



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Solution des equations integro-differentielles de Volterra de second espèce

Présentée par : *HAFRI Aicha*

Soutenu publiquement le : 14/06/2023

Devant le jury composé de:

Mr. SELT Omar
Mr. DILMI Mustapha
Mr. LAKHAL Aissa

Prof
M.C.B
M.A.A

Université de M'sila
Université de M'sila
Université de M'sila

Président.
Encadreur.
Examineur.

Année universitaire 2022/2023

Remerciement

Je remercie **Allah** de m'avoir aidé à accomplir ce travail.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr. DILMI. Mustapha qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Nous exprimons notre gratitude envers Mrs les membres de jury. Nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner notre travail.

Aussi je remercie ma famille, pour son soutien.

Merci, enfin à toute personne qui a contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail.

المخلص

في هذه المذكرة ، طبقنا طريقة كثير الحدود لنوع لجندر كالركين على فئة معينة من المعادلات التكاملية التفاضلية من نوع فولتيرا ، و فريدولم من أجل إيجاد حلول تقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.

الكلمات المفتاحية: معادلات فولتيرا التكاملية-التفاضلية ، كثيرات حدود لجندر ، طريقة جالركين.

Abstract

In this work, we applied the polynomial method of Legendre Galerkin type on certain class of integro-differential equations of Volterra type, and Fredholm in order to find approximate solutions and to compare it with exact solutions.

Keywords :

Integro-differential equations, Legendre polynomials, Galerkin Method.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode polynomiale de type Legendre Galerkin sur certaine classe des équations intégral-différentielle de type Volterra, et Fredholm afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.

Mots clés :

Equations intégral-différentielles, polynome de Legendre, Méthode de Galerkin.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Liste des tableaux | 1 |
| Notations | 2 |
| Introduction | 3 |
| 1 Introduction et notions fondamentales | 4 |
| 1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles | 4 |
| 1.2 Notions sur les opérateurs | 6 |
| 1.3 Classification des équations intégrales | 8 |
| 1.4 Équations intégro-différentielles linéaire et leurs classification | 10 |
| 2 Existence et unicité de la solution des équation intégro-différentielle | 12 |
| 2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D | 12 |
| 2.2 Méthodes de résolution des E.I.D | 14 |
| 2.2.1 Méthodes analytiques | 14 |
| 2.2.2 Méthodes numériques | 19 |
| 3 Solutions des équations intégro-différentielles | 23 |
| 3.1 Polynômes de Legendre | 23 |
| 3.2 Méthode de Legendre Galerkin | 24 |
| 3.3 Résultats numériques | 26 |
| Conclusion | 32 |

Bibliographie

34

Liste des tableaux

| | | |
|---|--|---------|
| 1 | présente coefficients rationnels de polynôme de Legendre |24 |
| 2 | solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.1 |27 |
| 3 | solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.2 |28 |
| 4 | solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.3 |29 |
| 5 | solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.4 |30 |
| 6 | solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.5 |31 |

Notations

| | |
|--------------------|--|
| $C[a, b]$ | espace des fonctions continues sur $[a, b]$ |
| f | terme libre dans l'équation intégrale |
| A | opérateur linéaire |
| I | opérateur identique |
| $N(A)$ | noyau de l'opérateur |
| $R(A)$ | image de l'opérateur |
| A_n | suite d'opérateurs continus de rangs finis |
| H | espace de Hilbert |
| P | opérateur de projection |
| \int | signe intégral |
| $u^{(n)}$ | la dérivée n-ième |
| \langle, \rangle | le produit scalaire |
| $\ \cdot \ $ | norme |
| HPM | Méthode de perturbation d'homotopie |
| L | polynôme de Legendre |
| $k(x, t)$ | noyau de l'équation intégrale |
| u | la fonction inconnue dans l'équation intégrale |
| u_n | solution approchée |
| λ | paramètre numérique |
| EID | equation intégro-differentielle |

Introduction

Une équation intégro- différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale, ainsi que ses dérivées.

Les méthodes Nouvelles sont toujours nécessaires pour résoudre les équations intégrales parce qu'aucune méthode unique ne fonctionne bien pour tous ces équations, il y a eu un intérêt considérable dans la résolution d'équations différentielles et intégrales à l'aide de techniques qui impliquent des méthode de polynômes de Legendre Galerkin.

