

Sommaire

| | | |
|----------|--|----------|
| 0.1 | Introduction générale | 7 |
| 1 | Quelques notions préliminaires sur la mécanique des fluides | 9 |
| 1.1 | Introduction | 11 |
| 1.2 | Définition et propriétés des fluides | 13 |
| 1.3 | Les lignes des fluides | 14 |
| 1.4 | Description d'écoulement d'un fluide | 15 |
| 1.4.1 | Description de Lagrange | 15 |
| 1.4.2 | Description d'Euler | 16 |
| 1.5 | Equations du mouvement des fluides | 18 |
| 1.5.1 | Equation de conservation de la masse(ou de continuité) | 18 |
| 1.5.2 | Equation de quantité de mouvement | 20 |
| 1.5.3 | Equation de Navier-Stokes | 21 |
| 1.6 | Notion de viscosité dans un fluide en mouvement | 23 |
| 1.7 | Écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide et incompressible | 23 |
| 1.7.1 | Écoulements permanents ou stationnaires | 23 |
| 1.7.2 | Écoulement irrotationnel | 23 |
| 1.7.3 | Écoulement potentiel | 24 |
| 1.7.4 | Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible | 24 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Application de la méthode de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel | 28 |
| 2.1 | Introduction | 29 |
| 2.2 | Position du problème | 30 |
| 2.2.1 | La théorie de la couche limite | 32 |
| 2.2.2 | Courlis à canal théorie | 33 |
| 2.3 | Principe de la méthode de HPM | 33 |
| 2.4 | Application de la méthode de HPM sur le problème Jeffery-Hamel . . . | 35 |

REMERCIEMENTS

Tout d'abord ; je remercie Dieu de m'avoir donné le courage et la foi durant tous les années d'étude

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur :

Mr. Gasmi Abedlkader pour m'avoir aidé, orienté, conseillé et soutenu pendant toute la durée de ce travail.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont suivi de près ou de loin, tout au long de mon parcours universitaire au sein du département de Mathématique et informatique à l'université de M'sila.

Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail ainsi qu'à toute personne qui fera l'effort de lire ce document.

DÉDICACE

Avec l'aide de Dieu le tout puissant j'ai pu réaliser

Ce modeste travail

Je dédie ce mémoire à :

A mes chers parents, en les remerciant de m'avoir soutenu tout au long de mes études,

A mes frères et sœurs pour leurs encouragements

A tous mes amis et surtout Affef d'avoir été à ma côté

à chaque moment,

Résumé

De nombreux chercheurs se sont intéressés à l'application de méthodes mathématique pour trouver des solutions analytiques d'équations non linéaires et pour cette effet,de nouvelles méthodes ont été développées.Comme la plupart des problèmesde mécanique des fluides en raison de la couche limite sont fortement non -linéaire,de sorte d'analyse solution d'entre eux est confronté àcertaines difficultés.Dans ce travail l'écoulement de Jeffery-Hamel est caractérisé par l'équation non linéaire de 3^{ème}ordre est étudiée par Méthode de HPM(Homotopy perturbation method)

Mots clés: écoulement de Jeffery-Hamel, mécanique des fluides,HPM,équation non linéaire

Notation

t : le temps.

μ : la viscosité dynamique ($N.s/m^2$).

p : la pression (N/m^2).

Re : le nombre de Reynolds.

f : la densité massique des efforts extérieurs.

\vec{v} : le vecteur vitesse du fluide.

v_x, v_y : les composantes du vecteur vitesse.

ϕ : fonction potentiel.

ψ : la fonction ligne de courant

\vec{n} : le vecteur unitaire normal.

$\frac{D}{Dt}$: la dérivée particulaire ($\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u.\nabla$).

Δ : l'opérateur laplacien ($\Delta = \vec{\Delta}^2 = (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}), (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y}), (\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial z}))$).

q_m : le débit-masse.

q_v : le débit-volume.

u : vitesse.

a : une constante.

b : constante.

c : constante.

C : contrainte de cisaillement constante.

r : coordonnée radiale .

c_f : coefficient de frottement .

θ : coordonnée angulaire .

α : angle entre deux plaques.

η : angle non-dimensionnelle.

ν : viscosité cinématique.

ρ : densité .

τ : contraintes visqueuses.

0.1 Introduction générale

Un fluide est un milieu matériel continu qui se déforme continuellement sous l'action de la moindre force de cisaillement. C'est pourquoi on dit que le fluide s'écoule. Un fluide prend la forme du récipient avec les parois duquel il est en contact. Le mot fluide est synonyme de substance dont les éléments se mettent en mouvement avec une liberté totale (fluides idéaux, dits non visqueux) ou une liberté restreinte (fluides réels, dits visqueux).

En Mécanique des Fluides (des liquides ou des gaz) on considère l'écoulement des fluides du point de vue macroscopique, c'est-à-dire du point de vue de milieux continus. Dans ce cadre, bien qu'un élément du fluide soit composé d'un très grand nombre de molécules, c'est aux propriétés moyennes de cet élément macroscopiques que l'on s'intéresse.

Les équations de Navier-Stokes (ENS) forment un modèle mathématique dérivé à partir des lois de conservations qui décrivent l'écoulement d'un fluide. Ce modèle est bien accepté et utilisé par les ingénieurs et les physiciens.

Il est navrant de constater que de nombreux mathématiciens travaillent sur les équations de Navier-Stokes dédaignent la mécanique des fluides. Ignorant sciemment les principes physiques dont découlent les équations, ils espèrent toutefois en percer le mystère.

Les écoulements de Jeffery-Hamel, auxquels nous nous sommes particulièrement intéressés sont une famille de solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel permanent d'un fluide visqueux incompressible. Bien qu'ils aient été découvertes par Jeffery (1915) et indépendamment par Hamel (1916), ces écoulements ne sont pas largement compris, parce qu'ils dépendent de deux paramètres sans dimensions, à

savoir α et Re , ils peuvent être employés pour approximer localement, ou représenter à la limite, les écoulements permanents dans des canaux bidimensionnels avec des parois de faible courbure tels que, par exemple, les canaux que constituent les grilles d'aubes de turbomachines. L'écoulement de Jeffery-Hamel, a été étudié par de nombreux auteurs. La plupart des travaux menés, essaient d'une part d'apporter des contributions, afin de mieux comprendre l'écoulement d'un fluide entre deux parois planes formant un angle entre-elles et d'autre part de donner une réponse à la question de la stabilité de tel écoulement.

