159906665](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=quation_de_Schrodinger&oldid=159906665) ».
- [13] « [https://fr.wikipedia.org/w/index.php? title= Thorme_de_Bernoulli&oldid=15846124](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Thorme_de_Bernoulli&oldid=15846124) ».
- [14] « [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title= quation_de_lac_haleur&oldid=153805590](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=quation_de_lac_haleur&oldid=153805590) »

[15] [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Équation de la chaleur&oldid=153805590](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Équation_de_la_chaleur&oldid=153805590)

[16] GOURI. DHATT , Gilbert Touzot, « *Une présentation de la méthode des éléments finis* », 2ème Edition 1984

Résumé

La diffusion de chaleur est un phénomène très important puisque il intervient dans plusieurs branches : physique, médecine, l'industrie, ..etc. Elle est également intéressante dans la mathématique grâce au son équation différentielle simple. Notre travail était l'origine d'une idée simple sert à résoudre l'équation de chaleur à deux dimensions et à l'équilibre par une méthode de discrétisation appelée méthode de différences finies, et par un petit programme de Maple, on a obtenu des solutions de notre équation pour des domaines limités à deux dimensions. Cette idée nous ouvre plusieurs d'autres concernant ce problème comme par exemple, la comparaison avec la solution analytique, le changement aux coordonnées polaires, proposition des relations des récurrences,...etc. Ces sujets peuvent être les points de départ pour les futures recherches.

Abstract

The diffusion of heat is a very important phenomenon since it intervenes in several branches : physics, medicine, industry, etc. It is also interesting in mathematics thanks to its simple differential equation. Our work was the origin of a simple idea used to solve the equation of two-dimensional heat and equilibrium by a method of discretisation called finite difference method, and by a small program of Maple, we obtained solutions of our equation for limited domains in two dimensions. This idea opens us several others concerning this problem as for example, the comparison with the analytical solution, the change with the polar coordinates, proposition of the relations of the recurrences, etc. These topics may be the starting points for future research.