Où nous trouvons un grand nombre de questions dans le domaine de l'ingénierie et les sciences physiques et sociales sont formulées mathématiquement sous la forme d'équations intégro-différentielles.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notion sur les équations intégrales, définition et classification des équations intégro-différentielles.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégro-différentielles, avec des exemples.

Le troisième chapitre contient, l'utilisation des Polynômes de Legendre avec la méthode de Galerkin pour la solutions des équations intégro-différentielles de Volterra, et Fredholm.

Chapitre 1

Introduction et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on donne la base sur la théorie des équations intégrales, étudiée sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Ainsi on donne quelques définitions sur les bases de l'analyse numérique.

1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

Définition 1.1 (*espace vectoriel normé*)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit qu'une application notée $\|\cdot\|$ de E dans \mathbb{R}^+ est une norme sur E si et seulement si pour tout $(x, y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ les conditions suivantes sont satisfaites

- (i) $\|x\| = 0$ implique que $x = 0$.
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2 (*Suite de Cauchy*)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit que la suite (u_n) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \text{ on a } d(u_m, u_n) < \varepsilon$$

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fautive en général

Lemme 1.3 Soit u_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite u_{n_k} convergente vers u alors la suite u_n est aussi convergente vers le meme élément u .

Définition 1.4 (Espace métrique complet)

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy u_n d'éléments de E est une suite convergente dans E . Un tel espace est aussi appelé espace de Banach

Proposition 1.5 Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet

Définition 1.6 (Espace de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.7 (Produit scalaire)

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un produit scalaire sur H est une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{k}$, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que :

pour tout x, y, z dans H et α, β dans \mathbb{R}

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Définition 1.8 (Espace de Hilbert)

Un espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{C} (ou \mathbb{R}) est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet

Définition 1.9 (Espace $L^2([a, b])$)

On dit qu'une fonction f est de carrée intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2([a, b])$

Définition 1.10 (Espace $\mathbb{C}^\ell([a, b])$)

les éléments de cet espace sont tous les fonctions définies sur $[a, b]$ et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre ℓ .

La norme d'un élément $f(x) \in \mathbb{C}^\ell([a, b])$ est défini par

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\ell} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$$

1.2 Notions sur les opérateurs

Opérateurs linéaires bornés

Continuité des opérateurs linéaires :

Définition 1.11 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0)$$

Linéarité des opérateurs :

Définition 1.12 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

1. Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

2. Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A\varphi$$

Opérateurs bornés :

Définition 1.13 Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante

positive $C > 0$; telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Proposition 1.14 La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Théorème 1.15 Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement s'il est borné.

Norme d'un opérateur

Définition 1.16 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

On note par $L(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F . Si $E = F$, il est noté simplement par $L(E)$.

Noyau et image d'un opérateur linéaire :

le noyau et l'image d'un opérateur linéaire sont deux espaces vectoriels importants.

Définition 1.17 Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels E, F le noyau de A , noté par $N(A)$ est le sous espace vectoriel de E , défini par

$$N(A) = \{u \in E \mid Au = 0\}$$

l'image de A notée par $R(A)$ est le sous espace vectoriel de F défini par

$$R(A) = \{Au \in F \mid u \in E\}$$

Équations intégrales linéaire et leurs classification

Nous savons l'équation intégrales dans ce formulaire :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t) u(t) dt \quad (1.1)$$

où $K(x, t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.1), $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ c'est à sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau $K(x, t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation (1.1) sont des fonctions donné, et λ est une constante paramètre. L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue $u(x)$ qui va satisfaire l'équation (1.1) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. Nous doit consacrer des effort considérables dans l'exploration de ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

1.3 Classification des équations intégrales

L'étude des équations intégrales est divisé en deux secteurs, par rapport aux équations linéaires. Dans cette section, nous donnons les équations intégrales linéaires les plus célèbres

qui sont les équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

Equation intégrale linéaire de Fredholm

Définition 1.18 (*Equation intégrale linéaire de Fredholm*) *L'équation intégrale linéaire de Fredholm est une équation s'écrit sous la forme :*

Définition 1.19 *de Fredholm est une équation s'écrit sous la forme :*

$$h(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(x) dt \quad (1.2)$$

où $h(x)$, $f(x)$, $K(x; t)$ sont des fonctions connues la fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer, x est une variable réelle appartient à l'intervalle $[a, b]$, et est λ un paramétere non nul, réel ou complexe.