Dans ce travail est de chercher des solutions exactes de l'équation Jeffery-Hamel de généralisée en appliquant la méthode de HPM, nous intéressons à chercher des solutions à deux cas(des canaux des divergents et canaux onvergents) . nous allons présenter les points suivants :

- Dans le 1^{ère} chapitre : on va rappeler des préliminaires et on donne des notions générales sur les écoulements des fluides, en expliquant les équations des mouvement.
- Dans le 2^{ème} chapitre : nous appliquons de la méthode de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel, Pour ce faire, nous introduisons position du problème, puis Principe de la méthode de HPM, en suite la résolution numérique de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel .

CHAPITRE 1

Quelques notions préliminaires sur la mécanique des fluides

Résumé:

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques notions préliminaires sur la mécanique des fluides qui seront utilisées dans le chapitre suivant.

Contenu:

- I.1- Introduction.
- I.2- Définition et propriétés des fluides .
- I.3- Les lignes des fluides.
- I.4- Description d'écoulement d'un fluide.
 - I.4.1- Description de Lagrange.
 - I.4.2- Description d'Euler.
- I.5- Equations du mouvement des fluides.
 - I.5.1- Equation de continuité.
 - I.5.2- Equation de quantité de mouvement.
 - I.5.3- Equation de Navier-Stokes.

I.6- Notion de viscosité dans un fluide en mouvement.

I.7- Ecoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide et incompressible.

I.7.1 Ecoulements permanents ou stationnaires.

I.7.2 Ecoulement irrotationnel.

I.7.3 Ecoulement potentiel.

I.7.4 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible.

1.1 Introduction

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux. La propriété physique qui permet de faire la différence entre les deux est la compressibilité.

- l'isotropie assure que les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.
- la mobilité fait qu'ils n'ont pas de forme propre et qu'ils prennent la forme du récipient qui les contient.
- la viscosité caractérise le fait que tout changement de forme d'un fluide réel s'accompagne d'une résistance .

La mécanique des fluides a cet avantage qu'elle fait partie de notre quotidien, et il est toujours bon d'appréhender un écoulement de fluide tout d'abord avec sa seule intuition. Les équations de la mécanique des fluides ont une structure mathématique complexe, et doivent être vues comme un ultime recours pour décrire ou quantifier un phénomène, là où l'intuition s'arrête. Elles ne sont pas la mécanique des fluides, elles la décrivent.

Pour tous les problèmes de mécanique des fluides, en général, et particulièrement dans les turbomachines, les équations utilisées pour déterminer les écoulements dérivent généralement des équations de conservation : continuité, Navier-Stokes, énergie et équation d'état du fluide. La résolution de ces équations est accompagnée d'hypothèses simplificatrices, associées à des considérations sur la géométrie, les bilans énergétiques ou la décomposition des vitesses en une valeur moyenne et une partie fluctuante.

1.2 Définition et propriétés des fluides

Définition (Les fluides newtoniens)

Les fluides newtoniens ont une viscosité dynamique constante

Masse volumique :

La masse volumique est définie par la relation

$$\rho = \frac{M}{V} (\text{kg}/\text{m}^3).$$

Pression d'un fluide P :

La pression est définie localement à partir de la composante de la Force normale à la surface sur laquelle elle s'exerce, si on considère une surface élémentaire dS de normale \vec{n} subissant une force \vec{F} , alors la pression p est définie par

$$\vec{dF} \cdot \vec{n} = P dS$$

Dans le cas d'une force perpendiculaire à une surface plane d'aire S , on obtient la définition suivante

$$P = \frac{F}{S} \quad (p \text{ a } = \text{N}/\text{m}^2)$$

fluides incompressibles :

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique reste constante au cours du mouvement :

$$\rho = \rho_0(x)$$

x : position du matériel à l'instant initiale.

1.3 Les lignes des fluides

Trajectoire:

On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est -à dire l'ensemble des positions occupée successivement entre deux instants (Figure 2.3

Les équation suivantes définissent les trajectoires :

$$\frac{dx}{v_x(x; y; z; t)} = \frac{dy}{v_y(x; y; z; t)} = \frac{dz}{v_z(x; y; z; t)} = dt$$

Lignes d'émission:

Une ligne l'émission est l'ensemble des position à un instant t de toutes les particules fluides qui sont passées par un point p à un instant quelconque précédent

Lignes de courant:

On appelle ligne de courant une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse en ce point

Les ligne de courant sont les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx}{v_x(x; y; z; t)} = \frac{dy}{v_y(x; y; z; t)} = \frac{dz}{v_z(x; y; z; t)}$$

Tubes de courant : On désigne ainsi une surface tubulaire engendrée à un instant donné par toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe arbitraire fermée .

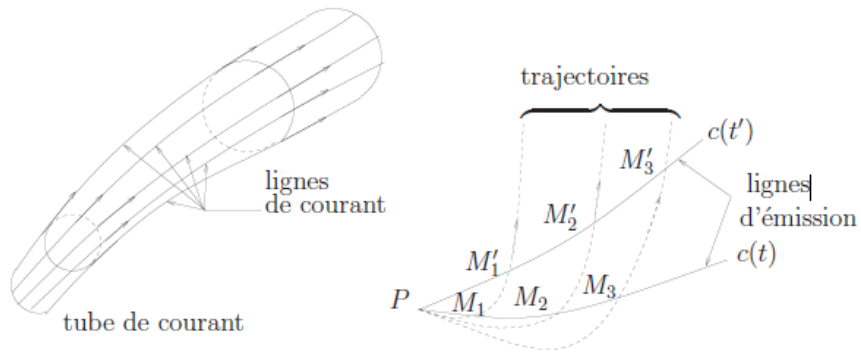


Fig I.1: Les lignes des fluides.

1.4 Description d'écoulement d'un fluide

Décrire le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un écoulement où il y a déformation continue du fluide

1.4.1 Description de Lagrange

Considérons une particule de fluide P, placée en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 et suivons-la au cours de son mouvement on peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connaît les fonctions:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

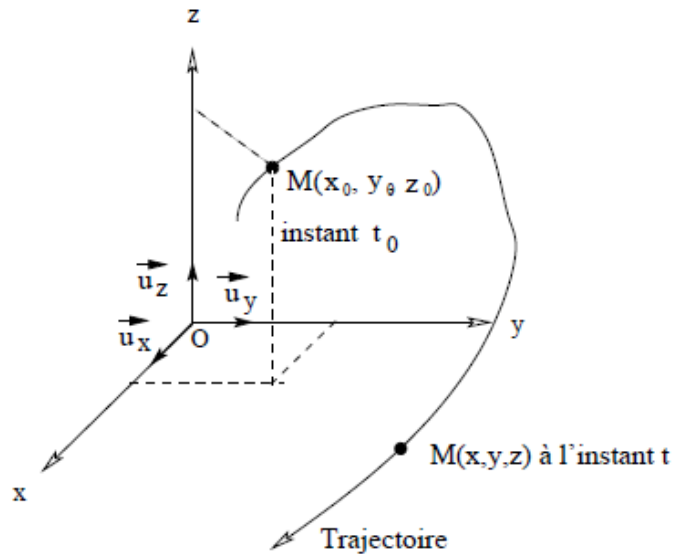


FIG I.2: trajectoire d'une particule de fluide

La vitesse de la particule s'écrit: $\vec{v}(P) = (v_x, v_y, v_z)^t = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)^t$

Description de Lagrange => Trajectoire des particules de fluide

1.4.2 Description d'Euler

On va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t .

On définit en chaque point du système les grandeurs :

$M(x; y; z; t), P(x; y; z; t), \vec{v}(x; y; z; t)$etc ,Ainsi, à un instant t ,on peut représenter les champs scalaires (M et p) à l'aide d'iso-surface ,et les champs vectoriels (vitesse et accélération) à l'aide des lignes de champs.

Une ligne de courant: est une ligne de champ du vecteur vitesse ,c'est -à-dire une courbe tangente en tout point $M(x; y; z; t)$ et $\vec{v}(x; y; z; t)$. à l'instant t

La formule de vitesse du particule de fluide est :

$$\vec{v}(p) = v_x(x; y; z; t)\vec{e}_x + v_y(x; y; z; t)\vec{e}_y + v_z(x; y; z; t)\vec{e}_z$$

Description d'Euler => ligne de courant.

Règle empirique:

Pour déterminer la nature de l'écoulement : laminaire ou turbulent.

Nombre de Reynolds : Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

On le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{u_{\max} r \alpha}{\nu}$$

Où u_{\max} est la vitesse au centre du canal ($r = 0$).

C'est un paramètre sans dimension. L'expérience montre que si :

$Re < 200$ l'écoulement est laminaire

$Re > 3000$ l'écoulement est turbulent

Ces valeurs sont approximatives, des valeurs de 1000 et 2000 respectives peuvent être indiquées.

Entre les deux valeurs, l'écoulement est instable.



FIG I.3:écoulement laminaire et l'écoulement turbulent.

1.5 Equations du mouvement des fluides

1.5.1 Equation de conservation de la masse(ou de continuité)

Le principe de conservation de masse est appliqué sur un élément de volume de l'espace, ce principe impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps t du fluide contenu dans ce volume, doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celles qui sortent . La masse contenue dans le volume v à l'instant t est égale à:

$$M = \iiint_v \rho dv$$

ρ étant la masse volumique de fluide. La quantité de masse, par unité de temps et de surface qui s'écoule à travers une surface, est égale au produit de la vitesse normale à cette surface par la masse volumique:

$$\iint_S \rho \vec{v} ds \vec{n}$$

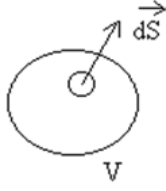


FIG I.4: conservation de la masse

D'autre part, la variation de la quantité du fluide contenue dans ce volume est donnée par:

$$- \iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

Puisque la masse sortante et entrante est égale à la variation de la masse à l'intérieur du volume v , on a l'identité:

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \iint_S \rho \vec{v} ds \vec{n}$$

D'après le théorème d'intégrale de Gauss:

$$\iint_S \rho \vec{v} ds \vec{n} = \iiint_v (div(\rho \vec{v})) dv$$

On obtient:

$$\iiint_v [(div(\rho \vec{v})) + \frac{\partial \rho}{\partial t}] dv = 0$$

Le domaine étant arbitraire, on a donc:

$$div(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ((eq I.1))$$

Cette équation qui traduit la conservation de la masse est aussi référée comme équation de continuité, c'est-à-dire, il n'y a ni apparition, ni disparition de fluide au cours du mouvement.

On peut simplifier l'équation (eq I.1):

Nous avons:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \rho.$$

Alors:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \rho.$$

Et donc:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Un fluide est incompressible lorsque sa masse volumique est invariable

$$\rho = Cste.$$

L'équation de continuité se réduit alors, dans le cas d'un écoulement conservatif d'un fluide incompressible à:

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

1.5.2 Equation de quantité de mouvement

Les forces qui agissent sur une particule d'un fluide sont de deux types:

- Forces intérieures d'origine moléculaires: elles sont opposées deux à deux donc leurs résultantes sont nulles.

- Forces extérieures: sont des forces de volume ou des forces de surface.

La forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer.

Comme équation, on a:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\partial v} \sum F_{ext}$$

d'ou:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} + (v \cdot \nabla)v \right) = \frac{1}{\partial v} \sum F_{ext}$$

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} + (v \cdot \nabla)v \right) = \text{force de pression} + \text{force de viscosité} + \text{force de gravité}$$

La conservation de la quantité de mouvement se traduit par:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} + (v \cdot \nabla)v \right) = -\nabla p + \mu \Delta v + f$$

1.5.3 Equation de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont censées décrire le mouvement des fluides « newtoniens » (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus.

Nous écrivons dans ce qui suit les équations de Navier-Stokes d'un fluide newtonien homogène incompressible visqueux:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right) &= -\nabla p + \mu \Delta v + f \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot v) &= 0 \\ \text{div} v &= 0 \end{aligned}$$

Nous écrivons dans ce qui suit les équations de Navier-Stokes dans les coordonnées cartésiennes et cylindriques .

En coordonnées cartésiennes (x, y) avec (u, v) :

Equation de la conservation de la masse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Equation de la conservation de la masse})$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ) avec (v_r, v_θ) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{Equation de la conservation de la masse})$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta} \right]$$

1.6 Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité.

1.7 Ecoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide et incompressible

1.7.1 Ecoulements permanents ou stationnaires

un écoulement est dit permanent lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps: vitesse, masse volumique, pression, température, etc.