1. Le type de l'équation intégrale est déterminé par la fonction $h(x)$ où on a :

(a) Si $h(x) = 0$, alors l'équation (1.2) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(x) dt \quad (1.3)$$

Cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

(b) Si $h(x) = a$ (constante réelle non nulle), alors l'équation (1.2) devient :

$$au(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(x) dt \quad (1.4)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm seconde espèce.

(c) Si $h(x) \neq a$, alors l'équation (1.2) est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.

(a) Si $f(x) \neq a$, l'équation (1.2) est dite équation intégrale linéaire de Fredholm non homogène.

(b) Si $f(x) = 0$, alors l'équation (1.2) devient :

$$h(x) u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(x) dt \quad (1.5)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm homogène.

Equation intégrale linéaire de Volterra

L'équation intégrale linéaire de Volterra est une équation intégrale linéaire de Fredholm sauf

que la borne d'intégration supérieure est variable x , c-à-d., $b = x$ et on a :

$$h(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(x) dt \quad (1.6)$$

1. Si $h(x) = 0$, alors l'équation (1.6) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(x) dt = 0 \quad (1.7)$$

Cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

2. Si $h(x) = a$, alors l'équation (1.6) devient :

$$au(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(x) dt \quad (1.8)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, alors l'équation (1.6) est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de troisième

4. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.6) est dite équation intégrale linéaire de Volterra non homogène.

Si $f(x) = 0$, alors l'équation (1.6) devien :

$$h(x) u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) u(x) dt \quad (1.9)$$

et cette équation est appelée équation intégrale linéaire de Volterra homogène

1.4 Équations intégral-différentielles linéaire et leurs classification

Une équation intégral-différentielle (E.I.D) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles dont la fonction inconnue est u . La forme linéaire d'une équation intégral-différentielle (E.I.D) d'ordre n est

$$u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) \dots a_n u(x) + \sum_{m=0}^s \int_E k_m(x, t) u^{(m)}(t) dt = f(x) \quad (1.10)$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des constantes, $f(x)$, $k_m(x)$, ($m = 0, 1, \dots, s$) des fonctions données, $u(x)$ la fonction cherchée.

La fonction $u(x)$ est assujettie à des condition initiales de la forme

$$u(0) = u_0, u'(0) = u'_0, \dots u^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)}$$

Équations intégral-différentielles de Fredholm

L'équation intégral-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

où $u^{(n)}$ indique la dérivée n-ième de $u(x)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche.

Équations intégral-différentielles de Volterra

L'équation intégral-différentielle de Volterra apparaît dans la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt$$

où $u^{(n)}$ indique la dérivée de $u(x)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution des équation intégral-différentielle

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques pour résoudre équations intégral-différentielles de la deuxième espèce, mais nous commençons par énoncer quelques théorèmes sur l'existence, l'unicité de solutions.

2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D

Définition 2.1 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $x \in E$

tel que

$$f(x) = x$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

Théorème 2.2 Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.3 (Picard) Soient (E, d) un espace métrique complet et, $\varphi \in E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e Lipschitzienne par rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour

tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a .

Théorème 2.4 Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach X , tel que T^n est contractant sur X , pour un entier positif n , alors T a un point fixe unique.

Lemme 2.5 Soit l'opérateur T tel que $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$, u et $v \in C([a, b])$, et $L \in \mathbb{R}_+^*$ est le constant de Lipschitz de la fonction K au troisième variable,

$$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Alors

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty$$

et l'équation intégrale-différentielle de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, u(t)) dt, & x \in [a, b] \\ u(a) = a, & a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2,1)$$

admet une seule solution point fixe.

Théorème 2.6 Supposons que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ tel que

$$\int_{t_0}^t k(r, s, u(s)) dr \leq N$$

pour

$$t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha$$

avec

$$u \in H_0 = \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0 \text{ et } |\phi(t) - u_0| \leq b\}$$

pour certain $0 < \alpha \leq a$ Alors l'équation intégrale-différentielle de Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t k(t, s, u(t))dt \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une solution unique.

2.2 Méthodes de résolution des E.I.D

2.2.1 Méthodes analytiques

Définition 2.7 Le noyau $K(x, t)$ d'une équation intégro-différentielle de Fredholm est dite dégénérée s'il est la somme d'un nombre finie de produit des fonctions de variable x seul par des fonctions de variable t seul i.e il est de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t)$$

Les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes

Remarque 2.8 Le noyau non dégénéré peut réduire à noyau dégénérée par développement de Taylor.

La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace a été utilisé avant pour résoudre Volterra inté-grante équations du premier et du deuxième type. Les détails et propriétés Procédé de la transformée de Laplace est présent dans différentielle ordinaire équations textes. Dans la transformation de Laplace théorème de convolution, il a été dit que, si le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.3)$$

la différence $x-t$, il est alors appelé un noyau de différence. L'équation intégro-différentielle peut donc être exprimée comme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)u(t)dt \quad (2.4)$$

Considérons deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui possèdent les conditions nécessaires de l'existence de transformée de Laplace pour chacun. Que les transformées de Laplace pour les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est donnée par

$$L(f_1(x)) = F_1(s) \quad , \quad L(f_2(x)) = F_2(s) \quad (2.5)$$

Le produit de convolution de Laplace ces deux fonctions est définie par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt \quad (2.6)$$

Rappelons que

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x) \quad (2.7)$$

On peut montrer facilement que la transformée de Laplace de la produit de convolution $(f_1 * f_2)(x)$ est donnée par

$$L((f_1 * f_2)(x)) = L\left(\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\right) = F_1(s)F_2(s) \quad (2.8)$$

Pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra en utilisant la méthode de transformée de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace des dérivés de $u(x)$. Nous pouvons facilement montrer que

$$L(u^{(n)}(x)) = s^n L(u(x)) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0) \quad (2.9)$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned} L(u'(x)) &= sL(u(x)) - u(0) \\ &= sU(s) - u(0) \\ L(u''(x)) &= s^2L(u(x)) - su(0) - u'(0) \\ &= s^2U(x) - su(0) - u'(0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.10)$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur. Nous appliquons d'abord la transformée de Laplace à deux côtés de (2.4), utilisent la transformée de Laplace bon pour le dérivé de $u(x)$, puis résoudre pour $U(s)$. Nous utilisons ensuite la transformée inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $u(x)$ de l'équation.

Exemple 2.9 Soit l'équation intégrale-différentielle de Volterra

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 + \int_0^x u(t)dt \\ u(0) &= 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

On pose le noyau $K(x-t) = 1$. Prenant la transformée de Laplace de part et d'autre de (2.11) donne

$$L(u'(x)) = L(1) + Lu(1 * u(x))$$

donc

$$sU(s) - u(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s)$$

obtenu à l'aide de (2.10). En utilisant la condition initiale donnée et en résolvant $U(s)$ nous trouvons

$$U(s) = \frac{1}{s-1} \tag{2.12}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (2.12), solution l'exacte est donnée par

$$u(x) = \exp(x)$$

La méthode de décomposition Adomian

On peut supposer un second ordre de Fredholm équation intégrale-différentielle donnée par

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1 \tag{2.13}$$

Intégration des deux côtés de (2.13) de 0 à x deux fois donne

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right) \quad (2.14)$$

Lorsque les conditions initiales $u(0) = a_0$ et $u'(0) = a_1$. Sont utilisés, et L^{-1} double opérateur intégral. La méthode de décomposition de Adomian admet l'utilisation de la série de décomposition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.15)$$

dans les deux côtés de (2.14) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt\right) \quad (2.16)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + \dots &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Par conséquent, pour déterminer les composants $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, de la solution $u(x)$, nous avons mis la relation de récurrence

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)dt\right), k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

où le zéro élément $u_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (2.17) . Après avoir déterminé les composants, $u_i(x), i \geq 0$ la solution $u(x)$ de (2.17) est ensuite obtenu sous forme de série En utilisant (2.15), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Exemple 2.10 *Utilisez la méthode de décomposition de Adomian pour résoudre l'équation integro-differential de Fredholm*

$$u'(x) = 36x^2 + \int_0^1 u(x)dt, u(0) = 1 \quad (2.19)$$

Solution 2.11 *Rappelons que l'intégrale sur le côté droit est équivalente à une constante parce que Cela dépend uniquement de la variable t avec limites constantes d'intégration pour t . Intégration des deux côtés de l'équation (2.19) de 0 à x donne*

$$u(x) - u_0(x) = 12x^3 + x \left(\int_0^1 u(x)dt \right) \quad (2.20)$$

ce qui donne à l'utilisation de la condition initiale

$$u(x) = 1 + 12x^3 + x \left(\int_0^1 u(x)dt \right) \quad (2.21)$$

Son remplacement par l'hypothèse de la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.22)$$

dans les deux côtés de la donne (2.21)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + 12x^3 + x \left(\int_0^1 u_n(t)dt \right) \quad (2.23)$$