1.7.2 Ecoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition:

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V} = 0. \quad ((eq\ I.2))$$

$\vec{\Omega}$ représente le vecteur de rotation ou de vorticité.

$\vec{\Omega}$ est, par définition, nul pour un écoulement irrotationnel.

Cette condition apporte des simplifications importantes dans les équations du mouvement .

1.7.3 Écoulement potentiel

On rappelle qu'un écoulement irrotationnel a été défini à partir de l'équation (eq I.1).

On rappelle aussi qu'en mathématique une fonction dont le rotationnel est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = 0.$$

On peut donc réduire:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi.$$

représente la potentielle de vitesse.

On déduit que, du à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit potentiels .

1.7.4 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible

On rappelle la forme de l'équation de continuité pour un fluide incompressible:

$$\text{div } \overrightarrow{V} = 0$$

En substituant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse.

On a:

$$\nabla(\nabla\phi) = 0.$$

Alors:

$$\nabla^2\phi = 0.$$

Soit:

$$\Delta\phi = 0$$

Δ indique le Laplacien et ∇ l'opérateur gradient.

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe. Dans ce cas l'équation du potentiel de vitesse se réduit à:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Et ϕ étant une fonction potentielle continue à deux variables, alors il existe une fonction ψ dite fonction potentielle conjuguée ou fonction de courant qui vérifie:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

En identifiant ces deux systèmes d'équations, on aboutit aux relations suivantes entre ψ et ϕ :

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Ces équations sont connues comme celles de Cauchy-Riemann, qui nous permettent de déduire que ψ et ϕ sont uniformément différentiables dans le domaine de l'écoulement et qui permettent aussi de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement .

Fonction de courant

Soit (v_x, v_y) les composantes du vecteur vitesse \vec{v} associées aux coordonnées cartésiennes (x, y) . Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité se réduit alors à

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Dans ce cas on peut introduire une fonction de courant $\psi(x, y, t)$ définie à une constante près du temps t et déterminée par:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dans laquelle t est considéré comme un paramètre et non comme une variable indépendante.

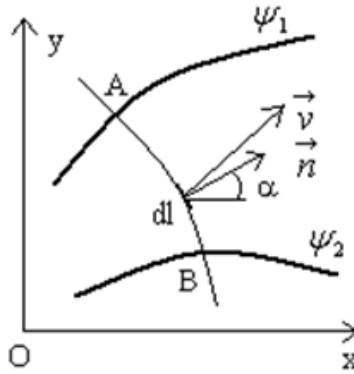
La différentielle exacte de ψ donne:

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= -v_y dx + v_x dy \end{aligned}$$

La fonction ψ est constante sur une ligne de courant et le vecteur vitesse \vec{v} est orthogonal à $\overrightarrow{grad\psi}$.

Soient deux lignes de courant 1 et 2 passant respectivement par A et B, les valeurs des fonctions courant sont ψ_1 et ψ_2 .

Soit un chemin quelconque allant de A à B



L'écoulement est plan, le débit élémentaire par unité de hauteur est égale à

$$dQ = \vec{v} \vec{ds} = \vec{v} \vec{n} dt$$

$$\vec{v} \vec{n} = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha = v_x \frac{dy}{dt} - v_y \frac{dx}{dt}$$

$$dQ = \vec{v} \vec{n} dt = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi$$

Le débit entre les deux lignes de courant est indépendant du chemin pris pour aller d'une ligne à l'autre.

$$Q = \psi_1 - \psi_2$$

CHAPITRE 2

Application de la méthode de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel

Résumé

Dans ce chapitre, nous appliquons de la méthode de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel, Pour ce faire, nous introduisons position du problème , puis Principe de la méthode de HPM, en suite la résolution numérique de HPM à l'écoulement de Jeffery-Hamel.

Contenu

II.1- Introduction

II.2- Position du problème

II.3- Principe de la méthode

II.4- Application de la méthode de HPM sur le problème Jeffery-Hamel.

2.1 Introduction

Dans ces dernières années, l'apparition de nouvelles techniques tels que la méthode de HPM, l'analyse d'Homotopy, la méthode de variation des iterations . . . , ont permis de résoudre un certains nombres de problèmes physiques et/ou mathématiques de types non linéaires. La formulation mathématique du problème dynamique et/ou thermique de l'écoulement d'un fluide incompressible et indilatable entre deux parois planes formant un angle entre elles (Jeffery-Hamel flow), conduit généralement à des équations différentielles de type non linéaires. Dans cette chapitre, on a essayé d'appliquer la nouvelle méthode de HPM pour la résolution des équations non linéaires des champs dynamiques et thermiques de l'écoulement de Jeffery-Hamel..

2.2 Position du problème

Considérons un écoulement bidimensionnel incompressible visqueux qui est générée par la source ou un puits situé à l'intersection de deux plaques rendant canaux. Pour déterminer la distribution des vitesses, les équations de Navier-Stokes doit être résolu en coordonnées polaires où les changements de coordonnées angulaires entre $-\alpha$ et $+\alpha$, mais la coordonnée rayon varie le long du canal, comme le montre dans la Fig.II.1:

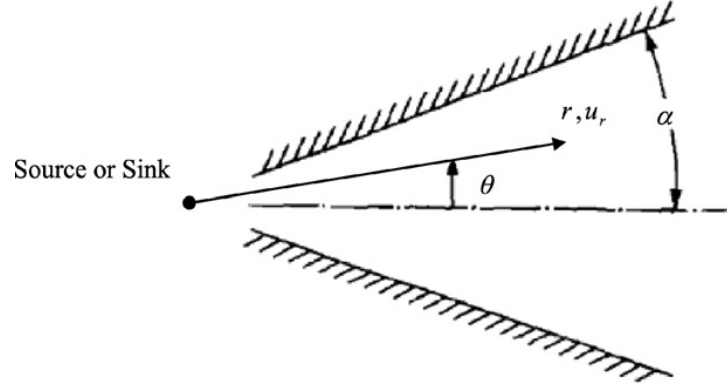


Fig.II.1 : Géométrie de l'écoulement de Jeffery-Hamel .