Les composants $u_j(x), j \geq 0$ de $u(x)$ peut être déterminé en utilisant la récurrence Relation

$$u_0(x) = 1 + 12x^3, u_{k+1}(x) = x \left(\int_0^1 u_{k+1}(x)dt \right), k \geq 0 \quad (2.24)$$

Cela donne à son tour

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= 1 + 12x^3, & u_1(x) &= x \int_0^1 k(x,t)u_0(t)dt = 4x \\
 u_2(x) &= x \int_0^1 k(x,t)u_1(t)dt = 2x, & u_3(x) &= x \int_0^1 k(x,t)u_2(t)dt = x
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$u(x) = 1 + 12x^3 + 4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \tag{2.26}$$

qui donne la solution exacte

$$u(x) = 1 + 8x + 12x^3 \tag{2.27}$$

2.2.2 Méthodes numériques

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre les intégrales-différentielles du deuxième type. Ceux-ci incluent :

Rappel Intégration Numérique

Le but de ce rappel est de donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de f ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction f est de classe C^n sur l'intervalle réel $I = [a, b]$, on note : $M_i = \max |f^{(i)}|; x \in [a, b], i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $n \in \mathbb{N}^*$ de même longueur $h = (b - a)/n$ que l'on appelle le pas de la subdivision. Et pour tout $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, on note $x_i = a + ih$.

La méthode de Simpson

Principe des méthodes On remplace f , sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision, par la fonction polynômiale de degré inférieur ou égale a 2 qui prend les mêmes valeurs que f aux extré-mités et au milieu σ_i de ce segment. Cette méthode consiste à remplacer f sur le segment.

$[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu

La méthode des fonctions de Haar rationalisées

Définition 2.12 Pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 < k \leq 2^n$, les fonctions de Haar est définie comme

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \Psi(2^n t - k + 1)$$

Une autre façon

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right] \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[\end{cases}$$

pour $n \geq 0$ et $k = 1, 2, \dots, 2^n$

De manière analogue, définir la famille de l'extension des fonctions.

Les fonctions de Haar rationalisées

Définition 2.13 Les fonctions de Haar rationalisées sont composées seulement de trois valeurs $+1$, -1 et 0 et peuvent être définie sur l'intervalle $[0, 1)$ comme

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right] \\ -1 & \text{si } t \in \left[\frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right[\end{cases}$$

Méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

La méthode de perturbation homotopique a été introduite et développée par Jihvan He [8]. La méthode de perturbation homotopique couple une homotopie technique de topologie et technique de perturbation.

Considérer l'équation integro-différentielle de Fredholm suivante de la deuxième type de formulaire On appelle l'équation integro-différentielle de Fredholm du deuxième espèce, une équation de la forme

$$v'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t)v(t)dt \quad (2.28)$$

Nous définissons l'opérateur

$$L(u) = u'(x) - \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt - f(x) = 0 \quad (2.29)$$

Où $u'(x) = v'(x)$. En suite, nous définissons l'homotopie $H(u, m)$, $m \in [0, 1]$ par

$$H(u, 0) = F(u) \quad , \quad H(u, 1) = L(u) \quad (2.30)$$

Où $F(u)$ est un opérateur fonctionnel. Nous construisons une homotopie convexe de la forme

$$H(u, m) = (1 - m)F(u) + mL(u) \quad (2.31)$$

Cette homotopie satisfait (2.30) pour $m = 0$ et $m = 1$ respectivement. Le paramètre d'intégration m augmente monotone de zéro à l'unité comme le problème trivial $F(u) = 0$ est continuellement déformé au problème d'origine $L(u) = 0$. HPM utilise le paramètre Homotopy m comme paramètre d'extension pour obtenir

$$u = w_0 + mw_1 + m^2w_2 + m^3w_3 + \dots \quad (2.32)$$

quand $m \rightarrow 1$, (2.32) correspond à (2.31) et devient le solution de (2.29), c.-à-d.

$$v = \lim_{m \rightarrow 1} u = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (2.33)$$

La série (2.33) est convergente pour la plupart des cas et le taux de convergence dépend de $L(u)$.

Supposons que $F(u) = u(x) - f(x)$, et substituant(2.32) dans (2.29) et assimilant les termes avec la puissance identique de m , nous avons

$$m^0 : w_0'(x) = f(x) \tag{2.34}$$

$$m^n : w_n'(x) = \int_0^1 k(x,t)w_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.35}$$

Chapitre 3

Solutions des équations intégrales-différentielles

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de type Legendre Galerkin sur certaine classe des équations intégrales-différentielles de type Volterra, et de Fredholm du deuxième espèce [6, 3, 5].

Les polynômes orthogonaux classiques sont les plus utilisés puisqu'ils constituent la classe la plus importante de polynômes orthogonaux et sont définis selon les valeurs de l'intervalle d'intégration I et selon l'expression de la mesure de la fonction de poids $w(x)$.

3.1 Polynômes de Legendre

La famille des polynômes de Legendre est caractérisée par les présentations suivantes :

1. Par la fonction génératrice les polynômes de Legendre $L_n(x)$ sont donnés par ;

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$$

2. A partir de la formule d'Olinde Rodrigues les polynômes de Legendre $L_n(x)$ prennent la forme

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad (3.1)$$

3. Le des polynômes de Legendre $(L_n(x))_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x) \quad (3.2)$$

où $(L_n(x) \geq 0)$ est une famille de polynômes orthogonaux dans $L^2([-1, 1])$

Les premiers polynômes de Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$, pour $n = 3$ sont

| | |
|----------|---|
| $L_0(x)$ | 1 |
| $L_1(x)$ | $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ |
| $L_2(x)$ | $\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ |
| $L_3(x)$ | $\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$ |
| \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots |

Tableau.1 présente coefficients rationnels de polynôme de Legendre

3.2 Méthode de Legendre Galerkin

On considère l'équation integro-differentielle suivante

$$u'(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (3.3)$$

$$u(a) = \gamma \quad (3.4)$$

Tel que $u(x)$ est la fonction inconnue, $K(x, t)$ est la fonction connue continue, $f(x)$ est une fonction donnée et λ un paramètre réel non nul.

La méthode utilise les polynômes de Legendre , comme une base pour approcher la solution dans un intervalle fermé et fini.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i L_i\left(\frac{2x - (b-a)}{b-a}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $L_i(\frac{2x-(b-a)}{b-a})$ est un polynôme de Legendre dans $[a, b]$ donc on a

$$u'(x) = u'_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{b-a}\right) a_i L'_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) \quad (3.6)$$

On remplaçant (3.5) et (3.6) dans (3.3) on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{b-a}\right) a_i L'_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) \sum_{i=0}^n a_i L'_i\left(\frac{2t-(b-a)}{b-a}\right) dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_a^x k(x,t) L'_i\left(\frac{2t-(b-a)}{b-a}\right) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus a_i , on utilise l'idée de Galerkin par multiplier (3.7) par $L_j(\frac{2t-(b-a)}{b-a})$ et l'intégrer avec le respect de $-1 \leq x \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{b-a}\right) a_i \int_{-1}^1 L'_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx + \int_{-1}^1 \left[\lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_a^x k(x,t) L'_i\left(\frac{2t-(b-a)}{b-a}\right) dt \right] L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pour $j = 0, 1, \dots, n$, ou l'équivalent

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{b-a}\right) a_i \int_{-1}^1 L'_i\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx + \lambda \sum_{i=0}^n a_i \int_{-1}^1 \left[\int_a^x k(x,t) L'_i\left(\frac{2t-(b-a)}{b-a}\right) dt \right] L_j\left(\frac{2x-(b-a)}{b-a}\right) dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si besoin les intégrales peut être calculer par des méthodes numériques. ces procédures engendre un système linéaire des équations inconnus (a_0, a_1, \dots, a_n) . Plusieurs recherches remplacent la condition initiale

$$u(a) = \gamma \rightarrow \sum_{i=0}^n a_i T_i(-1) = \gamma \quad (3.10)$$

Les paramètres inconnus sont déterminés par résoudre le système des équations (3.9) et (3.10). En remplaçant ces valeurs dans (3.5) nous obtenons une solution approximative de l'équation intégro-différentielle (3.3). De même on peut appliquer cette approche pour l'équation intégro-différentielle de Fredholm dans la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \\ u(a) &= \alpha \end{aligned}$$

3.3 Résultats numériques

Exemple 3.1 considérons l'équation intégro-différentielle linéaire de Volterra.

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t)dt$$

avec la condition initiale $u(0) = 0$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 2x$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode des polynômes de Legendre.