L'écoulement de Jeffery-Hamel est gouverné par les equations de Navier- stockes bidimensionnel en coordonnées cylindrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta) = 0. \quad ((\text{eq II.1}))$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{r\theta}}{r}. \quad ((\text{eq II.2}))$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{r\theta}}{r}. \quad ((\text{eq II.3}))$$

Où, dans les équations. (eq II.1) - (eq II.3), u_r et u_θ sont, respectivement, $u_r(r, \theta)$ et $u_\theta(r, \theta)$. En outre, les contraintes visqueuses sont définies comme suit:

$$\tau_{rr} = \mu \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \text{div}(\vec{u}) \right). \quad ((\text{eq II.4}))$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \text{div}(\vec{u}) \right]. \quad ((\text{eq II.5}))$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad ((\text{eq II.6}))$$

En considérant écoulement purement radiale, c'est-à-dire $u_\theta = 0$, les équations de conservation de la masse et de mouvement à réduire (eq II.5) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) = 0. \quad ((\text{eq II.7}))$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right). \quad ((\text{eq II.8}))$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0.. \quad ((\text{eq II.9}))$$

Soumis à des conditions aux limites:

Au ligne centrale du canal:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad ((\text{eq II.10.1}))$$

Au niveau des plaques faisant corps du canal:

$$u_r = 0. \quad ((\text{eq II.10.2}))$$

En intégrant de l'équation (eq II.7), il se transforme en:

$$ru_r = f(\theta). \quad ((\text{eq II.11}))$$

Où $f(\theta)$ est une fonction arbitraire de θ . En introduisant de nouvelles variable sans dimension $\eta = \frac{\theta}{\alpha}$ et son remplacement par l'équation (eq II.11) dans équations (eq II.8) et (eq II.9) et après quelques simplifications, nous avons ,pour l'écoulement de Jeffery-Hamel, l'équation dynamique du mouvement est représentée généralement par une équation différentielle normalisée du troisième ordre non linéaire de la forme:

$$f''' + 2 \text{Re} \alpha f f' + 4\alpha^2 f = 0. \quad ((\text{eq II.12}))$$

En outre, les conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme suivante:

Au ligne centrale du canal:

$$f(\eta) = 1, \quad f'(\eta) = 0. \quad ((\text{eq II.13.1}))$$

Au niveau des plaques faisant corps du canal:

$$f(\eta) = 0. \quad ((\text{eq II.13.2}))$$

Solution analytique d'écoulement Jeffery-Hamel a été étudié dans le cas limite:

$\text{Re} \rightarrow \infty$, ce qui dans les sections suivantes seront discutée plus en détail.

2.2.1 La théorie de la couche limite

Pour grands nombres de Reynolds, cette théorie a été utilisée pour résoudre (eq II.12) à canaux convergents ($\alpha < 0$). Dans cette situation, divisant l'équation (eq II.12) par Re , puis en formant la limite

$\text{Re} \rightarrow \infty$ cette équation se réduit à $f f' = 0$.

A partir des équations (eq II.13.1) et (eq II.13.2), il est évident que moins centrale, nous avons d'écoulement non visqueux mais dans zone de paroi, il ya une couche limite

mince d'écoulement visqueux.

Par conséquent, dans la solution du problème, deux régions doivent être considérés:

l'ensemble de la région avec écoulement non visqueux et la frontière couche proche de la paroi. Solution analytique de la couche limite ont montré que le coefficient de frottement de la peau est une fonction de Re et α comme suit :

$$c_f = 4\sqrt{\frac{\alpha}{3Re}}. \quad ((\text{eq II.14}))$$

2.2.2 Courlis à canal théorie

Un autre cas limite est la limite: $\alpha \rightarrow 0$, ce qui peut être considéré comme en plus de la limite $Re \rightarrow \infty$. En revanche, l'augmentation de Re est suivie d'une diminution de α de telle sorte que le produit de ne peut pas être négligé. Ainsi, l'utilisation de ces deux limites, (eq II.12) réduit pour:

$$f''' + 2Re\alpha f f' = 0. \quad ((\text{eq II.15}))$$

2.3 Principe de la méthode de HPM

Pour expliquer le principe de la méthode de HPM, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante:

$$A(u) - F(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad ((\text{eq II.16}))$$

Avec les conditions aux limites:

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma. \quad ((\text{eq II.17}))$$

Où:

A :un opérateur différentiel non linéaire peut être divisé en une partie linéaire L et une partie non linéaire N

B :est un opérateur borné

$F(r)$: sont des opérateurs différentielles connue.

L'équation (eq II.16) peut être s'écrire sous comme suit

$$L(u) + N(u) - F(r) = 0. \quad ((\text{eq II.18}))$$

On construit l'homotopie suivante: $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et peut être définie :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(u) - F(r)] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad r \in \Omega. \text{ Avec } p \in [0, 1] \quad ((\text{eq II.19}))$$

où p est appelé le paramètre d'homotopie . Si $p = 0$, (eq II.19) est complètement linéaire, et si $p = 1$, la partie linéaire disparaît, et (eq II.19) devient identique à (eq II.16). Avec un simple

manipulation, (eq II.19) se réduit à la suivante:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + PL(u_0) + P[N(v) - F(r)] = 0. \quad ((\text{eq II.20}))$$

et u_0 une solution aproximative initiale de l'équation (eq II.16) qui satisfait les conditions aux bords.

il est clair que de l'équation (eq II.21) on a:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0). \quad ((\text{eq II.21}))$$

où

$$H(v, 1) = A(v) - F(r) = 0. \quad ((\text{eq II.22}))$$

Déformation

Si p varie de 0 à 1, alors $(r; p)$ varie de $u_0(r)$ à $u(r)$.