Tableau 1. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$.

| x | solution exacte u | solution approchée u_n | Erreur |
|-----|---------------------|--------------------------|--------------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.000000e+00 |
| 0.1 | 0.2000 | 0.2000 | 0.000000e+00 |
| 0.2 | 0.4000 | 0.4000 | 0.000000e+00 |
| 0.3 | 0.6000 | 0.6000 | 0.000000e+00 |
| 0.4 | 0.8000 | 0.8000 | 0.000000e+00 |
| 0.5 | 1.0000 | 1.0000 | 0.000000e+00 |
| 0.6 | 1.2000 | 1.2000 | 0.000000e+00 |
| 0.7 | 1.4000 | 1.4000 | 0.000000e+00 |
| 0.8 | 1.6000 | 1.6000 | 0.000000e+00 |
| 0.9 | 1.8000 | 1.8000 | 0.000000e+00 |
| 1 | 2.0000 | 2.0000 | 0.000000e+00 |

Exemple 3.2 considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Volterra [5]

$$u'(x) = 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x u(t) dt$$

avec la condition initiale $u(0) = 0$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = x \cos(x)$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode des polynômes de Legendre.

Tableau 2. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 12$.

| x | solution exacte u | solution approchée u_n | Erreur |
|-----|---------------------|--------------------------|--------------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.000000e+00 |
| 0.1 | 0.0995 | 0.0995 | 8.136547e-14 |
| 0.2 | 0.1960 | 0.1960 | 1.138534e-13 |
| 0.3 | 0.2866 | 0.2866 | 1.466605e-13 |
| 0.4 | 0.3684 | 0.3684 | 7.704948e-14 |
| 0.5 | 0.4388 | 0.4388 | 5.451195e-14 |
| 0.6 | 0.4952 | 0.4952 | 1.175726e-13 |
| 0.7 | 0.5354 | 0.5354 | 7.649437e-14 |
| 0.8 | 0.5574 | 0.5574 | 1.287859e-14 |
| 0.9 | 0.5594 | 0.5594 | 2.886580e-15 |
| 1 | 0.5403 | 0.5403 | 0.000000e+00 |

Exemple 3.3 considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Fredholm

$$u'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 3xtu(t)dt$$

avec la condition initiale $u(0) = 1$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = e^{3x}$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode des polynômes de Legendre.

Tableau 3. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$.

| x | solution exacte u | solution approchée u_n | Erreur |
|-----|---------------------|--------------------------|--------------|
| 0.0 | 1.0000 | 1.0000 | 0.000000e+00 |
| 0.1 | 1.3499 | 1.3499 | 1.716092e-07 |
| 0.2 | 1.8221 | 1.8221 | 2.119757e-07 |
| 0.3 | 2.4596 | 2.4596 | 1.137804e-07 |
| 0.4 | 3.3201 | 3.3201 | 1.257434e-07 |
| 0.5 | 4.4817 | 4.4817 | 2.058145e-07 |
| 0.6 | 6.0496 | 6.0496 | 1.444891e-08 |
| 0.7 | 8.1662 | 8.1662 | 1.705106e-07 |
| 0.8 | 11.0232 | 11.0232 | 1.647715e-07 |
| 0.9 | 14.8797 | 14.8797 | 1.046591e-07 |
| 1 | 20.0855 | 20.0855 | 1.454481e-11 |

Exemple 3.4 considérons l'équation integro-différentielle linéaire de Fredholm

$$u'(x) - u(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{1+x} \ln(1+x) + \frac{1}{(\ln 2)^2} \int_0^1 \frac{x}{1+t} u(t) dt$$

avec la condition initiale $u(0) = 0$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \ln(x+1)$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode des polynômes de Legendre.

Tableau 4. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.4 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$.

| x | $sol\ ex\ u$ | $sol\ app\ u_n$ | $Erreur$ |
|-----|--------------|-----------------|--------------|
| 0.0 | 0.00000 | 0.0000 | 0.000000e+00 |
| 0.1 | 0.0953 | 0.0023 | 9.303116e-02 |
| 0.2 | 0.1823 | 0.0078 | 1.745050e-01 |
| 0.3 | 0.2624 | 0.0150 | 2.473264e-01 |
| 0.4 | 0.3365 | 0.0227 | 3.137502e-01 |
| 0.5 | 0.4055 | 0.0299 | 3.755885e-01 |
| 0.6 | 0.4700 | 0.0357 | 4.343464e-01 |
| 0.7 | 0.5306 | 0.0393 | 4.913159e-01 |
| 0.8 | 0.5878 | 0.0401 | 5.476411e-01 |
| 0.9 | 0.6419 | 0.0375 | 6.043665e-01 |
| 1 | 0.6931 | 0.0307 | 6.624732e-01 |

Exemple 3.5 considérons l'équation integro-différentielle linéaire de Fredholm

$$u'(x) = 3 + 6x + \int_0^1 xtu(t)dt$$

avec la condition initiale $u(0) = 0$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = 3x + 4x^2$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode des polynômes de Legendre.