Les formules $L(v) - L(u_0)$ et $A(v) - F(r)$ sont appelés des homotopies.

la solution de l'équation (eq II.19) peut être exprimée comme une solution approximative et la valeur du paramètre est petite, alors la solution de l'équation (eq II.18) s'écrit sous la forme d'une série:

$$v = v_0 + P v_1 + P^2 v_2 + \dots \quad ((\text{eq II.23}))$$

En substituant (eq II.23) dans (eq II.20) et disposer le résultat en termes de puissances croissantes de p , nous obtenons un nombre infini d'équations différentielles v . Pour résoudre ces problèmes,

on devrait éviter les termes séculaires pour produire borné. Cet ensemble de près de l'équations différentielles simples avec conditions aux bords est alors résolu. Enfin, la solution approximative de l'équation (eq II.16) peut être formé comme suit:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad ((\text{eq II.24}))$$

2.4 Application de la méthode de HPM sur le problème Jeffery-Hamel

On considère l'équation de Jeffery-Hamel :

$$\frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha f(\eta) \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} + 4 \alpha^2 \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} = 0. \quad ((\text{eq II.25}))$$

Avec les conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme suivante:

Au ligne centrale du canal:

$$f(\eta) = 1, \quad \text{et} \quad f'(\eta) = 0. \quad ((\text{eq II.26}))$$

Au niveau des plaques faisant corps du canal:

$$f(\eta) = 0. \quad ((\text{eq II.27}))$$

L'équation (eq II.25) peut être s'écrire sous la forme suivante:

$$L(f) + N(f) - F(r) = 0. \quad ((\text{eq II.28}))$$

tel que:

$$L(f) = \frac{\partial^3 f(\eta)}{\partial \eta^3}. \quad ((\text{eq II.29}))$$

$$N(f) = 2 \operatorname{Re} \alpha f(\eta) \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}. \quad ((\text{eq II.30}))$$

$$F(r) = 0. \quad ((\text{eq II.31}))$$

Pour résoudre l'équation (eq II.25) on suppose

$$H(g, p) = L(g) - L(f_0) + pL(f_0) + p[N(g) - F(r)] = 0. \quad ((\text{eq II.32}))$$

et on choisit l'approximation initiale de la solution suivante:

$$f(0) = f_0. \quad ((\text{eq II.33}))$$

On cherche la solution sous la forme de la série suivante:

$$g = g_0 + pg_1 + p^2g_2 + \dots \quad ((\text{eq II.34}))$$

Remplaçant l'équation (eq II.34) dans l'équation (eq II.32) on trouve:

$$H(g, p) = L(g_0 + pg_1 + p^2g_2 + p^3g_3 + \dots) - L(f_0) + pL(f_0) +$$

$$\begin{aligned} & p[N(g_0 + pg_1 + p^2g_2 + p^3g_3 + \dots) - F(r)] \\ = & L(g_0) + pL(g_1) + p^2L(g_2) + p^3L(g_3) + \dots - L(u_0) + pL(u_0) \end{aligned}$$

$$+ pN(\varphi_0) + p^2N(\varphi_1) + p^3N(\varphi_2) + p^4N(\varphi_3) \dots - pF(r) = 0$$

Donc:

$$H(g, p) = [L(g_0) - L(f_0)] + p[L(g_1) + L(f_0) + N(g_0) - F(r)] +$$

$$p^2[L(g_2) + N(g_1)] + p^3[L(g_3) + N(g_2)] + \dots = 0. \quad ((\text{eq II.35}))$$

Remplaçant les équations (eq II.29), (eq II.30), (eq II.31) dans l'équation (eq II.35) on trouve:

$$\begin{aligned} H(g, p) = & \left[\frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} \right] + \\ & p \left[\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} \right] + \end{aligned}$$

$$p^2 \left[\frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} \right] + \dots = 0. \quad ((\text{eq II.36}))$$

En églisant les termes de même puissance de p , nous avons:

$$P^0 : \frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} = 0. \quad ((\text{eq II.37}))$$

$$P^1 : \frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} = 0. \quad ((\text{eq II.38}))$$

$$P^2 : \frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} = 0. \quad ((\text{eq II.39}))$$

Résolvant les équations ci-dessus nous obtenons:

les solutions $g_i(\eta)$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$

Par conséquent, la solution de séries est:

$$f(\eta) = \lim g = g_0(\eta) + g_1(\eta) + g_2(\eta) + g_3(\eta) + \dots, \quad \text{quant } p \rightarrow 1. \quad ((\text{eq II.40}))$$

Pour le canal convergentes et divergentes, respectivement, la ligne médiane du corps et de fabrication de plaque de canal sont choisis comme axe $\eta = 0$. Ainsi, pour chaque type de canal, le

conditions initiales pour HPM ne sont pas similaires et doivent être résolu de manière différente.

des canaux divergents

Laissez-nous choisir le corps du canal comme axe $\eta = 0$. Par conséquent, la valeur de η entre deux plaques varie de 0 à 2. la suite de l'état symétrique au centre du canal, notre domaine de la solution est limité entre 0 et 1. à Partir de l'équation (eq II.13.2) et en supposant

$$f'(0) = a \text{ et } f''(0) = b. \quad ((\text{eq II.41}))$$

Pour déterminer $f(\eta)$, il faut trouver la solution des équations (eq II.37), (eq II.38), (eq II.39), Commenant par l'équation (eq II.37), on a:

$$\frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3}. \quad ((\text{eq II.42}))$$

D'après le condition initiale (eq II.26), on a:

$$\frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} = 0 \quad ((\text{eq II.43}))$$

Donc (eq II.42) devient:

$$\frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} = 0$$

D'après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{\partial^3 g_0(t)}{\partial t^3} \partial t \partial t \partial t = 0.$$

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \left(\frac{\partial^2 g_0(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial t^2} \right) \partial t \partial t = 0.$$

D'après le condition initiale (eq II.41), on a:

$$\int_0^\eta \left[\frac{\partial g_0(t)}{\partial t} - \frac{\partial g_0(0)}{\partial t} - bt \right] \partial t = 0.$$

$$g_0(\eta) - g_0(0) - a\eta - \frac{b}{2}\eta^2 = 0.$$

$$g_0(\eta) = \frac{b}{2}\eta^2 + a\eta. \quad ((\text{eq II.44}))$$

La solution de l'équation (eq II.38) est comme suit:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} = 0.$$

D'après l'équation (eq II.43) on a:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} = 0. \quad ((\text{eq II.45}))$$

Donc (eq II.45) devient:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} - 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta}. \quad ((\text{eq II.46}))$$

Remplaçant l'équation (eq II.44) et la dérivée de l'équation (eq II.44) dans l'équation (eq II.46), on trouve:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{b^2}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}ab\eta^2 \right) + (-2 \operatorname{Re} \alpha a^2 - 4\alpha^2 b)\eta - 4\alpha^2 a.$$

D'après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$\frac{\partial^2 g_1(\eta)}{\partial \eta^2} = -2 \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{b^2}{8}\eta^4 + \frac{1}{2}ab\eta^3 \right) + (-\operatorname{Re} \alpha a^2 - 2\alpha^2 b)\eta^2 - 4\alpha^2 a\eta.$$