Tableau 5. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.5 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$.

| x | <i>solution exacte u</i> | <i>solution approchée u_n</i> | <i>Erreur</i> |
|-----|---------------------------------------|--|---------------|
| 0.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.000000e+00 |
| 0.1 | 0.34000 | 0.34000 | 0.000000e+00 |
| 0.2 | 0.76000 | 0.76000 | 0.000000e+00 |
| 0.3 | 1.26000 | 1.26000 | 0.000000e+00 |
| 0.4 | 1.84000 | 1.84000 | 0.000000e+00 |
| 0.5 | 2.50000 | 2.50000 | 0.000000e+00 |
| 0.6 | 3.24000 | 3.24000 | 0.000000e+00 |
| 0.7 | 4.06000 | 4.06000 | 0.000000e+00 |
| 0.8 | 4.96000 | 4.96000 | 0.000000e+00 |
| 0.9 | 5.94000 | 5.94000 | 0.000000e+00 |
| 1 | 7.00000 | 7.00000 | 0.000000e+00 |

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm, Volterra pour en déterminer la solution approchée à l'aide de la méthode de Legendre Galerkin. Nous avons fourni quelques exemples dont la solution exacte est connue et nous avons obtenu les résultats et les solutions à l'aide du programme MATLAB.

Pour tester l'efficacité de la méthode et estimer la précision à travers nos résultats. Nous avons remarqué que les résultats sont bonne, c'est-à-dire que plus le degré de N était grand, plus les résultats étaient proches de la précision, et plus la méthode était efficace.

Bibliographie

- [1] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [2] K. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, the press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, 1997.
- [3] S. Aggarwal, N. Sharma, R. Chauhan. Solution of Linear Volterra Integro-Differential equations of Second Kind Using Mahgoub Transform. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. Volume VII, Issue V, (2018) 173-176.
- [4] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [5] J. Biazar, F. Salehi, Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of the second kind, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, Vol. 6, No. 1, (2016), pp 31-42
- [6] M. Djalil, H. Souidan, W. Souidan, Approximate Solution of Linear Volterra Integro-Differential Equation by Touchard Polynomials Method, *(WJSM)* 11(2), (2018), 29-41.
- [7] A. Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [8] J. He, Homotopy perturbation technique, *Comput, Methods Appl. Mech. Engrg*, 178 (1999) 257-262.

- [9] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, *Appl. Math. Comput.*, 161, (2005) 915–922.
- [10] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi, Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 193, (2007), 335-339.
- [11] M. Nadir, *Cours sur les équations intégrales*, université M'sila 2008.
- [12] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in *Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics*, 4, (2014), pp 37-44.
- [13] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations *AJMAA*, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.
- [14] M. Rahman, *Mathematical Methods with Application*, WIT Press, Southampton, UK, pp. 456,2000
- [15] S. Roman, *The umbral Calculus*. 208 Dover Publications USA, 2005.
- [16] S. Wang, J.H. He. Variational iteration method for solving integro-differential equations. *Phys. Lett., A* 367 (2007) 188-191.

المخلص : في هذه المذكرة ، طبقنا طريقة كثير الحدود من نوع لجوندر جالركين على فئة معينة من المعادلات التكاملية التفاضلية من نوع فولتيرا ، و فريدولم من أجل إيجاد حلول تقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.
الكلمات المفتاحية:معادلات فولتيرا التكاملية-التفاضلية ، كثيرات حدود لجندر، طريقة جالركين.

Résumé: Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode polynomiale de type Legendre Galerkin sur certaine classe des équations intégro-différentielle de type Volterra, et Fredholm afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.

Mots-clés: Equations intégro-différentielles, polynôme de Legendre, Méthode de Galerkin

Abstract: In this work, we applied the polynomial method of Legendre Galerkin type on certain class of integro-differential equations of Volterra type, and Fredholm in order to find approximate solutions and to compare it with exact solutions

Keywords: Integro-differential equations, Legendre polynomials, Galerkin Method