Donc

$$\frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} = -2 \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{b^2}{40} \eta^5 + \frac{1}{8} ab \eta^4 \right) + \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha a^2 - \frac{2}{3} \alpha^2 b \right) \eta^3 - 2 \alpha^2 a \eta^2. \quad ((\text{eq II.47}))$$

$$g_1(\eta) = -\frac{1}{120} \operatorname{Re} \alpha b^2 \eta^6 - \frac{1}{20} \operatorname{Re} \alpha ab \eta^5 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha a^2 - \frac{2}{3} \alpha^2 b \right) \eta^4 - \frac{2}{3} \alpha^2 a \eta^3. \quad ((\text{eq II.48}))$$

La solution de l'équation (eq II.39) est comme suit:

$$\frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4 \alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} = 0. \quad ((\text{eq II.49}))$$

Donc (eq II.49) devient:

$$\frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} - 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} - 4 \alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta}. \quad ((\text{eq II.50}))$$

Remplaçant les équations (eq II.44), (eq II.48) et (eq II.49) dans l'équation (eq II.50) on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} &= \frac{1}{15} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 b^3 \eta^7 + \frac{28}{60} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 ab^2 \eta^6 \\ &+ \left(-\frac{11}{10} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^2 b - \frac{18}{15} \operatorname{Re} \alpha^3 b^2 \right) \eta^5 + (6 \operatorname{Re} \alpha^3 ab \\ &+ \frac{5}{6} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^3) \eta^4 + \left(\frac{20}{3} \operatorname{Re} \alpha^3 a^2 + \frac{8}{3} \alpha^4 b \right) \eta^3 + 8 \alpha^4 a \eta^2. \end{aligned}$$

D' après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_2(\eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{1080} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 b^3 \eta^9 + \frac{1}{120} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a b^2 \eta^8 \\ &+ \left(\frac{11}{420} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^2 b - \frac{1}{35} \operatorname{Re} \alpha^3 b^2 \right) \eta^7 + \left(\frac{1}{5} \operatorname{Re} \alpha^3 a b \right. \\ &\left. + \frac{5}{180} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^3 \right) \eta^6 + \left(\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha^3 a^2 + \frac{8}{60} \alpha^4 b \right) \eta^5 + \frac{2}{3} \alpha^4 a \eta^4.\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}g_2(\eta) &= \frac{1}{10800} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 b^3 \eta^{10} + \frac{1}{1080} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a b^2 \eta^9 \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{11}{420} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^2 b - \frac{1}{35} \operatorname{Re} \alpha^3 b^2 \right) \eta^8 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \operatorname{Re} \alpha^3 a b \right. \\ &\left. + \frac{5}{180} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^3 \right) \eta^7 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha^3 a^2 + \frac{8}{60} \alpha^4 b \right) \eta^6 + \frac{2}{15} \alpha^4 a \eta^5 \text{ (eq II .51)}\end{aligned}$$

On a lorsque $p = 1$ dans la solution approximation de l'équation (eq II.25) :

Par conséquent, la solution de séries sont:

$$f(\eta) = \lim g = g_0(\eta) + g_1(\eta) + g_2(\eta) + g_3(\eta) + \dots, \quad \text{quant } p \rightarrow 1. \quad \text{(eq II.52)}$$

Tel que:

$$g_0(\eta) = \frac{b}{2} \eta^2 + a \eta.$$

$$g_1(\eta) = -\frac{1}{120} \operatorname{Re} \alpha b^2 \eta^6 - \frac{1}{20} \operatorname{Re} \alpha a b \eta^5 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha a^2 - \frac{2}{3} \alpha^2 b \right) \eta^4 - \frac{2}{3} \alpha^2 a \eta^3.$$

$$\begin{aligned}
g_2(\eta) = & \frac{1}{10800} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 b^3 \eta^{10} + \frac{1}{1080} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a b^2 \eta^9 \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{11}{420} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^2 b - \frac{1}{35} \operatorname{Re} \alpha^3 b^2 \right) \eta^8 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \operatorname{Re} \alpha^3 a b \right. \\
& \left. + \frac{1}{36} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 a^3 \right) \eta^7 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha^3 a^2 + \frac{2}{15} \alpha^4 b \right) \eta^6 + \frac{2}{15} \alpha^4 a \eta^5.
\end{aligned}$$

canaux convergents

Dans ce cas, la ligne centrale du canal de est considérée comme $\eta = 0$. à Partir de l'équation (eq II.13.1) et en supposant:

$$f''(0) = c. \quad ((\text{eq II.53}))$$

Pour déterminer $f(\eta)$, il faut trouver la solution des équations (eq II.37), (eq II.38), (eq II.39), Commenant par l'équation (eq II.37), on a:

$$\frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3}$$

D'après le condition initiale (eq II.27), on a:

$$\frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} = 0$$

Donc (eq II.42) devient:

$$\frac{\partial^3 g_0(\eta)}{\partial \eta^3} = 0$$

D'après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{\partial^3 g_0(t)}{\partial t^3} \partial t \partial t \partial t = 0.$$

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \left(\frac{\partial^2 g_0(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g_0(0)}{\partial t^2} \right) \partial t \partial t = 0.$$

D'après les conditions initiale (eq II.26) et (eq II.53), on a:

$$\int_0^\eta \left[\frac{\partial g_0(t)}{\partial t} - \frac{\partial g_0(0)}{\partial t} - ct \right] \partial t = 0.$$

$$g_0(\eta) - g_0(0) - \frac{c}{2} \eta^2 = 0.$$

$$g_0(\eta) = \frac{c}{2} \eta^2 + 1. \quad ((\text{eq II.54}))$$

La solution de l'équation (eq II.38) est comme suit:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 f_0(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} = 0.$$

D'après l'équation (eq II.43) on a:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} = 0.$$

Donc :

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} - 4\alpha^2 \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta}. \quad ((\text{eq II.55}))$$

Remplaçant l'équation (eq II.54) et la dérivée de l'équation (eq II.54) dans l'équation (eq II.55), on trouve:

$$\frac{\partial^3 g_1(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{c^2}{2} \eta^3 + a\eta \right) - 4\alpha^2 c\eta.$$

D'après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$\frac{\partial^2 g_1(\eta)}{\partial \eta^2} = -2 \operatorname{Re} \alpha \left(\frac{c^2}{8} \eta^4 + \frac{1}{2} c \eta^2 \right) - 2 \alpha^2 c \eta^2.$$

Donc:

$$\frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{20} \operatorname{Re} \alpha c^2 \eta^5 + \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha c - \frac{2}{3} \alpha^2 c \right) \eta^3. \quad ((\text{eq II.56}))$$

$$g_1(\eta) = -\frac{1}{120} \operatorname{Re} \alpha c^2 \eta^6 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha c - \frac{2}{3} \alpha^2 c \right) \eta^4. \quad ((\text{eq II.57}))$$

La solution de l'équation (eq II.39) est comme suit:

$$\frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} + 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} + 4 \alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} = 0.$$

Donc:

$$\frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} = -2 \operatorname{Re} \alpha g_0(\eta) \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} - 2 \operatorname{Re} \alpha g_1(\eta) \frac{\partial g_0(\eta)}{\partial \eta} - 4 \alpha^2 \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta} \quad ((\text{eq II.58}))$$

Remplaçant les équations (eq II.54), (eq II.56) et (eq II.57) dans l'équation (eq II.58) on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g_2(\eta)}{\partial \eta^3} &= \frac{1}{15} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^3 \eta^7 + \left(\frac{3}{5} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^2 + \frac{6}{5} \operatorname{Re} \alpha^3 c^2 \right) \eta^5 + \\ &\quad \left(\frac{8}{3} \operatorname{Re} \alpha^3 c + \frac{8}{3} \alpha^4 c + \frac{2}{3} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c \right) \eta^3. \end{aligned}$$

D'après l'intégrale triple de l'équation précédente on a:

$$g_2(\eta) = \frac{1}{10800} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^3 \eta^{10} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{70} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^2 + \frac{1}{35} \operatorname{Re} \alpha^3 c^2 \right) \eta^8 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{15} \operatorname{Re} \alpha^3 c + \frac{2}{15} \alpha^4 c + \frac{1}{30} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c \right) \eta^6.$$

On a lorsque $p = 1$ dans la solution approximation de l'équation (eq II.25) :

Par conséquent, la solution de séries sont:

$$f(\eta) = \lim g = g_0(\eta) + g_1(\eta) + g_2(\eta) + g_3(\eta) + \dots, \text{ quant } p \rightarrow 1.$$

Tel que:

$$g_0(\eta) = \frac{c}{2} \eta^2 + 1.$$

$$g_1(\eta) = -\frac{1}{120} \operatorname{Re} \alpha c^2 \eta^6 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{Re} \alpha c - \frac{2}{3} \alpha^2 c \right) \eta^4.$$

$$g_2(\eta) = \frac{1}{10800} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^3 \eta^{10} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{70} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c^2 + \frac{1}{35} \operatorname{Re} \alpha^3 c^2 \right) \eta^8 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{15} \operatorname{Re} \alpha^3 c + \frac{2}{15} \alpha^4 c + \frac{1}{30} \operatorname{Re}^2 \alpha^2 c \right) \eta^6.$$

Conclusion

Nous concluons que la méthode numérique de « HPM » fournissent des solutions analytiques très précises au problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel .

Cette méthode est simple, facile à utiliser et efficace .

Bibliographie

- [1] Robert REY. *Unite d'engienement aero-hydrodynamique interne des machines tomeI cinématique et dynamique des fluides*, Septembre 2008.
- [2] M.McClellan. *Programming orifice flow*, May 1968.
- [3] J.Roussel. *Cours de Mécanique des fluides* , C.P.I.2-Chem.St2,2005-2006.
- [4] Patrik le Quéré et Bérengère Podvin. *Methodes numériques pour les écoulement incompressibles*,2010 .
- [5] Jean-Marc-Brun. *Mecanique des fluides*, August8, 2008.
- [6] Donald Greenspan. *Numerical studies of viscous, Incompressible flow through an orifice for arbitrary reynolds number* , May 1968.
- [7] Christophe Ancey. *Notes de cours l'hydrodynamique et ses applications à l'hydroulique à surface libre ou en charge*, lausanne. version 1.8 du 28 janvier 2005 .
- [8] V.legat,G.Winckelmans. *Mecanique des fluides et transferts I*. (version 4.4 19-1-2007).
- [9] R.Rey-Professeur. *Cinématique et Dynamique des fluides*, Paris.2008.
- [10] Marc Rabaud. *Ecoulement aux grands echelles*, Paris sud ,version du 12 decembre 2007 .
- [11] Christophe Ancey. *Hydrodynamique et ses applications à surface libre ou en charge*, version 1.8 du 28 janvier 2005 .
- [12] Vincent Guinot, Bernard Cappelaere. *Méthodes numériques appliqueés (résolution numérique des équatiois différentielles de l'ingénieur*, 2005-2006.
- [13]Q. Esmaili, A. Ramiar, E. Alizadeh, D.D. Ganji. *An approximation of the analytical solution of the Jeffery–Hamel flow by decomposition method*,Elesvier 2008
- [14] Gasmi Abdelkader. *l'effet de la tenssion de sur le coefficient de contraction d'un jet*. Setif .

- [15] Patrick Le Quéré et Bérengère Podvin . *Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles*,Année 2010 .
- [16] Gorlier Philippe et Gabriel Germain . *La viscosité et sa mesure*,1998 .
- [17] Jean Gosse. *Mécanique des fluides* .
- [18] Olivier Louisanard . *Mécanique des fluides* ,I.2-décembre . 2008 .
- [19] Adil Ridha .*Dynamique des Fluides Réels M1 Mathématiques et applications : spécialité Mécanique Ebauche de cours en train d'élaboration/completion* ,Copyright Université de Caen2008 .
- [20] S.S. Ganji, A. Barari, M. Najafi, and G. Domairry.*Analytical evaluation of jamming transition problem.*
- [21] M. Kezzar¹, N. Harkat¹, R.-M Sari, A.Haiahem.*Résolution analytique du problème non-linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel par la décomposition d'Adomian*,International Conference On Mechanical Engineering CIGM 20-22 November 2011 Skikda University, Algeria
- [22] N. Harkat¹, M. Kezzar¹, R.-M Sari, A.Haiahem.*Contribution à l'étude dynamique et thermique de l'écoulement de Jeffery-Hamel*.International, Conference On Mechanical Engineering CIGM 20-22 November 2011 Skikda University, Algeria
- [23] Miguel ASUAJE. *Methodologie optimisation dans la conception et l'analyse des performances des tubomachines a fluide incompressible*,2003